详解手册　2026

IGCSE 数学基础题型

Cambridge 0580 · Core & Extended

目　录

第一章 数与运算 8

1.1 按位值把文字写成数字 8
题型 1：按位值把文字写成数字（Core）（考频★★☆☆☆） 8
1.2 用有向数的加减表示升降 10
题型 1：用有向数的加减表示升降（Core）（考频★★☆☆☆） 10
1.3 按括号和运算顺序计算 12
题型 1：按括号和运算顺序计算（Core）（考频★★☆☆☆） 12
1.4 先算幂与方根，再完成运算 16
题型 1：先算幂与方根，再完成运算（Core）（考频★★★☆☆） 16
1.5 近似数 19
题型 1：按指定数位四舍五入（Core）（考频★★☆☆☆） 19
1.6 估算 21
题型 1：各数取一位有效数字后估算分式（Core）（考频★★☆☆☆） 21
1.7 用因数检验质数 25
题型 1：用因数检验质数（Core）（考频★★★☆☆） 25
1.8 用因数对列出或检验因数 29
题型 1：用因数对列出或检验因数（Core）（考频★★☆☆☆） 29
1.9 用整数倍检验倍数条件 32
题型 1：用整数倍检验倍数条件（Core）（考频★★☆☆☆） 32
1.10 倒数 35
题型 1：将一个非零数的倒数写成分数或小数（Core）（考频★★☆☆☆） 36
1.11 取共同质因数的较低次幂求最大公因数 37
题型 1：取共同质因数的较低次幂求最大公因数（Core）（考频★★☆☆☆） 37
1.12 取最高次幂求最小公倍数，再处理周期 40
题型 1：取最高次幂求最小公倍数，再处理周期（Core）（考频★★☆☆☆） 40
1.13 同时乘除分子分母得到等值分数 44
题型 1：各项同乘除，化简整数比或分数（Core）（考频★★☆☆☆） 44
1.14 移位相减，把循环小数化成分数 48
题型 1：移位相减，把循环小数化成分数（Extended）（考频★★☆☆☆） 48
1.15 标准式 52
题型 1：将数或计算结果写成标准式（Core）（考频★★☆☆☆） 52
1.16 通分后计算分数的和与差 55
题型 1：通分后计算分数的和与差（Core）（考频★★☆☆☆） 55
1.17 分数运算 60
题型 1：分数除法：先化假分数，再乘倒数（Core）（考频★★☆☆☆） 60
1.18 整体乘所占分数求部分 64
题型 1：整体乘所占分数求部分（Core）（考频★★☆☆☆） 64
1.19 部分除以所占分数还原整体 66
题型 1：部分除以所占分数还原整体（Core）（考频★★☆☆☆） 66
1.20 先求一份量，再按比分配 69
题型 1：先求一份量，再按比分配（Core）（考频★★★★☆） 69
1.21 根据单位率和份数求总量 77
题型 1：根据单位率和份数求总量（Core）（考频★★★☆☆） 77
1.22 用总量和单位率反求份数 80
题型 1：按单位率或相同倍率换算总量与份数（Core）（考频★★☆☆☆） 81
1.23 总量减去各项消耗求剩余 84
题型 1：总量减去各项消耗求剩余（Core）（考频★★★☆☆） 84
1.24 将商向下取整，求最多整份和余量 88
题型 1：将商向下取整，求最多整份和余量（Core）（考频★★☆☆☆） 88
1.25 部分除以整体求所占比例 90
题型 1：部分除以整体求所占比例（Core）（考频★★★☆☆） 91
1.26 用原量乘百分数求对应数量 94
题型 1：用原量乘百分数求对应数量（Core）（考频★★☆☆☆） 94

1.27 用变化因子计算百分数增减 96
题型 1：用变化因子计算百分数增减（Core / Extended）（考频★★☆☆☆） 96
1.28 差额除以原值求变化百分比 100
题型 1：差额除以原值求变化百分比（Core）（考频★★★☆☆） 100
1.29 除以变化因子还原百分数变化前的量 103
题型 1：除以变化因子还原百分数变化前的量（Extended）（考频★★☆☆☆） 103
1.30 本金乘利率和期数计算单利 107
题型 1：本金乘利率和期数计算单利（Core）（考频★★☆☆☆） 107
1.31 百分数与复利 110
题型 1：复利与逐年百分比变化（Core / Extended）（考频★★☆☆☆） 110
1.32 按一单位对应关系换算货币 113
题型 1：按一单位对应关系换算货币（Core）（考频★★★☆☆） 113
1.33 按单位进率换算长度或时间 118
题型 1：按单位进率换算长度或时间（Core）（考频★★☆☆☆） 118
1.34 用时刻与时长相加减 120
题型 1：用时刻与时长相加减（Core）（考频★★★☆☆） 120
1.35 准确度的界限 126
题型 1：由取整单位写出真实量的上下界（Core）（考频★★☆☆☆） 126
1.36 正数商取相反边界，求计算量的上界或下界 130
题型 1：正数商取相反边界，求计算量的上界或下界（Extended）（考频★★☆☆☆） 130
1.37 按集合条件选出元素并计数 134
题型 1：按集合条件选出元素并计数（Core / Extended）（考频★★★★☆） 134
1.38 逐个判断元素归属，补全韦恩图 140
题型 1：逐个判断元素归属，补全韦恩图（Core / Extended）（考频★★☆☆☆） 140
1.39 用总数减去已知区域，补出韦恩图人数 147
题型 1：用总数减去已知区域，补出韦恩图人数（Core / Extended）（考频★★★☆☆） 147
1.40 按交、并和补集条件给韦恩图涂色 154
题型 1：按交、并和补集条件给韦恩图涂色（Core / Extended）（考频★★★☆☆） 154
1.41 提出平方因子，再合并同类根式 158
题型 1：提出平方因子，再合并同类根式（Extended）（考频★★★☆☆） 158
1.42 逐项展开根式括号，再合并同类项 162
题型 1：逐项展开根式括号，再合并同类项（Extended）（考频★★☆☆☆） 162
1.43 分子分母同乘根式，消去单项根式分母 165
题型 1：分子分母同乘根式，消去单项根式分母（Extended）（考频★★☆☆☆） 165
1.44 分子分母同乘共轭式，消去二项根式分母 168
题型 1：分子分母同乘共轭式，消去二项根式分母（Extended）（考频★★★☆☆） 168

第二章 代数与函数 173

2.1 合并同类项前先完成乘法 173
题型 1：合并同类项，必要时先完成乘法（Core）（考频★★☆☆☆） 173
2.2 把括号外的因子乘到括号内每一项 175
题型 1：把括号外的因子乘到括号内每一项（Core）（考频★★☆☆☆） 176
2.3 逐项相乘，展开两个括号 179
题型 1：逐项相乘，展开两个括号（Core）（考频★★☆☆☆） 179
2.4 用同底幂乘除和幂的乘方化简 182
题型 1：用同底幂乘除和幂的乘方化简（Core）（考频★★★☆☆） 182
2.5 把分数指数化成方根与整数幂 188
题型 1：把分数指数化成方根与整数幂（Extended）（考频★★★☆☆） 188
2.6 提出系数和字母的公因式 191
题型 1：提出系数和字母的公因式（Core）（考频★★★☆☆） 191
2.7 提出公因式后利用平方差分解 194
题型 1：用平方差分解，必要时先提公因式（Extended）（考频★★☆☆☆） 195
2.8 先分解分子分母，再约去共同因子 197
题型 1：先分解分子分母，再约去共同因子（Extended）（考频★★★☆☆） 198
2.9 把数代入代数式并按顺序求值 201
题型 1：把数代入代数式并按顺序求值（Core）（考频★★★★☆） 201

2.10 用逆运算把只出现一次的字母作主项 209
题型 1：用逆运算把只出现一次的字母作主项（Core）（考频★★☆☆☆） 209
2.11 移项后开方，把有平方的字母作主项 212
题型 1：移项、平方或开方，把字母作主项（Extended）（考频★★☆☆☆） 212
2.12 把含主项的两项收在一起，再提公因式 216
题型 1：把含主项的两项收在一起，再提公因式（Extended）（考频★★☆☆☆） 216
2.13 去括号、移项和同除，解一次方程 220
题型 1：去括号、移项和同除，解一次方程（Core）（考频★★★☆☆） 220
2.14 用字母表示几何量并代入公式列式 224
题型 1：用字母表示几何量并代入公式列式（Core）（考频★★☆☆☆） 224
2.15 把文字或几何等量关系列成一次方程 229
题型 1：把文字或几何等量关系列成一次方程（Core）（考频★★★☆☆） 229
2.16 倍乘消元，解二元一次方程组 234
题型 1：倍乘消元，解二元一次方程组（Core）（考频★★☆☆☆） 234
2.17 把一次关系代入二次关系，解联立方程 238
题型 1：把一次关系代入二次关系，解联立方程（Extended）（考频★★☆☆☆） 238
2.18 先写分母限制，再清分母解方程 244
题型 1：先写分母限制，再清分母解方程（Extended）（考频★★☆☆☆） 244
2.19 按相邻项的固定差续写数列 249
题型 1：按相邻项的固定差续写数列（Core）（考频★★★☆☆） 249
2.20 由首项和公差写等差数列通项 253
题型 1：由首项和公差写等差数列通项（Core）（考频★★★☆☆） 253
2.21 由首项和公比写等比数列通项 257
题型 1：由首项和公比写等比数列通项（Extended）（考频★★☆☆☆） 257
2.22 与平方数、立方数比较，写出数列通项 260
题型 1：与平方数、立方数比较，写出数列通项（Core）（考频★★☆☆☆） 260
2.23 令通项等于指定值，求项号并检查整数条件 264
题型 1：令通项等于指定值，求项号并检查整数条件（Core）（考频★★☆☆☆） 264
2.24 正比例与反比例 270
题型 1：反比例：先求比例常数，再代入新值（Extended）（考频★★☆☆☆） 270
2.25 按图形的重复单元计数并列式 274
题型 1：按图形的重复单元计数并列式（Core）（考频★★★☆☆） 274
2.26 把一个函数的输出代入另一个函数 284
题型 1：把一个函数的输出代入另一个函数（Extended）（考频★★☆☆☆） 284
2.27 反函数 288
题型 1：交换输入输出后逐步求出反函数（Extended）（考频★★☆☆☆） 288
2.28 移项求范围，再按要求写整数解 292
题型 1：移项求范围，再按要求写整数解（Extended）（考频★★☆☆☆） 292
2.29 画出边界并取满足所有不等式的公共区域 295
题型 1：画出边界并取满足所有不等式的公共区域（Extended）（考频★★☆☆☆） 295
2.30 描出两个点，画一次函数直线 306
题型 1：描出两个点，画一次函数直线（Core）（考频★★☆☆☆） 306
2.31 代入求值、描点并画二次函数曲线 314
题型 1：代入求值、描点并画二次函数曲线（Core）（考频★★★☆☆） 314
2.32 利用抛物线的左右对称确定对称轴或对应点 326
题型 1：利用抛物线的左右对称确定对称轴或对应点（Core）（考频★★★☆☆） 326
2.33 把方程写成两个函数相等，再由交点读解 338
题型 1：把方程写成两个函数相等，再由交点读解（Core）（考频★★★☆☆） 338
2.34 用幂函数求导法则求导数和定点梯度 353
题型 1：用幂函数求导法则求导数和定点梯度（Extended）（考频★★☆☆☆） 353
2.35 令导数为零，再判断转折点的性质 357
题型 1：令导数为零，再判断转折点的性质（Extended）（考频★★☆☆☆） 357
2.36 从路程时间图读时刻并求经历的时间 362
题型 1：从路程时间图读时刻并求经历的时间（Core）（考频★★★☆☆） 362
2.37 总路程除以总用时，求平均速度 372
题型 1：总路程除以总用时，求平均速度（Core）（考频★★☆☆☆） 372

2.38 用结束时刻和路程确定行程图的线段 378
题型 1：用结束时刻和路程确定行程图的线段（Core）（考频★★☆☆☆） 378

第三章 坐标几何 392

3.1 用斜率和一个点求直线方程 392
题型 1：用斜率和一个点求直线方程（Core / Extended）（考频★★★☆☆） 392
3.2 先取负倒数斜率，再确定垂线的位置 399
题型 1：先取负倒数斜率，再确定垂线的位置（Extended）（考频★★☆☆☆） 399

第四章 几何 406

4.1 用角度范围判断角的名称 406
题型 1：用角度范围判断角的名称（Core）（考频★★☆☆☆） 406
4.2 按边、平行关系和对称性辨认图形 409
题型 1：按边、平行关系和对称性辨认图形（Core）（考频★★★☆☆） 409
4.3 按圆心、端点和相交关系辨认圆中的线 413
题型 1：按圆心、端点和相交关系辨认圆中的线（Core）（考频★★☆☆☆） 413
4.4 寻找能使图形折叠重合的对称轴 420
题型 1：寻找能使图形折叠重合的对称轴（Core）（考频★★★☆☆） 420
4.5 用两段给定距离的圆弧交点确定位置 424
题型 1：用两段给定距离的圆弧交点确定位置（Core）（考频★★☆☆☆） 424
4.6 配对立体的面，补全棱柱或长方体展开图 430
题型 1：配对立体的面，补全棱柱或长方体展开图（Core）（考频★★★☆☆） 430
4.7 用平角或周角的总量减去已知角 437
题型 1：用平角或周角的总量减去已知角（Core / Extended）（考频★★☆☆☆） 437
4.8 用多边形内角和补出未知角 441
题型 1：用多边形内角和求未知角或角的平均数（Core）（考频★★☆☆☆） 441
4.9 多边形的角 446
题型 1：用一周外角求正多边形的一个内角（Core）（考频★★☆☆☆） 446
4.10 由等边求等角，再用角和求未知角 448
题型 1：由等边求等角，再用角和求未知角（Core / Extended）（考频★★★☆☆） 448
4.11 沿平行线转移角，再利用角和 453
题型 1：沿平行线转移角，再利用角和（Core）（考频★★★☆☆） 453
4.12 先用直径所对的圆周角为直角，再求角 459
题型 1：先用直径所对的圆周角为直角，再求角（Extended）（考频★★☆☆☆） 460
4.13 识别同弧，比较圆心角与圆周角 464
题型 1：识别同弧，比较圆心角与圆周角（Extended）（考频★★☆☆☆） 464
4.14 把切线与弦的夹角转成对弧的圆周角 470
题型 1：把切线与弦的夹角转成对弧的圆周角（Extended）（考频★★★☆☆） 470
4.15 用对角互补求圆内接四边形的角 478
题型 1：用对角互补求圆内接四边形的角（Extended）（考频★★☆☆☆） 478
4.16 相似图形的长度 486
题型 1：相似三角形：对应边写成同一个比（Core）（考频★★☆☆☆） 486
4.17 把相似长度比平方或立方，换算面积与体积比 490
题型 1：把相似长度比平方或立方，换算面积与体积比（Extended）（考频★★☆☆☆） 491
4.18 统一单位，再按比例尺换算图距和实距 494
题型 1：统一单位，再按比例尺换算图距和实距（Core）（考频★★★☆☆） 495
4.19 从正北顺时针量角，并换算反向方位 500
题型 1：从正北顺时针量角，并换算反向方位（Core）（考频★★☆☆☆） 500
4.20 按方位角和距离画点或求交会位置 505
题型 1：按方位角和距离画点或求交会位置（Core）（考频★★☆☆☆） 505

第五章 度量 515

5.1 沿外边界把直边和圆弧长度相加 515
题型 1：沿外边界把直边和圆弧长度相加（Core）（考频★★☆☆☆） 515
5.2 由周长或体积反求一次方的尺寸 521
题型 1：由周长或体积反求一次方的尺寸（Core）（考频★★☆☆☆） 521
5.3 从面积或体积公式中隔离平方项，再开平方 525

题型 1：从面积或体积公式中隔离平方项，再开平方（Core）（考频★★☆☆☆） 525
5.4 先求公共尺寸，再代入另一个几何公式 528
题型 1：先求公共尺寸，再代入另一个几何公式（Core / Extended）（考频★★☆☆☆） 528
5.5 用圆心角占一周的比例计算弧长 533
题型 1：用圆心角占一周的比例计算弧长（Extended）（考频★★☆☆☆） 533
5.6 用基本图形的面积相加或相减，求组合面积 538
题型 1：用基本图形的面积相加或相减，求组合面积（Core / Extended）（考频★★★☆☆） 538
5.7 把等体积关系列成方程求尺寸 545
题型 1：把等体积关系列成方程求尺寸（Extended）（考频★★☆☆☆） 545
5.8 统一密度与体积单位，再相乘求质量 553
题型 1：统一密度与体积单位，再相乘求质量（Core）（考频★★☆☆☆） 553
5.9 找垂直底和高，计算三角形面积 558
题型 1：找垂直底和高，计算三角形面积（Core）（考频★★★☆☆） 558
5.10 先求底面积，再乘柱体高度求体积 564
题型 1：先求底面积，再乘柱体高度求体积（Core）（考频★★☆☆☆） 564
5.11 分清各个面，求棱柱总表面积 568
题型 1：分清各个面，求棱柱总表面积（Core）（考频★★☆☆☆） 568

第六章 三角学 575

6.1 先辨对边、邻边和斜边，再用三角比求边 575
题型 1：先辨对边、邻边和斜边，再用三角比求边（Core）（考频★★★☆☆） 575
6.2 由两边的比反求直角三角形的角 580
题型 1：由两边的比反求直角三角形的角（Core / Extended）（考频★★★☆☆） 580
6.3 用勾股定理在直角三角形中求长度 585
题型 1：用勾股定理在直角三角形中求长度（Core / Extended）（考频★★★☆☆） 585
6.4 用余弦定理联系三边和一个角 592
题型 1：用余弦定理联系三边和一个角（Extended）（考频★★☆☆☆） 592
6.5 配对边与对角，用正弦定理解三角形 601
题型 1：配对边与对角，用正弦定理解三角形（Extended）（考频★★☆☆☆） 601
6.6 把方位角转成三角形内角，再解三角形 607
题型 1：把方位角转成三角形内角，再解三角形（Extended）（考频★★☆☆☆） 607
6.7 作线段在平面上的垂直投影，再求线面角 615
题型 1：作线段在平面上的垂直投影，再求线面角（Extended）（考频★★☆☆☆） 615
6.8 先求参考角，再按象限找区间内的全部解 621
题型 1：先求参考角，再按象限找区间内的全部解（Extended）（考频★★☆☆☆） 621
6.9 用特殊角三角比求精确值 625
题型 1：用特殊角三角比求精确值（Extended）（考频★★☆☆☆） 625
6.10 用零点和渐近线画正切图象 629
题型 1：用零点和渐近线画正切图象（Extended）（考频★☆☆☆☆） 629

第七章 变换与向量 633

7.1 由对应点的共同位移确定或画出平移 633
题型 1：由对应点的共同位移确定或画出平移（Core）（考频★★★☆☆） 633
7.2 对应点到反射轴等距，画出或描述反射 642
题型 1：对应点到反射轴等距，画出或描述反射（Core / Extended）（考频★★★☆☆） 642
7.3 旋转 653
题型 1：由对应顶点确定旋转中心、角度和方向（Core）（考频★★☆☆☆） 653
7.4 按中心到顶点的同一倍率画放大或缩小图 662
题型 1：按中心到顶点的同一倍率画放大或缩小图（Core / Extended）（考频★★☆☆☆） 662
7.5 用对应边长比和对应点连线找位似参数 670
题型 1：用对应边长比和对应点连线找位似参数（Core）（考频★★★☆☆） 670
7.6 对应分量相加减，计算列向量 678
题型 1：对应分量相加减，计算列向量（Extended）（考频★★☆☆☆） 678
7.7 把每个分量乘以同一个数 682
题型 1：把每个分量乘以同一个数（Extended）（考频★★☆☆☆） 682
7.8 先确定两个分量，再用勾股定理求向量模 685
题型 1：先确定两个分量，再用勾股定理求向量模（Extended）（考频★★☆☆☆） 685

7.9 沿路径相加，用已知向量表示目标向量 689
题型 1：沿路径相加，用已知向量表示目标向量（Extended）（考频★★☆☆☆） 689

第八章 概率 697

8.1 有利结果数除以所有等可能结果数，求概率 697
题型 1：有利结果数除以所有等可能结果数，求概率（Core）（考频★★★★☆） 697
8.2 完备事件的概率 705
题型 1：用所有结果的概率和为 1 补出缺失概率（Core）（考频★★☆☆☆） 705
8.3 用总次数乘概率求预计次数 708
题型 1：用总次数乘概率求预计次数（Core）（考频★★☆☆☆） 708
8.4 用独立性沿树枝相乘，并合并目标路径 712
题型 1：用独立性沿树枝相乘，并合并目标路径（Core）（考频★★☆☆☆） 712
8.5 不放回时更新数量，逐次相乘并分顺序相加 719
题型 1：不放回时更新数量，逐次相乘并分顺序相加（Extended）（考频★★★☆☆） 719

第九章 统计 724

9.1 按茎分组，把叶从小到大排列 724
题型 1：按茎分组，把叶从小到大排列（Core）（考频★★☆☆☆） 724
9.2 先计数求频数，再按频数补全条形图 729
题型 1：先计数求频数，再按频数补全条形图（Core）（考频★★★☆☆） 729
9.3 找出现次数最多的数据或类别，求众数 738
题型 1：找出现次数最多的数据或类别，求众数（Core）（考频★★★☆☆） 738
9.4 把各数乘频数后求和，再除以总频数 744
题型 1：把各数乘频数后求和，再除以总频数（Core）（考频★★★☆☆） 744
9.5 中位数 749
题型 1：从原始数据或茎叶图找中位数（Core）（考频★★☆☆☆） 749
9.6 用组中值代表组内数据，估计平均数 754
题型 1：用组中值代表组内数据，估计平均数（Extended）（考频★★☆☆☆） 754
9.7 用最大值减最小值求极差 759
题型 1：用最大值减最小值求极差（Core）（考频★★★☆☆） 759
9.8 用数量占总数的比例换算饼图角度 766
题型 1：用数量占总数的比例换算饼图角度（Core）（考频★★★★☆） 766
9.9 先求每类圆心角，再画出饼图各扇形 781
题型 1：先求每类圆心角，再画出饼图各扇形（Core）（考频★★☆☆☆） 781
9.10 逐组累加频数，在组上限处描点连线 790
题型 1：逐组累加频数，在组上限处描点连线（Extended）（考频★★☆☆☆） 790
9.11 按累计人数读分位数，再求间距或阈值人数 802
题型 1：按累计人数读分位数，再求间距或阈值人数（Extended）（考频★★★☆☆） 802
9.12 用频数除以组距，确定直方图柱高 823
题型 1：用频数除以组距，确定直方图柱高（Extended）（考频★★☆☆☆） 823
9.13 按一对数据的横纵坐标读点或描点 829
题型 1：按一对数据的横纵坐标读点或描点（Core）（考频★★☆☆☆） 829
9.14 看点云整体走向，判断相关性和异常点 839
题型 1：看点云整体走向，判断相关性和异常点（Core）（考频★★★☆☆） 839
9.15 画过点云中心的拟合直线，再沿线估值 845
题型 1：画过点云中心的拟合直线，再沿线估值（Core）（考频★★☆☆☆） 845

第一章 数与运算

Chapter 1

1.1 按位值把文字写成数字

题型 1 按位值把文字写成数字（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **百万换算：** 二千五百万是二十五个一百万。million 表示_____，将 25 乘一百万。

$$25 \times 1000000 = 25000000$$

② **千位换算：** thousand 表示_____。十二个一千，将 12 乘一千。

$$12 \times 1000 = 12000$$

③ **十万换算：** hundred thousand 表示一百个一千。两个十万，将 2 乘一百，再乘一千。

$$2 \times 100 \times 1000 = 200000$$

④ **空位补零：** 一万二千零八的千位是 2，个位是 8。百位和十位没有数，均补_____。

$$12000 + 8 = 12008$$

⑤ **半数换算：** half 表示_____，半个一百万要除以 2。二十五个一百万再加半个一百万，先求一半，再相加。

$$1000000 \div 2 = 500000$$

$$25000000 + 500000 = 25500000$$

填空：①一百万　②一千　③0　④一半

点石成金　题目出现用文字表示的数，并要求写成数字时，先确定百万、千等数词对应的数位。

例 1 [2023 · February/March 0580/12 Q1]

Write the number twenty-five million in figures.

用阿拉伯数字写出二千五百万。

解答 由 million 表示一百万，得

$25 \times 1000000 = 25000000$。

答：25000000。

方法：先找文字中的百万单位，再用前面的数乘一百万。

术语：million：百万，数值是一千个一千。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/31 Q1(a)]
提示：先分开整数个百万与半个百万，再合并。

(a) Write the number six and a half million in figures.

(a) 用阿拉伯数字写出六百五十万。

✓ **答案** 6500000

解析 半个一百万为

$1000000 \div 2 = 500000$。

六个一百万与半个一百万相加，得

$6 \times 1000000 + 500000 = 6500000$。

答：6500000。

2. [2023 · October/November 0580/32 Q3(a)]
提示：先定位千位和末两位，再检查中间的空位。

(a) Write the number fourteen thousand and ninety-seven in figures.

(a) 用阿拉伯数字写出一万四千零九十七。

✓ **答案** 14097

解析 十四个一千为

$14 \times 1000 = 14000$。

再加九十七，百位补 0，得

$14000 + 97 = 14097$。

答：14097。

3. [2023 · May/June 0580/31 Q1(a)]
提示：先定位万位和末两位，再检查中间的空位。

(a) Write the number forty thousand and thirty-three in figures.

(a) 用阿拉伯数字写出四万零三十三。

✓ **答案** 40033

解析 四十个一千为

$40 \times 1000 = 40000$。

再加三十三，千位和百位补 0，得

$40000 + 33 = 40033$。

答：40033。

4. [2023 · May/June 0580/32 Q1(a)]
提示：先定位最高位与个位，再检查相隔的数位。

(a) Write the number three hundred thousand and three in figures.

(a) 用阿拉伯数字写出三十万零三。

✓ **答案** 300003

解析 三百个一千为

$300 \times 1000 = 300000$。

再加三，万位、千位、百位和十位均补 0，得

$300000 + 3 = 300003$。

答：300003。

5. [2024 · February/March 0580/12 Q1]
提示：先写出三万，再按位值添上五十。

Write the number thirty thousand and fifty in figures.

用阿拉伯数字写出三万零五十。

✓ **答案**

30050

解析 三万是三十个一千，再加上五十。
$30 \times 1000 + 50 = 30000 + 50 = 30050$。
答：30050。

1.2 用有向数的加减表示升降

题型 1 用有向数的加减表示升降（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **升降运算选择：**例题求比 −5 °C 低 8 °C 的温度，原温度的负号保留。
数值增加，用_____。　　数值减少，用_____。

② **负数增加计算：**从 −5 增加 2，用 5 减去 2，结果仍带负号。

$$-5 + 2 = -(5 - 2) = -3$$

③ **负温继续降低：**从 −5 °C 再降低 8 °C，离零更远，结果仍为负温度。

$$-5 - 8 = -(5 + 8) = -13$$

④ **两温之差计算：**求温差，用较高温度减去较低温度。例如求 3 °C 与 −5 °C 的温差，减去 −5 改为加上 5。

$$3 - (-5) = 3 + 5 = 8$$

温差为 8 °C。

⑤ **正温降至零下：**从 3 °C 降低 5 °C，先降至零，再降低 2 °C。

$$3 - 5 = (3 - 3) - 2 = -2$$

下降后的温度为 −2 °C。

填空：①加法　②减法

点石成金　题目出现数值增加、减少或求温差时，先确定原数及变化方向，求温差则用较高温度减较低温度。

例 1 [2023 · May/June 0580/12 Q6]

Find the temperature that is 8 °C colder than −5 °C.

求比 −5 °C 低 8 °C 的温度。

解答 比原温度低 8 °C，用原温度减去 8 °C。

$$-5 - 8 = -(5 + 8) = -13$$

答：温度为 −13 °C。

方法：先看原温度的负号和降低量，列原温度减降低量。

辨析：温差是两温相隔的大小，降后温度是变化后的读数。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/12 Q6]
提示：看增加的数与原数的绝对值，比较是否跨过零。

Write down the number that is 9 greater than −23.

写出比 −23 大 9 的数。

✓ **答案**

$$-14$$

解析 比 −23 大 9，在 −23 上加 9。

$$-23+9=-(23-9)=-14$$

答：这个数是 −14。

2. [2023 · October/November 0580/31 Q3(b)(i)]
提示：比较两时刻温度高低，再处理减去负数。

(b) In Hobart, the temperature at 8 am was −3 °C and the temperature at 3 pm was 7 °C.

(i) Find the difference in the temperatures between 8 am and 3 pm.

(b) 在霍巴特，上午 8 时的温度为 −3 °C，下午 3 时的温度为 7 °C。
(i) 求上午 8 时与下午 3 时的温差。

✓ **答案**

$$10\ ^\circ\text{C}$$

解析 下午 3 时的温度较高，用较高温度减去较低温度。

$$7-(-3)=7+3=10$$

答：上午 8 时与下午 3 时的温差为 10 °C。

3. [2023 · October/November 0580/31 Q3(b)(ii)]
提示：比较原温度与降幅，判断是否越过零度。

(b) In Hobart, the temperature at 8 am was −3 °C and the temperature at 3 pm was 7 °C.

(ii) The temperature at 10 pm was 12 °C lower than at 3 pm.

Find the temperature at 10 pm.

(b) 在霍巴特，上午 8 时的温度为 −3 °C，下午 3 时的温度为 7 °C。
(ii) 晚上 10 时的温度比下午 3 时低 12 °C。
求晚上 10 时的温度。

✓ **答案**

$$-5\ ^\circ\text{C}$$

解析 晚上 10 时比下午 3 时低 12 °C，用 7 °C 减去 12 °C。

$$7-12=-(12-7)=-5$$

答：晚上 10 时的温度为 −5 °C。

4. [2024 · May/June 0580/11 Q7]
提示：温度升高，用星期一的温度加上升高量。

The temperature on Monday is –27 °C.
The temperature on Tuesday is 15 °C higher than on Monday.

Work out the temperature on Tuesday.

星期一的温度为 −27 °C。
星期二的温度比星期一高 15 °C。
求星期二的温度。

✓ **答案**

−12 °C

解析 温度升高，用原温度加上升高量。
$-27+15=-(27-15)=-12$。
答：星期二的温度为 −12 °C。

5. [2024 · May/June 0580/13 Q9(b)]
提示：从东京原来的温度起算，加上升高量。

One day the temperature in Tokyo is −5 °C and the temperature in Manila is 18 °C.

(b) The temperature in Tokyo rises by 4 °C.

Find the new temperature in Tokyo.

某天，东京的温度为 −5 °C，马尼拉的温度为 18 °C。
(b) 东京的温度升高 4 °C。求东京升温后的温度。

✓ **答案**

−1 °C

解析 东京的温度升高 4 °C，得
$-5+4=-(5-4)=-1$。
答：东京升温后的温度为 −1 °C。

6. [2024 · October/November 0580/12 Q11(b)]
提示：先求从原温度升至零度需要升高多少。

The temperature in town A is −8 °C and the temperature in town B is 16 °C.

(b) The temperature in town A rises by 12 °C.

Find the temperature in town A now.

城镇 A 的温度为 −8 °C，城镇 B 的温度为 16 °C。
(b) 城镇 A 的温度升高 12 °C。求城镇 A 现在的温度。

✓ **答案**

4 °C

解析 城镇 A 升高 8 °C 后达到 0 °C，再升高余下的温度。
$-8+12=(-8+8)+(12-8)=0+4=4$。
答：城镇 A 现在的温度为 4 °C。

1.3 按括号和运算顺序计算

题型 1　按括号和运算顺序计算（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **乘法优先：**例题中，加号右侧是一个乘积。先算_____，再算加法。

$$3+4\times2=3+8=11$$

② **括号优先：**算式中有括号，先算_____里的运算。括号里的结果作为一个数参与后面的计算。

$$(3+4)\times2=7\times2=14$$

③ **加减顺序：**乘除算完后，只剩加减时，按_____的顺序计算。

$$3+4\times2-1=3+8-1=11-1=10$$

④ **负数加正数：**数的绝对值是数到零的距离。正数的绝对值较大时，用正数减去负数的绝对值。

$$|-3|=3$$

$$-3+8=8-3=5$$

⑤ **乘除符号：**两个非零数相乘或相除，先根据符号确定结果的正负。

同号相乘或相除结果为_____。　　异号相乘或相除结果为_____。

⑥ **乘除顺序：**算式中只有乘除时，按_____的顺序计算。每次运算同时确定结果的正负。

$$(-2)\times(-3)\div(-3)=6\div(-3)=-2$$

⑦ **分数混合运算：**分子相乘、分母相乘得到乘积；分子和分母的共同因数同时约去，分数的值不变。$\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{2\times5}{5\times6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

分母不相同的分数相减，先把分母化成相同的数。分子、分母同时乘同一个非零数，分数的值不变。$\frac{7}{8}-\frac{1}{3}=\frac{21}{24}-\frac{8}{24}=\frac{13}{24}$

同一式子兼有乘法和减法时，先完成乘法，再通分相减。

填空：①乘法　②括号　③从左到右　④正数　⑤负数　⑥从左到右

点石成金　题目出现括号或乘除与加减混合的算式时，先算括号，再算乘除，最后算加减。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q4(d)]

(d) Work out.

$3+4\times2$

(d) 计算。

$3+4\times2$

解答　先算乘法，得

$3+4\times2=3+8=11$。

答：11。

方法：先看加号右侧的乘积，从四乘二起算。

辨析：乘法优先是先求积，从左到右是同级运算的顺序。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/13 Q3]

提示：先找乘法部分，再比较所得正数与负数的绝对值。

Work out.

$$-4+6\times3$$

计算。

$-4+6\times3$

✓ **答案**

14

解析 先算乘法，得

$-4+6\times3=-4+18$。

正数的绝对值较大，得

$-4+18=18-4=14$。

答：14。

2. [2023 · May/June 0580/31 Q1(f)(i)]

提示：先找乘法部分，再看剩余加减的排列顺序。

(f) Work out.

(i) $11+9\times5-4$

(f) 计算。

(i) $11+9\times5-4$

✓ **答案**

52

解析 先算乘法，再从左到右计算加减，得

$11+9\times5-4=11+45-4=56-4=52$。

答：52。

3. [2023 · May/June 0580/31 Q1(f)(ii)]

提示：先看括号范围，再看括号外的乘号与减号。

(f) Work out.

(ii) $(11+9)\times5-4$

(f) 计算。

(ii) $(11+9)\times5-4$

✓ **答案**

96

解析 先算括号里的加法，再算乘法，最后算减法，得

$(11+9)\times5-4=20\times5-4=100-4=96$。

答：96。

4. [2023 · May/June 0580/31 Q1(e)]
提示：按乘除排列顺序起算，每步比较两数的符号。

(e) Work out $(-9)\times(-7)\div(-3)$.

(e) 计算 $(-9)\times(-7)\div(-3)$。

✓ **答案**

-21

解析 从左到右计算乘除，同号相乘得正数，异号相除得负数。
$(-9)\times(-7)\div(-3)=63\div(-3)=-21$。
答：-21。

5. [2024 · May/June 0580/11 Q6(a)]
提示：先算减号右侧的除法。

(a) Work out.

$$28-16\div2$$

(a) 计算。
$28-16\div2$

✓ **答案**

20

解析 先算除法，再算减法，得
$28-16\div2=28-8=20$。
答：20。

6. [2025 · February/March 0580/12 Q7]
提示：先分别计算两个乘积，再相加。

Work out $-6\times-3+7\times2$.

计算。
$-6\times(-3)+7\times2$

✓ **答案**

32

解析 先算乘法，同号两数相乘得正数。

$$-6\times(-3)+7\times2=18+14=32$$

答：32。

7. [2025 · May/June 0580/21 Q4]

提示：先算两个分数的乘积，再处理减法。

Work out.

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}$$

计算。

$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}$

✓ **答案**

$$\frac{7}{12}$$

解析 先算乘法，分子相乘、分母相乘，再约分。

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{2\times3}{3\times8}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$。

再将两个分数通分后相减。

$\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{10}{12}-\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$。

答：$\frac{7}{12}$。

1.4 先算幂与方根，再完成运算

题型 1 先算幂与方根，再完成运算（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **平方根号：** 例题中的根号只盖住 42。$\sqrt{42}$ 表示两个相同非负数相乘得 42 时的那个数。平方根号表示的结果为非负数。

$$5\times5=25$$

$$\sqrt{25}=_____$$

② **立方根号：** 根号左上角的小数字 3 表示求立方根。求哪个数的三个相同因数相乘，结果等于被开方数。

$$4\times4\times4=64$$

$$\sqrt[3]{64}=_____$$

③ **正整数幂：** 右上角的正整数是指数，表示相同底数连乘的个数。例如，底数为 2、指数为 4，表示四个 2 相乘。

$$2^4=2\times2\times2\times2=_____$$

④ **小数指数：** 例题中，$3^{0.4}$ 的底数为 3，指数为 0.4。用计算器的乘方键输入底数和完整指数，求出幂的值。

$$3^{0.4}\approx1.551845574$$

⑤ **运算先后：** 算式中出现幂、方根和四则运算，按运算顺序求值。先算_____，再算乘除，最后算加减。

相加时先分别求值：

$\sqrt{25}+2^3=5+8=13$

相除时先分别求值：

$2^4\div2^2=16\div4=4$

⑥ **近似值取舍：** 计算中保留计算器精度，在最后取近似值。保留三位有效数字时，从首个非零数字起数三位，再由下一位四舍五入。

$$8.032586272\approx_____$$

填空：①5　②4　③16　④幂与方根　⑤8.03

点石成金　题目出现幂、平方根或立方根的求值时，先分别求出幂与方根，再完成其余运算。

例 1　[2023 · May/June 0580/23 Q13]

Calculate $\sqrt{42}+3^{0.4}$.

计算 $\sqrt{42}+3^{0.4}$。

解答　分别求平方根与幂，得

$$\sqrt{42}\approx 6.480740698$$

$$3^{0.4}\approx 1.551845574$$

计算中保留计算器精度，得

$$\sqrt{42}+3^{0.4}\approx 8.032586272$$

保留三位有效数字，得

$$\sqrt{42}+3^{0.4}\approx 8.03$$

答：8.03。

方法：先看根号覆盖范围与右上角指数，分别求值后再相加。

辨析：平方根是平方后得到原数的非负数，立方根是立方后得到原数的数。

拓展：有效数字从首个非零数字起计数，之后夹在非零数字间的零也占位。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/31 Q1(b)]

提示：看根号左上角的数，用候选数的立方与被开方数比较。

(b) Find the value of $\sqrt[3]{729}$.

(b) 求 $\sqrt[3]{729}$ 的值。

✓ **答案**

9

解析　由立方根的含义，

$$9^3=9\times 9\times 9=729$$

$\therefore \sqrt[3]{729}=9$。

答：9。

2. [2023 · May/June 0580/31 Q1(d)]

提示：先看两边底数是否相同，再分别求幂作除法。

(d) Find the value of $6^5\div 3^4$.

(d) 求 $6^5\div 3^4$ 的值。

✓ **答案**

96

解析　先分别求两个幂，得

$$6^5=6\times 6\times 6\times 6\times 6=7776$$

$$3^4=3\times 3\times 3\times 3=81$$

$\therefore 6^5\div 3^4=7776\div 81=96$。

答：96。

3. [2023 · October/November 0580/11 Q4]
提示：先比较整数的立方，缩小候选范围后再核算。

Find the value of $\sqrt[3]{5832}$.

求 $\sqrt[3]{5832}$ 的值。

✓ **答案**

18

解析 由立方根的含义，

$$18^3 = 18 \times 18 \times 18 = 324 \times 18 = 5832$$

$\therefore \sqrt[3]{5832} = 18$。

答：18。

4. [2023 · October/November 0580/32 Q3(d)(i)]
提示：看右上角指数，核对连乘中底数出现的次数。

(d) Find the value of

(i) 7^5

(d) 求下列各式的值。

(i) 7^5

✓ **答案**

16807

解析 指数为 5，表示五个 7 相乘，

$$7^5 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 49 \times 49 \times 7 = 2401 \times 7 = 16807$$

答：16807。

5. [2023 · May/June 0580/32 Q1(d)(i)]
提示：用候选数的平方核对被开方数，并检查候选数的正负。

(d) Find the value of

(i) $\sqrt{1849}$

(d) 求下列各式的值。

(i) $\sqrt{1849}$

✓ **答案**

43

解析 $\because$

$$43^2 = 43 \times 43 = 1849$$

且 43 为非负数，

$\therefore \sqrt{1849} = 43$。

答：43。

6. [2024 · February/March 0580/12 Q8]
提示：先看根号覆盖的范围，求出平方根。

Calculate $\sqrt{5.76}+2.8^3$.

计算$\sqrt{5.76}+2.8^3$。

✓ **答案** 24.352

解析 先计算平方根和立方。$\sqrt{5.76}=2.4$

$2.8^3=2.8\times2.8\times2.8=21.952$

$2.4+21.952=24.352$

答：24.352。

1.5 近似数

题型 1 按指定数位四舍五入（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **小数保留数位：**将 56.17345 保留一位小数，保留到_____位。小数点后保留一位数字。

② **整数保留数位：**题目给出整数的精度，先确定保留数位。

精确到十位：保留到十位。

精确到百位：保留到百位。

③ **右邻数字进舍：**56.17345 的十分位数字为 1，右邻数字为 7。根据右邻一位决定是否进位。

右邻数字小于 5：

保留数字不变，舍去后面各位。

右邻数字大于或等于 5：

保留数字加_____，舍去后面各位。

④ **整数末尾补零：**整数按指定数位四舍五入后，更低数位写成_____。例如，将 264 分别精确到十位和百位。

精确到十位，个位数字为 4。

$4<5$

$264\approx260$

精确到百位，十位数字为 6。

$6\geq5$

$264\approx300$

填空：①十分　②1　③0

点石成金　题目出现保留几位小数或精确到十位、百位时，先确定保留数位，再看右邻一位。

例 1 [2023 · February/March 0580/12 Q5]

Write 56.17345 correct to 1 decimal place.

将 56.17345 四舍五入，保留一位小数。

解答 保留一位小数，保留十分位数字 1。

百分位数字为 7，由 $7\geq5$，十分位进 1。

$1+1=2$

舍去十分位后面的各位。

答：56.2。

方法：先圈出要求保留的数位，再看它右边一位。

辨析：保留位是精度所指的数位，右邻位是判断进舍的依据。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/13 Q1]
提示：先定位十位，再比较个位数字与5的大小。

Write 928 correct to the nearest ten.

将 928 四舍五入，精确到十位。

✓ **答案** 930

解析 精确到十位，保留十位数字 2。
个位数字为 8，由 $8 \geq 5$，十位进 1。

$$2 + 1 = 3$$

个位写成 0。
答：930。

2. [2023 · February/March 0580/32 Q4(a)]
提示：先定位百位，再比较十位数字与5的大小。

(a) Write 6479 correct to the nearest 100.

(a) 将 6479 四舍五入，精确到百位。

✓ **答案** 6500

解析 精确到百位，保留百位数字 4。
十位数字为 7，由 $7 \geq 5$，百位进 1。

$$4 + 1 = 5$$

十位和个位都写成 0。
答：6500。

3. [2023 · May/June 0580/11 Q2(a)]
提示：看十位右侧的个位，比较该位数字与5的大小。

Write 3752 correct to the

(a) nearest 10

将 3752 四舍五入，精确到：
(a) 十位。

✓ **答案** 3750

解析 精确到十位，保留十位数字 5。
个位数字为 2，由 $2 < 5$，十位数字不变。
个位写成 0。
答：3750。

4. [2024 · February/March 0580/12 Q2]
提示：保留十位，看个位数字决定进舍。

Write 5926 correct to the nearest 10.

将 5926 四舍五入，精确到十位。

✓ **答案**

5930

解析 精确到十位，保留十位数字 2。
个位数字为 6，十位进 1，个位写成 0。

$$5926 \approx 5930$$

答：5930。

5. [2024 · May/June 0580/13 Q4(b)]
提示：看百分位数字，并处理十分位进位后的结果。

(b) Write 16.983 correct to 1 decimal place.

(b) 将 16.983 四舍五入，保留一位小数。

✓ **答案**

17.0

解析 保留一位小数，保留十分位数字 9。
百分位数字为 8，十分位进 1。
十分位满十，向个位进位。

$$16.9 + 0.1 = 17.0$$

保留十分位上的 0，得

$$16.983 \approx 17.0$$

答：17.0。

1.6 估算

题型 1 各数取一位有效数字后估算分式（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **分式估算对象：** 下式的分子是两数之差，分母是一个数。三个给定数都要先各自保留_____位有效数字。

$$\frac{423.8 - 78.4}{23.5}$$

② **首位有效数字：** 从左起第一个非零数字是首位有效数字。423.8 的首位有效数字是百位上的_____。首个非零数字前的 0 不计入有效数字。

③ **一位有效数字：** 保留首位有效数字，看第二位有效数字决定取舍。整数空出的数位补 0，舍去的小数位删去。

第二位小于 5	第二位大于或等于 5
首位不变	首位加 1

符号 $\approx$ 表示约等于。

$$423.8 \approx 400$$

$$78.4 \approx 80$$

$$23.5 \approx 20$$

④ **小数进位处理：** 小数保留一位有效数字，也从首个非零数字起算。0.96 的首位为 9，第二位为 6，进位后得 1。

$$0.96 \approx 1$$

⑤ **保留分式结构：** 各数取近似值后，保留原有括号和运算符号。分数线表示分子整体除以分母。

$$\frac{423.8 - 78.4}{23.5} \approx \frac{400 - 80}{20}$$

⑥ **分式计算顺序：** 先分别算出分子和分母，再作_____。分子有乘法、分母有减法时，仍按此顺序。所得结果不必再取一位有效数字。

$$\frac{4 \times 10}{8 - 3} = \frac{40}{5} = 8$$

⑦ **字母式的数值：** 字母表示给定的数，相邻字母表示相乘。例如$a = 2$、$b = 3$时，$5ab$表示$5 \times 2 \times 3 = 30$。把整个字母式中的字母都换成对应数值，再按运算顺序计算。

填空：①1　②4　③除法

点石成金　题目出现将每个数保留一位有效数字后求分式估计值时，先分别取近似值，再按原运算顺序计算。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q4(f)]

(f) By writing each number in the calculation correct to 1 significant figure, find an estimate for the value of

$$\frac{423.8-78.4}{23.5}.$$

You must show all your working.

(f) 将算式中的每个数分别写成保留 1 位有效数字的近似数，求下列算式的估计值。

$$\frac{423.8-78.4}{23.5}$$

必须写出全部计算过程。

解答　各数保留一位有效数字，得

$$423.8 \approx 400$$

$$78.4 \approx 80$$

$$23.5 \approx 20$$

方法：先看分子、分母中的各个数，从第二位有效数字判断取舍。

辨析：有效数字是从首个非零数字起数，小数位数是从小数点后起数。

因此

$$\frac{423.8-78.4}{23.5} \approx \frac{400-80}{20} = \frac{320}{20} = 16$$

答：估计值为 16。

针对练习

1. [2025 · October/November 0580/22 Q10(a)]

提示：先将三个给定值分别保留一位有效数字，再代入原式。

$$b = dm + 2mk$$

(a) $d = 3.14$, $m = 7.92$ and $k = 10.1$

By rounding each value correct to 1 significant figure, work out an estimate for b.

$$b = dm + 2mk$$

(a) $d = 3.14$，$m = 7.92$，$k = 10.1$。

将每个给定值分别四舍五入，保留 1 位有效数字，求 b 的估计值。

✓ **答案**

184

解析　各给定值保留一位有效数字，得

$$d = 3.14 \approx 3$$

$$m = 7.92 \approx 8$$

$$k = 10.1 \approx 10$$

代入原式，先乘后加，得

$$b \approx 3 \times 8 + 2 \times 8 \times 10 = 24 + 160 = 184$$

答：b 的估计值为 184。

2. [2024 · May/June 0580/11 Q14]

提示：先将四个数分别保留一位有效数字，保留分母中的乘号。

By writing each number in the calculation correct to 1 significant figure, find an estimate for the value of

$$\frac{28.2-5.6}{4.2\times1.68}.$$

You must show all your working.

将算式中的每个数分别写成保留 1 位有效数字的近似数，求下列算式的估计值。

$$\frac{28.2-5.6}{4.2\times1.68}$$

必须写出全部计算过程。

✓ **答案**

$$3$$

解析 各数保留一位有效数字，得

$$28.2\approx30$$

$$5.6\approx6$$

$$4.2\approx4$$

$$1.68\approx2$$

分别计算分子和分母，再相除，得

$$\frac{28.2-5.6}{4.2\times1.68}\approx\frac{30-6}{4\times2}=\frac{24}{8}=3$$

答：估计值为 3。

3. [2025 · October/November 0580/11 Q19]

提示：先将三个数分别保留一位有效数字。

By writing each number in the calculation correct to 1 significant figure, find an estimate for the value of

$$\frac{5.3\times19.}{2.49}$$

将算式中的每个数分别写成保留 1 位有效数字的近似数，求下列算式的估计值。

$$\frac{5.3\times19}{2.49}$$

✓ **答案** 50

解析 各数保留一位有效数字，得

$$5.3\approx5$$

$$19\approx20$$

$$2.49\approx2$$

因此

$$\frac{5.3\times 19}{2.49}\approx\frac{5\times 20}{2}=\frac{100}{2}=50$$

答：估计值为 50。

4. [2023 · May/June 0580/13 Q13]
提示：看分母小数的首个非零位，再比较下一位与 5 的大小。

By writing each number in the calculation correct to 1 significant figure, find an estimate for the value of

$$\frac{6.8\times 10.6}{3.2-0.98}.$$

You must show all your working.

将算式中的每个数分别写成保留 1 位有效数字的近似数，求下列算式的估计值。

$$\frac{6.8\times 10.6}{3.2-0.98}$$

必须写出全部计算过程。

✓ **答案** 35

解析 各数保留一位有效数字，得

$$6.8\approx 7$$

$$10.6\approx 10$$

$$3.2\approx 3$$

$$0.98\approx 1$$

因此

$$\frac{6.8\times 10.6}{3.2-0.98}\approx\frac{7\times 10}{3-1}=\frac{70}{2}=35$$

答：估计值为 35。

5. [2023 · May/June 0580/11 Q14]
提示：比较各数的第二位有效数字与 5，再核对乘法和减法的位置。

By writing each number in the calculation correct to 1 significant figure, work out an estimate for the value of

$$\frac{6.7\times 2.1}{18-5.9}.$$

You must show all your working.

将算式中的每个数分别写成保留 1 位有效数字的近似数，求下列算式的估计值。

$$\frac{6.7\times 2.1}{18-5.9}$$

必须写出全部计算过程。

✓ **答案** 1

解析 各数保留一位有效数字，得

$$6.7\approx 7$$

$$2.1\approx 2$$

$$18\approx 20$$

$$5.9 \approx 6$$

因此

$$\frac{6.7 \times 2.1}{18 - 5.9} \approx \frac{7 \times 2}{20 - 6} = \frac{14}{14} = 1$$

答：估计值为 1。

1.7 用因数检验质数

题型 1 用因数检验质数（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **质数的含义：**例题中的 29 仅能被 1 和 29 整除，这两个数称为它的正因数。大于 1 且恰有_____个正因数的整数称为质数。1 只有一个正因数，不是质数。

② **试除的范围：**检验例题中的 29，先确定平方根的范围。

$$5^2 < 29 < 6^2$$

若整数不是质数，必有不超过平方根的质数因数。

$$29 = 2 \times 14 + 1$$

$$29 = 3 \times 9 + 2$$

$$29 = 5 \times 5 + 4$$

不超过平方根的质数均不能整除 29，故 29 是质数。

③ **合数的判定：**大于 1 的整数，找到_____个除 1 和自身外的正因数，就不是质数。例题中的 91 和 93 可分别写成：

$$91 = 7 \times 13$$

7 是额外的正因数，故 91 不是质数。

$$93 = 3 \times 31$$

3 是额外的正因数，故 93 不是质数。

④ **根式数的筛选：**从含根式的数表中选质数，先判定根式是否为整数。

$$\sqrt{16} = 4 = 2 \times 2$$

4 有额外的正因数 2，故不是质数。

$$4^2 < 20 < 5^2$$

$\sqrt{20}$ 不是整数，故不是质数。

⑤ **区间内的选数：**求 10 与 20 之间的一个质数，可从 11 开始检验。

$$10 < 11 < 20$$

$$3^2 < 11 < 4^2$$

$$11 = 2 \times 5 + 1$$

$$11 = 3 \times 3 + 2$$

不超过平方根的质数均不能整除 11，故可取 11。

⑥ **质数和的求法：**题目要求两个质数的和，先分别判定，再相加。2 和 3 都只有 1 和自身两个正因数。

$$2+3=5$$

填空：①2　②1

点石成金　题目出现选出质数、解释某数不是质数或求质数的和时，先用不超过平方根的质数试除。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q7(b)]

12	15	27	29	91	93

From the list of numbers, write down

(b) a prime number.

$12, 15, 27, 29, 91, 93$

从这列数中，写出：
(b) 一个质数。

解答　由

$$5^2 < 29 < 6^2$$

得只需用质数 2、3、5 试除。

$$29 = 2 \times 14 + 1$$

$$29 = 3 \times 9 + 2$$

$$29 = 5 \times 5 + 4$$

均不能整除，故 29 是质数。
答：29。

方法：先看待检验数夹在哪两个平方数之间，再列出试除用的质数。

辨析：质数是恰有两个正因数的正整数，合数是正因数多于两个的正整数。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/31 Q1(c)(iv)]

提示：先比较相邻平方数，再检验范围内的质数能否整除。

(c)　6　9　$\sqrt{100}$　28　31　$\sqrt{1000}$　32　36

From this list of numbers, write down

(iv) a prime number

(c)

$6, 9, \sqrt{100}, 28, 31, \sqrt{1000}, 32, 36$

从这列数中，写出：
(iv) 一个质数。

✓ **答案**　31

解析　由

$$5^2 < 31 < 6^2$$

得只需用质数 2、3、5 试除。

$$31 = 2 \times 15 + 1$$

$$31 = 3 \times 10 + 1$$

$$31 = 5 \times 6 + 1$$

均不能整除，故 31 是质数。

答：31。

2. [2023 · October/November 0580/13 Q4(b)]

提示：看平方根落在哪两个整数之间，核查试除范围。

61	63	64	66	68	69

From this list, write down

(b) a prime number.

61, 63, 64, 66, 68, 69

从这列数中，写出：

(b) 一个质数。

✓ **答案** 61

解析 由

$$7^2 < 61 < 8^2$$

得只需用质数 2、3、5、7 试除。

$$61 = 2 \times 30 + 1$$

$$61 = 3 \times 20 + 1$$

$$61 = 5 \times 12 + 1$$

$$61 = 7 \times 8 + 5$$

均不能整除，故 61 是质数。

答：61。

3. [2023 · October/November 0580/12 Q12(a)]

提示：从较小的质数试除，看能否找到额外正因数。

(a) Explain why 111 is not a prime number.

(a) 解释为什么 111 不是质数。

✓ **答案** $111 = 3 \times 37$，有除 1 和自身外的正因数。

解析

$$111 = 3 \times 37$$

∵ 3 是 111 的正因数，且既不是 1，也不是 111，

∴ 111 不止两个正因数。

答：111 能被 3 整除，故不是质数。

4. [2023 · October/November 0580/12 Q12(b)]

提示：先看候选数是否在区间内，再按平方根范围试除。

(b) Find a prime number between 110 and 120.

(b) 求一个在 110 与 120 之间的质数。

✓ **答案** 113

解析 取 113，有

$$110 < 113 < 120$$

又由

$$10^2 < 113 < 11^2$$

得只需用质数 2、3、5、7 试除。

$$113 = 2 \times 56 + 1$$

$$113 = 3 \times 37 + 2$$

$$113 = 5 \times 22 + 3$$

$$113 = 7 \times 16 + 1$$

均不能整除，故 113 是质数。

答：113。

5. [2023 · May/June 0580/13 Q10]

← 提示：看判断所依据的因数，核查是否漏掉较小的质数因数。

Olga thinks that 87 is a prime number.

Is Olga correct?
Give a reason for your answer.

奥尔加认为 87 是质数。
奥尔加的判断正确吗?
说明理由。

✓ **答案** 不正确，87 能被 3 整除。

解析

$$87 = 3 \times 29$$

∵ 3 是 87 的正因数，且既不是 1，也不是 87，

∴ 87 不是质数。

答：奥尔加的判断不正确，因为 87 能被 3 整除。

6. [2023 · May/June 0580/12 Q7]

← 提示：先逐个查有无额外正因数，再核对参与求和的数。

There are two prime numbers in this list.

27　47　57　61　75　93

Work out the sum of these two prime numbers.

这列数中有两个质数。
27, 47, 57, 61, 75, 93

求这两个质数的和。

✓ **答案** 108

解析

$$27 = 3 \times 9$$

$$57 = 3 \times 19$$

$$75 = 3 \times 25$$

$$93 = 3 \times 31$$

这四个数均有除 1 和自身外的正因数，故均不是质数。

由

$$6^2 < 47 < 7^2$$

得检验 47 只需试除质数 2、3、5。

$$47 = 2 \times 23 + 1$$

$$47 = 3 \times 15 + 2$$

$$47 = 5 \times 9 + 2$$

均不能整除，故 47 是质数。

由

$$7^2 < 61 < 8^2$$

得检验 61 只需试除质数 2、3、5、7。

$$61 = 2 \times 30 + 1$$

$$61 = 3 \times 20 + 1$$

$$61 = 5 \times 12 + 1$$

$$61 = 7 \times 8 + 5$$

均不能整除，故 61 是质数。两个质数的和为

$$47 + 61 = 108$$

答：108。

1.8 用因数对列出或检验因数

题型 1 用因数对列出或检验因数（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **因数的含义：**正整数 6 能把 18 除尽。

$$18 \div 6 = 3$$

称 6 为 18 的因数，因数能把原数_____。本节列出的因数均为正整数。

② **成对寻找因数：**从 1 起，依次试除 18。

$$18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$$

每个乘积中的两个数构成一组因数对。把各对中的数按从_____的顺序列出。

③ **停止试除条件：**试到 4，除法有余数。

$$18 = 4 \times 4 + 2$$

下一试除数与自身相乘，结果超过 18。

$$5 \times 5 = 25 > 18$$

后续因数均与前面的因数配对，停止试除。

④ **候选因数检验：**题目给出一列数时，用原数除以候选数。

$$18 \div 6 = 3$$

商为正整数，6 符合要求。 题目只求一个因数时，写出一个符合要求的数。

填空：①整除　②小到大

点石成金　题目出现列出所有因数或选出一个因数的要求时，先用整除确定因数及其配对数。

例 1　[2023 · May/June 0580/12 Q1(a)]

(a) Write down all the factors of 18.

(a) 写出 18 的所有因数。

解答 从 1 起依次试除，将 18 写成成对的乘积，得

$$18 = 1 \times 18$$

$$18 = 2 \times 9$$

$$18 = 3 \times 6$$

试到 4，有

$$18 = 4 \times 4 + 2$$

有余数，故 4 不是 18 的因数。 又有

$$5 \times 5 = 25 > 18$$

较小因数已查完，因数对已列全。 答：18 的所有因数为 $1, 2, 3, 6, 9, 18$。

方法：先看要求列全还是选一个，再从 1 起试除找配对数。

辨析：因数是能整除原数的数，因数对是相乘得原数的两个数。

拓展：完全平方数有一对相同的因数，列因数时只写一次。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/13 Q2(a)]

提示：从 1 起成对试除，比较试除数的平方与原数，判断何时停。

Write down

(a) all the factors of 32

写出：

(a) 32 的所有因数。

✓ **答案** $1, 2, 4, 8, 16, 32$

解析 从 1 起依次试除，得

$$32 = 1 \times 32$$

$$32 = 2 \times 16$$

$$32 = 3 \times 10 + 2$$

$$32 = 4 \times 8$$

$$32 = 5 \times 6 + 2$$

其中 3、5 不能整除 32。又有

$$6 \times 6 = 36 > 32$$

较小因数已查完，因数对为 1 与 32、2 与 16、4 与 8。答：32 的所有因数为 $1, 2, 4, 8, 16, 32$。

2. [2023 · October/November 0580/31 Q1(c)(i)]
提示：看数表中的候选数，用原数逐个除以它们，检查有无余数。

(c) 6　9　$\sqrt{100}$　28　31　$\sqrt{1000}$　32　36

From this list of numbers, write down

(i) a factor of 18

(c)
6　9　$\sqrt{100}$　28　31　$\sqrt{1000}$　32　36

从这列数中，写出：
(i) 18 的一个因数。

✓ **答案** 6（或 9）
解析 检验数表中的 6 和 9，有

$$18 \div 6 = 3$$

$$18 \div 9 = 2$$

商均为正整数，故 6 和 9 都是 18 的因数。题目要求写出一个因数。答：6（或 9）。

3. [2024 · May/June 0580/32 Q1(a)(i)]
提示：用 21 除以数表中的候选数。

(a) 6　7　10　12　18　32　49　63

From this list of numbers, write down

(i) a factor of 21

(a)
6　7　10　12　18　32　49　63

从这列数中，写出：
(i) 21 的一个因数。

✓ **答案** 7
解析 用 21 除以数表中的 7，得

$$21 \div 7 = 3$$

商为正整数，所以 7 是 21 的因数。
答：7。

4. [2024 · October/November 0580/31 Q1(c)(ii)]
提示：所选的数应能把 24 除尽。

(c)

8	24	25	36	39	41	48

From this list of numbers, write down

(ii) a factor of 24

(c)
8　24　25　36　39　41　48

从这列数中，写出：
(ii) 24 的一个因数。

✓ **答案** 8（或 24）
解析 用 24 除以数表中的 8，得

$$24 \div 8 = 3$$

商为正整数，所以 8 是 24 的因数。又有

$$24 \div 24 = 1$$

所以 24 也符合要求。
答：8（或 24）。

5. [2024 · October/November 0580/32 Q2(a)(ii)]
提示：用 28 除以数表中的候选正整数。

(a)

3.142	$\sqrt{87}$	14	41	56	117	121

From this list, write down

(ii) a factor of 28

(a)
3.142　$\sqrt{87}$　14　41　56　117　121

从这列数中，写出：
(ii) 28 的一个因数。

✓ **答案** 14
解析 用 28 除以数表中的 14，得

$$28 \div 14 = 2$$

商为正整数，所以 14 是 28 的因数。
答：14。

1.9 用整数倍检验倍数条件

题型 1 用整数倍检验倍数条件（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **列出整数倍：**将 13 依次乘正整数，所得的数都是 13 的倍数。例如：

$$13 \times 7 = 91$$

$$13 \times 8 = 104$$

$$13 \times 9 = 117$$

② **按范围筛选：**所求数在 100 与 110 之间。保留同时大于 100、小于 110 的倍数，得到 _____。

$$100 < 104 < 110$$

③ **求出公倍数：**两个数的公倍数，须同时是这两个数的倍数。如求 3 与 5 的公倍数，可先相乘，再分别相除检验。

$$3 \times 5 = 15$$

$$15 \div 3 = 5$$

$$15 \div 5 = 3$$

两次所得的商均为 _____，所以 15 是两数的公倍数。

④ **从数表中选：**从 5, 8, 10 中选 4 的倍数，可将各数分别除以 4。保留商为整数的数。

$$5 \div 4 = 1.25$$

$$8 \div 4 = 2$$

$$10 \div 4 = 2.5$$

所以应选 _____。

填空：①104　②整数　③8

点石成金　题目出现指定范围内的倍数、两个数的公倍数或从数表中选倍数时，先列整数倍或用除法检验。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q4(b)]

(b) Write down the multiple of 13 that is between 100 and 110.

(b) 写出在 100 与 110 之间的那个 13 的倍数。

解答　列出 13 的相邻整数倍，得

$$13 \times 7 = 91$$

$$13 \times 8 = 104$$

$$13 \times 9 = 117$$

由 $100 < 104 < 110$，得所求的倍数为 104。

答：104。

方法：先看范围上下限，再从靠近下限的整数倍起列。

辨析：倍数是某个数的整数倍，公倍数是几个数共有的倍数。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/32 Q3(b)]
提示：看候选数分别除以两个给定数后，商是否均为整数。

(b) Write down a common multiple of 17 and 5.

(b) 写出 17 和 5 的一个公倍数。

✓ **答案** 85

解析 将两数相乘，得

$$17 \times 5 = 85$$

分别除以 17 和 5，得

$$85 \div 17 = 5$$

$$85 \div 5 = 17$$

两商均为整数，所以 85 是 17 和 5 的公倍数。
答：85。

2. [2023 · October/November 0580/31 Q1(c)(ii)]
提示：看数表中的各数，比较除以 12 后的商是否为整数。

(c) 6　9　$\sqrt{100}$　28　31　$\sqrt{1000}$　32　36

From this list of numbers, write down

(ii) a multiple of 12

(c) $6, 9, \sqrt{100}, 28, 31, \sqrt{1000}, 32, 36$。
从这列数中，写出
(ii) 一个 12 的倍数。

✓ **答案** 36

解析 数表中有 36，且

$$36 \div 12 = 3$$

商为整数，所以 36 是 12 的倍数。
答：36。

3. [2024 · February/March 0580/12 Q6(a)]
提示：逐个检验各数能否被 11 除尽。

(a) 34　55　76　83　111　121

From this list of numbers, write down all the multiples of 11.

(a)
34　55　76　83　111　121

从这列数中，写出所有 11 的倍数。

✓ **答案** 55, 121

解析 将各数与 11 的整数倍比较，得

$$34 = 11 \times 3 + 1$$

$$55 = 11 \times 5$$

$$76 = 11 \times 6 + 10$$

$$83 = 11 \times 7 + 6$$

$$111 = 11 \times 10 + 1$$

$$121 = 11 \times 11$$

其中 55、121 能被 11 除尽，其余各数均有余数。
答：所有符合要求的数为 55, 121。

4. [2024 · October/November 0580/31 Q1(c)(i)]
提示：将数表中的候选数除以 16，看商是否为整数。

(c)

8	24	25	36	39	41	48

From this list of numbers, write down

(i) a multiple of 16

(c)
8　24　25　36　39　41　48

从这列数中，写出：
(i) 16 的一个倍数。

✓ **答案** 48
解析 用数表中的 48 除以 16，得

$$48 \div 16 = 3$$

商为整数，所以 48 是 16 的倍数。
答：48。

5. [2024 · October/November 0580/32 Q2(a)(v)]
提示：将表中的数除以 9，筛选商为整数的数。

(a)

3.142	$\sqrt{87}$	14	41	56	117	121

From this list, write down

(v) a multiple of 9.

(a) 数表如下：
$3.142, \sqrt{87}, 14, 41, 56, 117, 121$

从这列数中，写出
(v) 一个 9 的倍数。

✓ **答案** 117
解析 由

$$117 \div 9 = 13$$

所得的商为整数，故 117 是 9 的倍数。
答：117。

1.10 倒数

题型 1 将一个非零数的倒数写成分数或小数（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **倒数的含义：**一个数与 0.6 相乘得 1，这个数叫作 0.6 的倒数。一个数与它的倒数相乘，积为_____。

② **求倒数的方法：**原数不为 0 时，用 1 除以原数。整数和小数都按此计算。

原数为整数 5：

$1 \div 5 = \frac{1}{5}$

原数为小数 0.6：

$1 \div 0.6$

③ **小数除法化整：**除数 0.6 有一位小数，将被除数和除数同时乘 10，商不变。所得分数的分子、分母同时除以 2，约成最简分数。

$$1 \div 0.6 = 10 \div 6 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

④ **按要求写小数：**题目要求用小数表示时，将分子除以分母。余数后添 0 继续除，不够除时在商中写 0。例如，将 1 写成 1.00：

$$\frac{1}{20} = 1.00 \div 20 = 0.05$$

填空：①1

点石成金　题目出现求一个非零数的倒数时，先写出 1 除以原数，再按题意写成分数或小数。

例 1 [2023 · February/March 0580/32 Q4(c)]

(c) Find the reciprocal of 0.6 .

（c）求 0.6 的倒数。

解答 由倒数与原数相乘得 1，得 0.6 的倒数为

$1 \div 0.6 = 10 \div 6 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$。

答：0.6 的倒数为 $\frac{5}{3}$。

方法：先把小数化成分数，再交换分子、分母。

辨析：取倒数与约分是两种运算。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/12 Q1(b)]

提示：看原数，按乘积为 1 的关系列出除法。

(b) Write down the reciprocal of 8.

（b）写出 8 的倒数。

✓ **答案**

$$\frac{1}{8}$$

解析 由倒数与原数相乘得 1，得 8 的倒数为

$1 \div 8 = \frac{1}{8}$。

答：8 的倒数为 $\frac{1}{8}$。

2. [2023 · May/June 0580/13 Q6]
提示：看小数表示的要求，逐位比较余数与除数。

Write down the reciprocal of 16 as a decimal.

写出 16 的倒数，用小数表示。

✓ **答案**

0.0625

解析 由倒数与原数相乘得 1，得 16 的倒数为
$1 \div 16 = \frac{1}{16}$。
按题意写成小数，得
$\frac{1}{16} = 1.0000 \div 16 = 0.0625$。
答：16 的倒数写成小数为 0.0625。

3. [2024 · May/June 0580/11 Q6(b)]
提示：从原数与倒数相乘得 1 入手。

(b) Find the reciprocal of $\frac{4}{5}$.

(b) 求 $\frac{4}{5}$ 的倒数。

✓ **答案** 1.25

解析 由

$$\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$$

得 $\frac{4}{5}$ 的倒数为 $\frac{5}{4}$。

$$\frac{5}{4} = 5 \div 4 = 1.25$$

答：1.25。

4. [2025 · February/March 0580/12 Q6]
提示：用 1 除以原数，将被除数和除数同时扩大为原来的 100 倍。

Find the value of the reciprocal of 0.25 .

求 0.25 的倒数的值。

✓ **答案** 4

解析 由原数与倒数相乘得 1，得 0.25 的倒数为

$$1 \div 0.25 = 100 \div 25 = 4$$

答：4。

1.11 取共同质因数的较低次幂求最大公因数

题型 1 取共同质因数的较低次幂求最大公因数（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **公因数的含义：** 32 和 120 都能被 8 整除。

$$32 = 8 \times 4$$

$$120 = 8 \times 15$$

能同时整除两个数的正整数，称为它们的 _____。其中最大的一个称为最大公因数（HCF）。

② **分解质因数：**大于 1 且只有 1 和自身两个正因数的整数，称为质数。将原数写成质数的乘积，称为分解质因数。

$$32 = 2 \times 16 = 2 \times 2 \times 8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$120 = 2 \times 60 = 2 \times 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

③ **乘方记录个数：**5 个 2 相乘可写成 2^5，其中 5 称为指数。未写指数的质因数，指数为 1。

$$32 = 2^5$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

④ **选共同质因数：**两个分解式中都出现的质因数是 _____，称为共同质因数。3 和 5 只在 120 的分解式中出现，不取。

⑤ **共同幂取较低：**共同质因数 2 的指数分别为 5 和 3，取较低的 _____。取出的幂就是这两个数的最大公因数。

$$2^3 = 8$$

⑥ **多个共同质因数：**每个共同质因数都取较低次幂，再将所得各项 _____。以 24 和 36 为例。

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

共同质因数为 2 和 3，所得最大公因数为

$$2^2 \times 3 = 12$$

⑦ **含字母因子的公因式：**字母表示一个数，$a^2 = a \times a$。数的因子和相同字母因子分别比较。例如 $6a^2b = 2 \times 3 \times a \times a \times b$

$9ab^2 = 3 \times 3 \times a \times b \times b$

两式共同含一个3、一个a和一个b，最大公因式为$3ab$。没有同时出现的因子不取入。

填空：①公因数　②2　③3　④相乘

点石成金　题目出现求两个正整数的最大公因数时，先将两个数分别分解质因数。

例 1　[2023 · May/June 0580/13 Q17]

Find the highest common factor (HCF) of 32 and 120.

求 32 和 120 的最大公因数（HCF）。

解答　分解质因数，得

$$32 = 2^5$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

共同质因数为 2，取较低次幂，得

$$2^3 = 8$$

答：最大公因数为 8。

方法：先把两个数分解质因数，再比较共有质因数的指数。

辨析：质因数是分解式中的质数，共同质因数是两式共有的质数。

术语：HCF，最大公因数，能同时整除两数的最大正整数。

针对练习

1. [2025 · May/June 0580/22 Q8]

提示：将两个数分解质因数，再比较共同质因数的指数。

Find the highest common factor (HCF) of 36 and 54.

求 36 和 54 的最大公因数（HCF）。

✓ **答案** 18

解析 分解质因数，得

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$54 = 2 \times 3^3$$

共同质因数为 2 和 3，各取较低次幂，得

$$2 \times 3^2 = 18$$

答：最大公因数为 18。

2. [2024 · February/March 0580/22 Q18]

提示：分别比较数字系数的公因数与公共字母的指数。

Find the highest common factor (HCF) of $28x^5$ and $98x^3$.

求 $28x^5$ 和 $98x^3$ 的最大公因式（HCF）。

✓ **答案** $14x^3$

解析 分解数字系数，得

$$28x^5 = 2^2 \times 7 \times x^5$$

$$98x^3 = 2 \times 7^2 \times x^3$$

系数的共同质因数为 2 和 7，各取较低次幂，得

$$2 \times 7 = 14$$

公共字母 x 的指数分别为 5 和 3，取较低的 3，得

$$14 \times x^3 = 14x^3$$

答：最大公因式为 $14x^3$。

3. [2024 · October/November 0580/41 Q1(a)(ii)]
提示：写出两个数的质因数分解式，选取共有的质因数。

(a) (i) Write 70 as a product of its prime factors.

(ii) Find the highest common factor (HCF) of 70 and 112.

(a)（i）将 70 写成质因数的乘积。
(ii）求 70 和 112 的最大公因数（HCF）。

✓ **答案** 14

解析 分解质因数，得

$$70 = 2 \times 5 \times 7$$

$$112 = 2^4 \times 7$$

共同质因数为 2 和 7，各取较低次幂，得

$$2 \times 7 = 14$$

答：最大公因数为 14。

4. [2023 · October/November 0580/11 Q15]
提示：对照两式找齐共有质因数，再逐个比较指数。

Find the highest common factor (HCF) of 140 and 126.

求 140 和 126 的最大公因数（HCF）。

✓ **答案** 14

解析 分解质因数，得

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

共同质因数为 2 和 7，各取较低次幂后相乘，得

$$2 \times 7 = 14$$

答：最大公因数为 14。

5. [2023 · October/November 0580/13 Q22]
提示：比较共有质因数的指数，相等时保留原来的幂。

Find the highest common factor (HCF) of 48 and 80.

求 48 和 80 的最大公因数（HCF）。

✓ **答案** 16

解析 分解质因数，得

$$48 = 2^4 \times 3$$

$$80 = 2^4 \times 5$$

共同质因数为 2，两式中它的指数均为 4，得

$$2^4 = 16$$

答：最大公因数为 16。

1.12 取最高次幂求最小公倍数，再处理周期

题型 1　取最高次幂求最小公倍数，再处理周期（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **质因数分解：**质数只有 1 和它本身两个正因数。把整数拆成质数相乘，称为分解质因数。同一质数反复相乘，可写成幂。

$$24 = 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

$$104 = 2 \times 52 = 2 \times 2 \times 26 = 2 \times 2 \times 2 \times 13 = 2^3 \times 13$$

② **公倍数与最小值：**能被 24 和 104 整除的正整数，是两数的公倍数。其中最小的一个称为_____。记号 $\mathrm{LCM}(24, 104)$ 表示这两个数的最小公倍数。

③ **取齐最高次幂：**将两数分解，列出全部出现的质因数。每种质因数各取_____次幂，再相乘。例如 8 与 12 中，质因数 2 的指数分别为 3、2。

$$8 = 2^3$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$\mathrm{LCM}(8, 12) = 2^3 \times 3 = 24$$

④ **共同周期转化：**两钟再次同响，经过时间须为两个周期的整数倍。下次同响前的最短间隔，是两周期的最小公倍数。例如周期分别为 4 分钟、6 分钟时，有

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$\mathrm{LCM}(4, 6) = 2^2 \times 3 = 12$$

$$12 \div 4 = 3, \quad 12 \div 6 = 2$$

最短间隔为 12 分钟。

⑤ **间隔加上起点：**所求是时刻时，把最短间隔加在起始时刻上。每 60 分钟为 1 小时，分钟数满 60 时进 1 小时。例如从 09:50 起经过 80 分钟，有

$$80 \text{ 分钟} = 1 \text{ 小时} + 20 \text{ 分钟}$$

$$50 \text{ 分钟} + 20 \text{ 分钟} = 70 \text{ 分钟} = 1 \text{ 小时} + 10 \text{ 分钟}$$

$$09{:}50 + 1 \text{ 小时} + 20 \text{ 分钟} = 11{:}10$$

⑥ **整盘整盒转化：**物品整盘送入且整盒装满。总数须为两种容量的公倍数，最少总数取最小公倍数。例如每盘 4 个、每盒 6 个，最少 12 个可装 3 盘、2 盒。

$$\mathrm{LCM}(4, 6) = 12$$

$$12 \div 4 = 3, \quad 12 \div 6 = 2$$

填空：①最小公倍数　②最高

点石成金　题目出现最小公倍数、下次同时发生或整盘整盒均不剩余时，先分解质因数，各取最高次幂相乘。

例 1　[2023 · May/June 0580/31 Q1(h)(i)]

(h) (i) Find the lowest common multiple (LCM) of 24 and 104.

(h)（i）求 24 和 104 的最小公倍数（LCM）。

解答　将两数分解质因数，得

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$104 = 2^3 \times 13$$

全部质因数为 2、3、13，各取最高次幂，得

$$\mathrm{LCM}(24, 104) = 2^3 \times 3 \times 13 = 312$$

答：最小公倍数为 312。

方法：看两数的质因数分解，先逐项比较同一质因数的指数。

辨析：公倍数是两数共有的正倍数，最小公倍数是其中最小的数。

针对练习

1. [2024 · May/June 0580/32 Q1(d)]

提示：先将两数分解质因数，再比较同一质因数的指数。

(d) Find the lowest common multiple (LCM) of 30 and 68.

(d) 求 30 和 68 的最小公倍数（LCM）。

✓ **答案**

1020

解析　将两数分解质因数，得

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$68 = 2^2 \times 17$$

每种质因数各取最高次幂，得

$$\mathrm{LCM}(30, 68) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 = 1020$$

答：最小公倍数为 1020。

2. [2023 · October/November 0580/33 Q3(e)]

提示：对照两个分解式，比较同一质因数的指数，并查有无遗漏。

(e)　$30 = 2 \times 3 \times 5$　　$84 = 2^2 \times 3 \times 7$

Use this information to find the lowest common multiple (LCM) of 30 and 84.

(e) 已知

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

利用这些信息，求 30 和 84 的最小公倍数（LCM）。

✓ **答案**

420

解析 由题给分解式

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

全部质因数为 2、3、5、7，各取最高次幂，得

$$\mathrm{LCM}(30, 84) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$$

答：最小公倍数为 420。

3. [2023 · October/November 0580/12 Q23]

⟵ 提示：看两钟的周期求共同间隔，再从起始时刻往后推。

Bell *A* rings every 22 minutes.
Bell *B* rings every 14 minutes.
Both bells ring at 09 00.

Work out the next time both bells ring together.

钟 *A* 每隔 22 分钟响一次。
钟 *B* 每隔 14 分钟响一次。
两钟在 09:00 同时响。
求两钟下次同时响的时刻。

✓ **答案**

11:34

解析 两钟下次同响前的最短间隔，是 22 和 14 的最小公倍数。

$$22 = 2 \times 11$$

$$14 = 2 \times 7$$

$$\mathrm{LCM}(22, 14) = 2 \times 7 \times 11 = 154$$

两钟在 154 分钟后再次同时响。

$$154 \text{ 分钟} = 2 \text{ 小时} + 34 \text{ 分钟}$$

$$09{:}00 + 2 \text{ 小时} + 34 \text{ 分钟} = 11{:}34$$

答：两钟下次同时响的时刻为 11:34。

4. [2023 · May/June 0580/12 Q20]

⟵ 提示：比较两周期中质因数的指数，推算时刻时检查分钟进位。

Buses at a station go to the port or to the town.

Buses leave every 28 minutes for the port.
Buses leave every 48 minutes for the town.

At 10 18 a bus for the port and a bus for the town leave the station together.

Find the next time when a bus for the port and a bus for the town leave the station together.

一个车站的公交车开往港口或城镇。
开往港口的公交车每隔 28 分钟发车一次。

开往城镇的公交车每隔 48 分钟发车一次。
在 10:18，一辆开往港口的公交车和一辆开往城镇的公交车同时从车站发车。
求下一次开往港口和开往城镇的公交车同时从车站发车的时刻。

✓ **答案**

$$15{:}54$$

解析 两路公交车下次同时发车前的最短间隔，是 28 和 48 的最小公倍数。

$$28 = 2^2 \times 7$$

$$48 = 2^4 \times 3$$

$$\mathrm{LCM}(28, 48) = 2^4 \times 3 \times 7 = 336$$

两路公交车在 336 分钟后再次同时发车。

$$336 \text{ 分钟} = 5 \text{ 小时} + 36 \text{ 分钟}$$

$$10{:}18 + 5 \text{ 小时} + 36 \text{ 分钟} = 15{:}54$$

答：下次同时发车的时刻为 15:54。

5. [2023 · May/June 0580/33 Q2(f)]
← 提示：看每盘与每盒的容量，找能被两种容量整除的最小总数。

A shop sells food and drink.

(f) A farmer delivers eggs to the shop in trays of 50.
The eggs are then put into boxes of 12.
There are no eggs left in the trays and all of the egg boxes are full.

Work out the smallest possible number of eggs that the farmer delivers.

一家商店销售食品和饮料。
(f) 一位农民用每盘装 50 个鸡蛋的托盘向商店送鸡蛋。
随后，这些鸡蛋被装入每盒可装 12 个鸡蛋的盒子。
托盘中没有剩余的鸡蛋，且所有鸡蛋盒都装满。
求这位农民送来的鸡蛋最少有多少个。

✓ **答案** 300 个

解析 鸡蛋按每盘 50 个送来，再按每盒 12 个装盒，且没有剩余，总数须同时是 50 和 12 的倍数。

$$50 = 2 \times 5^2$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

最少总数为两数的最小公倍数。

$$\mathrm{LCM}(50, 12) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$$

答：农民送来的鸡蛋最少有 300 个。

1.13 同时乘除分子分母得到等值分数

题型 1　各项同乘除，化简整数比或分数（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **按序写质量比：**面粉、黄油、糖的质量都以克为单位。按所给顺序写出质量比。

$$150 : 125 : 50$$

② **寻找最大公因数：**把各数分解成质因数相乘的形式。共有的质因数相乘，得最大公因数。

$$150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

$$125 = 5 \times 5 \times 5$$

$$50 = 2 \times 5 \times 5$$

共有的质因数为两个 5，最大公因数为 _____。

③ **化简各项之比：**各项同除以最大公因数，得最简整数比。所得各项没有大于 1 的公因数。

$$150 : 125 : 50 = (150 \div 25) : (125 \div 25) : (50 \div 25) = 6 : 5 : 2$$

④ **认识分数记号：**面粉质量是黄油质量的 $\frac{150}{125}$ 倍。分数线上方的数称为分子，下方的数称为分母。分母不能为 0。

⑤ **分数同乘同除：**分子、分母同乘一个非零整数或同除以公因数，分数的值 _____。所得分数称为等值分数。

同除以最大公因数，得最简分数：

$\frac{150}{125} = \frac{150 \div 25}{125 \div 25} = \frac{6}{5}$

同乘一个非零整数，得等值分数：

$\frac{6}{5} = \frac{6 \times 2}{5 \times 2} = \frac{12}{10}$

⑥ **比例尺与长度单位：**比例尺按“图上长度：实际长度”的顺序写，两项先统一单位。1 m = 100 cm。例如图上3 cm 表示实际6 m，则 6 m = 600 cm

3 : 600 = 1 : 200

比例尺1 : 200表示图上每1 cm对应实际200 cm。

填空：①25　②不变

点石成金　题目出现化简比、化简分数或写出等值分数时，先确定各项或分子、分母应同除还是同乘。

例 1

[2023 · February/March 0580/32 Q3(a)(i)]

(a) A recipe for making 20 biscuits uses 150 g flour, 125 g butter and 50 g sugar.

(i) Write the ratio flour : butter : sugar in its simplest form.

(a) 制作 20 块饼干的配方需要 150 g 面粉、125 g 黄油和 50 g 糖。
(i) 写出面粉、黄油、糖的质量比，并化为最简整数比。

解答　三种原料的质量单位相同，按面粉、黄油、糖的顺序写比，得

$$150 : 125 : 50$$

三个数的最大公因数为 25，各项同除以 25，得

$$150 : 125 : 50 = (150 \div 25) : (125 \div 25) : (50 \div 25) = 6 : 5 : 2$$

答：面粉、黄油、糖的最简整数比为 6 : 5 : 2。

方法：先看原料顺序与单位，再找三个质量数的最大公因数。

辨析：最简整数比是各项共同约数仅为 1，最简分数是分子分母互质。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/11 Q8]

提示：看分子分母的质因数，比较共有因子及其个数。

Write the fraction $\frac{24}{84}$ in its simplest form.

将分数 $\frac{24}{84}$ 化为最简分数。

✓ **答案**

$$\frac{2}{7}$$

解析 将分子、分母分解质因数，得

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

共有的质因数相乘，得最大公因数

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

分子、分母同除以 12，得

$$\frac{24}{84} = \frac{24 \div 12}{84 \div 12} = \frac{2}{7}$$

2 与 7 没有大于 1 的公因数。

答：最简分数为 $\frac{2}{7}$。

2. [2023 · May/June 0580/13 Q2]

提示：看分子分母的变化，比较两者所乘的数是否相同。

Write down a fraction that is equivalent to $\frac{7}{9}$.

写出一个与 $\frac{7}{9}$ 相等的分数。

✓ **答案**

$$\frac{14}{18}$$

解析 分子、分母同乘非零整数 2，得

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 2}{9 \times 2} = \frac{14}{18}$$

答：一个与 $\frac{7}{9}$ 相等的分数为 $\frac{14}{18}$。

3. [2024 · February/March 0580/32 Q6(b)]
提示：先把图上高度与实际高度换算成相同单位。

(b) A tower has a height of 16 metres.
When Jai makes a scale drawing of the tower it has a height of 20 cm.

Work out the scale Jai uses, giving your answer in the form $1 : n$.

(b) 一座塔高 16 m。
Jai 绘制这座塔的比例图时，图中塔的高度为 20 cm。
求 Jai 使用的比例尺，答案写成 $1 : n$ 的形式。

✓ **答案**

$$1 : 80$$

解析 将实际高度换算成厘米，得

$$16\ \text{m} = 16 \times 100\ \text{cm} = 1600\ \text{cm}$$

比例尺为图上长度与实际长度的比，故

$$20 : 1600 = (20 \div 20) : (1600 \div 20) = 1 : 80$$

答：比例尺为 1 : 80。

4. [2024 · May/June 0580/41 Q1(a)(ii)]
提示：按题目指定的雨林顺序，从表中取出三个面积数。

(a) The table shows the areas, in km^2, of the four largest rainforests in the world.

Rainforest	Area (km^2)
Amazon	5 500 000
Congo	2 000 000
Atlantic	1 315 000
Valdivian	250 000

(ii) Write, in its simplest form, the ratio of the areas of the rainforests Valdivian : Atlantic : Congo.

(a) 下表列出了世界上面积最大的四片雨林的面积，单位为 km^2。
雨林名称及面积：
亚马孙雨林：5500000km^2；
刚果雨林：2000000km^2；
大西洋雨林：1315000km^2；
瓦尔迪维亚雨林：250000km^2。
(ii) 按瓦尔迪维亚雨林、大西洋雨林、刚果雨林的顺序，写出三者的面积比，并化为最简整数比。

✓ **答案**

$$50 : 263 : 400$$

解析 三片雨林的面积单位相同，按所给顺序写比，得

$$250000 : 1315000 : 2000000$$

各项同除以 5000，得

$$250000 : 1315000 : 2000000 = (250000 \div 5000) : (1315000 \div 5000) : (2000000 \div 5000) = 50 : 263 : 400$$

所得三项没有大于 1 的公因数。

答：所求最简整数比为 50 : 263 : 400。

5. [2024 · October/November 0580/31 Q5(b)(ii)(a)]

提示：先把比中的小数化为整数，保持各项的比值不变。

(b) Arit, Luke and Marie share the cost of a taxi journey.
The cost is $26.40 .

(ii) They decide to share the cost in proportion to the distance they each travel in the taxi.
Arit travels 12 km, Luke travels 3 km and Marie travels 7.5 km.

(a) Write the ratio 12 : 3 : 7.5 in its simplest form.

(b) Arit、Luke 和 Marie 分摊一次出租车行程的费用。
车费共 26.40 美元。
(ii) 他们决定按各自乘坐出租车的路程比例分摊车费。
Arit 乘坐 12 km，Luke 乘坐 3 km，Marie 乘坐 7.5 km。
(a) 将比 12 : 3 : 7.5 化为最简整数比。

✓ **答案**

$$8 : 2 : 5$$

解析 各项同乘 10，将小数化为整数，得

$$12 : 3 : 7.5 = (12 \times 10) : (3 \times 10) : (7.5 \times 10) = 120 : 30 : 75$$

三个整数的最大公因数为 15，故

$$120 : 30 : 75 = (120 \div 15) : (30 \div 15) : (75 \div 15) = 8 : 2 : 5$$

答：最简整数比为 8 : 2 : 5。

1.14 移位相减，把循环小数化成分数

题型 1 移位相减，把循环小数化成分数（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **循环范围辨认：** 例题中，圆点分别标在 2 和 1 上。两圆点之间的数字（含端点）反复出现，循环节为_____。

$$0.6\dot{2}\dot{1} = 0.6212121...$$

② **移位对齐尾部：** 设 x 表示例题中的循环小数。先乘 10，使循环节从小数点后开始。循环节有两位，再乘 100，使两式的小数部分相同。

$$x = 0.6212121...$$

$$10x = 6.212121...$$

$$1000x = 621.212121...$$

③ **相减消去循环：** 两式的小数部分相同，相减后抵消。未知数 x 的系数为_____。

$$(1000 - 10)x = 621.212121... - 6.212121... = 615$$

④ **分数约成最简：** 等式两边同除以 990，解出 x。分子、分母同除以公因数 15，得到最简分数。

$$x = \frac{615}{990} = \frac{615 \div 15}{990 \div 15} = \frac{41}{66}$$

⑤ **一位循环对齐：**只有一个圆点时，该位数字反复出现。以 $0.1\dot{3}$ 为例，设 y 表示这个小数。循环节有一位，移位后再乘_____，两式的小数部分便相同。

$$y = 0.133333...$$

$$10y = 1.333333...$$

$$100y = 13.333333...$$

填空：①21　②990　③10

点石成金　题目出现循环小数并要求化成分数时，先设未知数，乘以适当的十的幂，使两式的小数部分相同。

例 1　[2023 · May/June 0580/22 Q16]

Write $0.62\dot{1}$ as a fraction in its simplest form.
You must show all your working.

将 $0.62\dot{1}$ 化为最简分数。
必须写出全部计算过程。

解答　设 $x = 0.62\dot{1} = 0.6212121...$，则

$$10x = 6.212121...$$

$$1000x = 621.212121...$$

两式相减，得

$$1000x - 10x = 621.212121... - 6.212121...$$

$$990x = 615$$

$$x = \frac{615}{990} = \frac{615 \div 15}{990 \div 15} = \frac{41}{66}$$

答：所求最简分数为 $\frac{41}{66}$。

方法：先看圆点确定循环范围，再设未知数移位对齐尾部。

辨析：6 是非循环部分，21 是循环节，移位时两者分开计位。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/21 Q12]

提示：看单圆点所在位，比较两次移位后的小数部分。

Write $0.4\dot{2}$ as a fraction in its simplest form.
You must show all your working.

将 $0.4\dot{2}$ 化为最简分数。
必须写出全部计算过程。

答案

$$\frac{19}{45}$$

解析　设 $x = 0.4\dot{2} = 0.422222...$，则

$$10x = 4.222222...$$

$$100x = 42.222222...$$

两式相减，得

$$100x - 10x = 42.222222... - 4.222222...$$

$$90x = 38$$

$$x = \frac{38}{90} = \frac{38 \div 2}{90 \div 2} = \frac{19}{45}$$

答：所求最简分数为 $\frac{19}{45}$。

2. [2023 · May/June 0580/23 Q14]
提示：看双圆点圈定的位数，比较移位后的循环尾部。

Write $0.58\dot{1}$ as a fraction.
You must show all your working and give your answer in its simplest form.

将 $0.58\dot{1}$ 化为分数。
必须写出全部计算过程，并将答案化为最简分数。

✓ **答案**

$$\frac{32}{55}$$

解析 设 $x = 0.58\dot{1} = 0.5818181...$，则

$$10x = 5.818181...$$

$$1000x = 581.818181...$$

两式相减，得

$$1000x - 10x = 581.818181... - 5.818181...$$

$$990x = 576$$

$$x = \frac{576}{990} = \frac{576 \div 18}{990 \div 18} = \frac{32}{55}$$

答：所求最简分数为 $\frac{32}{55}$。

3. [2025 · May/June 0580/21 Q7]
提示：先看圆点标在哪一位，再移位使两式的小数部分相同。

Write the recurring decimal $0.2\dot{6}$ as a fraction.
Give your answer in its simplest form.

将循环小数 $0.2\dot{6}$ 化为分数。
答案须为最简分数。

✓ **答案**

$$\frac{4}{15}$$

解析 设

$$x = 0.2\dot{6} = 0.266666...$$

则

$$10x = 2.666666...$$

$$100x = 26.666666...$$

两式的小数部分相同，相减得

$$100x - 10x = 26.666666... - 2.666666...$$

$$90x = 24$$

$$x = \frac{24}{90} = \frac{24 \div 6}{90 \div 6} = \frac{4}{15}$$

答：所求最简分数为 $\frac{4}{15}$。

4. [2025 · October/November 0580/21 Q11]

提示：循环节从小数点后第一位开始，先确定移位几位能与原式对齐。

Write $0.\dot{2}\dot{4}$ as a fraction in its simplest form.

将 $0.\dot{2}\dot{4}$ 化为最简分数。

✓ **答案**

$$\frac{8}{33}$$

解析 设

$$x = 0.\dot{2}\dot{4} = 0.242424...$$

循环节从小数点后第一位开始，且有两位，故

$$100x = 24.242424...$$

与原式相减，得

$$100x - x = 24.242424... - 0.242424...$$

$$99x = 24$$

$$x = \frac{24}{99} = \frac{24 \div 3}{99 \div 3} = \frac{8}{33}$$

答：所求最简分数为 $\frac{8}{33}$。

5. [2026 · May/June 0580/21 Q13(b)]

提示：先看圆点确定循环节，再移位使两式的小数部分相同。

(b) Write $0.6\dot{7}$ as a fraction.

(b) 将 $0.6\dot{7}$ 化为分数。

✓ **答案**

$$\frac{61}{90}$$

解析 设 $x = 0.6\dot{7} = 0.677777...$，则

$$10x = 6.777777...$$

$$100x = 67.777777...$$

两式的小数部分相同，相减得

$$100x - 10x = 67.777777... - 6.777777...$$

$$90x = 61$$

$$x = \frac{61}{90}$$

答：所求分数为 $\frac{61}{90}$。

1.15 标准式

题型 1 将数或计算结果写成标准式（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **平方的计算：** 0.3^2 表示两个 0.3 相乘，先求出平方的结果。

$$0.3^2 = 0.3 \times 0.3 = _____$$

② **十的整数次幂：** 正整数次幂按连乘计算，负整数次幂取相应正整数次幂的倒数。

正指数：

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

负指数：

$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$

③ **标准式的条件：** 将 0.09 改写为下式，9 是首因子。

$$0.09 = 9 \times 10^{-2}$$

标准式记为下式，a 是首因子，n 是整数。

$$a \times 10^n$$

a 至少为_____，且小于_____。

④ **小数点的调整：** 把小数点移到首个非零数字后，使首因子符合标准式的条件。向右移几位，指数取该位数的相反数；向左移几位，指数取该位数。

小数点右移 3 位：

$0.006 = 6 \times 0.001 = 6 \times 10^{-3}$

小数点左移 3 位：

$3200 = 3.2 \times 1000 = 3.2 \times 10^3$

⑤ **倒数的计算：** 1 除以一个非零数，所得结果称为这个数的倒数。除数含有 10 的整数次幂时，先将除数写成小数，再求商并写成标准式。

$$2 \times 10^{-3} = 2 \times 0.001 = 0.002$$

$$1 \div 0.002 = 1000 \div 2 = 500$$

$$500 = 5 \times 10^2$$

填空：①0.09　②1　③10

点石成金　题目要求用标准式表示时，先完成必要的运算，再使首因子至少为 1 且小于 10；若已给普通数，则从调整小数点开始。

例 1 [2023 · February/March 0580/12 Q21]

Calculate 0.3^2.
Give your answer in standard form.

计算 0.3^2。用标准式表示答案。

解答 由平方的意义，得

$$0.3^2 = 0.3 \times 0.3 = 0.09$$

将小数点向右移两位，得

$$0.09 = 9 \times 0.01 = 9 \times 10^{-2}$$

因 $1 \leq 9 < 10$，所得结果为标准式。
答：9×10^{-2}。

方法：先看平方运算，算出乘积，再移动小数点确定指数。

辨析：平方是两个相同数的积，乘二是原数的两倍。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/12 Q18(a)]

提示：看首个非零数字的位置，数清小数点左移的位数。

(a) Write 45 000 in standard form.

(a) 将 45000 写成标准式。

✓ **答案** 4.5×10^4

解析 将小数点向左移四位，得

$$45000 = 4.5 \times 10000 = 4.5 \times 10^4$$

因 $1 \leq 4.5 < 10$，所得结果为标准式。
答：4.5×10^4。

2. [2023 · May/June 0580/11 Q19]

提示：先看除数的负指数，求倒数后比较首因子与一、十。

Calculate $1 \div (6.4 \times 10^{-5})$.
Give your answer in standard form.

计算 $1 \div (6.4 \times 10^{-5})$。用标准式表示答案。

✓ **答案** 1.5625×10^4

解析 先将除数写成小数，得

$$6.4 \times 10^{-5} = 6.4 \times 0.00001 = 0.000064$$

$$1 \div 0.000064 = 1000000 \div 64 = 15625$$

将小数点向左移四位，得

$$15625 = 1.5625 \times 10^4$$

因 $1 \leq 1.5625 < 10$，所得结果为标准式。
答：1.5625×10^4。

3. [2024 · October/November 0580/32 Q2(f)(ii)]
提示：先将两个标准式写成普通数，再相除。

(ii) Calculate $1.732\times10^{3}\div5.73\times10^{-1}$.
Give your answer in standard form.

(ii) 计算下式。
$(1.732\times10^{3})\div(5.73\times10^{-1})$

用标准式表示答案。

✓ **答案**

$$3.02\times10^{3}$$

解析 先把标准式的两个数写成普通数。$1.732\times10^{3}=1732$
$5.73\times10^{-1}=0.573$
$1732\div0.573=3022.687609...$
用标准式表示，并保留三位有效数字。$3022.687609...\approx3.02\times10^{3}$
答：3.02×10^{3}。

4. [2025 · February/March 0580/12 Q2(c)]
提示：先把小数点移到首个非零数字后，再确定指数。

Write 0.07

(c) in standard form.

(c) 将 0.07 写成标准式。

✓ **答案**

$$7\times10^{-2}$$

解析 将小数点向右移两位，首因子为 7，得

$$0.07=7\times0.01=7\times10^{-2}$$

因 $1\le7<10$，所得结果为标准式。
答：7×10^{-2}。

5. [2025 · February/March 0580/42 Q9(b)]
提示：先算出括号内的数，再求平方。

(b) Work out $\left(4\times10^{4}\right)^{2}$.
Give your answer in standard form.

(b) 计算 $(4\times10^{4})^{2}$。用标准式表示答案。

✓ **答案** 1.6×10^{9}

解析 先求括号内的数，得

$$4\times10^{4}=4\times10000=40000$$

由平方的意义，得

$$(4\times10^{4})^{2}=40000\times40000=1600000000$$

将小数点向左移九位，得

$$1600000000=1.6\times10^{9}$$

因 $1\le1.6<10$，所得结果为标准式。
答：1.6×10^{9}。

1.16 通分后计算分数的和与差

题型 1 通分后计算分数的和与差（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **认识带分数：** 在 $5\frac{11}{12}$ 中，11 是分子，12 是分母。整数部分与分数部分_____，组成带分数。

$$5\frac{11}{12}=5+\frac{11}{12}$$

② **带分数化假分数：** 分子不小于分母的分数叫假分数。整数部分乘分母再加分子，作为新分子，分母不变。

$$5\frac{11}{12}=\frac{5\times12+11}{12}=\frac{71}{12}$$

$$2\frac{1}{4}=\frac{2\times4+1}{4}=\frac{9}{4}$$

③ **异分母先通分：** 分母不同，先化成分母相同的分数，叫作通分。分子、分母同时乘_____，分数值不变。分母 12 是 4 的倍数，可取 12 作公分母。

$$\frac{9}{4}=\frac{9\times3}{4\times3}=\frac{27}{12}$$

④ **同分母的加减：** 分母相同，分母_____，分子相加或相减。分母互不整除时，可用两分母的乘积作公分母。

相加：

$$\frac{71}{12}+\frac{27}{12}=\frac{71+27}{12}=\frac{98}{12}$$

相减，公分母取 $3\times5=15$：

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{5}{15}-\frac{3}{15}$$

$$\frac{5}{15}-\frac{3}{15}=\frac{5-3}{15}=\frac{2}{15}$$

⑤ **结果约成最简：** 分子、分母有大于 1 的公因数，便同时除以这个公因数。约成最简分数后，分子、分母的公因数只有_____。

$$\frac{98}{12}=\frac{98\div2}{12\div2}=\frac{49}{6}$$

⑥ **假分数化带分数：**分子除以分母，商作整数部分，余数作分子，分母不变。用最简分数化成的带分数也是最简形式。

$$49 = 8 \times 6 + 1$$

$$\frac{49}{6} = 8\frac{1}{6}$$

填空：①相加　②相同的非零数　③不变　④1

点石成金　题目出现带分数的和或差，并要求写成最简带分数时，先把带分数化为假分数，再通分计算。

例 1　[2023 · May/June 0580/13 Q24]

Without using a calculator, work out $5\frac{11}{12} + 2\frac{1}{4}$.

You must show all your working and give your answer as a mixed number in its simplest form.

不得使用计算器，计算下式。

$$5\frac{11}{12} + 2\frac{1}{4}$$

必须写出全部计算过程，并将答案写成最简带分数。

解答　把带分数化为假分数，得

$$5\frac{11}{12} = \frac{5 \times 12 + 11}{12} = \frac{71}{12}$$

$$2\frac{1}{4} = \frac{2 \times 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

方法：先看两个分母的倍数关系，再把带分数化成假分数。

辨析：通分是把分母改写得相同，约分是消去分子与分母的公因数。

通分后相加，得

$$5\frac{11}{12} + 2\frac{1}{4} = \frac{71}{12} + \frac{9}{4} = \frac{71}{12} + \frac{27}{12}$$

$$\frac{71}{12} + \frac{27}{12} = \frac{71 + 27}{12} = \frac{98}{12} = \frac{49}{6}$$

由

$$49 = 8 \times 6 + 1$$

得

$$\frac{49}{6} = 8\frac{1}{6}$$

答：$8\frac{1}{6}$。

针对练习

1. [2025 · May/June 0580/23 Q7(a)]

提示：先把两个分数化成同分母分数。

Work out.

(a) $\frac{5}{6} - \frac{7}{12}$

Give your answer as a fraction in its simplest form.

(a) 计算下式。

$$\frac{5}{6}-\frac{7}{12}$$

将答案写成最简分数。

✓ **答案**

$$\frac{1}{4}$$

解析 取 12 作公分母，得

$$\frac{5}{6}=\frac{5\times 2}{6\times 2}=\frac{10}{12}$$

通分后相减，再约分，得

$$\frac{5}{6}-\frac{7}{12}=\frac{10}{12}-\frac{7}{12}=\frac{10-7}{12}=\frac{3}{12}$$

$$\frac{3}{12}=\frac{3\div 3}{12\div 3}=\frac{1}{4}$$

答：$\frac{1}{4}$。

2. [2024 · May/June 0580/13 Q15]

提示：先看两个分母的倍数关系，确定公分母。

Without using a calculator, work out $\frac{3}{7}-\frac{1}{14}$.

You must show all your working and give your answer as a fraction in its simplest form.

不得使用计算器，计算下式。

$$\frac{3}{7}-\frac{1}{14}$$

必须写出全部计算过程，并将答案写成最简分数。

✓ **答案**

$$\frac{5}{14}$$

解析 取 14 作公分母，得

$$\frac{3}{7}=\frac{3\times 2}{7\times 2}=\frac{6}{14}$$

通分后相减，得

$$\frac{3}{7}-\frac{1}{14}=\frac{6}{14}-\frac{1}{14}=\frac{6-1}{14}=\frac{5}{14}$$

分子、分母的公因数只有 1，所得分数已是最简分数。

答：$\frac{5}{14}$。

3. [2023 · October/November 0580/12 Q19]

提示：比较两个分母的倍数关系，核对分子是否乘了相同的数。

Without using a calculator, work out $3\frac{1}{8}-1\frac{3}{4}$.

You must show all your working and give your answer as a mixed number in its simplest form.

不得使用计算器，计算下式。

$$3\frac{1}{8}-1\frac{3}{4}$$

必须写出全部计算过程，并将答案写成最简带分数。

✓ **答案**

$$1\frac{3}{8}$$

解析 把带分数化为假分数，得

$$3\frac{1}{8}=\frac{3\times 8+1}{8}=\frac{25}{8}$$

$$1\frac{3}{4}=\frac{1\times 4+3}{4}=\frac{7}{4}$$

通分后相减，得

$$3\frac{1}{8}-1\frac{3}{4}=\frac{25}{8}-\frac{7}{4}=\frac{25}{8}-\frac{14}{8}$$

$$\frac{25}{8}-\frac{14}{8}=\frac{25-14}{8}=\frac{11}{8}$$

所得分数已最简，由

$$11=1\times 8+3$$

得

$$\frac{11}{8}=1\frac{3}{8}$$

答：$1\frac{3}{8}$。

4. [2023 · October/November 0580/31 Q1(h)]

提示：先看两个分母是否互质，再核对通分后的减法顺序。

(h) Without using a calculator, work out $5\frac{2}{3}-2\frac{1}{5}$.

You must show all your working and give your answer as a mixed number in its simplest form.

(h) 不得使用计算器，计算下式。

$$5\frac{2}{3}-2\frac{1}{5}$$

必须写出全部计算过程，并将答案写成最简带分数。

✓ **答案**

$$3\frac{7}{15}$$

解析 把带分数化为假分数，得

$$5\frac{2}{3}=\frac{5\times 3+2}{3}=\frac{17}{3}$$

$$2\frac{1}{5}=\frac{2\times5+1}{5}=\frac{11}{5}$$

取 15 作公分母，得

$$\frac{17}{3}=\frac{17\times5}{3\times5}=\frac{85}{15}$$

$$\frac{11}{5}=\frac{11\times3}{5\times3}=\frac{33}{15}$$

于是

$$5\frac{2}{3}-2\frac{1}{5}=\frac{85}{15}-\frac{33}{15}=\frac{85-33}{15}=\frac{52}{15}$$

所得分数已最简，由

$$52=3\times15+7$$

得

$$\frac{52}{15}=3\frac{7}{15}$$

答：$3\frac{7}{15}$。

5. [2024 · February/March 0580/12 Q24]

提示：先把带分数化为假分数，再通分。

Without using a calculator, work out $1\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$.

You must show all your working and give your answer as a fraction in its simplest form.

不得使用计算器，计算下式。

$$1\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$$

必须写出全部计算过程，并将答案写成最简分数。

✓ **答案**

$$\frac{5}{12}$$

解析 把带分数化为假分数，得

$$1\frac{1}{4}=\frac{1\times4+1}{4}=\frac{5}{4}$$

取 12 作公分母，得

$$\frac{5}{4}=\frac{5\times3}{4\times3}=\frac{15}{12}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5\times2}{6\times2}=\frac{10}{12}$$

通分后相减，得

$$1\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{15}{12}-\frac{10}{12}=\frac{15-10}{12}=\frac{5}{12}$$

分子、分母的公因数只有 1，所得分数已是最简分数。

答：$\frac{5}{12}$。

1.17 分数运算

题型 1 分数除法：先化假分数，再乘倒数（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **除数求倒数：**将 $\frac{4}{7}$ 平均分成 8 份，求每份的数。把非零除数写成分数，交换分子、分母，所得为其倒数。一个数与它的倒数相乘得 1。

$$8=\frac{8}{1}$$

$$8\times\frac{1}{8}=1$$

② **除法改乘法：**除数不为 0 时，除以它改为乘它的_____。被除数不变。

$$\frac{4}{7}\div 8=\frac{4}{7}\times\frac{1}{8}$$

③ **分数相乘运算：**两个分数相乘，分子乘分子，分母乘分母。

$$\frac{4}{7}\times\frac{1}{8}=\frac{4\times 1}{7\times 8}=\frac{4}{56}$$

④ **分数约成最简：**分子、分母同除以一个大于 1 的公因数，分数值不变。两者的公因数只有 1 时，所得为_____。

$$\frac{4}{56}=\frac{4\div 4}{56\div 4}=\frac{1}{14}$$

⑤ **带分数化假分数：**带分数表示整数与后面的分数相加。整数乘分母再加分子，作新分子，分母不变。分子不小于分母的分数称为假分数。

$$1\frac{2}{5}=1+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1\times 5+2}{5}=\frac{7}{5}$$

⑥ **假分数化带分数：**假分数的分子除以分母有余数时，可写成带分数。商作_____，余数作分子，分母不变。

$$7=5\times 1+2$$

$$\frac{7}{5}=1+\frac{2}{5}=1\frac{2}{5}$$

填空：①倒数　②最简分数　③整数部分

点石成金　题目出现分数除以整数、分数或带分数时，先把带分数化为假分数，再乘除数的倒数。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q16]

Without using a calculator, work out $\frac{4}{7} \div 8$.

You must show all your working and give your answer as a fraction in its simplest form.

不使用计算器，计算：

$$\frac{4}{7} \div 8$$

必须写出所有计算过程，并将答案写成最简分数。

解答　除以 8，改为乘它的倒数，得

$$\frac{4}{7} \div 8 = \frac{4}{7} \times \frac{1}{8} = \frac{4 \times 1}{7 \times 8} = \frac{4}{56}$$

分子、分母同除以 4，得

$$\frac{4}{56} = \frac{4 \div 4}{56 \div 4} = \frac{1}{14}$$

答：$\frac{1}{14}$。

方法：先看除号后的整数，把它写成分母为一的分数，再求倒数。

辨析：取倒数是交换分子与分母，约分是分子、分母同除公因数。

针对练习

1. [2024 · October/November 0580/22 Q7]

提示：先求除号后分数的倒数。

Without using a calculator, work out $\frac{2}{7} \div \frac{6}{11}$.

You must show all your working and give your answer as a fraction in its simplest form.

不使用计算器，计算：

$$\frac{2}{7} \div \frac{6}{11}$$

必须写出所有计算过程，并将答案写成最简分数。

✓ **答案**　$\frac{11}{21}$

解析　除以 $\frac{6}{11}$，改为乘它的倒数，得

$$\frac{2}{7} \div \frac{6}{11} = \frac{2}{7} \times \frac{11}{6} = \frac{2 \times 11}{7 \times 6} = \frac{22}{42}$$

分子、分母同除以 2，得

$$\frac{22}{42} = \frac{22 \div 2}{42 \div 2} = \frac{11}{21}$$

答：$\frac{11}{21}$。

2. [2023 · May/June 0580/12 Q14]

提示：先看除数中的带分数，化成假分数后再确定倒数。

Without using a calculator, work out $\frac{4}{7} \div 1\frac{5}{2}$

You must show all your working and give your answer as a fraction in its simplest form.

不使用计算器，计算：

$$\frac{4}{7} \div \left(1\frac{5}{21}\right)$$

必须写出所有计算过程，并将答案写成最简分数。

✓ **答案** $\frac{6}{13}$

解析 将带分数化为假分数，得

$$1\frac{5}{21}=\frac{1\times 21+5}{21}=\frac{26}{21}$$

除以 $\frac{26}{21}$，改为乘它的倒数，得

$$\frac{4}{7}\div\left(1\frac{5}{21}\right)=\frac{4}{7}\times\frac{21}{26}=\frac{4\times 21}{7\times 26}=\frac{84}{182}$$

分子、分母同除以 14，得

$$\frac{84}{182}=\frac{84\div 14}{182\div 14}=\frac{6}{13}$$

答：$\frac{6}{13}$。

3. [2023 · May/June 0580/11 Q20]

提示：先看被除数中的带分数，改乘法后找可约去的公因数。

Without using a calculator, work out $2\frac{1}{7}\div\frac{5}{9}$.

You must show all your working and give your answer as a mixed number in its simplest form.

不使用计算器，计算：

$$2\frac{1}{7}\div\frac{5}{9}$$

必须写出所有计算过程，并将答案写成最简带分数。

✓ **答案** $3\frac{6}{7}$

解析 将带分数化为假分数，得

$$2\frac{1}{7}=\frac{2\times 7+1}{7}=\frac{15}{7}$$

除以 $\frac{5}{9}$，改为乘它的倒数，得

$$2\frac{1}{7}\div\frac{5}{9}=\frac{15}{7}\times\frac{9}{5}=\frac{15\times 9}{7\times 5}=\frac{135}{35}$$

分子、分母同除以 5，得

$$\frac{135}{35}=\frac{135\div 5}{35\div 5}=\frac{27}{7}$$

由分子除以分母，得

$$27=7\times 3+6$$

$$\frac{27}{7}=3+\frac{6}{7}=3\frac{6}{7}$$

答：$3\frac{6}{7}$。

4. [2025 · May/June 0580/23 Q7(b)]

提示：先将带分数化为假分数，再把除法改为乘法。

Work out.

(b) $1\frac{1}{3} \div \frac{8}{15}$

Give your answer as a mixed number in its simplest form.

计算：
(b) $1\frac{1}{3} \div \frac{8}{15}$
将答案写成最简带分数。

✓ **答案** $2\frac{1}{2}$

解析 将带分数化为假分数，得

$$1\frac{1}{3} = \frac{1 \times 3 + 1}{3} = \frac{4}{3}$$

除以 $\frac{8}{15}$，改为乘它的倒数，得

$$\frac{4}{3} \div \frac{8}{15} = \frac{4}{3} \times \frac{15}{8} = \frac{4 \times 15}{3 \times 8} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$$

由分子除以分母的商和余数，得

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

答：$2\frac{1}{2}$。

5. [2025 · October/November 0580/11 Q28]
提示：先把除号两边的带分数都化为假分数。

Work out $8\frac{2}{3} \div 1\frac{5}{8}$.

Give your answer as a mixed number in its simplest form.

计算：
$8\frac{2}{3} \div \left(1\frac{5}{8}\right)$

将答案写成最简带分数。

✓ **答案** $5\frac{1}{3}$

解析 将两个带分数分别化为假分数，得

$$8\frac{2}{3} = \frac{8 \times 3 + 2}{3} = \frac{26}{3}$$

$$1\frac{5}{8} = \frac{1 \times 8 + 5}{8} = \frac{13}{8}$$

除以 $\frac{13}{8}$，改为乘它的倒数，得

$$\frac{26}{3} \div \frac{13}{8} = \frac{26}{3} \times \frac{8}{13} = \frac{26 \times 8}{3 \times 13} = \frac{208}{39}$$

分子、分母同除以 13，得

$$\frac{208}{39} = \frac{208 \div 13}{39 \div 13} = \frac{16}{3}$$

由分子除以分母的商和余数，得

$$16 = 3 \times 5 + 1$$

$$\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

答：$5\frac{1}{3}$。

1.18 整体乘所占分数求部分

题型 1 整体乘所占分数求部分（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **等分所占分数：** Kai 的木条长 57 cm，平均分成 4 份。每份占全长的 _____。

② **求一份的长度：** 将全长乘每份所占分数，得到一份的长度。

$$57 \times \frac{1}{4} = 57 \div 4 = 14.25 \text{ cm}$$

把整体量乘所占分数，得到部分量。

$$\text{部分量} = \text{整体量} \times \text{所占分数}$$

③ **求几份的长度：** 这根木条平均分成 4 份，取 3 份。所取长度占全长的 $\frac{3}{4}$，先除以分母，再乘分子。

$$57 \times \frac{3}{4} = 57 \div 4 \times 3 = 42.75 \text{ cm}$$

④ **损失后求剩余：** 若这根木条损失全长的 $\frac{1}{4}$，将全长看作 1。用 1 减去损失分数，得到剩余分数 _____。

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

将全长乘剩余分数，得到剩余长度。

$$57 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 57 \times \frac{3}{4} = 42.75 \text{ cm}$$

填空：①$\frac{1}{4}$　②$\frac{3}{4}$

点石成金　题目出现总量及所占分数，或平均分成若干份时，先确定所求部分占整体的分数。

例 1 [2023 · May/June 0580/12 Q4(a)]

Kai and Ava each have a piece of wood 57 cm long.

(a) Kai cuts his piece into 4 equal length parts.

Find the length of one part.

Kai 和 Ava 各有一根长 57 cm 的木条。
(a) Kai 将他的木条切成长度相等的 4 份。
求其中一份的长度。

解答 平均分成 4 份，每份占全长的 $\frac{1}{4}$。

$$57 \times \frac{1}{4} = 57 \div 4 = 14.25 \text{ cm}$$

方法：先看全长和等分份数，从每份占全长几分之一起手。

答：一份的长度为 14.25 cm。

! 辨析：所占分数是部分与整体的比，部分量是对应的实际数量。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/41 Q1(a)(iv)]
提示：先看损失占总数的分数，求剩余时用整体减去损失。

(a) An orchard has 1250 trees.
The trees are in the ratio apple : pear : 12 : 9 : 4.

(iv) The orchard loses $\frac{1}{5}$ of its total number of trees in a storm.

Calculate the number of trees that remain.

1（a）一个果园有 1250 棵树。
树木按种类的数量比为 12 : 9 : 4，前两类依次为苹果树和梨树。
（iv）果园在一场暴风雨中损失了树木总数的 $\frac{1}{5}$。
计算剩余树木的数量。

✓ **答案** 1000 棵
解析 损失的树占总数的 $\frac{1}{5}$，剩余的树占总数的
$1-\frac{1}{5}=\frac{5}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$。
剩余树木的数量为
$1250\times\frac{4}{5}=1250\div5\times4=1000$。
答：剩余 1000 棵树。

2. [2023 · October/November 0580/12 Q4]
提示：看五分之二，分母确定等分份数，分子确定取几份。

Work out $\frac{2}{5}$ of 180.

计算 180 的 $\frac{2}{5}$。

✓ **答案** 72
解析 将整体 180 乘所占分数 $\frac{2}{5}$，得
$180\times\frac{2}{5}=180\div5\times2=36\times2=72$。
答：结果为 72。

3. [2023 · October/November 0580/31 Q1(f)]
提示：看整体与分母能否整除，再按分子取相应份数。

(f) Work out $\frac{3}{7}$ of 126.

（f）计算 126 的 $\frac{3}{7}$。

✓ **答案** 54
解析 将整体 126 乘所占分数 $\frac{3}{7}$，得
$126\times\frac{3}{7}=126\div7\times3=18\times3=54$。
答：结果为 54。

4. [2023 · October/November 0580/33 Q1(b)(i)]
提示：看总金额对应的整体，先求五等份中的一份金额。

(b) (i) Work out $\frac{2}{5}$ of \$2400.

(b)（i）计算 2400 美元的 $\frac{2}{5}$。

✓ **答案** 960 美元

解析 将总金额 2400 美元乘所占分数 $\frac{2}{5}$，得

$2400 \times \frac{2}{5} = 2400 \div 5 \times 2 = 480 \times 2 = 960$。

答：结果为 960 美元。

5. [2024 · October/November 0580/13 Q3]
提示：先写出每段占全长的分数。

A piece of string has length 65.1 cm.
The string is cut into 7 equal pieces.

Find the length of each piece.

一根绳子长 65.1 cm。
这根绳子被剪成长度相等的 7 段。
求每段的长度。

✓ **答案** 9.3 cm

解析 平均分成 7 段，每段占全长的 $\frac{1}{7}$。

$$65.1 \times \frac{1}{7} = 65.1 \div 7 = 9.3 \text{ cm}$$

答：每段长 9.3 cm。

1.19 部分除以所占分数还原整体

题型 1 部分除以所占分数还原整体（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **部分与整体：** 剩余的 12 罐占开始罐数的 $\frac{3}{13}$。开始罐数是_____，剩余罐数是部分。

② **按份数还原：** 整体分成 13 等份，其中 3 份共 12 罐。先除以 3 求每份罐数，再乘 13 求整体。

$$12 \div 3 \times 13 = 4 \times 13 = 52$$

③ **分数除法：** 除以一个非零分数，等于乘它的_____。已知部分及其所占分数，可用除法还原整体。

$$12 \div \left(\frac{3}{13}\right) = 12 \times \frac{13}{3} = 52$$

$$\text{整体量} = \text{部分量} \div \text{所占分数}$$

④ **求其余部分：** 开始罐数减去剩余罐数，得到两者相差的罐数。

$$52 - 12 = 40$$

若已知的是已用量，求剩余量还要从整体中_____已用量。

$$\text{剩余量} = \text{整体量} - \text{已用量}$$

填空：①整体　②倒数　③减去

点石成金　题目出现已知部分及其占整体的分数，要求整体或其余部分时，先用已知部分除以它所占的分数。

例 1　[2023 · May/June 0580/23 Q6]

At the end of the day, a shopkeeper has 12 tins of cat food left.
This is $\frac{3}{13}$ of the number he had at the beginning of the day.

Calculate the number of tins he had at the beginning of the day.

一天结束时，一位店主还剩 12 罐猫粮。
这是他当天开始时猫粮罐数的 $\frac{3}{13}$。
计算他当天开始时有多少罐猫粮。

解答　由剩余的 12 罐占开始罐数的 $\frac{3}{13}$，得开始时的罐数为
$12 \div \left(\frac{3}{13}\right) = 12 \times \frac{13}{3} = 52$。
答：开始时有 52 罐猫粮。

方法：先找剩余罐数对应的分数，再用剩余罐数除以该分数。

! 辨析：部分量是剩余的罐数，整体量是开始的罐数。

针对练习

1. [2025 · October/November 0580/11 Q20]
提示：先用通过测试的人数求出一份的人数。

Some students take a test.
75 of the students pass the test.
This is $\frac{3}{5}$ of the students who take the test.

Work out how many students take the test.

一些学生参加了一次测试。
其中 75 名学生通过了测试。
通过测试的人数是参加测试总人数的 $\frac{3}{5}$。
计算参加测试的学生总人数。

✓ **答案**　125 名

解析　通过测试的 75 名学生占总人数的 $\frac{3}{5}$，即 3 份共 75 人。每份的人数为

$$75 \div 3 = 25$$

总人数对应 5 份，得

$$25 \times 5 = 125$$

答：参加测试的学生共有 125 名。

2. [2023 · May/June 0580/31 Q5(a)]
提示：先看购买费用占总资金的分数，还原总额后再扣除费用。

Antonio buys a restaurant for $240 000.
This is $\frac{5}{8}$ of the amount he has available to spend.

(a) Show that he has $144 000 left after buying the restaurant.

安东尼奥花 240000 美元买下一家餐馆。
这笔费用是他可支配总资金的 $\frac{5}{8}$。
(a) 证明他购买餐馆后还剩 144000 美元。

✓ **答案** 144000 美元
解析 由购买餐馆的费用占可支配总资金的 $\frac{5}{8}$，得可支配总资金为
$240000 \div \left(\frac{5}{8}\right) = 240000 \times \frac{8}{5} = 384000$（美元）。
购买餐馆后剩余的资金为
$384000 - 240000 = 144000$（美元）。
答：购买餐馆后还剩 144000 美元。

3. [2023 · October/November 0580/32 Q3(e)]
提示：看卖出株数对应几份，再比较买入总数对应几份。

(e) Ranjit buys some plants and sells $\frac{5}{11}$ of them.
He sells 190 plants.

Work out how many plants he buys.

(e) 兰吉特买了一些植物，并卖出了其中的 $\frac{5}{11}$。
他卖出了 190 株植物。
求他买了多少株植物。

✓ **答案** 418 株
解析 由卖出的 190 株占所买植物的 $\frac{5}{11}$，得买入的植物株数为
$190 \div \left(\frac{5}{11}\right) = 190 \times \frac{11}{5} = 418$。
答：他买了 418 株植物。

4. [2024 · October/November 0580/13 Q16]
提示：把卖出的支数看作部分量，用它除以所占分数。

Rio buys some pens.
He sells 63 pens, which is $\frac{7}{9}$ of the pens he buys.

Work out how many pens he buys.

里奥买了一些笔。
他卖出 63 支笔，这是他所买笔的总数的 $\frac{7}{9}$。
计算他买了多少支笔。

✓ **答案** 81 支
解析 卖出的 63 支占所买笔的总数的 $\frac{7}{9}$，所买笔的总数为

$$63 \div \left(\frac{7}{9}\right) = 63 \times \frac{9}{7} = \frac{567}{7} = 81$$

答：他买了 81 支笔。

5. [2026 · May/June 0580/13 Q11(b)]
提示：用绿色部分的面积除以它占总面积的分数。

$\frac{2}{5}$ of the area of a shape is blue, $\frac{3}{7}$ is green and the rest is red.

(b) $12\,\text{cm}^2$ of the shape is green.

Find the total area of the shape.

一个图形面积的 $\frac{2}{5}$ 为蓝色，$\frac{3}{7}$ 为绿色，其余部分为红色。
(b) 图形中绿色部分的面积为 12cm^2。求整个图形的面积。

✓ **答案**

$$28\text{cm}^2$$

解析 绿色部分占整个图形面积的 $\frac{3}{7}$，故整个图形的面积为

$$12 \div \left(\frac{3}{7}\right) = 12 \times \frac{7}{3} = 28 \quad \text{（平方厘米）}$$

答：整个图形的面积为 28cm^2。

1.20 先求一份量，再按比分配

题型 1 先求一份量，再按比分配（Core）

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **比与份数：** Alain 与 Beatrice 按 8 : 7 分钱，分别对应 8 份和 7 份。比中的数表示各项的_____，总份数由各项相加得到。

$$8 + 7 = 15$$

三项的比若为 2 : 3 : 5，也将各项相加。

$$2 + 3 + 5 = 10$$

② **求一份量：** 总量或其中一项的量，除以它对应的份数，得到一份量。例题中的金额均以美元计。

已知总金额为 750。

$750 \div (8 + 7) = 50$

已知 Alain 分得 400。

$400 \div 8 = 50$

③ **按份求量：** 一份量乘所求项的_____，得到该项的量。比中较大的数对应较大的量。

$$\text{目标量} = \text{一份量} \times \text{目标份数}$$

$$\text{Alain 的金额} = 50 \times 8 = 400$$

$$\text{Beatrice 的金额} = 50 \times 7 = 350$$

④ **金额化比：** 按投入金额分配时，先按姓名顺序写出金额的比。各项同除以相同的非零数，比值不变。

$$400 : 350 = (400 \div 50) : (350 \div 50) = 8 : 7$$

⑤ **合成连比：** 两组比含有共同项，先把共同项扩成相同份数。甲与乙的比为 2 : 3，甲与丙的比为 3 : 4，将甲统一为 _____ 份。

甲与乙的比：

$2 : 3 = (2 \times 3) : (3 \times 3) = 6 : 9$

甲与丙的比：

$3 : 4 = (3 \times 2) : (4 \times 2) = 6 : 8$

$$\text{甲} : \text{乙} : \text{丙} = 6 : 9 : 8$$

若共分 46 元，先求一份量，再求甲的金额。

$$46 \div (6 + 9 + 8) = 2$$

$$2 \times 6 = 12$$

⑥ **容积单位统一：** 1 L = 1000 mL。分配总容积前，先把总量换成题目要求的单位，例如0.45 L = 0.45 × 1000 = 450 mL。

填空：①份数　②份数　③6

点石成金　题目出现按比分配总量、已知一项求另一项或两组比含共同项时，先确定各项份数，再求一份量。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q1(a)(i)]

(a)　(i)　Alain and Beatrice share $750 in the ratio　Alain : Beatrice = 8 : 7.

Show that Alain receives $400.

(a)（i）Alain 和 Beatrice 分配 750 美元，分配比为 Alain：Beatrice = 8 : 7。证明 Alain 分得 400 美元。

解答　两人的总份数为

$$8 + 7 = 15$$

一份金额为

$$750 \div 15 = 50$$

Alain 对应 8 份，分得

$$50 \times 8 = 400$$

答：Alain 分得 400 美元，得证。

方法：先看总金额和两人的比，从相加求总份数起手，再求一份量。

辨析：份数是各项占有的份的数量，一份量是每份对应的实际金额。

针对练习

1.　[2023 · May/June 0580/32 Q3(b)(ii)]

提示：看儿童与成人的排列顺序，确定成人对应的份数。

(ii)　On the plane there are 315 people.
The ratio of　children : adults = 7 : 8.

Work out the number of adults on the plane.

(ii) 飞机上共有 315 人。儿童人数与成人人数的比为 7 : 8。求飞机上的成人人数。

✓ **答案**　168 人

解析　儿童与成人的总份数为

$$7 + 8 = 15$$

一份人数为

$$315 \div 15 = 21$$

成人对应 8 份，人数为

$$21 \times 8 = 168$$

答：飞机上有 168 名成人。

2. [2023 · May/June 0580/12 Q4(b)]
提示：比较比中两项的大小，较长段对应较多份数。

Kai and Ava each have a piece of wood 57 cm long.

(b) Ava cuts her piece into two parts and the lengths are in the ratio 5 : 1.

Find the length of the longer part.

Kai 和 Ava 各有一根长 57 cm 的木头。
(b) Ava 将她的木头切成两段，两段长度的比为 5 : 1。求较长一段的长度。

✓ **答案** 47.5 cm

解析 两段木头的总份数为

$$5 + 1 = 6$$

一份长度为

$$57 \div 6 = 9.5 \text{ cm}$$

较长的一段对应 5 份，其长度为

$$9.5 \times 5 = 47.5 \text{ cm}$$

答：较长的一段长 47.5 cm。

3. [2023 · October/November 0580/31 Q9(b)]
提示：看三类金属的总份数，再找铜对应哪一项。

(b) A clock made of metals has a mass of 1080 g.
The mass of each metal in the clock is in the ratio
copper : zinc : other metals = 21 : 14 : 1.

Calculate the mass of copper in this clock.

(b) 一座由金属制成的钟的质量为 1080 g。钟内各类金属的质量比为铜：锌：其他金属 = 21 : 14 : 1。计算这座钟中铜的质量。

✓ **答案** 630 g

解析 各类金属的总份数为

$$21 + 14 + 1 = 36$$

一份质量为

$$1080 \div 36 = 30 \text{ g}$$

铜对应 21 份，其质量为

$$30 \times 21 = 630 \text{ g}$$

答：这座钟中铜的质量为 630 g。

4. [2023 · May/June 0580/31 Q5(b)(i)(b)]
提示：看工资金额对应几份，再比较物料与工资的份数。

Antonio buys a restaurant for $240 000.
This is $\frac{5}{8}$ of the amount he has available to spend.

(b) Some of the $144 000 is spent on expenses.
Expenses are wages, equipment and supplies in the ratio

$$\text{wages : equipment : supplies} = 9 : 5 : 8.$$

The amount spent on wages is $45 000.

(i) Find the amount spent on

(b) supplies.

Antonio 花 240000 美元买下一家餐馆。这是他可用资金的 $\frac{5}{8}$。
(b) 144000 美元中的一部分用于支付开支。开支包括工资、设备和物料，金额比为工资：设备：物料 = 9 : 5 : 8。工资支出为 45000 美元。
(i)（b）求购买物料所花的金额。

✓ **答案** 40000 美元

解析 工资的 9 份对应 45000 美元，一份金额为

$$45000 \div 9 = 5000$$

物料对应 8 份，所花金额为

$$5000 \times 8 = 40000$$

答：购买物料花费 40000 美元。

5. [2023 · May/June 0580/31 Q5(b)(i)(a)]
提示：看工资对应的份数求一份量，再找设备的份数。

Antonio buys a restaurant for $240 000.
This is $\frac{5}{8}$ of the amount he has available to spend.

(b) Some of the $144 000 is spent on expenses.
Expenses are wages, equipment and supplies in the ratio

$$\text{wages : equipment : supplies} = 9 : 5 : 8.$$

The amount spent on wages is $45 000.

(i) Find the amount spent on

(a) equipment

Antonio 花 240000 美元买下一家餐馆。这是他可用资金的 $\frac{5}{8}$。
(b) 144000 美元中的一部分用于支付开支。开支包括工资、设备和物料，金额比为工资：设备：物料 = 9 : 5 : 8。工资支出为 45000 美元。
(i)（a）求购买设备所花的金额。

✓ **答案** 25000 美元

解析 工资的 9 份对应 45000 美元，一份金额为

$$45000 \div 9 = 5000$$

设备对应 5 份，所花金额为

$$5000 \times 5 = 25000$$

答：购买设备花费 25000 美元。

6. [2023 · May/June 0580/43 Q1(a)(ii)]
提示：看总金额覆盖哪几项，再核对自行车在比中的位置。

(a) Tomas sells a computer, a bike and a phone.
The amounts he receives are in the ratio computer : bike : phone = 14 : 17 : 9.

(ii) The total amount he receives is $560.

Calculate how much he receives for the bike.

(a) Tomas 出售一台电脑、一辆自行车和一部手机。他出售这三件物品所得金额的比为电脑：自行车：手机 = 14 : 17 : 9。
(ii) 他获得的总金额为 560 美元。计算他出售自行车获得的金额。

✓ **答案** 238 美元

解析 三件物品所得金额的总份数为

$$14 + 17 + 9 = 40$$

一份金额为

$$560 \div 40 = 14$$

自行车对应 17 份，所得金额为

$$14 \times 17 = 238$$

答：出售自行车获得 238 美元。

7. [2024 · February/March 0580/42 Q1(b)(ii)]
提示：先将三项份数相加，再求每份对应的质量。

A grocer sells potatoes, mushrooms and carrots.

(b) In one week, the ratio of the masses of vegetables sold by the grocer is

$$\text{potatoes : mushrooms : carrots} = 11 : 8 : 6.$$

(ii) The total mass of potatoes, mushrooms and carrots sold is 1500 kg.

Find the mass of carrots the grocer sells this week.

一位蔬菜商出售土豆、蘑菇和胡萝卜。
(b) 某一周，该商贩售出的蔬菜质量比为

$$\text{土豆 : 蘑菇 : 胡萝卜} = 11 : 8 : 6$$

(ii) 售出的土豆、蘑菇和胡萝卜的总质量为 1500 kg。求该商贩这一周售出的胡萝卜质量。

✓ **答案**

$$360 \text{ kg}$$

解析 三种蔬菜的总份数为

$$11 + 8 + 6 = 25$$

每份对应的质量为

$$1500 \div 25 = 60 \quad （千克）$$

胡萝卜对应 6 份，质量为

$$60 \times 6 = 360 \quad （千克）$$

答：这一周售出的胡萝卜质量为 360 kg。

8. [2024 · May/June 0580/42 Q1(b)]

提示：先把饮料总量换成毫升，再求每份对应的饮料量。

(b) One litre of fruit drink is shared between three cups.
The amount in the cups is in the ratio $9:6:10$.

Calculate the number of millilitres in each cup.

(b) 将 1 升果汁饮料分装在三个杯子中。三个杯子中的饮料量之比为 9 : 6 : 10。计算每个杯子中各有多少毫升饮料。

✓ **答案** 按比中各项的顺序，分别为 360 mL、240 mL、400 mL。

解析 将饮料总量换算为毫升，得

$$1\ \text{L} = 1000\ \text{mL}$$

三个杯子的总份数为

$$9 + 6 + 10 = 25$$

每份对应的饮料量为

$$1000 \div 25 = 40 \quad （毫升）$$

三个杯子中的饮料量分别为

$$40 \times 9 = 360 \quad （毫升）$$

$$40 \times 6 = 240 \quad （毫升）$$

$$40 \times 10 = 400 \quad （毫升）$$

答：按比中各项的顺序，三个杯子中分别有 360 mL、240 mL、400 mL 饮料。

9. [2023 · October/November 0580/33 Q3(b)]

提示：看三人的姓名顺序，逐项对应份数，合计金额应等于总额。

(b) Bobby, Carl and Davood share \$6875 in the ratio Bobby : Carl : Davood = 6 : 8 : 11.

Calculate the amount of money they each receive.

(b) Bobby、Carl 和 Davood 分配 6875 美元，分配比为 Bobby：Carl：Davood = 6 : 8 : 11。计算他们每人分得的金额。

✓ **答案** Bobby：1650 美元；Carl：2200 美元；Davood：3025 美元

解析 三人的总份数为

$$6 + 8 + 11 = 25$$

一份金额为

$$6875 \div 25 = 275$$

Bobby、Carl 和 Davood 分别对应 6、8、11 份，各自所得金额为

$$275 \times 6 = 1650$$

$$275 \times 8 = 2200$$

$$275 \times 11 = 3025$$

答：Bobby 分得 1650 美元，Carl 分得 2200 美元，Davood 分得 3025 美元。

10. [2023 · February/March 0580/42 Q1(b)]

提示：比较两组比中同一人的份数，统一后再合成连比。

(b) Carl, Dina and Eva share 100 oranges.
The ratio Carl's oranges : Dina's oranges = 3 : 5.
The ratio Carl's oranges : Eva's oranges = 2 : 3.

Find the number of oranges Carl receives.

(b) Carl、Dina 和 Eva 分配 100 个橙子。Carl 的橙子数量与 Dina 的橙子数量之比为 3 : 5。Carl 的橙子数量与 Eva 的橙子数量之比为 2 : 3。求 Carl 分得的橙子数量。

✓ **答案** 24 个

解析 将两组比中 Carl 对应的份数统一为 6，得

$$\text{Carl} : \text{Dina} = 3 : 5 = 6 : 10$$

$$\text{Carl} : \text{Eva} = 2 : 3 = 6 : 9$$

因此三人的连比为

$$\text{Carl} : \text{Dina} : \text{Eva} = 6 : 10 : 9$$

总份数为

$$6 + 10 + 9 = 25$$

一份橙子的数量为

$$100 \div 25 = 4$$

Carl 分得的橙子数量为

$$4 \times 6 = 24$$

答：Carl 分得 24 个橙子。

11. [2023 · May/June 0580/41 Q1(a)(i)]
提示：看三类树的总份数，再核对苹果树对应的份数。

(a) An orchard has 1250 trees.
The trees are in the ratio apple : pear : 12 : 9 : 4.

(i) Calculate the number of apple trees.

1（a）一个果园有 1250 棵树。三类树的数量比为 12 : 9 : 4，其中苹果树对应 12 份，梨树对应 9 份。
(i) 计算苹果树的数量。

✓ **答案** 600 棵

解析 三类树的总份数为

$$12 + 9 + 4 = 25$$

一份树的数量为

$$1250 \div 25 = 50$$

苹果树对应 12 份，其数量为

$$50 \times 12 = 600$$

答：果园中有 600 棵苹果树。

12. [2023 · October/November 0580/32 Q7(a)]
提示：按姓名顺序比较投资金额，化成份数后分配总利润。

Elize, Lily and Marco start a business.

(a) Elize invests $5000.
Lily invests $8000.
Marco invests $3000.

After one year they make a profit of $40 000.
They share this profit in the ratio of their investments.

Work out how much they each receive.

Elize、Lily 和 Marco 共同创业。
(a) Elize 投资 5000 美元，Lily 投资 8000 美元，Marco 投资 3000 美元。一年后，他们获得 40000 美元的利润。他们按各自投资金额的比分配这笔利润。求他们每人分得的金额。

✓ **答案** Elize：12500 美元；Lily：20000 美元；Marco：7500 美元

解析 利润按投资金额的比分配，三人的分配比为

$$\text{Elize} : \text{Lily} : \text{Marco} = 5000 : 8000 : 3000 = 5 : 8 : 3$$

总份数为

$$5 + 8 + 3 = 16$$

一份利润为

$$40000 \div 16 = 2500$$

三人各自分得的利润为

$$2500 \times 5 = 12500$$

$$2500 \times 8 = 20000$$

$$2500 \times 3 = 7500$$

答：Elize 分得 12500 美元，Lily 分得 20000 美元，Marco 分得 7500 美元。

1.21 根据单位率和份数求总量

题型 1 根据单位率和份数求总量（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **单位量乘份数：** 服务员每小时工资为 9.50 美元，每周工作 29 小时。用单位量乘份数，求出每周工资。

$$\text{总量} = \text{单位量} \times \text{份数}$$

$$\text{每周工资} = 9.50 \times 29 = \underline{\qquad} \text{（美元）}$$

② **多重单位相乘：** 每周工资为 275.50 美元，一年领薪 52 周。把每周工资再乘周数，求出全年工资。

$$\text{全年工资} = 9.50 \times 29 \times 52 = \underline{\qquad} \text{（美元）}$$

③ **各类总量相加：** 两类商品每件分别为 2 美元、3 美元，各买 4 件、2 件。分别用单价乘件数，再把两类费用相加。

$$\text{总费用} = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 8 + 6 = \underline{\qquad} \text{（美元）}$$

④ **固定金额另加：** 若服务员本周另有 20 美元奖金，奖金只加一次。先算时薪乘时数，再加固定额。

$$\text{本周工资} = 9.50 \times 29 + 20 = 275.50 + 20 = \underline{\qquad} \text{（美元）}$$

⑤ **标准形式表示：** 每周工资的数值为 275.50，小数点左移两位。乘以 10^2，保持数值不变。

$$275.50 = 2.755 \times 100 = \underline{\qquad} \times 10^2$$

标准形式写作下式，其中 a 为系数，n 为整数。

$$a \times 10^n, \quad 1 \le a < 10$$

⑥ **千克换算为吨：** 题目给出每吨等于 1000 千克。把千克数除以 1000，得到吨数。

$$1\ \text{t} = 1000\ \text{kg}$$

$$2500\ \text{kg} = (2500 \div 1000)\ \text{t} = \underline{\qquad}\ \text{t}$$

填空：①275.50　②14326　③14　④295.50　⑤2.755　⑥2.5

点石成金　题目出现每小时工资、每件价格等单位量及对应数量时，先用单位量乘数量，再按题意相加或换算单位。

例 1 [2023 · February/March 0580/32 Q1(b)(i)]

(b) (i) A waiter works 29 hours a week in the café.
He is paid $9.50 per hour.
He is paid for 52 weeks of the year.

Work out his total pay for the year.

(b)（i）一名服务员在咖啡馆每周工作 29 小时，每小时工资为 9.50 美元。一年中有 52 周领取工资。求他全年的工资总额。

解答 由每小时工资和每周工作时数，得每周工资为

$$9.50 \times 29 = 275.50 \text{（美元）}$$

一年领薪 52 周，全年工资为

$$275.50 \times 52 = 14326 \text{（美元）}$$

答：他全年的工资为 14326 美元。

方法：先找时薪和每周工时，相乘后再乘领薪周数。

辨析：周薪是一周的报酬，年薪是全年领薪各周的总报酬。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/33 Q2(a)]

提示：看两种水果各自的单价与购买量，分项算费用后合计。

A shop sells food and drink.

(a) Bananas cost $1.20 per kilogram and apples cost $2.25 per bag.

Work out the total cost of 3.5 kg of bananas and 2 bags of apples.

一家商店出售食品和饮料。
(a) 香蕉每千克售价 1.20 美元，苹果每袋售价 2.25 美元。
求购买 3.5 kg 香蕉和 2 袋苹果的总费用。

✓ **答案** 8.70 美元

解析 香蕉的费用为

$$1.20 \times 3.5 = 4.20 \quad （美元）$$

苹果的费用为

$$2.25 \times 2 = 4.50 \quad （美元）$$

总费用为

$$4.20 + 4.50 = 8.70 \quad （美元）$$

答：总费用为 8.70 美元。

2. [2023 · May/June 0580/33 Q2(d)(i)]

提示：看每千米收费对应的路程，固定费用另列一项。

A shop sells food and drink.

(d) Some customers have their shopping delivered to their home.
The cost is $5 plus $1.50 for each kilometre travelled from the shop to their home.

(i) Show that the cost for a customer living 10 km from the shop is $20.

一家商店出售食品和饮料。
(d) 一些顾客选择将所购物品送到家中。送货费用为固定收费 5 美元，加上从商店到顾客家每行驶一千米收取的 1.50 美元。
(i) 通过计算说明，一位住在距离商店 10 km 处的顾客，其送货费用为 20 美元。

✓ **答案** 20 美元

解析 每千米收费 1.50 美元，行驶 10 km 的费用为

$$1.50 \times 10 = 15 \quad （美元）$$

再加固定费用，得

$$5 + 15 = 20 \quad （美元）$$

答：该顾客的送货费用为 20 美元，与题目所给相符。

3. [2023 · October/November 0580/12 Q2]

提示：看工资公式中哪项随工时变化，哪项是固定金额。

Asha works in a café.
Her wage is calculated using the formula wage = hourly rate × number of hours + bonus.
Her hourly rate is $11.52 .
One week Asha works 25 hours and receives a bonus of $5.40 .

Work out her wage for this week.

阿莎在一家咖啡馆工作。她的工资按下列公式计算：

$$\text{工资} = \text{时薪} \times \text{工作时数} + \text{奖金}$$

她的时薪为 11.52 美元。某一周，阿莎工作了 25 小时，并获得 5.40 美元的奖金。
求她这一周的工资。

✓ **答案** 293.40 美元

解析 由题给工资公式，得

$$\text{工资} = 11.52 \times 25 + 5.40$$

$$11.52 \times 25 = 288 \quad （美元）$$

$$288 + 5.40 = 293.40 \quad （美元）$$

答：阿莎这一周的工资为 293.40 美元。

4. [2024 · February/March 0580/42 Q1(b)(iii)]

提示：先按质量比求售出的胡萝卜质量，再乘每千克的利润。

A grocer sells potatoes, mushrooms and carrots.

(b) In one week, the ratio of the masses of vegetables sold by the grocer is

$$\text{potatoes : mushrooms : carrots} = 11 : 8 : 6.$$

(ii) The total mass of potatoes, mushrooms and carrots sold is 1500 kg.

Find the mass of carrots the grocer sells this week.

(iii) The profit the grocer makes selling 1 kg of carrots is \$0.75 .

Find the total profit the grocer makes selling carrots this week.

一位蔬菜商出售土豆、蘑菇和胡萝卜。

(b) 某一周，该商贩售出的蔬菜质量比为

$$\text{土豆 : 蘑菇 : 胡萝卜} = 11 : 8 : 6$$

(ii) 售出的土豆、蘑菇和胡萝卜的总质量为 1500 kg。求该商贩这一周售出的胡萝卜质量。

(iii) 该商贩每售出 1 kg 胡萝卜可获利 0.75 美元。求他这一周出售胡萝卜获得的总利润。

✓ **答案** 270 美元

解析 由三种蔬菜的质量比，得总份数为

$$11 + 8 + 6 = 25$$

胡萝卜对应 6 份，售出的质量为

$$1500 \div 25 \times 6 = 60 \times 6 = 360 \quad （千克）$$

每千克胡萝卜获利 0.75 美元，故总利润为

$$0.75 \times 360 = 270 \quad （美元）$$

答：这一周出售胡萝卜获得的总利润为 270 美元。

5. [2023 · October/November 0580/32 Q1(d)(i)]
提示：看三类票价与人数的对应关系，各类费用分别计算后相加。

(d)

Ticket prices	
Adult	$35
Child	$20
Senior	$25

(i) Calculate the cost of 150 adult tickets, 70 child tickets and 30 senior tickets.

(d) 票价：成人票每张 35 美元，儿童票每张 20 美元，老年人票每张 25 美元。
(i) 计算购买 150 张成人票、70 张儿童票和 30 张老年人票的总费用。

✓ **答案** 7400 美元

解析 成人票的费用为

$$35 \times 150 = 5250 \quad （美元）$$

儿童票的费用为

$$20 \times 70 = 1400 \quad （美元）$$

老年人票的费用为

$$25 \times 30 = 750 \quad （美元）$$

总费用为

$$5250 + 1400 + 750 = 7400 \quad （美元）$$

答：这些票的总费用为 7400 美元。

6. [2023 · May/June 0580/41 Q1(a)(ii)]
提示：看每棵产量与树的总数，再比计算所得单位与所求单位。

(a) An orchard has 1250 trees.
The trees are in the ratio apple : pear : 12 : 9 : 4.

(ii) Last year in the orchard, the mean mass of fruit produced was 64 kg per tree.

Calculate the total mass of fruit produced last year.
Give your answer in tonnes.
[1 tonne = 1000 kg]

1 (a) 一个果园有 1250 棵树。苹果树、梨树和另一类树的数量比为 12 : 9 : 4。
(ii) 去年，果园平均每棵树生产的水果质量为 64 kg。
计算去年生产的水果总质量。答案以吨为单位。
[1 吨 = 1000 千克]

✓ **答案** 80 吨

解析 果园共有 1250 棵树，平均每棵产果 64 kg，总质量为

$$64 \times 1250 = 80000 \quad （千克）$$

由 1 吨等于 1000 千克，得

$$80000 \div 1000 = 80 \quad （吨）$$

答：去年水果的总产量为 80 吨。

1.22 用总量和单位率反求份数

题型 1 按单位率或相同倍率换算总量与份数（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **材料同步缩放：**例题由 20 块饼干改为 50 块。新数量除以原数量，得到倍率。每种材料的用量都乘 _____。

$$\frac{50}{20}=2.5$$

② **换成相同单位：**总量与每份用量的单位不同时，先换成相同单位。升化毫升、千米化米，数值均乘 _____。

$0.3\ \text{L}=0.3\times1000\ \text{mL}=300\ \text{mL}$　　$0.18\ \text{km}=0.18\times1000\ \text{m}=180\ \text{m}$

③ **总量反求份数：**共有 300 mL 牛奶，每杯用 50 mL。求能装满的杯数，用总量 _____ 每份用量。

$$\text{份数}=\frac{\text{总量}}{\text{每份用量}}=\frac{300}{50}=6$$

④ **路程反求时间：**匀速行驶时，速度表示每单位时间行驶的路程。行驶 180 m，速度为 3 m/s。所需时间用路程 _____ 速度求得。

$$\text{时间}=\frac{\text{路程}}{\text{速度}}=\frac{180\ \text{m}}{3\ \text{m/s}}=60\ \text{s}$$

⑤ **时长改写单位：**1 min 等于 _____ 个 s。以 s 计的时长除以 60，整数商写作 min，余数保留 s。

$$145=2\times60+25$$

$$145\ \text{s}=2\ \text{min}\ 25\ \text{s}$$

⑥ **按质量求长度：**同种均匀电线，长度与质量按相同倍率变化。原长 8 m、质量 1.2 kg，求 300 g 对应的长度。先将质量统一为克，再用新旧质量的倍率乘原长度。

$$1.2\ \text{kg}=1.2\times1000\ \text{g}=1200\ \text{g}$$

$$\frac{300}{1200}=\frac{1}{4}$$

$$8\ \text{m}\times\frac{1}{4}=2\ \text{m}$$

填空：①2.5　②1000　③除以　④除以　⑤60

点石成金　题目出现每份用量、恒定速度或新旧数量时，先统一单位，再用总量相除或求新旧数量的倍率。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q3(a)(ii)]

(a) A recipe for making 20 biscuits uses 150 g flour, 125 g butter and 50 g sugar.

(ii) Work out the amount of flour, butter and sugar needed to make 50 biscuits.

(a) 一份制作 20 块饼干的配方需要面粉 150 克、黄油 125 克和糖 50 克。

(ii) 求制作 50 块饼干所需的面粉、黄油和糖各多少克。

解答　所需饼干数与原数量的倍率为 $\frac{50}{20}=2.5$。

各材料用量均乘此倍率，得

$150\ \text{g}\times2.5=375\ \text{g}$，

$125\ \text{g}\times2.5=312.5\ \text{g}$，

方法：先看原有与所需饼干数，用所需数除以原有数求倍率。

$50\ \text{g} \times 2.5 = 125\ \text{g}$。
答：需要面粉 375 克、黄油 312.5 克和糖 125 克。

! 辨析：数量之比是缩放倍率，数量之差是增减的个数。

拓展：配方不变时，各种材料用量与饼干数量成正比。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/33 Q3(a)(ii)]
提示：先看总量与每杯用量的单位，再比较总量含几个每杯用量。

(a) Aneel has 80 tea bags, $\frac{1}{2}$ kg of sugar and 1 litre of milk.
To make a cup of tea he uses:

- 1 tea bag
- 8 grams of sugar
- 40 millilitres of milk.

(ii) During the day, Aneel uses all of the milk to make cups of tea.

Work out the total number of cups of tea Aneel makes.

(a) Aneel 有 80 个茶包、$\frac{1}{2}$ 千克糖和 1 升牛奶。
他每泡一杯茶需要：
• 1 个茶包；
• 8 克糖；
• 40 毫升牛奶。
(ii) 这一天，Aneel 用完了所有牛奶来泡茶。
求 Aneel 共泡了多少杯茶。

✓ **答案** 25 杯
解析 牛奶的总量为
$1\ \text{L} = 1000\ \text{mL}$。
每杯茶用 40 mL 牛奶，全部牛奶用完，所得杯数为
$\frac{1000}{40} = 25$。
答：Aneel 共泡了 25 杯茶。

2. [2025 · May/June 0580/21 Q18(a)]
提示：用跑步的路程除以跑步的速度。

One day, Anya runs 12 km at a speed of x km/h.
The next day she walks 10 km at a speed of $(x-4)$ km/h.

(a) Write down an expression, in terms of x, for the time she spends running.

一天，安雅以 x km/h 的速度跑了 12 km。
第二天，她以 $(x-4)$ km/h 的速度步行了 10 km。
(a) 用含 x 的式子表示她跑步所用的时间。

✓ **答案** $\frac{12}{x}$ 小时
解析 由时间等于路程除以速度，得跑步所用的时间为

$$12 \div x = \frac{12}{x}\ \text{（小时）}$$

答：她跑步所用的时间为 $\frac{12}{x}$ 小时。

3. [2024 · October/November 0580/31 Q6(a)(i)]
提示：先求人数变化的倍率，再乘原配方中的牛奶用量。

(a) This is a recipe to make ice cream for 6 people.

270 ml cream
270 ml milk
100 g sugar
4 egg yolks

Tom makes ice cream for 10 people.

(i) Work out how much milk he uses.

(a) 以下是制作 6 人份冰淇淋的配方：
奶油 270 mL；
牛奶 270 mL；
糖 100 g；
蛋黄 4 个。
汤姆制作 10 人份的冰淇淋。
(i) 求他使用的牛奶量。

✓ **答案**

450 mL

解析 人数由 6 人变为 10 人，牛奶用量按相同倍率变化，倍率为

$$\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

所需的牛奶量为

$$270\times\frac{5}{3}=450\ \text{（毫升）}$$

答：他使用 450 mL 牛奶。

4. [2023 · May/June 0580/32 Q1(e)(i)]
提示：先对照路程与速度的单位，算出秒数后再分成整分与余秒。

(e) A cyclist travels at a constant speed of 8.5 metres per second.

(i) Work out how long the cyclist takes to travel a distance of 5.27 kilometres.
Give your answer in minutes and seconds.

(e) 一名骑行者以 8.5 m/s 的恒定速度行驶。
(i) 求该骑行者行驶 5.27 千米所需的时间。
答案以 min 和 s 表示。

✓ **答案**

10 min 20 s

解析 将路程换成米，得
$5.27\ \text{km}=5.27\times1000\ \text{m}=5270\ \text{m}$。
由时间等于路程除以速度，得
时间 $=\frac{5270\ \text{m}}{8.5\ \text{m/s}}=620\ \text{s}$。
由
$620=10\times60+20$，
得

620 s = 10 min 20 s。
答：所需时间为 10 min 20 s。

5. [2023 · May/June 0580/33 Q8(b)]
提示：先统一两次质量的单位，再比较所求质量与原质量的倍率。

(b) 850 metres of wire has a mass of 130.5 kilograms.

Work out the length of wire, in metres, that has a mass of 900 grams.

(b) 850 米电线的质量为 130.5 千克。
求质量为 900 克的这种电线的长度，以米为单位。

✓ **答案**

5.86 m

解析 将所求电线的质量换成千克，得
$900\ \text{g} = \frac{900}{1000}\ \text{kg} = 0.9\ \text{kg}$。
电线的长度与质量按相同倍率变化，所求长度为
$850\ \text{m} \times \frac{0.9}{130.5} = \frac{170}{29}\ \text{m} \approx 5.86\ \text{m}$。
答：电线长约 5.86 米。

1.23 总量减去各项消耗求剩余

题型 1 总量减去各项消耗求剩余（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **剩余金额关系：** 安东尼奥原有 144000 美元，需支付三项费用。先将各项费用_____，再从原有资金中减去。

剩余金额 = 144000 − (工资 + 设备费 + 用品费)

② **按比分配费用：** 工资、设备费、用品费之比为 9 : 5 : 8。工资的 9 份对应 45000 美元，先求每份金额。

每份金额 = 45000 ÷ 9 = _____

设备费占 5 份。
设备费 = 5000 × 5 = 25000

用品费占 8 份。
用品费 = 5000 × 8 = 40000

③ **小数金额运算：** 金额含小数时，将_____对齐后相加减。以付出 5 美元，支付两笔费用为例。金额通常写到小数点后两位。

5 − (1.20 + 2.35) = 5.00 − 3.55 = 1.45

④ **总价反求缺项：** 总价包含所有项目，减去其余项目合计，得到缺项金额。如三项费用合计已知，可反求用品费。

费用合计 = 45000 + 25000 + 40000 = 110000

用品费 = 110000 − (45000 + 25000) = 40000

⑤ **单价乘以数量：** 每件 2.40 美元，购买 3 件，先算购买费用。单价乘以_____，得到该商品的总价。

购买费用 = 2.40 × 3 = 7.20

⑥ **多项按量合计：** 若另购每件 1.50 美元的商品 2 件，各类商品分别相乘，再将费用相加。从付款金额中减去费用合计，得到找零。

费用合计 = 2.40 × 3 + 1.50 × 2 = 10.20

填空：①相加　②5000　③小数点　④数量

点石成金　题目出现找零、剩余量或账单缺项时，先算各项支出或用量的合计。

例 1　[2023 · May/June 0580/31 Q5(b)(ii)]

Antonio buys a restaurant for $240 000.

This is $\frac{5}{8}$ of the amount he has available to spend.

(b) Some of the $144 000 is spent on expenses.
Expenses are wages, equipment and supplies in the ratio

$$\text{wages} : \text{equipment} : \text{supplies} = 9 : 5 : 8.$$

The amount spent on wages is $45 000.

(ii) Work out the amount Antonio has left now.

5 安东尼奥以 240000 美元买下一家餐厅。
这笔钱是他可用资金的 $\frac{5}{8}$。
(b) 144000 美元中的一部分用于支付费用。
费用包括工资、设备费和用品费，其比为
工资 : 设备费 : 用品费 = 9 : 5 : 8

工资支出为 45000 美元。
(ii) 求安东尼奥现在剩余的金额。

解答　由工资的 9 份对应 45000 美元，得

$$\text{每份金额} = 45000 \div 9 = 5000$$

$$\text{设备费} = 5000 \times 5 = 25000$$

$$\text{用品费} = 5000 \times 8 = 40000$$

$$\text{支出合计} = 45000 + 25000 + 40000 = 110000$$

$$\text{剩余金额} = 144000 - 110000 = 34000$$

答：安东尼奥现在剩余 34000 美元。

方法：先看工资对应的份数，从每份金额起手，再合计三项费用。

辨析：支出合计是三项费用之和，剩余金额是原有资金扣除支出后的余额。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/32 Q1(c)(ii)]

提示：先合计衬衫与围巾的费用，再与付款金额比较。

(ii) Bruno buys a shirt for $36 and a scarf for $12.25 .
He pays with a $50 note.

Work out how much change he receives.

(ii) 布鲁诺买了一件 36 美元的衬衫和一条 12.25 美元的围巾。
他用一张 50 美元的纸币付款。
求他收到多少找零。

✓ **答案** 1.75 美元

解析 衬衫与围巾的费用合计为

$$36 + 12.25 = 48.25$$

收到的找零为

$$50 - 48.25 = 1.75$$

答：他收到 1.75 美元的找零。

2. [2023 · October/November 0580/33 Q1(a)(i)]

提示：看账单总价，合计除汤以外的三项费用，再求差额。

(a) Tom has a restaurant bill.

Soup	$.....
Pasta	$ 13.30
Ice cream	$ 4.80
Drinks	$ 3.81
Total cost	$ 25.40

(i) Complete the bill to show the cost of soup.

(a) 汤姆有一张餐厅账单。
汤：_____美元
意大利面：13.30 美元
冰淇淋：4.80 美元
饮料：3.81 美元
总费用：25.40 美元
(i) 补全账单，填出汤的价格。

✓ **答案** 3.49 美元

解析 意大利面、冰淇淋和饮料的费用合计为

$$13.30 + 4.80 + 3.81 = 21.91$$

汤的价格为

$$25.40 - 21.91 = 3.49$$

答：汤的价格为 3.49 美元。

3. [2023 · May/June 0580/41 Q1(b)(i)]
提示：看梨的美元单价与数量，先求总价，再与付款金额比较。

(b) Paulo buys some pears from a market.
Pears cost \$0.54 each or 0.51 euros each.

(i) Paulo pays **in dollars** for 12 pears.

Calculate the change he receives from \$10.

(b) 保罗在市场买一些梨。
梨的单价为每个 0.54 美元或每个 0.51 欧元。
(i) 保罗用美元购买 12 个梨。
计算他支付 10 美元后收到的找零。

✓ **答案** 3.52 美元

解析 按美元单价计算，12 个梨的费用为

$$0.54 \times 12 = 6.48$$

收到的找零为

$$10 - 6.48 = 3.52$$

答：他收到 3.52 美元的找零。

4. [2023 · October/November 0580/33 Q3(a)(i)(b)]
提示：先把原有质量换成克，再扣除所有杯数的用量。

(a) Aneel has 80 tea bags, $\frac{1}{2}$ kg of sugar and 1 litre of milk.
To make a cup of tea he uses:

- 1 tea bag
- 8 grams of sugar
- 40 millilitres of milk.

(i) In the morning, Aneel makes 15 cups of tea.

Work out

(b) the mass of sugar, in grams, he has left.

(a) Aneel 有 80 个茶包、1/2kg 糖和 1L 牛奶。每杯茶使用 1 个茶包、8g 糖和 40mL 牛奶。 (i) 早上 Aneel 制作 15 杯茶。求 (b) 剩余糖的质量，单位为克。

✓ **答案** 380 g

解析 先把原有糖换成克，再减去 15 杯茶所用的糖。$\frac{1}{2} \times 1000 = 500$ g

$15 \times 8 = 120$ g

$500 - 120 = 380$ g

答：剩余 380g 糖。

5. [2023 · February/March 0580/32 Q1(c)]
提示：看各类食品的单价与数量，分别算费用再合计，与付款比较。

(c) Here is part of the café's menu.

MENU			
Cup of coffee	$2.50	Slice of pizza	$3.70
Cup of tea	$2.30		

Raj buys 2 cups of coffee, 1 cup of tea and 3 slices of pizza.

Calculate the change he receives from $20.

(c) 以下是这家咖啡馆的部分菜单。
菜单
一杯咖啡：2.50 美元
一杯茶：2.30 美元
一片披萨：3.70 美元
拉杰买了 2 杯咖啡、1 杯茶和 3 片披萨。
计算他支付 20 美元后收到的找零。

✓ **答案** 1.60 美元

解析 咖啡、茶和披萨的费用分别为

$$\text{咖啡费用} = 2 \times 2.50 = 5.00$$

$$\text{茶的费用} = 1 \times 2.30 = 2.30$$

$$\text{披萨费用} = 3 \times 3.70 = 11.10$$

$$\text{费用合计} = 5.00 + 2.30 + 11.10 = 18.40$$

$$\text{找零} = 20 - 18.40 = 1.60$$

答：他收到 1.60 美元的找零。

1.24 将商向下取整，求最多整份和余量

题型 1 将商向下取整，求最多整份和余量（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **统一计量单位：** 一袋面粉有 16 kg，每个面包用 600 g。将千克化为克，应乘 _____。$16 \times 1000 = 16000$（g）

② **求最多整份：** 面包须按完整个数制作，商的小数部分应_____。

$$16000 \div 600 = 26 + \frac{2}{3}$$

最多能做 26 个面包。

③ **计算剩余数量：** 做成 26 个面包后，剩余量等于总量减去_____。$16000 - 26 \times 600 = 400$（g）

④ **小数除法计算：** 例如有 10 美元，每件商品售价 2.40 美元。被除数和除数同乘 10，商不变。

$$10 \div 2.40 = 100 \div 24 = 4 + \frac{1}{6}$$

最多能买 4 件。

⑤ **计算购物找零：**买 4 件商品，先算总价，再从原有钱数中减去总价。以美元表示的金额可写成两位小数。$10-4\times2.40=0.40$（美元）

← 填空：①1000　②舍去　③整份消耗量

点石成金　题目出现总量、每份用量，要求最多整份数和余量时，先统一单位，再用总量除以每份用量。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q3(b)(i)]

(b) (i) A recipe for making one loaf of bread uses 600 g of flour.
A sack of flour contains 16 kg of flour.

Complete the statements.

One sack of flour makes a maximum of ..... loaves of bread.

The amount of flour left over is ..... g.

（b）（i）制作一个面包需要 600g 面粉，一袋面粉有 16kg。补全陈述：一袋面粉最多制作_____个面包。剩余面粉为_____g。

解答　将袋中面粉的质量化为克，得
$16\times1000=16000$（g）。
用面粉总量除以每个面包的用量，得
$16000\div600=26+\frac{2}{3}$。
面包须按完整个数制作，故最多能做 26 个。
剩余面粉的质量为
$16000-26\times600=400$（g）。
答：最多能做 26 个面包，剩余 400 g 面粉。

方法：先看总量与每份用量的单位，统一后列除法求商。
辨析：向下取整是取不大于商的最大整数，四舍五入是取最近整数。
拓展：余量应小于一份用量，否则还能再凑成一份。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/11 Q3]
← 提示：看现有钱数与单价，比较相邻整本数的总价。

Magazines cost $3.40 each.
Rosina has $15 to buy as many magazines as possible.

Complete the statement.

Rosina can buy ..... magazines and will have $ ..... left.

每本杂志售价 3.40 美元。Rosina 有 15 美元，要购买尽可能多的杂志。补全陈述：Rosina 可以买_____本杂志，还剩_____美元。

✓ **答案**　4 本；1.40 美元
解析　用现有钱数除以每本杂志的售价，得
$15\div3.40\approx4.41$。
杂志须按整本购买，故最多能买 4 本。
剩余钱数为
$15-4\times3.40=1.40$（美元）。
答：罗西娜最多能买 4 本杂志，剩余 1.40 美元。

2. [2023 · May/June 0580/33 Q2(e)]
提示：看整瓶水的总价，核对多买一瓶是否超出现有钱数。

A shop sells food and drink.

(e) A bottle of water costs $1.55 .
Suki has $20.

Work out the maximum number of bottles Suki can buy and the change she receives.

一家商店出售食品和饮料。
(e) 每瓶水售价 1.55 美元。
苏琪有 20 美元。
求苏琪最多能买多少瓶水，以及她得到的找零。

✓ **答案** 12 瓶；1.40 美元
解析 用现有钱数除以每瓶水的售价，得
$20 \div 1.55 \approx 12.90$。
水须按整瓶购买，故最多能买 12 瓶。
购买 12 瓶水的总价为
$12 \times 1.55 = 18.60$（美元）。
找零为
$20 - 18.60 = 1.40$（美元）。
答：苏琪最多能买 12 瓶水，得到 1.40 美元找零。

3. [2024 · October/November 0580/33 Q1(a)(i)]
提示：用钱的总额除以每盒售价，再按整盒购买的条件取值。

(a) (i) Li has $20.
A box of cereal costs $2.29 .

Work out the maximum number of boxes of cereal that Li can buy.

(a) (i) 李有 20 美元。
一盒麦片售价 2.29 美元。
求李最多能买多少盒麦片。

✓ **答案** 8 盒
解析 用钱的总额除以每盒麦片的售价，得
$20 \div 2.29 \approx 8.734$。
麦片须按整盒购买，舍去商的小数部分。
答：李最多能买 8 盒麦片。

4. [2025 · February/March 0580/32 Q2]
提示：先求最多能买的完整个数，再从原有钱数中减去总价。

Div has $25 to buy some cups which cost $4.25 each.

Calculate the maximum number of cups he can buy and the change he receives.

迪夫有 25 美元，用来购买每个售价 4.25 美元的杯子。
计算他最多能买多少个杯子，以及他得到的找零。

✓ **答案** 5 个杯子；找零 3.75 美元
解析 用钱的总额除以每个杯子的售价，得
$25 \div 4.25 \approx 5.882$。
杯子须按完整个数购买，故最多能买 5 个。
从原有钱数中减去购买杯子的总价，得
$25 - 5 \times 4.25 = 3.75$（美元）。
答：最多能买 5 个杯子，得到找零 3.75 美元。

1.25 部分除以整体求所占比例

题型 1 部分除以整体求所占比例（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **部分整体对应：**例题中，150 美元是部分，400 美元是整体。求所占比例，用_____除以_____。

$$\text{所占比例} = \frac{150}{400}$$

② **化成百分数：**百分数表示每_____份中所占的份数。将部分除以整体，再乘 100%。

$$\frac{150}{400} \times 100\% = 37.5\%$$

③ **合计整体数量：**给出各部分数量或比的份数时，先相加求整体。比中的份数可用于计算所占比例。

各部分为 150、250 美元

$$150 + 250 = 400$$

$$\frac{150}{400} \times 100\% = 37.5\%$$

各部分的比为 2 : 3 : 5，求末项占比

$$2 + 3 + 5 = 10$$

$$\frac{5}{10} \times 100\% = 50\%$$

④ **近似结果取舍：**百分数算不尽时，按要求取近似值。未另作要求时，通常保留 3 位有效数字。从首个非零数字起数，保留三位并四舍五入。

$$\frac{2}{3} \times 100\% \approx 66.7\%$$

⑤ **所用数量计算：**每杯茶用 1 个茶包，做 3 杯需先求所用数量。每杯用量乘杯数，得到部分数量。

$3 \times 1 = 3$（个）

⑥ **分数约成最简：**要求最简分数时，将部分除以整体写成分数。分子和分母同时除以二者的_____。

$$\frac{150}{400} = \frac{150 \div 50}{400 \div 50} = \frac{3}{8}$$

填空：①部分　②整体　③100　④最大公因数

点石成金　题目出现某部分占总量的百分数或几分之几时，先确定部分与整体，再用部分除以整体。

例 1 [2023 · February/March 0580/42 Q1(a)(ii)(a)]

(ii) **(a)** Alain spends $150.

Write $150 as a percentage of $400.

(ii) (a) 阿兰花费 150 美元。

将 150 美元表示为 400 美元的百分之几。

解答 以 150 美元为部分，400 美元为整体，得

$$\frac{150}{400} \times 100\% = 37.5\%$$

答：37.5%。

方法：先看两笔金额各指什么，再将所求部分放在分子。

辨析：部分是所求对象的数量，整体是包含该部分的总量。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/42 Q2(b)(i)]

提示：看账单支出与全年收入，比清哪项是整体。

(b) In 2021, Anil earns $37 000.

(i) He spends $12 400 on bills in 2021.

Calculate the percentage of his earnings he spends on bills.

(b) 2021 年，阿尼尔的收入为 37000 美元。
(i) 他在 2021 年支付账单共花费 12400 美元。
计算他用于支付账单的支出占收入的百分之几。

✓ **答案** 33.5%

解析 全年收入为整体，账单支出为部分，得

$$\frac{12400}{37000} \times 100\% \approx 33.5\%$$

答：他将收入的 33.5% 用于支付账单。

2. [2023 · October/November 0580/32 Q1(d)(ii)]

提示：看老年票张数与这些票的总张数，按张数比较。

(d)

Ticket prices	
Adult	$35
Child	$20
Senior	$25

(i) Calculate the cost of 150 adult tickets, 70 child tickets and 30 senior tickets.

(ii) Calculate the percentage of these tickets that are senior tickets.

(d) 成人票 35 美元、儿童票 20 美元、老年票 25 美元。 (i) 售出 150 张成人票、70 张儿童票和 30 张老年票。计算这些票的总收入。
(ii) 计算这些票中老年票所占的百分比。

✓ **答案** 12%

解析 先按张数求票的总数。$150 + 70 + 30 = 250$
老年票占全部票的百分比为 $\frac{30}{250} \times 100\% = 12\%$
答：12%。

3. [2023 · October/November 0580/33 Q1(a)(ii)]

提示：看饮料费用包含在哪笔总费用中，再确定分母。

(a) Tom has a restaurant bill.

Soup	$.....
Pasta	$ 13.30
Ice cream	$ 4.80
Drinks	$ 3.81
Total cost	$ 25.40

(ii) Find the cost of drinks as a percentage of the total cost.

(a) 汤姆有一张餐厅账单。
汤：金额待填，单位为美元
意大利面：13.30 美元

冰淇淋：4.80 美元
饮料：3.81 美元
总费用：25.40 美元
(ii) 求饮料费用占总费用的百分之几。

✓ **答案** 15%

解析 饮料费用为 3.81 美元，总费用为 25.40 美元，得

$$\frac{3.81}{25.40} \times 100\% = 15\%$$

答：饮料费用占总费用的 15%。

4. [2023 · May/June 0580/43 Q1(a)(i)]
提示：看手机对应的份数，分母需合计三件物品的份数。

(a) Tomas sells a computer, a bike and a phone.
The amounts he receives are in the ratio computer : bike : phone = 14 : 17 : 9.

(i) Calculate the amount he receives for the phone as a percentage of the total.

(a) 托马斯出售一台电脑、一辆自行车和一部手机。
他出售这三件物品所得金额的比为
电脑 : 自行车 : 手机 = 14 : 17 : 9

(i) 计算他出售手机所得金额占总金额的百分之几。

✓ **答案** 22.5%

解析 三件物品所得金额的总份数为

$$14 + 17 + 9 = 40$$

手机所得金额占其中的 9 份，得

$$\frac{9}{40} \times 100\% = 22.5\%$$

答：出售手机所得金额占总金额的 22.5%。

5. [2023 · October/November 0580/33 Q3(a)(i)(a)]
提示：看每杯用量与杯数，先求用量，再与原有数量相比。

(a) Aneel has 80 tea bags, $\frac{1}{2}$ kg of sugar and 1 litre of milk.
To make a cup of tea he uses:

- 1 tea bag
- 8 grams of sugar
- 40 millilitres of milk.

(i) In the morning, Aneel makes 15 cups of tea.

Work out

(a) the fraction of the tea bags he uses, in its simplest form

(a) 阿尼尔有 80 个茶包、$\frac{1}{2}$ 千克糖和 1 升牛奶。
每泡一杯茶，他使用：
• 1 个茶包；
• 8 克糖；
• 40 毫升牛奶。
(i) 上午，阿尼尔泡了 15 杯茶。

求
(a) 他所用的茶包占全部茶包的几分之几，答案写成最简分数。

✓ **答案** $\frac{3}{16}$

解析 每杯茶用 1 个茶包，做 15 杯所用茶包数为
$15 \times 1 = 15$（个）
原有茶包 80 个，所用茶包占全部茶包的

$$\frac{15}{80} = \frac{15 \div 5}{80 \div 5} = \frac{3}{16}$$

答：他用了全部茶包的 $\frac{3}{16}$。

1.26 用原量乘百分数求对应数量

题型 1 用原量乘百分数求对应数量（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **百分数的含义：** 飞机座位的 90% 被占用，表示每 100 个中有 90 个被占用。百分号表示除以_____，可据此化成小数。

$$90\% = \frac{90}{100} = 0.9$$

② **对应部分计算：** 共有 420 个座位，已占 90%。求已占座位数，用总座位数乘百分数的小数形式。

$$\text{已占座位数} = 420 \times 0.9$$

③ **折扣金额计算：** 求折扣金额，就是求减免的钱。如原价为 50 元，折扣为 20%，用原价乘 0.2。计算结果仍以元为单位。

$$20\% = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$\text{折扣金额} = 50 \times 0.2 = 10$$

填空：①100

点石成金　题目出现总量和所占百分数，要求对应数量时，先把百分数化成小数，再乘总量。

例 1 [2023 · May/June 0580/32 Q3(b)(iii)]

(iii) Another plane has 420 seats.
90% of the seats are occupied.

Work out the number of seats that are occupied.

(iii) 另一架飞机有 420 个座位。其中 90% 的座位已被占用。求已被占用的座位数。

解答 已占座位数占总座位数的 90%，

$$90\% = \frac{90}{100} = 0.9$$

$$\text{已占座位数} = 420 \times 0.9 = 378$$

答：已被占用的座位有 378 个。

方法：看总座位数和已占百分数，先把百分数化成小数。

辨析：占用率是所占比例，已占座位数是对应的数量。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/33 Q2(b)]

提示：看折扣前总额与折扣率，区分减免金额和实付金额。

A shop sells food and drink.

(b) Students receive a 10% discount on their shopping.
Before the discount, the cost of a student's shopping is $16.80 .

Work out the amount of the discount.

一家商店出售食品和饮料。

(b) 学生购物可享受 10% 的折扣。折扣前，一名学生的购物总额为 16.80 美元。求折扣金额。

✓ **答案** 1.68 美元

解析 折扣金额是折扣前购物总额的 10%，

$$10\% = \frac{10}{100} = 0.1$$

$$\text{折扣金额} = 16.80 \times 0.1 = 1.68$$

答：折扣金额为 1.68 美元。

2. [2023 · October/November 0580/11 Q5]

提示：看手表原价，核对折扣率对应的是减免部分还是剩余部分。

A watch costs $12 400.
In a sale there is a discount of 16%.

Calculate the amount of the discount.

一块手表的价格为 12400 美元。促销期间有 16% 的折扣。计算折扣金额。

✓ **答案** 1984 美元

解析 折扣金额是手表原价的 16%，

$$16\% = \frac{16}{100} = 0.16$$

$$\text{折扣金额} = 12400 \times 0.16 = 1984$$

答：折扣金额为 1984 美元。

3. [2025 · February/March 0580/32 Q4(e)]
提示：先把百分数化为小数，再乘原量。

30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

From this list, write down the number that is

(e) 20% of 190.

30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39

从这列数中，写出符合以下条件的数。
(e) 等于 190 的 20%。

✓ **答案** 38
解析 将百分数化为小数，得
$20\% = \frac{20}{100} = 0.2$。
$190 \times 0.2 = 38$。
所得结果在所给数列中。
答：所求的数是 38。

4. [2025 · May/June 0580/32 Q6]
提示：用原量乘百分数的小数形式。

Calculate 57% of 45.

计算 45 的 57%。

✓ **答案** 25.65
解析 将百分数化为小数，得
$57\% = \frac{57}{100} = 0.57$。
$45 \times 0.57 = 25.65$。
答：45 的 57% 是 25.65。

5. [2025 · October/November 0580/11 Q9(b)]
提示：先将百分数除以一百，再乘原量。

(b) Work out 15% of 80.

(b) 计算 80 的 15%。

✓ **答案** 12
解析 将百分数化为小数，得
$15\% = \frac{15}{100} = 0.15$。
$80 \times 0.15 = 12$。
答：80 的 15% 是 12。

1.27 用变化因子计算百分数增减

题型 1 用变化因子计算百分数增减（Core / Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **原量与百分数：** 厨师比服务员的时薪高 32%，以服务员的时薪为原量。原量占 _____，百分数先除以 100。

$$32\% = \frac{32}{100} = _____$$

② **增减变化因子：** 原量增加或减少一定百分比，先求变化后是原量的多少倍。这个倍数称为变化因子。

增加 32%：

$1 + 32\% =$ _____

减少 20%：

$1 - 20\% =$ _____

③ **原量乘变化因子：** 厨师时薪的变化因子为 1.32，用服务员时薪乘这个因子。计算前后均以美元每小时为单位。

$$\text{厨师时薪} = \text{服务员时薪} \times 1.32$$

④ **乘积的正比关系：** F 与 m、a 的乘积成正比，表示乘积乘同一个常数便得到 F。用 k 表示这个不变的比例常数。

$$F = kma$$

⑤ **乘积变化因子：** 例如 m 增加 20%，a 减少 10%，两个变化因子相乘。用 F' 表示变化后的量。

$$F' = k(1.2m)(0.9a) = (1.2 \times 0.9)kma = 1.08F$$

⑥ **净变化率判定：** 变化因子与 1 比较，差值表示增减的比例。上面的变化因子为 1.08，因此 F 增加 _____。

$$(1.08 - 1) \times 100\% = 8\%$$

因子大于 1：

增加率 $=$ (变化因子 -1) $\times 100\%$

因子小于 1：

减少率 $= (1 -$ 变化因子$) \times 100\%$

填空：①100%　②0.32　③1.32　④0.8　⑤8%

点石成金　题目出现增加或减少的百分比，并要求变化后的量时，先求变化因子；乘积关系中将各变化因子相乘。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q1(b)(ii)]

(b) **(i)** A waiter works 29 hours a week in the café.
He is paid \$9.50 per hour.
He is paid for 52 weeks of the year.

Work out his total pay for the year.

(ii) The chef is paid 32% more than the waiter per hour.

Work out how much the chef is paid per hour.

(b)（i）一名服务员在咖啡馆每周工作 29 小时，每年领取 52 周工资。他每小时的工资为 9.50 美元。计算他的年薪。（ii）厨师每小时的工资比服务员高 32%。求厨师每小时的工资。

解答　由前问，服务员每小时的工资为 9.50 美元。

厨师每小时的工资比服务员高 32%，变化因子为

$$1 + 32\% = 1.32$$

厨师每小时的工资为

$$9.50 \times 1.32 = 12.54$$

答：厨师每小时的工资为 12.54 美元。

方法：先看工资以谁为比较基准，再把涨幅化成变化因子。

辨析：涨幅是比原量多出的比例，变化因子是现量与原量的比。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/33 Q2(c)]

提示：看原价和涨幅，先把原价所占的一整份计入因子。

A shop sells food and drink.

(c) The cost of a cabbage increases by 15%.

Calculate the new price if the original price is $1.80 .

一家商店出售食品和饮料。
(c) 一棵卷心菜的价格上涨了 15%。
若原价为 1.80 美元，计算上涨后的价格。

✓ **答案** 2.07 美元

解析 价格增加 15%，变化因子为

$$1+15\%=1.15$$

新价格为

$$1.80\times1.15=2.07$$

答：新价格为 2.07 美元。

2. [2023 · May/June 0580/42 Q2(b)(ii)]

提示：看收入的涨幅，百分数化小数时按对小数点位置。

(b) In 2021, Anil earns $37 000.

(ii) His earnings of $37 000 increase by 3.2% in 2022.

Calculate his earnings in 2022.

(b) 2021 年，阿尼尔的收入为 37000 美元。
(ii) 他这笔 37000 美元的收入在 2022 年增加了 3.2%。
计算他在 2022 年的收入。

✓ **答案** 38184 美元

解析 收入增加 3.2%，变化因子为

$$1+3.2\%=1+0.032=1.032$$

2022 年的收入为

$$37000\times1.032=38184$$

答：他在 2022 年的收入为 38184 美元。

3. [2023 · October/November 0580/33 Q1(b)(ii)]
提示：看减少比例，求剩余部分占原金额的比例。

(ii) Decrease \$3450 by 18%.

(ii) 将 3450 美元减少 18%。

✓ **答案** 2829 美元

解析 减少 18%，变化因子为

$$1-18\%=0.82$$

减少后的金额为

$$3450\times0.82=2829$$

答：减少后的金额为 2829 美元。

4. [2024 · February/March 0580/32 Q4(b)]
提示：先求降价后的价格是原价的多少倍。

(b) A television has a price of \$550.
This price is reduced by 4%.

Calculate the new price of this television.

(b) 一台电视机的价格为 550 美元。
现将价格降低 4%。
计算这台电视机的新价格。

✓ **答案** 528 美元

解析 价格降低 4%，变化因子为

$$1-\frac{4}{100}=0.96$$

电视机的新价格为

$$550\times0.96=528$$

答：这台电视机的新价格为 528 美元。

5. [2023 · October/November 0580/23 Q18]
提示：看乘积中两项的增减，将各自因子相乘后与 1 比较。

F is proportional to the product of m and a.

Calculate the percentage change in F when m is increased by 40% and a is decreased by 15%.

F 与 m 和 a 的乘积成正比。
当 m 增加 40%，且 a 减少 15% 时，计算 F 的百分比变化。

✓ **答案** 增加 19%

解析 由正比关系，设

$$F=kma$$

其中 k 为不变的比例常数。
m 增加 40%，a 减少 15%，各自的变化因子为

$$1+40\%=1.40$$

$$1-15\%=0.85$$

用 F' 表示变化后的量，则

$$F' = k(1.40m)(0.85a) = 1.19kma = 1.19F$$

因 $1.19 > 1$，故 F 增加，增加率为

$$(1.19 - 1) \times 100\% = 19\%$$

答：F 增加 19%。

1.28 差额除以原值求变化百分比

题型 1 差额除以原值求变化百分比（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **变化差额：** 面粉由 16 kg 减少到 15 kg。两者的差为变化量。

$$16 - 15 = 1$$

减少了 1 kg。

数量增加：新值减原值。　　数量减少：原值减新值。

② **变化百分比：** 面粉变化前为 16 kg，变化量为 1 kg。变化量除以_____，再化为百分数。

$$\frac{1}{16} \times 100\% = 0.0625 \times 100\% = 6.25\%$$

$$\text{变化百分比} = \frac{\text{变化量}}{\text{原值}} \times 100\%$$

③ **销售利润：** 某商品以 16 元购入，20 元售出。购入价是成本，用_____减成本得利润。

$$20 - 16 = 4$$

利润为 4 元。

④ **利润百分比：** 商品的利润为 4 元，成本为 16 元。利润除以_____，再化为百分数。

$$\frac{4}{16} \times 100\% = 25\%$$

$$\text{利润百分比} = \frac{\text{利润}}{\text{成本}} \times 100\%$$

⑤ **最低售价：** 成本为 16 元，要求利润至少为 25%。成本加上目标利润，得最低售价。

$$16 + 16 \times 25\% = 16 \times (1 + 25\%) = 20$$

$$\text{最低售价} = \text{成本} \times (1 + \text{目标利润百分比})$$

⑥ **售价比较：** 最低售价为 20 元，实际售价为 19 元。实际售价_____最低售价，才达到目标。

$$19 < 20$$

故利润未达到 25%。

实际售价 ≥ 最低售价　　实际售价 < 最低售价

达到目标。　　未达到目标。

填空：①原值　②售价　③成本　④大于或等于

点石成金　题目出现增加、减少或利润百分比时，先求差额，再除以原值或成本并化为百分数。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q3(b)(ii)]

(ii) The amount of flour in a sack decreases from 16 kg to 15 kg.

Work out the percentage decrease of flour in the sack.

(ii) 一袋面粉的质量从 16 kg 减少到 15 kg。
求这袋面粉质量减少的百分比。

解答　面粉减少的质量为
$16-15=1$（kg）。
以原有的 16 kg 为基数，减少的百分比为
$\frac{1}{16}\times 100\%=6.25\%$。
答：面粉减少了 6.25%。

方法：先找变化前后的质量，相减求减少量，再用原质量作分母。

! 辨析：变化量是前后相差的数量，原值是变化前的数量。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/32 Q1(e)(ii)]
提示：先找原速度和新速度，将速度差与原速度相比。

(e) A cyclist travels at a constant speed of 8.5 metres per second.

(ii) The cyclist increases speed from 8.5 m/s to 10.2 m/s.

Work out the percentage increase in speed.

(e) 一名骑车人以 8.5 米每秒的恒定速度行驶。
(ii) 这名骑车人的速度从 8.5 m/s 增加到 10.2 m/s。
求速度增加的百分比。

✓ **答案**　20%
解析　速度增加了
$10.2-8.5=1.7$（m/s）。
以原速度 8.5 m/s 为基数，增加的百分比为
$\frac{1.7}{8.5}\times 100\%=20\%$。
答：速度增加了 20%。

2. [2023 · May/June 0580/33 Q8(d)]
提示：先按对两次长度的小数位，再将长度差与原长度相比。

(d) A 12 metre length of wire increases in length to 12.017 metres when its temperature rises.

Calculate the percentage increase in the length of the wire.

(d) 一根长 12 米的金属丝，温度升高后长度增加到 12.017 米。
计算金属丝长度增加的百分比。

✓ **答案**　0.142%
解析　金属丝增加的长度为
$12.017-12=0.017$（m）。
以原长度 12 m 为基数，增加的百分比为
$\frac{0.017}{12}\times 100\%\approx 0.142\%$。
答：金属丝的长度增加了约 0.142%。

3. [2023 · May/June 0580/31 Q5(d)]
提示：先分清前后两周人数，将增加人数与前一周人数相比。

Antonio buys a restaurant for $240 000.

This is $\frac{5}{8}$ of the amount he has available to spend.

(d) In one week, the number of customers in the restaurant was 560.
In the next week, the number of customers in the restaurant was 656.

Calculate the percentage increase.

Antonio 花 240000 美元买下一家餐馆。
这笔钱是他可用于支出的资金总额的 $\frac{5}{8}$。
(d) 某一周，餐馆的顾客人数为 560 人。
下一周，餐馆的顾客人数为 656 人。
计算顾客人数增加的百分比。

✓ **答案** 17.1%

解析 顾客人数增加了
$656 - 560 = 96$（人）。
以前一周的 560 人为基数，增加的百分比为
$\frac{96}{560} \times 100\% \approx 17.1\%$。
答：顾客人数增加了约 17.1%。

4. [2023 · October/November 0580/33 Q5(d)]
提示：先找上涨前的费用，将费用差与上涨前的费用相比。

(d) The cost to post a box increases from $22.68 to $44.

Work out the percentage increase in the cost.

(d) 邮寄一个箱子的费用从 22.68 美元增加到 44 美元。
求邮寄费用增加的百分比。

✓ **答案** 94%

解析 邮寄费用增加了
$44 - 22.68 = 21.32$（美元）。
以原费用 22.68 美元为基数，增加的百分比为
$\frac{21.32}{22.68} \times 100\% \approx 94\%$。
答：邮寄费用增加了约 94%。

5. [2023 · October/November 0580/32 Q7(d)(ii)]
提示：先分清购入价和卖出价，将两者差额与购入价相比。

Elize, Lily and Marco start a business.

(d) Elize buys a framed picture.

(ii) Elize buys the framed picture for $12.50 .
She sells the framed picture for $20.25 .

Calculate the percentage profit.

Elize、Lily 和 Marco 一起创业。
(d) Elize 买了一幅带框的画。
(ii) Elize 以 12.50 美元买入这幅带框的画。
她以 20.25 美元卖出这幅带框的画。
计算利润百分比。

✓ **答案** 62%

解析 卖出这幅画所得的利润为

$20.25 - 12.50 = 7.75$（美元）。

以成本 12.50 美元为基数，利润百分比为

$\frac{7.75}{12.50} \times 100\% = 62\%$。

答：利润百分比为 62%。

6. [2023 · May/June 0580/43 Q1(a)(iii)]

提示：先按成本算出目标利润，再比较实际售价与最低售价。

(a) Tomas sells a computer, a bike and a phone.
The amounts he receives are in the ratio computer : bike : phone = 14 : 17 : 9.

(ii) The total amount he receives is $560.

Calculate how much he receives for the bike.

(iii) Tomas originally bought the bike for $195.
He wanted to make a profit of at least 25% when he sold it.

Does Tomas make a profit of at least 25%?
You must show all your working to support your decision.

（a）Tomas 卖出一台电脑、一辆自行车和一部手机。所得金额的比为 电脑 : 自行车 : 手机 = 14 : 17 : 9。（ii）三件物品总共卖得 560 美元。求卖出自行车所得的金额。（iii）Tomas 原先用 195 美元买入自行车，希望得到至少 25% 的利润。他是否达到了这个目标？写出全部计算支持判断。

✓ **答案** 否。

解析 先由总收入和比求自行车的售价。$14 + 17 + 9 = 40$

$560 \times \frac{17}{40} = 238$ 美元

利润及利润率分别为 $238 - 195 = 43$ 美元

$\frac{43}{195} \times 100\% \approx 22.1\%$

由于 22.1% 小于 25%，他没有达到至少 25% 的利润。

1.29 除以变化因子还原百分数变化前的量

题型 1 除以变化因子还原百分数变化前的量（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **变化因子：** 房价上涨 5%，现价占原价的 105%。商品降价 20%，现价占原价的 80%。现量除以原量，得到变化因子。

上涨 5%

$$1 + 5\% = 1 + \frac{5}{100} = 1.05$$

变化因子为 _____

降价 20%

$$1 - 20\% = 1 - \frac{20}{100} = 0.8$$

变化因子为 _____

② **还原原量：** 已知变化后的量，$\xrightarrow{\text{除以变化因子}}$ 求变化前的量。原量与现量使用相同单位。

$$\text{原量} = \frac{\text{现量}}{\text{变化因子}}$$

房价上涨 5% 后为 105 美元

原价 $= \frac{105}{1.05} = 100$ 美元

商品降价 20% 后为 80 美元

原价 $= \frac{80}{0.8} = 100$ 美元

③ **连续变化：**弗雷德的房价先上涨 5%，再上涨 3%。第二次上涨按第一年末房价计算，两个因子相乘。总变化因子为 _____。

$$1.05 \times 1.03 = 1.0815$$

$$\text{购入价} = \frac{60564}{1.05 \times 1.03} = 56000 \text{ 美元}$$

④ **求增加量：**题目求增加的数量，先还原原量，再用现量减原量。弗雷德的房屋两年共增加的价值为

$$\text{增加额} = \text{现量} - \text{原量} = 60564 - 56000 = 4564 \text{ 美元}$$

填空：①1.05　②0.8　③1.0815

点石成金　题目出现百分数变化后的量，要求变化前的量或增加量时，先用现量除以变化因子还原原量。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q1(c)]

(c) Fred buys a house.
At the end of the first year, the value of the house increases by 5%.
At the end of the second year, the value of the house increases by 3% of its value at the end of the first year.
The value of Fred's house at the end of the second year is $60 564.

Calculate how much Fred paid for the house.

(c) 弗雷德购买了一所房屋。
第一年年末，房屋的价值上涨了 5%。
第二年年末，房屋的价值在第一年年末价值的基础上上涨了 3%。
第二年年末，弗雷德房屋的价值为 60564 美元。
计算弗雷德购买这所房屋时支付的金额。

解答　设弗雷德购房时支付 x 美元。
第一年上涨 5%，第二年再按第一年末房价上涨 3%，得

$$x \times 1.05 \times 1.03 = 60564$$

$$x = \frac{60564}{1.05 \times 1.03} = 56000$$

答：弗雷德购房时支付了 56000 美元。

方法：先看现价经历几次涨价，再将现价除以各次变化因子的乘积。

辨析：变化率是增减部分占原量的比例，变化因子是现量与原量之比。

拓展：连续涨价的百分率不能相加，因为每次计算所用的基数不同。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/43 Q1(c)]
提示：看降价后剩原价的百分之几，再据此还原原价。

(c) In a sale, all prices are reduced by 24%.
Victor pays $36.86 for a pair of shoes in the sale.

Calculate the original price of the shoes.

(c) 促销期间，所有商品的价格均降低 24%。
维克托在促销期间花 36.86 美元买了一双鞋。
计算这双鞋的原价。

✓ **答案** 48.50 美元

解析 降价 24% 后，售价占原价的比例为

$$1-24\%=0.76$$

所以鞋的原价为

$$\frac{36.86}{0.76}=48.50 \text{ 美元}$$

答：这双鞋的原价为 48.50 美元。

2. [2023 · October/November 0580/23 Q12]
提示：看增长率以哪个月为基数，还原后再比较两月数量。

Oliver sent 22% more messages in June than in May.
He sent 305 messages in June.

Find how many more messages he sent in June than in May.

奥利弗六月发送的消息数量比五月多 22%。
他六月发送了 305 条消息。
求他六月比五月多发了多少条消息。

✓ **答案** 55 条

解析 六月的消息数量比五月多 22%，五月的消息数量为

$$\frac{305}{1+22\%}=\frac{305}{1.22}=250 \text{ 条}$$

六月比五月多发的消息数量为

$$305-250=55 \text{ 条}$$

答：六月比五月多发了 55 条消息。

3. [2023 · May/June 0580/41 Q1(a)(iii)]
提示：看去年产量占前年的比例，再用去年的量还原。

(a) An orchard has 1250 trees.
The trees are in the ratio apple : pear : 12 : 9 : 4.

(iii) Last year, the mean mass of pears produced was 54 kg per tree.
This was a decrease of 10% on the mean mass of pears produced per tree from the year before.

Calculate the mean mass of pears produced by each pear tree the year before.

1 (a) 一个果园里有 1250 棵树。
各类树的数量比为 12 : 9 : 4，其中前两类依次为苹果树、梨树。
(iii) 去年，每棵梨树所产梨的平均质量为 54 千克。

这比前年每棵梨树所产梨的平均质量减少了 10%。
计算前年每棵梨树所产梨的平均质量。

✓ **答案** 每棵 60 千克

解析 去年的平均产量比前年减少 10%，去年的平均产量占前年的比例为

$$1-10\%=0.9$$

前年每棵梨树的平均产量为

$$\frac{54}{0.9}=60 \text{ 千克}$$

答：前年每棵梨树的平均产量为 60 千克。

4. [2024 · February/March 0580/42 Q1(b)(iv)]
提示：先求降价后的价格占原价的百分比。

A grocer sells potatoes, mushrooms and carrots.

(b) In one week, the ratio of the masses of vegetables sold by the grocer is

$$\text{potatoes : mushrooms : carrots} = 11 : 8 : 6.$$

(iv) On the last day of the week, the grocer reduces the price of 1 kg of potatoes by 8% to \$1.15 .

Calculate the original price of 1 kg of potatoes.

一名食品商出售土豆、蘑菇和胡萝卜。
(b) 某一周，这名食品商售出的蔬菜质量比为

$$\text{土豆 : 蘑菇 : 胡萝卜} = 11 : 8 : 6$$

(iv) 这一周的最后一天，他将每千克土豆的价格降低 8%，降至 1.15 美元。
计算每千克土豆的原价。

✓ **答案** 1.25 美元

解析 价格降低 8%，变化因子为

$$1-\frac{8}{100}=0.92$$

用降价后的价格除以变化因子，得每千克土豆的原价为

$$\frac{1.15}{0.92}=1.25$$

答：每千克土豆的原价为 1.25 美元。

5. [2024 · October/November 0580/42 Q1(a)(ii)]
提示：以旧车油箱容量为原量，将两车的容量关系写成等式。

(a) Anvi buys a new car.

(ii) The fuel tank in the new car has a capacity of 45 litres.
This is 72% of the capacity of the fuel tank in her old car.

Calculate the capacity of the fuel tank in her old car.

(a) 安维买了一辆新车。
(ii) 新车油箱的容量为 45 升。
这是她旧车油箱容量的 72%。
计算她旧车油箱的容量。

✓ **答案** 62.5 升

解析 设旧车油箱的容量为 x 升。

新车油箱容量是旧车油箱容量的 72%，得

$$\frac{72}{100}x = 45$$

$$x = \frac{45}{0.72} = 62.5$$

答：她旧车油箱的容量为 62.5 升。

1.30 本金乘利率和期数计算单利

题型 1 本金乘利率和期数计算单利（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **计息本金：** 乌拉存入的 725 美元称为本金。单利每年都按_____计算利息。

② **年利率转换：** 年利率为 1.3%，表示每 100 美元每年产生 1.3 美元利息。计算时先把百分数化成小数。$1.3\% = \frac{1.3}{100} =$ _____

③ **总利息计算：** 乌拉存款 6 年，总利息为每年利息的 6 倍。记本金为 P，年利率的小数为 r。记年数为 t，总利息为 I。

$$I = Prt$$

④ **本金利息相加：** 本金与利息之和称为本利和，记为 A。借款的总还款额也包含本金与利息。

求总利息	求本利和或总还款额
$I = Prt$	$A = P + I$

若求乌拉存款的期末金额，计算如下。

$$A = 725 + 725 \times 0.013 \times 6 = 781.55$$

填空：①本金　②0.013

点石成金　题目出现本金、年利率、年数和单利时，先将年利率化成小数，再求总利息；求总金额还需加本金。

例 1 [2023 · May/June 0580/43 Q1(b)]

(b) Ulla invests $725 for 6 years in an account paying simple interest at a rate of 1.3% per year.

Calculate the total interest earned at the end of 6 years.

(b) 乌拉将 725 美元存入一个账户，存期为 6 年。该账户按单利计息，年利率为 1.3%。计算 6 年末获得的总利息。

解答 年利率化成小数，得

$$r = \frac{1.3}{100} = 0.013$$

由单利计算公式，得

$$I = Prt = 725 \times 0.013 \times 6 = 56.55$$

答：6 年末获得的总利息为 56.55 美元。

方法：先圈出本金、年利率和年数，将百分数化成小数再相乘。

辨析：利息是存款产生的收益，本利和是本金与利息的合计。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/13 Q15]

提示：看所求是否为利息，核对年利率与计息年数。

Shubhu invests $750 in a savings account for 5 years.
The account pays simple interest at a rate of 1.8% per year.

Calculate the total interest she earns during the 5 years.

舒布将 750 美元存入一个储蓄账户，存期为 5 年。该账户按单利计息，年利率为 1.8%。
计算她在这 5 年获得的总利息。

✓ **答案** 67.50 美元

解析 年利率化成小数，得

$$r = \frac{1.8}{100} = 0.018$$

由单利计算公式，得

$$I = Prt = 750 \times 0.018 \times 5 = 67.50$$

答：这 5 年获得的总利息为 67.50 美元。

2. [2023 · October/November 0580/12 Q16]

提示：看期末投资总额的含义，区分利息与本利和。

Filip invests $4000 for 3 years at a rate of 2.5% per year simple interest.

Calculate the value of his investment at the end of the 3 years.

菲利普投资 4000 美元，投资期为 3 年，按单利计息，年利率为 2.5%。
计算他在这 3 年末的投资总额。

✓ **答案** 4300 美元

解析 年利率化成小数，得

$$r = \frac{2.5}{100} = 0.025$$

由单利计算公式，得

$$I = Prt = 4000 \times 0.025 \times 3 = 300$$

期末投资总额为本金与利息之和，得

$$A = P + I = 4000 + 300 = 4300$$

答：3 年末的投资总额为 4300 美元。

3. [2023 · February/March 0580/42 Q1(a)(ii)(b)]
提示：看年末拥有的金额，分清本金与新增利息。

(b) He invests the remaining \$250 at a rate of 2% per year simple interest.

Calculate the amount Alain has at the end of 5 years.

(b) 他将剩余的 250 美元用于投资，按单利计息，年利率为 2%。
计算阿兰在 5 年末拥有的金额。

✓ **答案** 275 美元

解析 年利率化成小数，得

$$r = \frac{2}{100} = 0.02$$

由单利计算公式，得

$$I = Prt = 250 \times 0.02 \times 5 = 25$$

将利息加回本金，得

$$A = P + I = 250 + 25 = 275$$

答：阿兰在 5 年末拥有 275 美元。

4. [2023 · May/June 0580/31 Q5(c)]
提示：看总还款额包含哪些部分，区分借款本金与利息。

Antonio buys a restaurant for \$240 000.
This is $\frac{5}{8}$ of the amount he has available to spend.

(c) Antonio borrows \$25 400 for 6 years at a rate of 5% per year simple interest.

Calculate the total amount he repays at the end of the 6 years.

安东尼奥花 240000 美元购买一家餐馆。这是他可用于支出的资金总额的 $\frac{5}{8}$。
(c) 安东尼奥借款 25400 美元，借款期为 6 年，按单利计息，年利率为 5%。
计算他在这 6 年末偿还的总金额。

✓ **答案** 33020 美元

解析 年利率化成小数，得

$$r = \frac{5}{100} = 0.05$$

由单利计算公式，得

$$I = Prt = 25400 \times 0.05 \times 6 = 7620$$

总还款额为借款本金与利息之和，得

$$A = P + I = 25400 + 7620 = 33020$$

答：他在这 6 年末偿还的总金额为 33020 美元。

5. [2025 · May/June 0580/21 Q3]

提示：先计算六年的总利息，再加上本金。

Sally invests $1500 at 3% per year simple interest.

Work out the total value of her investment at the end of 6 years.

萨莉投资 1500 美元，按单利计息，年利率为 3%。
求她在 6 年末的投资总额。

✓ **答案** 1770 美元

解析 单利每年按本金计息，6 年的总利息为

$$1500 \times \frac{3}{100} \times 6 = 270$$

投资总额为本金与总利息之和，得

$$1500 + 270 = 1770$$

答：她在 6 年末的投资总额为 1770 美元。

1.31 百分数与复利

题型 1 复利与逐年百分比变化（Core / Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **本金与年利率（Core）：** Qianna 存入的 3000 美元称为本金。将年利率 4% 化成小数，得_____。

$$4\% = \frac{4}{100} = 0.04$$

② **一年后的本息：** 一年利息为年初金额的 0.04 倍。保留年初金额再加利息，年末总额为年初金额的_____倍。

$$3000 + 3000 \times 0.04 = 3000 \times (1 + 0.04) = 3000 \times 1.04 = 3120$$

③ **逐年复利累乘：** 复利将上一年的利息并入下一年的计息金额。年利率不变，连续 6 年须把 1.04 连乘_____次。

$$3120 \times 1.04 = 3000 \times 1.04 \times 1.04 = 3000 \times 1.04^2 = 3244.8$$

④ **逐年衰减演示（Extended）：** 若有 100 棵树，每年减少 10%，每年保留上年数量的_____倍。下一年按剩余棵数继续计算。

$$1 - \frac{10}{100} = 0.9$$

$$100 \times 0.9 = 90$$

$$90 \times 0.9 = 100 \times 0.9^2 = 81$$

⑤ **逐年变化公式：** 设 P 为初始量，n 为年数，A 为 n 年后的量。r 为年增长率或年减少率的小数，且逐年不变。n 为非负整数。

逐年增长（$r \geq 0$）

$$A = P(1 + r)^n$$

逐年减少（$0 \leq r < 1$）

$$A = P(1 - r)^n$$

⑥ **结果按题取整：** 精确到美元或整数，都是把结果保留到_____。按四舍五入取整，中间计算保留精度。

下一位小于 5

$$12.48 \approx 12$$

下一位大于或等于 5

$$12.73 \approx 13$$

填空：①0.04　②1.04　③6　④0.9　⑤个位

点石成金　题目出现复利或按固定百分比逐年变化，并求若干年后的数量时，先求每年相乘的倍率。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q19]

Qianna invests $3000 at a rate of 4% per year compound interest.

Calculate the value of her investment at the end of 6 years.

Qianna 将 3000 美元以 4% 的年利率按年复利投资。计算 6 年末她的投资总额。

解答　每年按复利计息，故每年的本息倍率为

$$1+\frac{4}{100}=1.04$$

6 年末的投资总额为

$$3000\times 1.04^{6}\approx 3795.957\approx 3796$$

答：6 年末的投资总额约为 3796 美元。

方法：先看年利率和年数，将利率化为小数，再求每年相乘的倍率。

辨析：年利率是一年的增长比例，年倍率是年末金额与年初金额的比。

针对练习

1. [2024 · May/June 0580/42 Q1(d)]

提示：先求每年的增长因子，再按五年连续相乘。

(d) The number of bottles of fruit drink sold has grown exponentially at a constant rate of 2.5% per year.
5 years ago, the shop sold 16 620 bottles.

Calculate the number of bottles sold this year.

(d) 一家商店售出的果汁饮料瓶数以每年 2.5% 的固定增长率呈指数式增长。
5 年前，这家商店售出了 16620 瓶。
计算今年售出的瓶数。

✓ **答案**　18804 瓶

解析　每年的增长因子为

$$1+\frac{2.5}{100}=1.025$$

从 5 年前到今年经历 5 次逐年增长，今年售出的瓶数为

$$16620\times 1.025^{5}\approx 18804.0045\approx 18804$$

答：今年约售出 18804 瓶。

2. [2024 · October/November 0580/12 Q16]
提示：先求一年后的本息倍率，再计算五年后的金额。

Dana invests $3600 at a rate of 3.8% per year compound interest.

Calculate the value of her investment at the end of 5 years.

达娜投资 3600 美元，按年复利计息，年利率为 3.8%。
计算她在 5 年末的投资总额。

✓ **答案** 4338 美元

解析 按年复利计息，每年的本息倍率为

$$1+\frac{3.8}{100}=1.038$$

5 年末的投资总额为

$$3600\times 1.038^5\approx 4337.9972\approx 4338$$

答：她在 5 年末的投资总额约为 4338 美元。

3. [2024 · October/November 0580/31 Q5(c)]
提示：先把年利率化成小数，求出每年的本息倍率。

(c) Jin invests some money from his taxi company.
He invests $18 600 at a rate of 1.7% per year compound interest.

Calculate the value of the investment at the end of 6 years.
Give your answer correct to the nearest dollar.

(c) Jin 将出租车公司的一部分资金用于投资。他将 18600 美元以 1.7% 的年利率按年复利投资。
计算 6 年末的投资总额，答案精确到最接近的美元。

✓ **答案** 20580 美元

解析 按年复利计息，每年的本息倍率为

$$1+\frac{1.7}{100}=1.017$$

6 年末的投资总额为

$$18600\times 1.017^6\approx 20579.682$$

精确到最接近的美元，得

$$20579.682\approx 20580$$

答：6 年末的投资总额约为 20580 美元。

4. [2023 · May/June 0580/13 Q22]
提示：看计息年数确定倍率相乘次数，末步再按美元取整。

Vanessa invests $8500 at a rate of 3.5% per year compound interest.

Calculate the value of her investment at the end of 6 years.
Give your answer correct to the nearest dollar.

Vanessa 将 8500 美元以 3.5% 的年利率按年复利投资。计算 6 年末她的投资总额，答案精确到最接近的美元。

✓ **答案** 10449 美元

解析 每年按复利计息，故每年的本息倍率为

$$1+\frac{3.5}{100}=1.035$$

6 年末的投资总额为

$$8500\times 1.035^{6}\approx 10448.6703$$

按最接近的美元取整，得

$$10448.6703\approx 10449$$

答：6 年末的投资总额为 10449 美元。

5. [2023 · May/June 0580/23 Q15]
提示：看每年减少的比例，区分减少部分与保留部分。

The number of trees in a forest is decreasing exponentially at a rate of 1.75% per year.
Eleven years ago there were 980 trees.

Calculate the number of trees in the forest now.
Give your answer correct to the nearest integer.

一片森林中的树木数量以每年 1.75% 的速率呈指数式减少。十一年前有 980 棵树。计算现在森林中的树木数量，答案精确到最接近的整数。

✓ **答案** 807 棵

解析 树木数量每年减少 1.75%，故每年保留的倍率为

$$1-\frac{1.75}{100}=0.9825$$

从十一年前至今经过 11 年，故现在的树木数量为

$$980\times 0.9825^{11}\approx 807.0199$$

取最接近的整数，得

$$807.0199\approx 807$$

答：现在森林中约有 807 棵树。

1.32 按一单位对应关系换算货币

题型 1 按一单位对应关系换算货币（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **汇率对应关系：**西装售价为6500卢比，题给汇率如下。汇率表示两种货币金额的_____关系。

$$1\text{ 卢比}=0.013\text{ 美元}$$

② **单位金额换算：**由一单位货币的对应金额，确定换算方向。两种方向的计算如下。

已知每卢比兑换0.013美元，卢比换美元用_____。

$100 \times 0.013 = 1.30$ 美元

已知每美元兑换0.80欧元，欧元换美元用_____。

$\frac{8}{0.80} = 10$ 美元

③ **成组金额换算：**例如10澳元对应110南非兰特，先求_____澳元对应的兰特数。再用兰特金额除以这个数，得到澳元金额。

$\frac{110}{10} = 11$ 南非兰特

$\frac{55}{11} = 5$ 澳元

④ **消费余额计算：**前后汇率相同，可先把消费金额换成原币种。若原有11.60美元，按每欧元兑1.16美元花费4欧元。剩余美元金额为

$$11.60 - 4 \times 1.16 = 11.60 - 4.64 = 6.96 \text{ 美元}$$

⑤ **同币种求价差：**两个价格先换成_____，再用较高价格减较低价格。若同一商品标价为2美元或2欧元，每美元兑换0.80欧元。按所求币种分别计算。

差价用美元表示：

$\frac{2}{0.80} - 2 = 2.50 - 2 = 0.50$ 美元

差价用欧元表示：

$2 - 2 \times 0.80 = 2 - 1.60 = 0.40$ 欧元

⑥ **金额取近似值：**要求精确到美分或保留两位小数时，结果保留小数点后_____位。中间计算不取近似值，最后按四舍五入取值。

$$3.276 \approx 3.28 \text{ 美元}$$

填空：①对应　②乘法　③除法　④1　⑤同一币种　⑥两

点石成金　题目出现汇率，要求换算金额、求余额或差价时，先写出一单位货币的对应金额。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q9]

A suit costs 6500 rupees.

Calculate the cost of the suit in dollars when the exchange rate is　1 rupee = \$0.013 .

一套西装售价为6500卢比。

汇率为1卢比兑换0.013美元，计算这套西装的美元价格。

解答　由每卢比兑换0.013美元，得

$$6500 \times 0.013 = 84.50 \text{ 美元}$$

答：这套西装的价格为84.50美元。

方法：先看一卢比对应的美元数，再将西装的卢比标价乘这个数。

辨析：卢比换美元是乘每卢比的美元数，美元换卢比是除以同一个数。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/13 Q16]
提示：看汇率以哪种货币为一单位，再判断法郎换美元的运算。

Maddie changes 4000 Swiss francs into dollars when the exchange rate is $1 = 0.913 Swiss francs.

Work out how many dollars she receives.

麦迪将4000瑞士法郎兑换成美元，汇率为1美元兑换0.913瑞士法郎。
求她收到多少美元。

✓ **答案** 4381.16美元

解析 由每美元兑换0.913瑞士法郎，得

$$\frac{4000}{0.913} \approx 4381.16 \text{ 美元}$$

答：她收到约4381.16美元。

2. [2023 · October/November 0580/33 Q5(c)]
提示：对照邮费币种与汇率中的一单位币种，确定换算方向。

(c) Zena pays 105 euros to post a parcel.
The exchange rate is $1 = 0.84 euros.

Work out the cost in dollars to post the parcel.

(c) 泽娜邮寄一个包裹，支付105欧元。
汇率为1美元兑换0.84欧元。
求邮寄这个包裹的美元费用。

✓ **答案** 125美元

解析 由每美元兑换0.84欧元，得

$$\frac{105}{0.84} = 125 \text{ 美元}$$

答：邮寄这个包裹的费用为125美元。

3. [2023 · October/November 0580/21 Q7]
提示：看一新加坡元对应多少欧元，再判断现有金额含多少份。

The exchange rate between Singapore dollars and euros is 1 Singapore dollar = 0.62 euros.

Find the value of 161.20 euros in Singapore dollars.

新加坡元与欧元之间的汇率为1新加坡元兑换0.62欧元。
求161.20欧元可兑换多少新加坡元。

✓ **答案** 260新加坡元

解析 由每新加坡元兑换0.62欧元，得

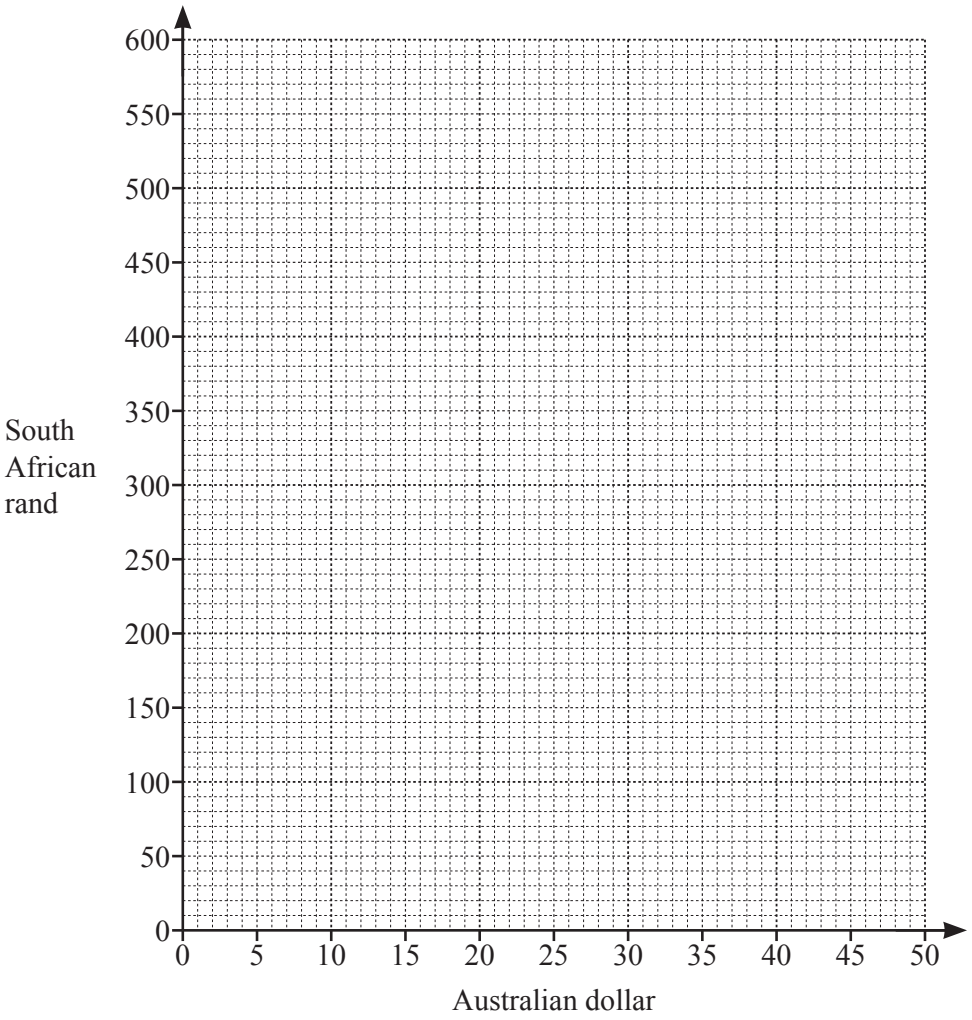
$$\frac{161.20}{0.62} = 260 \text{ 新加坡元}$$

答：161.20欧元可兑换260新加坡元。

4. [2023 · May/June 0580/32 Q3(a)(ii)]
提示：先看成组兑换金额，求每澳元对应的兰特数，再换算表价。

(a)

50 Australian dollars = 540 South African rands



(ii) A watch costs 1350 South African rands.

Find the cost of this watch in Australian dollars.

3（a）50澳元兑换540南非兰特。
图中横轴表示澳元，标出的刻度为$0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$。
纵轴表示南非兰特，标出的刻度为$0, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600$。
（ii）一块手表售价为1350南非兰特。
求这块手表的澳元价格。

✓ **答案** 125澳元

解析 由50澳元兑换540南非兰特，得每澳元对应的南非兰特数为

$$\frac{540}{50} = 10.8$$

∴手表的澳元价格为

$$\frac{1350}{10.8} = 125 \text{ 澳元}$$

答：这块手表的价格为125澳元。

5. [2023 · May/June 0580/42 Q2(a)]
提示：看前后汇率是否相同，将花费与原有金额统一币种后相减。

(a) Anil changes \$830 into euros when the exchange rate is 1 euro = \$1.16 .
He spends 500 euros.
He then changes the remaining money back into dollars at the same exchange rate.

Work out how much, in dollars, Anil receives.

(a) 阿尼尔将830美元兑换成欧元，汇率为1欧元兑换1.16美元。
他花费了500欧元。
随后，他按相同汇率将剩余的钱换回美元。
求阿尼尔收到多少美元。

✓ **答案** 250美元

解析 前后汇率相同，将花费的500欧元换成美元，得

$$500 \times 1.16 = 580 \text{ 美元}$$

∴换回的美元金额为

$$830 - 580 = 250 \text{ 美元}$$

答：阿尼尔收到250美元。

6. [2023 · May/June 0580/41 Q1(b)(ii)]
提示：看差价所用币种，将两种标价统一后比较，末步取近似值。

(b) Paulo buys some pears from a market.
Pears cost \$0.54 each or 0.51 euros each.

(ii) The exchange rate is \$1 = 0.826 euros.

Calculate how much more Paulo pays for **each** pear when he pays in euros.
Give your answer in dollars, correct to the nearest cent.

(b) 保罗在市场买一些梨。
每个梨售价为0.54美元或0.51欧元。
(ii) 汇率为1美元兑换0.826欧元。
计算保罗用欧元付款时，每个梨多付多少。
答案用美元表示，精确到最接近的一美分。

✓ **答案** 0.08美元

解析 由每美元兑换0.826欧元，按欧元付款时每个梨折合的美元价格为

$$\frac{0.51}{0.826} \approx 0.617433 \text{ 美元}$$

此价格高于0.54美元，所多付的美元金额为

$$\frac{0.51}{0.826} - 0.54 \approx 0.08 \text{ 美元}$$

答：按欧元付款时，每个梨多付0.08美元，精确到美分。

7. [2023 · October/November 0580/32 Q7(c)]
提示：看每欧元对应的美元数，将纽约标价换成欧元后比较。

Elize, Lily and Marco start a business.

(c) Elize buys some picture frames.
The frames cost \$5.80 each in New York and 4.50 euros each in Paris.
The exchange rate is 1 euro = \$1.37 .

Calculate the difference in the cost in euros.
Give your answer correct to 2 decimal places.

伊莱兹、莉莉和马尔科一起创业。
(c) 伊莱兹购买一些相框。
这些相框在纽约的售价为每个5.80美元，在巴黎的售价为每个4.50欧元。
汇率为1欧元兑换1.37美元。
计算两地售价的差额，用欧元表示。
答案保留两位小数。

✓ **答案** 0.27欧元

解析 由每欧元兑换1.37美元，纽约每个相框折合的欧元价格为

$$\frac{5.80}{1.37} \approx 4.233577 \text{ 欧元}$$

巴黎的价格较高，两地每个相框的欧元差价为

$$4.50 - \frac{5.80}{1.37} \approx 0.27 \text{ 欧元}$$

答：差价为0.27欧元，保留两位小数。

1.33 按单位进率换算长度或时间

题型 1 按单位进率换算长度或时间（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **时间单位换算：** 题中把 5 小时换成秒，先换成分，再换成秒。小时、分、秒分别记作 h、min、s。每换一级，乘相应的进率。

1 h = 60 min，1 min = 60 s。

5 h = (5 × 60) min = (5 × 60 × 60) s = 18000 s。

② **换算方向判断：** 两个单位之间的倍数关系称为进率。根据原单位与目标单位的大小，确定乘或除。

大单位换成小单位	小单位换成大单位
_____进率	_____进率

③ **年月单位换算：** 年换成月，按 1 年合 12 个月计算。以 2 年为例，乘 12。

2 × 12 = 24。

所以 2 年合 24 个月。

④ **长度连续换算：** 毫米、米、千米分别记作 mm、m、km。毫米换成千米，先除以 1000 换成米，再除以 1000。以 3000 毫米为例：

1 m = 1000 mm，1 km = 1000 m。

3000 mm = (3000 ÷ 1000) m = 3 m = (3 ÷ 1000) km = 0.003 km。

填空：①乘　②除以

点石成金　题目出现把长度或时间换成另一种单位时，先确定单位之间的进率及换算方向。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q6]

Work out the number of seconds in 5 hours.

计算 5 小时合多少秒。

解答　由小时换成分，再换成秒，各乘 60，得

$5 \times 60 \times 60 = 18000$。

答：18000 秒。

方法：先看原单位和目标单位，从小时换成分起手。

辨析：乘进率是把大单位换成小单位，除进率是把小单位换成大单位。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/11 Q1]

提示：看年与月的对应关系，比较单位大小确定运算。

Work out the number of months in 5 years.

计算 5 年合多少个月。

✓ **答案**　60 个月

解析　由 1 年合 12 个月，得

$5 \times 12 = 60$。

答：60 个月。

2. [2023 · October/November 0580/12 Q10]

提示：看毫米到千米经过的单位，逐段判断乘除方向。

Change 62 000 millimetres into kilometres.

把 62000 毫米换算成千米。

✓ **答案**　0.062 千米

解析　由毫米换成米，再换成千米，各除以 1000，得

$62000 \div 1000 \div 1000 = 62 \div 1000 = 0.062$。

答：62000 毫米合 0.062 千米。

3. [2024 · October/November 0580/31 Q3(b)]

提示：先求总分钟数，再算其中有多少个完整的小时。

Jack does a survey about cycling.

(b) Jack makes 18 cycling trips in one year.
Each cycling trip lasts 23 minutes.

Find the total time Jack spends cycling in this year.
Give your answer in hours and minutes.

Jack 就骑自行车进行一项调查。

(b) Jack 在一年中骑自行车出行 18 次，每次持续 23 分钟。

求 Jack 这一年骑自行车的总时长，答案用小时和分钟表示。

✓ **答案**　6 小时 54 分钟

解析　这一年骑自行车的总分钟数为

$$18 \times 23 = 414$$

由 1 小时合 60 分钟，且

$$414 = 6 \times 60 + 54$$

余下的 54 分钟不足 1 小时。

答：总时长为 6 小时 54 分钟。

4. [2024 · October/November 0580/33 Q5(d)(ii)]

提示：先写出米与厘米之间的进率。

(d) Leo keeps his toy vehicles on a shelf.

(ii) The shelf is 1.35 metres from the floor.

Change 1.35 metres into centimetres.

(d) Leo 把玩具车放在架子上。

(ii) 架子距离地面 1.35 米。

把 1.35 米换算成厘米。

✓ **答案** 135 厘米

解析 由 1 米合 100 厘米，得

$$1.35 \text{ m} = (1.35 \times 100) \text{ cm} = 135 \text{ cm}$$

答：135 厘米。

5. [2025 · February/March 0580/32 Q1]

提示：把年龄分成整年部分和不足一年的部分，分别换成月。

Taj is $3\frac{1}{4}$ years old.

Work out her age in months.

Taj 的年龄为 $3\frac{1}{4}$ 岁。

计算她的年龄合多少个月。

✓ **答案** 39 个月

解析 $3\frac{1}{4}$ 年由 3 年和 $\frac{1}{4}$ 年组成。由 1 年合 12 个月，得

$$\left(3 + \frac{1}{4}\right) \times 12 = 3 \times 12 + \frac{1}{4} \times 12 = 36 + 3 = 39$$

答：她的年龄合 39 个月。

1.34 用时刻与时长相加减

题型 1 用时刻与时长相加减（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **时间表示统一：**考试持续 $2\frac{1}{4}$ 小时，先把分数小时换成分钟。每小时有_____分钟，分数小时乘 60。上午、下午的时刻可换成 24 小时制。

$$2\frac{1}{4} \text{ 小时} = 2 \text{ 小时} + \left(\frac{1}{4} \times 60\right) \text{ 分钟} = 2 \text{ 小时 } 15 \text{ 分钟}$$

$$\frac{1}{2} \text{ 小时} = \left(\frac{1}{2} \times 60\right) \text{ 分钟} = 30 \text{ 分钟}$$

上午 8 时 30 分
8:30 am = 08:30

下午 4 时 30 分
4 + 12 = 16
4:30 pm = 16:30

② **结束时刻计算：**考试的开始时刻加上_____，得到结束时刻。有休息时先合计时长，分钟满 60 向小时进 1。越过午夜，日期增加一天，时刻从 00:00 续算。

40 分钟 + 35 分钟 = 75 分钟 = 1 小时 15 分钟

23:40 + 1 小时 15 分钟 = 次日 00:55

③ **开始时刻倒推：**电影的结束时刻已知，减去放映时长，得到开始时刻。分钟不足减时，向小时借 1 小时，换成_____分钟。

16 时 10 分 = 15 时 70 分

16:10 − 45 分钟 = 15 时 70 分 − 45 分钟 = 15:25

④ **经过时长计算：**船在同一天出发并到达，时长等于到达时刻减去_____时刻。分钟不足减时，可借时相减，也可分段累加到整点。以 10:45 至 12:10 为例。

借时相减
12 时 10 分 = 11 时 70 分
11 时 70 分 − 10 时 45 分 = 1 小时 25 分钟

分段累加
10:45 至 11:00 为 15 分钟
11:00 至 12:10 为 1 小时 10 分钟
15 分钟 + 1 小时 10 分钟 = 1 小时 25 分钟

⑤ **每周时长累计：**商店每周营业多天，先求每天时长，再乘营业天数。分钟的乘积满 60 时，向小时进位。如每天从 09:00 营业到 11:25，每周营业 3 天。

11:25 − 09:00 = 2 小时 25 分钟

(2 小时 25 分钟) × 3 = 6 小时 75 分钟 = 7 小时 15 分钟

⑥ **两地时刻换算：**东京与德里有时差，先按东京时刻加上游戏时长。所求城市落后，应_____时差；领先则加时差。日期以开始当天为当日，跨午夜时相应增减。

当日 22:30 + 4 小时 = 次日 02:30

所求城市落后 5 小时
次日 02:30 − 5 小时 = 当日 21:30

所求城市领先 3 小时
次日 02:30 + 3 小时 = 次日 05:30

填空：①60　②时长　③60　④出发　⑤减去

点石成金　题目出现开始、结束时刻或经过时长时，先统一时间表示，再按所求作加减。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q4]

An exam starts at 11 50 and lasts for $2\frac{1}{4}$ hours.

Work out the time that the exam finishes.

一场考试于 11:50 开始，持续 $2\frac{1}{4}$ 小时。求考试结束的时刻。

解答　将考试时长换成小时和分钟，得

$$2\frac{1}{4} \text{ 小时} = 2 \text{ 小时} + \left(\frac{1}{4} \times 60\right) \text{ 分钟} = 2 \text{ 小时 } 15 \text{ 分钟}$$

方法：先看开始时刻和分数小时，把分数部分换成分钟再相加。

结束时刻为

$$11{:}50 + 2\text{ 小时} = 13{:}50$$

$$13{:}50 + 15\text{ 分钟} = 14{:}05$$

！辨析：时刻是时间轴上的位置，时长是两个时刻之间的间隔。

答：考试在 14:05 结束。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/11 Q6]

提示：从出发时刻往后推，分钟合计与六十比较，并标明日期。

A train journey starts at 2143.
It takes 8 hours and 32 minutes.

Find the time the journey finishes.

一次火车旅程于 21:43 开始，耗时 8 小时 32 分钟。求旅程结束的时刻。

✓ **答案** 次日 06:15

解析 从出发时刻起加上行程时长，得

$$21{:}43 + 8\text{ 小时} = \text{次日 }05{:}43$$

$$43\text{ 分钟} + 32\text{ 分钟} = 75\text{ 分钟} = 1\text{ 小时 }15\text{ 分钟}$$

$$\text{次日 }05{:}43 + 32\text{ 分钟} = \text{次日 }06{:}15$$

答：旅程在次日 06:15 结束。

2. [2023 · October/November 0580/32 Q1(e)]

提示：看比赛和休息各占多久，合计后从开赛时刻往后推。

(e) A game starts at 1500.
The team plays for 90 minutes.
There is also a break of 15 minutes.

Find the time the game ends.

(e) 一场比赛于 15:00 开始。球队比赛 90 分钟，另有 15 分钟的休息时间。求比赛结束的时刻。

✓ **答案**

$$16{:}45$$

解析 比赛总用时包括比赛时间和休息时间，得

$$90\text{ 分钟} + 15\text{ 分钟} = 105\text{ 分钟} = 1\text{ 小时 }45\text{ 分钟}$$

$$15{:}00 + 1\text{ 小时 }45\text{ 分钟} = 16{:}45$$

答：比赛在 16:45 结束。

3. [2023 · May/June 0580/13 Q11]

提示：从结束时刻往前推，比较分钟数是否够减。

A film lasts for 2 hours 50 minutes.
The film ends at 23 05.

Find the time the film starts.

一部电影的放映时长为 2 小时 50 分钟。电影于 23:05 结束。求电影开始的时刻。

✓ **答案**

20:15

解析 开始时刻等于结束时刻减去放映时长，得

$$23{:}05 - 2 \text{ 小时} = 21{:}05$$

分钟不足减，借 1 小时换成 60 分钟，得

$$21 \text{ 时 } 05 \text{ 分} = 20 \text{ 时 } 65 \text{ 分}$$

$$21{:}05 - 50 \text{ 分钟} = 20 \text{ 时 } 65 \text{ 分} - 50 \text{ 分钟} = 20{:}15$$

答：电影在 20:15 开始。

4. [2023 · October/November 0580/13 Q5]

提示：看发车时刻的分钟数，加上行程分钟后与六十比较。

Tara goes on a journey by train.
The train leaves at 06 48.
The journey takes 12 hours and 35 minutes.

Find the time when Tara arrives.

塔拉乘火车旅行。火车于 06:48 发车，旅程耗时 12 小时 35 分钟。求塔拉到达的时刻。

✓ **答案**

19:23

解析 从发车时刻起加上行程时长，得

$$06{:}48 + 12 \text{ 小时} = 18{:}48$$

$$48 \text{ 分钟} + 35 \text{ 分钟} = 83 \text{ 分钟} = 1 \text{ 小时 } 23 \text{ 分钟}$$

$$18{:}48 + 35 \text{ 分钟} = 19{:}23$$

答：塔拉在 19:23 到达。

5. [2023 · February/March 0580/32 Q1(a)]
提示：逐行看缺的是时刻还是时长，再选相加或相减。

(a) The table shows some information about the opening hours of a café.
The café opens 4 days a week.

Day	Opening time	Closing time	Number of hours open
Thursday	8 am	4.30 pm	
Friday	8.30 am		$7\frac{1}{2}$
Saturday	9.30 am	5.30 pm	8
Sunday		3.30 pm	5
		Total number of hours open	29

Complete the table.

(a) 下表给出了一家咖啡馆的部分营业时间信息。咖啡馆每周营业 4 天。

星期	开门时刻	关门时刻	营业时长（小时）
星期四	上午 8 时	下午 4 时 30 分	
星期五	上午 8 时 30 分		$7\frac{1}{2}$
星期六	上午 9 时 30 分	下午 5 时 30 分	8
星期日		下午 3 时 30 分	5
		营业总时长（小时）	29

补全表格。

✓ **答案** 星期四营业 $8\frac{1}{2}$ 小时；星期五下午 4 时关门；星期日上午 10 时 30 分开门。

解析 星期四的关门时刻为 16:30，营业时长为

$$16{:}30 - 08{:}00 = 8 \text{ 小时 } 30 \text{ 分钟} = 8\frac{1}{2} \text{ 小时}$$

星期五营业时长为

$$7\frac{1}{2} \text{ 小时} = 7 \text{ 小时 } 30 \text{ 分钟}$$

星期五的关门时刻为

$$08{:}30 + 7 \text{ 小时 } 30 \text{ 分钟} = 16{:}00$$

星期日的关门时刻为 15:30，开门时刻为

$$15{:}30 - 5 \text{ 小时} = 10{:}30$$

答：星期四营业 $8\frac{1}{2}$ 小时；星期五下午 4 时关门；星期日上午 10 时 30 分开门。

6. [2023 · October/November 0580/33 Q2(b)(i)]
提示：看出发后遇到的第一个整点，把前后两段时长合并。

(b) (i) A boat travels from Bayside to Westbridge.
The table gives some information about its journey.

Bayside	departs	10 50
Millwater	arrives	11 36
	departs	11 45
Westbridge	arrives	13 07

Work out how long the boat takes to travel from **Millwater** to Westbridge.
Give your answer in hours and minutes.

(b)（i）一艘船从贝赛德（Bayside）驶往韦斯特布里奇（Westbridge）。下表给出了这次航程的部分信息。

贝赛德	出发	10:50
米尔沃特（Millwater）	到达	11:36
	出发	11:45
韦斯特布里奇	到达	13:07

求船从米尔沃特到韦斯特布里奇所用的时间。答案用小时和分钟表示。

✓ **答案** 1 小时 22 分钟

解析 船从米尔沃特出发的时刻为 11:45，到达韦斯特布里奇的时刻为 13:07。分段计算经过的时长，得

$$11{:}45 \text{ 至 } 12{:}00 = 15 \text{ 分钟}$$

$$12{:}00 \text{ 至 } 13{:}07 = 1 \text{ 小时 } 7 \text{ 分钟}$$

$$15 \text{ 分钟} + 1 \text{ 小时 } 7 \text{ 分钟} = 1 \text{ 小时 } 22 \text{ 分钟}$$

答：船从米尔沃特到韦斯特布里奇耗时 1 小时 22 分钟。

7. [2023 · October/November 0580/32 Q1(c)(i)]
提示：看每天开关门时刻之差，再按营业天数累计。

(c) (i) The team shop is open from 09 00 to 17 15 on Monday to Friday only.

Work out how long the shop is open each week.
Give your answer in hours and minutes.

(c)（i）球队商店仅在星期一至星期五营业，每天的营业时间为 09:00 至 17:15。求商店每周的营业时长。答案用小时和分钟表示。

✓ **答案** 41 小时 15 分钟

解析 商店每天的营业时长为

$$17{:}15 - 09{:}00 = 8 \text{ 小时 } 15 \text{ 分钟}$$

星期一至星期五共 5 天，每周营业时长为

$$(8 \text{ 小时 } 15 \text{ 分钟}) \times 5 = 40 \text{ 小时 } 75 \text{ 分钟} = 41 \text{ 小时 } 15 \text{ 分钟}$$

答：商店每周营业 41 小时 15 分钟。

8. [2023 · October/November 0580/11 Q7]
提示：先看东京的结束时刻，再按德里落后的时差回推。

Arjun lives in Delhi and Haru lives in Tokyo.
They play a computer game online at the same time.

They start at 14 45 Tokyo local time.
The game lasts 3 hours 50 minutes.
The local time in Delhi is 3 hours 30 minutes behind the local time in Tokyo.

Find the local time in Delhi when the game finishes.

阿琼住在德里，哈鲁住在东京。两人在同一时刻在线玩电脑游戏。他们在东京当地时间 14:45 开始游戏，游戏持续 3 小时 50 分钟。德里当地时间比东京当地时间晚 3 小时 30 分钟。求游戏结束时德里的当地时间。

✓ **答案**

15:05

解析 先按东京当地时间求游戏结束的时刻，得

$$14{:}45 + 3 \text{ 小时} = 17{:}45$$

$$17{:}45 + 50 \text{ 分钟} = 18{:}35$$

德里当地时间比东京晚 3 小时 30 分钟，故德里的结束时刻为

$$18{:}35 - 3 \text{ 小时 } 30 \text{ 分钟} = 15{:}05$$

答：游戏结束时，德里当地时间为 15:05。

9. [2023 · May/June 0580/32 Q3(b)(i)]
提示：先按悉尼时间累加航程，再减时差并核对日期。

(b) (i) A plane leaves Sydney at 21 48 local time to fly to Johannesburg.
The flight takes 14 hours 15 minutes.
The local time in Sydney is 8 hours ahead of the local time in Johannesburg.

Find the local time in Johannesburg when the plane arrives.

(b)（i）一架飞机于悉尼当地时间 21:48 从悉尼起飞，前往约翰内斯堡。飞行耗时 14 小时 15 分钟。悉尼当地时间比约翰内斯堡当地时间早 8 小时。求飞机到达时约翰内斯堡的当地时间。

✓ **答案** 次日 04:03

解析 以悉尼出发当天为当日，先按悉尼当地时间计算到达时刻，得

$$\text{当日 } 21{:}48 + 14 \text{ 小时} = \text{次日 } 11{:}48$$

$$\text{次日 } 11{:}48 + 15 \text{ 分钟} = \text{次日 } 12{:}03$$

悉尼当地时间比约翰内斯堡早 8 小时，故到达时约翰内斯堡当地时间为

$$\text{次日 } 12{:}03 - 8 \text{ 小时} = \text{次日 } 04{:}03$$

答：飞机到达时，约翰内斯堡当地时间为次日 04:03。

1.35 准确度的界限

题型 1　由取整单位写出真实量的上下界（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **记录与真值：**沙袋质量记为 12 kg，精确到最接近的 1 kg。用 m 表示以千克为单位的真实质量。

② **取整单位减半：**精确到最接近的 1 kg，取整单位为 1 kg。记录值到两界的距离是取整单位的_____。

取整单位为 1 kg　　取整单位为 10 kg

$1\ \text{kg} \div 2 = 0.5\ \text{kg}$　　$10\ \text{kg} \div 2 = 5\ \text{kg}$

③ **求出两个界限：**记录值减去取整单位的一半，得到下界；加上取整单位的一半，得到上界。沙袋质量以千克为单位，有

$$12 - 0.5 = 11.5$$

$$12 + 0.5 = 12.5$$

④ **写出端点符号：**取整后仍为 12 kg，下界应_____，上界应_____。

下界取等号　　上界不取等号

$11.5 \le m$　　$m < 12.5$

⑤ **统一长度单位：**长度用米表示、精确到最接近的 10 cm 时，先将取整单位化为米。由 $1\ \text{m} = 100\ \text{cm}$，得

$$10\ \text{cm} = \frac{10}{100}\ \text{m} = 0.1\ \text{m}$$

$$0.1\ \text{m} \div 2 = 0.05\ \text{m}$$

填空：①一半　②包含　③不包含

> 点石成金　题目出现精确到最接近的某个单位量，并要求填写真实量的范围时，先统一单位，再求取整单位的一半。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q18]

The mass, m kg, of a bag of sand is 12 kg, correct to the nearest kilogram.

Complete the statement about the value of m.

..... $\leqslant m <$ .....

一袋沙的质量为 m 千克，记录为 12 kg，精确到最接近的 1 kg。

补全下列关于 m 的取值的表述。

_____ $\le m <$ _____

解答　精确到最接近的 1 kg，取整单位的一半为

$1\ \text{kg} \div 2 = 0.5\ \text{kg}$。

质量以千克为单位，下界为

$12 - 0.5 = 11.5$，

上界为

$12 + 0.5 = 12.5$。

下界包含，上界不包含。

答：$11.5 \le m < 12.5$。

方法：先看精确到的单位量，统一单位后，从单位量减半起手。

辨析：记录值是取整后的数，真实值是取整前的量。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/12 Q23(a)]

提示：看取整单位的大小，再判断两端能否取等号。

(a) The mass, m kilograms, of object A is 350 kg, correct to the nearest 10 kg.

Complete this statement about the value of m.

..... $\leqslant m <$ .....

(a) 物体 A 的质量为 m 千克，记录为 350 kg，精确到最接近的 10 kg。
补全下列关于 m 的取值的表述。

_____ $\leq m <$ _____

✓ **答案**

$$345 \leq m < 355$$

解析 精确到最接近的 10 kg，取整单位的一半为
$10\ \text{kg} \div 2 = 5\ \text{kg}$。
质量以千克为单位，下界为
$350 - 5 = 345$，
上界为
$350 + 5 = 355$。
下界包含，上界不包含。
答：$345 \leq m < 355$。

2. [2024 · May/June 0580/13 Q18]

提示：先求取整单位的一半，再从记录值求出两个界限。

The length, s metres, of a ship is 83 m, correct to the nearest metre.

Complete this statement about the value of s.

..... $\leqslant s <$ .....

一艘船的长度为 s 米，记录为 83 米，精确到最接近的米。
补全下列关于 s 的取值的表述。

_____ $\leq s <$ _____

✓ **答案**

$$82.5 \leq s < 83.5$$

解析 精确到最接近的米，取整单位的一半为

$$1\ \text{m} \div 2 = 0.5\ \text{m}$$

船长以米为单位，下界为

$$83 - 0.5 = 82.5$$

上界为

$$83 + 0.5 = 83.5$$

下界包含，上界不包含。
答：$82.5 \leq s < 83.5$。

3. [2024 · October/November 0580/13 Q20]

提示：先确定保留一位小数所对应的取整单位。

The weight, w grams, of a box is 463.9 grams, correct to 1 decimal place.

Complete the statement about the value of w.

..... $\leqslant w <$ .....

一个盒子的质量为 w 克，记录为 463.9 克，精确到小数点后 1 位。
补全下列关于 w 的取值的表述。

_____ $\leq w <$ _____

✓ **答案**

$$463.85 \leq w < 463.95$$

解析 精确到小数点后 1 位，取整单位为 0.1 克，其一半为

$$0.1\ \text{g} \div 2 = 0.05\ \text{g}$$

质量以克为单位，下界为

$$463.9 - 0.05 = 463.85$$

上界为

$$463.9 + 0.05 = 463.95$$

下界包含，上界不包含。
答：$463.85 \leq w < 463.95$。

4. [2024 · February/March 0580/12 Q21]
提示：先把取整单位化为米，再求它的一半。

The length, l m, of a rope is 18.7 m, correct to the nearest 10 centimetres.

Complete this statement about the value of l.

..... $\leqslant l <$ .....

一根绳子的长度为 l 米，记录为 18.7 m，精确到最接近的 10 cm。
补全下列关于 l 的取值的表述。

_____ $\leq l <$ _____

✓ **答案** $18.65 \leq l < 18.75$

解析 将取整单位化为米，得

$$10\ \text{cm} = 0.1\ \text{m}$$

取整单位的一半为

$$0.1\ \text{m} \div 2 = 0.05\ \text{m}$$

长度以米为单位，下界为

$$18.7 - 0.05 = 18.65$$

上界为

$$18.7 + 0.05 = 18.75$$

下界包含，上界不包含。
答：$18.65 \leq l < 18.75$。

5. [2023 · May/June 0580/11 Q18]
提示：先比较记录值与取整单位的长度单位，再求半个单位量。

The length, l metres, of a piece of wood is 3.6 metres, correct to the nearest 10 centimetres.

Complete this statement about the value of l.

..... $\leqslant l <$ .....

一根木料的长度为 l 米，记录为 3.6 m，精确到最接近的 10 cm。
补全下列关于 l 的取值的表述。

_____ $\leq l <$ _____

✓ **答案**

$$3.55 \leq l < 3.65$$

解析 长度以米为单位，将取整单位化为米，得
$10\ \text{cm} = \frac{10}{100}\ \text{m} = 0.1\ \text{m}$。
取整单位的一半为
$0.1\ \text{m} \div 2 = 0.05\ \text{m}$。
长度以米为单位，下界为
$3.6 - 0.05 = 3.55$，
上界为
$3.6 + 0.05 = 3.65$。
下界包含，上界不包含。
答：$3.55 \leq l < 3.65$。

1.36 正数商取相反边界，求计算量的上界或下界

题型 1 正数商取相反边界，求计算量的上界或下界（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **路程时间边界：**用 s 表示汽车路程（千米），t 表示时间（分钟）。两者均精确到整数，舍入间隔的一半为 _____。
区间左端是下界，右端是上界。

$$13.5 \leq s < 14.5$$

$$11.5 \leq t < 12.5$$

② **舍入间隔减半：**边界与给定值相差半个舍入间隔。精确到小数点后 1 位，舍入间隔为 0.1。

速度为 40 km/h，精确到 5 km/h。
$5 \div 2 = 2.5$
下界 $= 40 - 2.5 = 37.5$
上界 $= 40 + 2.5 = 42.5$

面积为 2.4cm^2，精确到小数点后 1 位。
$0.1 \div 2 = 0.05$
下界 $= 2.4 - 0.05 = 2.35$
上界 $= 2.4 + 0.05 = 2.45$

③ **正数商取界：**用 v 表示汽车速度（千米/分钟）。速度等于路程除以时间，分子、分母均为正数。

$$v = \frac{s}{t}$$

求下界：分子取 _____，分母取 _____。
$v_{\text{下界}} = \frac{13.5}{12.5} = 1.08$

求上界：分子取 _____，分母取 _____。
$v_{\text{上界}} = \frac{14.5}{11.5} = \frac{29}{23}$

④ **时间关系变形：**由速度关系求时间，两边先乘 t，再除以正数 v。

$$vt = s$$

$$t = \frac{s}{v}$$

如汽车行驶 6 km，速度为 2 km/min。

$$t = \frac{6}{2} = 3(\text{min})$$

求时间上界，取路程上界除以速度下界。

⑤ **宽度关系变形：**用 A、l、w 分别表示长方形的面积、长、宽。由面积关系求宽，两边除以正数 l。

$$A = lw$$

面积为 12cm^2、长为 3 cm 时，

$$w = \frac{A}{l} = \frac{12}{3} = 4(\text{cm})$$

⑥ **小时化为分钟：**一小时等于 _____ 分钟。保留整数小时，小数部分乘 60 得分钟。

$$0.25 \times 60 = 15$$

$$1.25\ \text{h} = 1\ \text{h} + 15\ \text{min} = 1\ \text{小时}\ 15\ \text{分钟}$$

填空：①0.5　②下界　③上界　④上界　⑤下界　⑥60

> 点石成金　题目出现经过舍入的正数，并要求速度、时间或宽度的上界或下界时，先写成商，再给分子、分母取相反边界。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q21]

A car travels 14 km, correct to the nearest kilometre.
This takes 12 minutes, correct to the nearest minute.

Calculate the lower bound of the speed of the car.
Give your answer in kilometres per minute.

一辆汽车行驶了 14 km，精确到最接近的千米。这段行程用了 12 分钟，精确到最接近的分钟。求汽车速度的下界。答案用千米/分钟表示。

解答　设汽车的路程为 s 千米，所用时间为 t 分钟。由路程精确到最接近的千米，得

$$13.5 \le s < 14.5$$

由时间精确到最接近的分钟，得

$$11.5 \le t < 12.5$$

速度等于路程除以时间，求下界取路程下界、时间上界。

$$v_{\text{下界}} = \frac{13.5}{12.5} = 1.08(\text{km/min})$$

答：汽车速度的下界为 1.08 千米/分钟。

方法：先看路程和时间的精确程度，写出各自区间，再列速度的商。

辨析：舍入间隔是相邻刻度之差，边界偏移是舍入间隔的一半。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/23 Q23]

提示：看距离与速度的舍入间隔，比较哪组边界使时间更长。

A train travels between two stations.
The distance between the stations is 220 km, correct to the nearest kilometre.
The speed of the train is 125 km/h, correct to the nearest 5 km/h.

Calculate the upper bound for the time the journey takes.
Give your answer in hours and minutes.

一列火车在两个车站之间行驶。两站之间的距离为 220 km，精确到最接近的千米。火车的速度为 125 km/h，精确到最接近的 5 km/h。求这段行程所用时间的上界。答案用小时和分钟表示。

✓ **答案**　1 小时 48 分钟

解析　设两站间的距离为 s 千米，火车速度为 v 千米/小时。由距离精确到最接近的千米，得

$$219.5 \le s < 220.5$$

速度精确到最接近的 5 km/h，半个舍入间隔为

$$5 \div 2 = 2.5(\text{km/h})$$

$$122.5 \le v < 127.5$$

时间等于路程除以速度，求上界取路程上界、速度下界。

$$t_{\text{上界}} = \frac{220.5}{122.5} = 1.8(\text{h})$$

$$0.8 \times 60 = 48(\text{min})$$

答：这段行程所用时间的上界为 1 小时 48 分钟。

2. [2023 · October/November 0580/22 Q20]

提示：先把宽写成面积除以长，比较分子、分母怎样取界使商更大。

The area of a rectangle is 55.2 cm^2, correct to 1 decimal place.
The length of the rectangle is 9 cm, correct to the nearest cm.

Calculate the upper bound of the width of the rectangle.

一个长方形的面积为 55.2cm^2，精确到小数点后 1 位。长方形的长为 9 cm，精确到最接近的厘米。求这个长方形宽的上界。

✓ **答案** 6.5 cm

解析 设长方形的面积为 A 平方厘米，长为 l 厘米。面积精确到小数点后 1 位，半个舍入间隔为

$$0.1 \div 2 = 0.05(\text{cm}^2)$$

$$55.15 \le A < 55.25$$

由长精确到最接近的厘米，得

$$8.5 \le l < 9.5$$

由长方形面积等于长乘宽，得

$$w = \frac{A}{l}$$

求宽的上界，取面积上界、长的下界。

$$w_{\text{上界}} = \frac{55.25}{8.5} = 6.5(\text{cm})$$

答：长方形宽的上界为 6.5 cm。

3. [2024 · February/March 0580/42 Q1(c)]

提示：先分别求总质量的上界和每袋质量的下界。

A grocer sells potatoes, mushrooms and carrots.

(c) The grocer buys 620 kg of onions, correct to the nearest 20 kg.
He packs them into bags each containing 5 kg of onions, correct to the nearest 1 kg.

Calculate the upper bound for the number of bags of onions that he packs.

一名食品杂货商出售土豆、蘑菇和胡萝卜。
(c) 这名商人购入了 620 kg 洋葱，精确到最接近的 20 kg。
他把这些洋葱装袋，每袋装有 5 kg 洋葱，精确到最接近的 1 kg。
求他所装洋葱袋数的上界。

✓ **答案** 140 袋

解析 设洋葱总质量为 M 千克，每袋洋葱质量为 m 千克。由各自的精确程度，得

$$620-\frac{20}{2}=610$$

$$620+\frac{20}{2}=630$$

$$610\leq M<630$$

$$5-\frac{1}{2}=4.5$$

$$5+\frac{1}{2}=5.5$$

$$4.5\leq m<5.5$$

袋数等于总质量除以每袋质量。求上界，取总质量上界、每袋质量下界。

$$\text{袋数上界}=\frac{630}{4.5}=140$$

答：他所装洋葱袋数的上界为 140 袋。

4. [2024 · October/November 0580/23 Q24]
提示：由面积除以长求宽，再确定分子、分母各取哪一边界。

A rectangle has an area of $150\,\text{m}^2$, correct to the nearest square metre.
The length of the rectangle is 22 m, correct to the nearest metre.

Calculate the upper bound of the width of the rectangle.

..... m [3]

一个长方形的面积为 150m^2，精确到最接近的平方米。
长方形的长为 22 m，精确到最接近的米。
求这个长方形宽的上界，答案用米表示。

✓ **答案** 7 m

解析 设长方形的面积为 A 平方米，长为 l 米，宽为 w 米。由面积和长的精确程度，得

$$149.5\leq A<150.5$$

$$21.5\leq l<22.5$$

由长方形面积关系，得

$$A=lw$$

$$w=\frac{A}{l}$$

面积与长均为正数，求宽的上界取面积上界、长的下界。

$$w_{\text{上界}} = \frac{150.5}{21.5} = 7(\text{m})$$

答：长方形宽的上界为 7 m。

5. [2024 · October/November 0580/41 Q4(b)]

提示：先求每分钟游泳距离的下界，再换算为一小时的距离。

(b) Another swimmer, Adam, swims 450 m, correct to the nearest 25 metres. This takes 10 minutes, correct to the nearest minute.

Calculate the minimum distance Adam swims in one hour at this rate.

(b) 另一名游泳者亚当游了 450 m，精确到最接近的 25 m。
这段游程用了 10 分钟，精确到最接近的分钟。
按此速率，求亚当在一小时内游泳的最小距离。

✓ **答案** 2500 m

解析 设亚当游过的距离为 s 米，所用时间为 t 分钟。距离的舍入间隔为 25 m，得

$$25 \div 2 = 12.5$$

$$437.5 \leq s < 462.5$$

由时间精确到最接近的分钟，得

$$9.5 \leq t < 10.5$$

求速度下界，取距离下界、时间上界。

$$v_{\text{下界}} = \frac{437.5}{10.5} = \frac{125}{3}(\text{m/min})$$

一小时为 60 分钟，距离等于速度乘时间。

$$\text{一小时距离的下界} = \frac{125}{3} \times 60 = 2500(\text{m})$$

答：亚当在一小时内游泳的最小距离为 2500 m。

1.37 按集合条件选出元素并计数

题型 1 按集合条件选出元素并计数（Core / Extended）

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **列举元素计数：**例题中，集合 F 的元素为 f, a, c, e。记号 $n(F)$ 表示集合 F 的元素个数。按条件选数时，须在全集 $\mathcal{E}$ 的范围内逐个判断。

$$F = \{f, a, c, e\}$$

$n(F) =$ _____。

条件	判断示范
偶数	$6 = 2 \times 3$
平方数	$9 = 3^2$
5 的倍数	$15 = 5 \times 3$

② **保留共同元素：**符号 ∩ 表示交集，保留同时属于两个集合的元素。例题中，a, c 同时属于 F 和 B。

$$F \cap B = \{a, c\}$$

$n(F \cap B) =$ _____。

③ **合并两集合：**符号 ∪ 表示并集，合并属于任一集合的元素。相同元素合并后只保留一个，交叠部分只计 _____。

$$F \cup B = \{a, b, c, e, f, k\}$$

$$n(F \cup B) = n(F) + n(B) - n(F \cap B) = 4 + 4 - 2 = 6$$

④ **选取集合外元素：**记号 F' 表示 F 的补集，从 _____ 中选取不属于 F 的元素。记号 $d \notin F$ 表示 d 不属于集合 F。

$$F' = \{b, d, g, h, i, j, k\}$$

$$n(F') = 7$$

$$d \notin F$$

⑤ **读取圆内元素：**韦恩图用矩形表示全集，用圆表示集合。读一个集合时，须包括该圆内的重叠部分。若将例题画成韦恩图，F 圆内的元素为

$$F = \{f, e\} \cup \{a, c\} = \{a, c, e, f\}$$

⑥ **先算括号内集合：**出现括号时，先求括号内的交集，再与外部集合合并。沿用例题中的元素，取

$$H = \{a, b, d\}$$

$$B \cap H = \{a, b\}$$

$$F \cup (B \cap H) = F \cup \{a, b\} = \{a, b, c, e, f\}$$

$n(F \cup (B \cap H)) =$ _____。

填空：①4　②2　③一次　④全集　⑤5

点石成金　题目出现集合条件、韦恩图或元素个数时，先按所给条件和集合符号选出元素，再按要求列举或计数。

例 1　[2023 · May/June 0580/11 Q24(b)]

$\mathscr{E}$ = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k}
F = {f, a, c, e}
B = {b, a, c, k}

(b) Find n($F \cup B$).

全集及集合 F、B 如下：
$\mathcal{E} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$

$F = \{f, a, c, e\}$

$B = \{b, a, c, k\}$

(b) 求 $n(F \cup B)$。

解答 由集合 F、B 的元素得
$F \cup B = \{f, a, c, e\} \cup \{b, a, c, k\} = \{a, b, c, e, f, k\}$。
其中 a, c 各计一次，故
$n(F \cup B) = 6$。
答：6。

方法：看两集合的元素表，先逐项合并，再划去重复项。

! 辨析：并集是至少属于一方的元素，交集是双方共有的元素。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/13 Q21(b)]
提示：对照平方数与倍数两列，找出两列都出现的数再计数。

$\mathscr{E} = \{2,\ 4,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$
$Q = \{\text{square numbers}\}$
$R = \{\text{multiples of } 4\}$

(b) Write down $\mathrm{n}(Q \cap R)$.

全集及集合 Q、R 如下：
$\mathcal{E} = \{2, 4, 8, 9, 10, 12\}$

$Q = \{\text{平方数}\}$

$R = \{4 \text{ 的倍数}\}$

(b) 写出 $n(Q \cap R)$。

✓ **答案**

1

解析 全集中的平方数为 $4, 9$，4 的倍数为 $4, 8, 12$，得
$Q = \{4, 9\}$，
$R = \{4, 8, 12\}$。
保留两个集合共有的元素，得
$Q \cap R = \{4\}$，
$n(Q \cap R) = 1$。
答：1。

2. [2023 · May/June 0580/22 Q6(a)]
提示：看全集的范围，逐个核对倍数是否越界，再计数。

$\mathscr{E} = \{x\colon 1 \leqslant x \leqslant 20\}$
$E = \{\text{even numbers}\}$
$M = \{\text{multiples of } 5\}$

(a) Find $\mathrm{n}(M)$.

全集及集合 E、M 如下：
$\mathcal{E} = \{x : 1 \leq x \leq 20\}$

$E = \{\text{偶数}\}$

$M = \{5 \text{ 的倍数}\}$

(a) 求 $n(M)$。

✓ **答案**

4

解析 在全集范围内，5 的倍数为

$5\times1=5$，

$5\times2=10$，

$5\times3=15$，

$5\times4=20$。

下一个倍数为 25，超出全集范围，故

$M=\{5,10,15,20\}$，

$n(M)=4$。

答：4。

3. [2023 · May/June 0580/22 Q6(b)]

提示：对照两个集合的元素，逐项检查是否同时属于双方。

$\mathscr{E}=\{x:\ 1\leqslant x\leqslant 20\}$

$E=\{\text{even numbers}\}$

$M=\{\text{multiples of 5}\}$

(b) Find the elements in the set $E\cap M$

全集及集合 E、M 如下：

$\mathcal{E}=\{x:1\leq x\leq 20\}$

$E=\{\text{偶数}\}$

$M=\{5\text{ 的倍数}\}$

(b) 求集合 $E\cap M$ 中的元素。

✓ **答案**

$\{10,20\}$

解析 由全集范围及集合条件得

$E=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$，

$M=\{5,10,15,20\}$。

其中 10, 20 同时属于两个集合，故

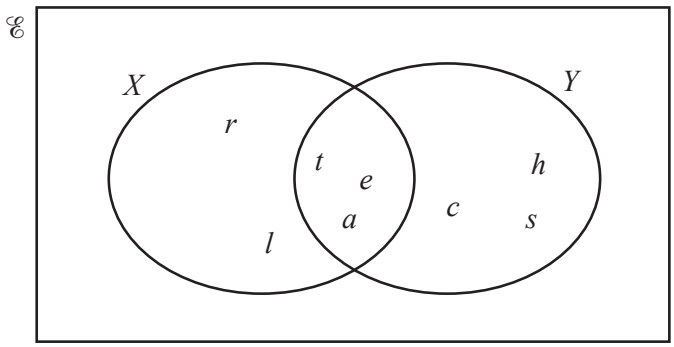
$E\cap M=\{10,20\}$。

答：元素为 10, 20。

4. [2023 · May/June 0580/41 Q9(a)(ii)]

提示：沿矩形内、指定圆外的区域查找元素，再计数。

(a) The Venn diagram shows set X and set Y.



(ii) Find $\mathrm{n}(Y')$.

(a) 韦恩图表示集合 X 和集合 Y。矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆表示 X，右圆表示 Y。仅在 X 圆内的元素为 r, l；两圆重叠部分的元素为 t, e, a；仅在 Y 圆内的元素为 h, c, s；矩形内两圆外没有元素。
(ii) 求 $n(Y')$。

✓ **答案**

2

解析 Y' 包含全集内不属于 Y 的元素。图中 r, l 在 Y 圆外，故
$Y' = \{r, l\}$，
$n(Y') = 2$。
答：2。

5. [2023 · May/June 0580/22 Q6(c)]
提示：先看全集范围，再核对候选数是否不属于指定集合。

$\mathscr{E} = \{x: 1 \leqslant x \leqslant 20\}$
$E = \{\text{even numbers}\}$
$M = \{\text{multiples of 5}\}$

(c) $y \notin E$.

Write down a possible value of y.

全集及集合 E、M 如下：
$\mathcal{E} = \{x : 1 \leq x \leq 20\}$

$E = \{偶数\}$

$M = \{5 \text{ 的倍数}\}$

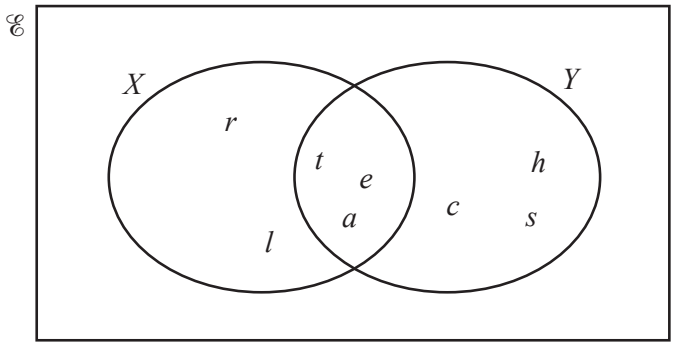
(c) $y \notin E$。
写出 y 的一个可能值。

✓ **答案** 1（答案不唯一）

解析 $y \notin E$ 表示 y 不是偶数。取
$y = 1$。
因 1 在全集范围内，且不是偶数，故符合条件。
答：y 的一个可能值为 1。

6. [2023 · May/June 0580/41 Q9(a)(i)]
提示：沿指定圆的边界查找，核对独有区和重叠区。

(a) The Venn diagram shows set X and set Y.



(i) List the elements of X.

(a) 韦恩图表示集合 X 和集合 Y。矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆表示 X，右圆表示 Y。仅在 X 圆内的元素为 r,l；两圆重叠部分的元素为 t,e,a；仅在 Y 圆内的元素为 h,c,s；矩形内两圆外没有元素。
(i) 列出 X 的元素。

✓ **答案**

$$\{r,l,t,e,a\}$$

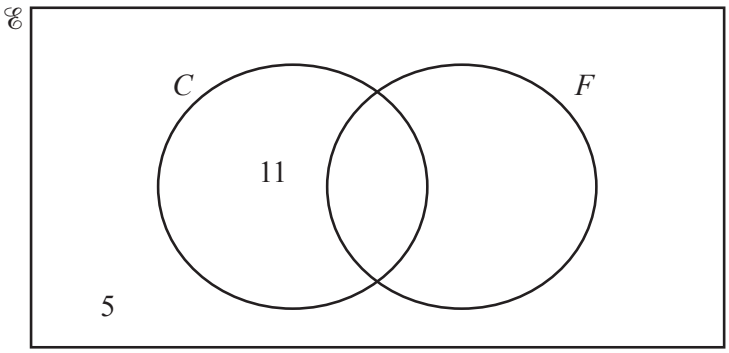
解析 X 圆内独有的元素为 r,l，重叠部分的元素为 t,e,a，故
$X=\{r,l\}\cup\{t,e,a\}=\{r,l,t,e,a\}$。
答：X 的元素为 r,l,t,e,a。

7. [2023 · October/November 0580/12 Q20(b)]
提示：并集是至少参加一项运动的区域，可用总人数减去两项都不参加的人数。

$\mathscr{E}$ = {students in a class}
C = {students who play cricket}
F = {students who play football}

There are 36 students in the class.
15 students play cricket.
20 students play football.

(a)



Complete the Venn diagram.

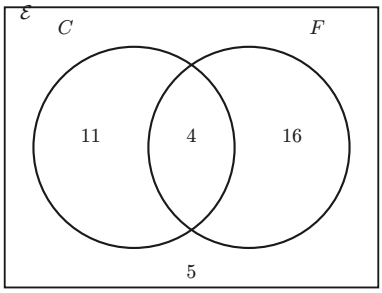
(b) Write down n$(C\cup F)$.

全集为班上 36 名学生，C 为打板球的学生，F 为踢足球的学生。15 人打板球，20 人踢足球。 (a) 给定韦恩图中，只打板球的区域有 11 人，两项运动都不参加的区域有 5 人。补全韦恩图。 (b) 写出$n(C\cup F)$。

✓ **答案**

31

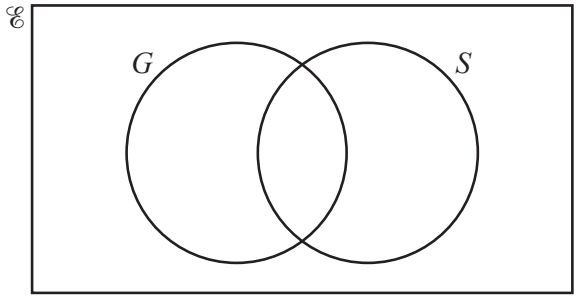
解析 全集有 36 人，两项运动都不参加的有 5 人。因此至少参加一项运动的人数为 $n(C\cup F)=36-5=31$
也可先求交集 15−11=4，再算 15+20−4=31。 答：31。



8. [2023 · October/November 0580/31 Q9(c)(ii)]
提示：看同时拥有两类首饰的描述，对照交集所指的人群。

(c) There are 110 people in a group.
G = { people who own gold jewellery }
S = { people who own silver jewellery }

18 people own both gold jewellery and silver jewellery.
46 people own gold jewellery.
11 people own no gold jewellery and no silver jewellery.



(ii) Write down n$(G \cap S)$.

(c) 某群体共有 110 人。
集合 G 为拥有金首饰的人，集合 S 为拥有银首饰的人。
18 人同时拥有金首饰和银首饰。
46 人拥有金首饰。
11 人既没有金首饰，也没有银首饰。
韦恩图中，矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆表示 G，右圆表示 S；各区域尚未填入人数。
(ii) 写出 $n(G \cap S)$。

✓ **答案**

18

解析 $G \cap S$ 表示同时拥有金首饰和银首饰的人组成的集合。由题意，这样的人有 18 人，故 $n(G \cap S) = 18$。
答：18。

1.38 逐个判断元素归属，补全韦恩图

题型 1 逐个判断元素归属，补全韦恩图（Core / Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **全集与元素：** 矩形内研究的是 a, b, c 等字母。$\mathcal{E}$ 表示全集，其中每个字母称为一个_____。本例的全集有 11 个元素。

② **两圆区域：** 对照集合 F, B，分别判断每个字母的归属。每个字母只能填入_____个区域。

元素	所属集合	填写区域
a, c	同时属于 F, B	两圆重叠部分
e	属于 F，不属于 B	F 圆独有部分
b, k	属于 B，不属于 F	B 圆独有部分
g, i, j	两个集合都不属于	矩形内、两圆外

③ **按数性质归类：** 平方数是整数的平方；4 的倍数是 4 与整数的积。用这两种性质分类时，分别判断。

$16 = 4 \times 4 = 4^2$
同时属于平方数和 4 的倍数

$20 = 4 \times 5$
$4^2 < 20 < 5^2$
属于 4 的倍数，不属于平方数

④ **按集合条件取数：**在正整数中，x 表示待判断的数。集合写法中的冒号表示满足其后的条件。条件 $x<4$ 不含边界_____，从 1 起取数：

$$\{x : x<4\}=\{1,2,3\}$$

⑤ **三圆区域定位：**在本例中另添一个圆，表示集合 H。

$$H=\{a,e\}$$

逐一判断三个集合的归属，再确定区域。

a 属于 F,B,H

填入三个圆共同重叠的部分

e 属于 F,H，不属于 B

填入 F,H 重叠且在 B 圆外的部分

⑥ **逐个填写核对：**图中已有的 f,d,h 保留，不重复填写。填完后，全集中的 11 个元素应各出现一次。某区域没有符合条件的元素时，该区域_____。

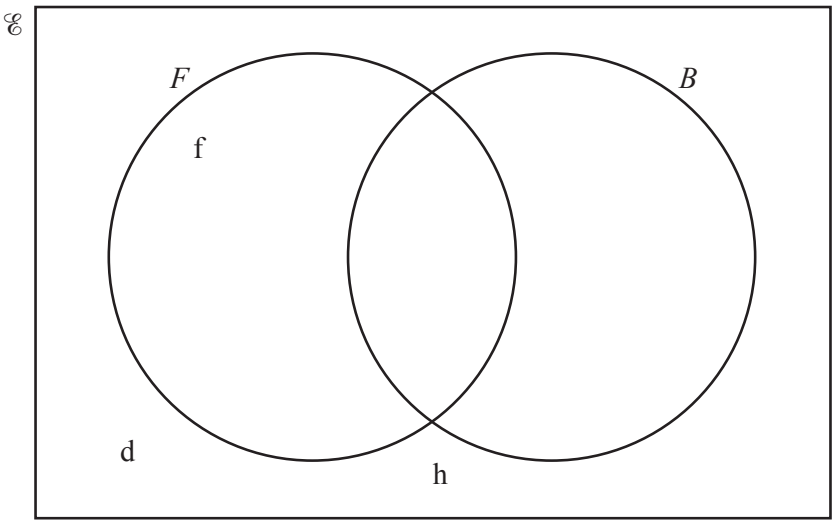
填空：①元素　②1　③4　④留空

点石成金　题目出现集合的元素或条件，并要求补全韦恩图时，先逐个判断元素属于哪些集合。

例 1　[2023 · May/June 0580/11 Q24(a)]

$\mathscr{E}=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$
$F=\{f, a, c, e\}$
$B=\{b, a, c, k\}$

(a) Complete the Venn diagram.



$\mathcal{E}=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k\}$

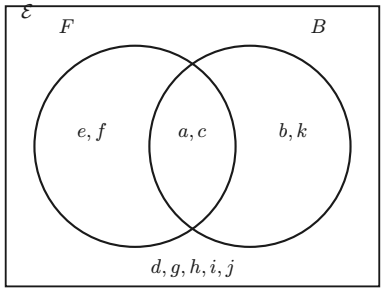
$F=\{f,a,c,e\}$

$B=\{b,a,c,k\}$

(a) 补全韦恩图。
图中矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆表示集合 F，右圆表示集合 B。f 已填在左圆独有部分，d,h 已填在矩形内、两圆外。

解答　a,c 同时出现在集合 F,B 中，填在两圆重叠部分。
e 属于 F 而不属于 B，与已给的 f 同在左圆独有部分。
b,k 属于 B 而不属于 F，填在右圆独有部分。
g,i,j 不属于 F，也不属于 B，与已给的 d,h 同在矩形内、两圆外。
答：F 独有部分为 e,f，重叠部分为 a,c，B 独有部分为 b,k，两圆外为 d,g,h,i,j。

方法：先看两集合的元素表，逐个判断字母属于哪几个集合。



！ 辨析：重叠区是同时属于两集合，两圆外区是两个集合都不属于。

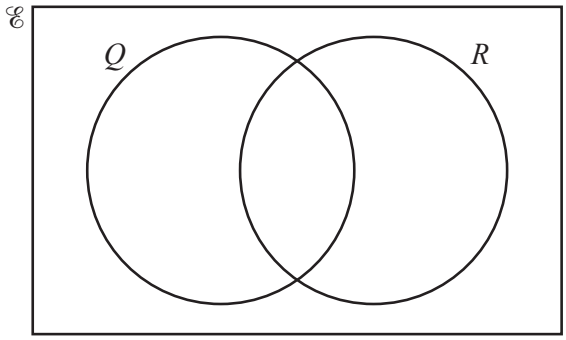
针对练习

1. [2023 · October/November 0580/13 Q21(a)]

提示：看两圆的分类条件，分别检验平方数与四的倍数。

$\mathscr{E} = \{2,\ 4,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$
$Q = \{\text{square numbers}\}$
$R = \{\text{multiples of } 4\}$

(a) Use this information to complete the Venn diagram.



$\mathcal{E} = \{2, 4, 8, 9, 10, 12\}$

$Q = \{\text{平方数}\}$

$R = \{4 \text{ 的倍数}\}$

(a) 利用这些信息补全韦恩图。
图中矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆表示集合 Q，右圆表示集合 R。

✓ **答案** Q 独有部分：9；重叠部分：4；R 独有部分：8, 12；两圆外：2, 10。

解析 由平方数和 4 的倍数的定义得

$$4 = 2^2 = 4 \times 1$$

$$9 = 3^2$$

$$8 = 4 \times 2$$

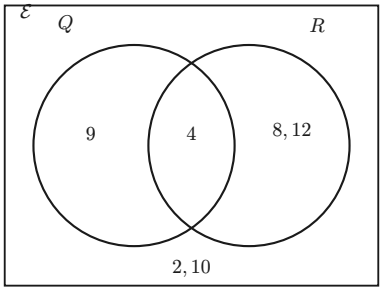
$$12 = 4 \times 3$$

因此，在给定全集内，

$$Q = \{4, 9\}$$

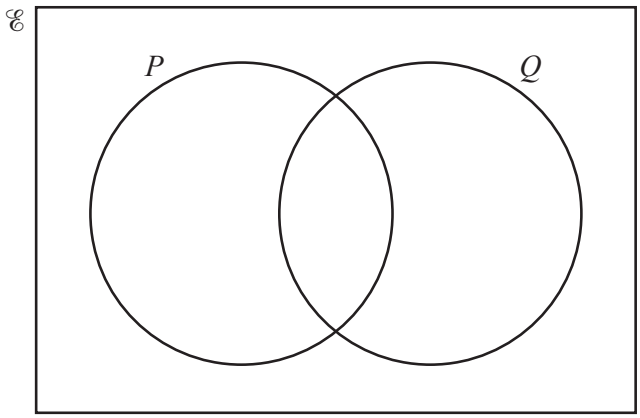
$$R = \{4, 8, 12\}$$

4 同时属于 Q, R；9 仅属于 Q；$8, 12$ 仅属于 R。$2, 10$ 既不是平方数，也不是 4 的倍数，填在两圆外。
答：Q 独有部分填 9，重叠部分填 4，R 独有部分填 $8, 12$，两圆外填 $2, 10$。



2. [2023 · May/June 0580/23 Q11(a)]
提示：对比两集合的字母表，再查全集中是否有遗漏的字母。

(a) $\mathscr{E} = \{ a,\ b,\ e,\ g,\ l,\ m,\ o,\ r,\ t,\ y \}$
$P = \{ a,\ b,\ e,\ g,\ l,\ r \}$
$Q = \{ e,\ g,\ m,\ o,\ r,\ t,\ y \}$



Complete the Venn diagram.

(a)

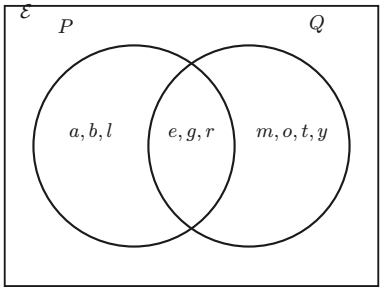
$$\mathcal{E} = \{a, b, e, g, l, m, o, r, t, y\}$$

$$P = \{a, b, e, g, l, r\}$$

$$Q = \{e, g, m, o, r, t, y\}$$

图中矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆表示集合 P，右圆表示集合 Q。
补全韦恩图。

✓ **答案** P 独有部分：a, b, l；重叠部分：e, g, r；Q 独有部分：m, o, t, y；两圆外留空。
解析 e, g, r 在集合 P, Q 中都出现，填在两圆重叠部分。
a, b, l 属于 P 而不属于 Q，填在左圆独有部分。
m, o, t, y 属于 Q 而不属于 P，填在右圆独有部分。
全集中的每个元素都属于至少一个集合，故两圆外留空。
答：P 独有部分填 a, b, l，重叠部分填 e, g, r，Q 独有部分填 m, o, t, y，两圆外留空。

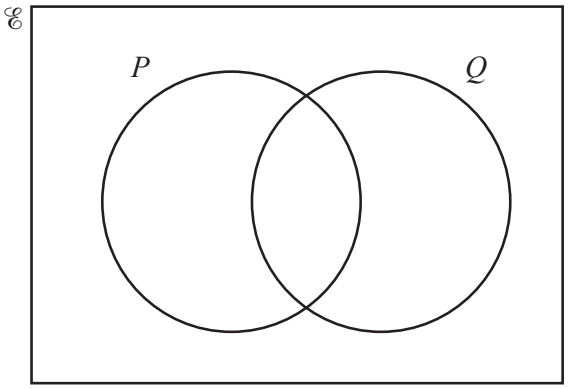


3. [2024 · February/March 0580/22 Q16]

提示：先列出全集中的整数，再分别判断是否为偶数、是否为五的倍数。

x is an integer.

$\mathscr{E} = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 10\}$
$P = \{x : x \text{ is an even number}\}$
$Q = \{x : x \text{ is a multiple of } 5\}$



Complete the Venn diagram.

x 是整数。

$$\mathcal{E} = \{x : 1 \leq x \leq 10\}$$

$$P = \{x : x \text{ 是偶数}\}$$

$$Q = \{x : x \text{ 是 } 5 \text{ 的倍数}\}$$

图中矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆表示集合 P，右圆表示集合 Q。
补全韦恩图。

✓ **答案** P 独有部分：$2, 4, 6, 8$；重叠部分：10；Q 独有部分：5；两圆外：$1, 3, 7, 9$。

解析 由 x 是整数且 $1 \leq x \leq 10$，得

$$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

其中偶数组成集合 P，5 的倍数组成集合 Q。

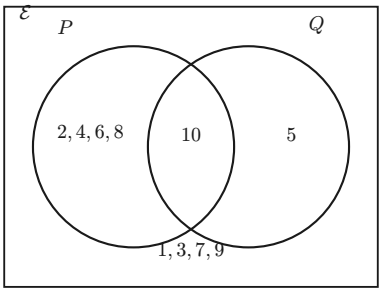
$$P = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$Q = \{5, 10\}$$

10 同时属于两个集合，填入重叠部分。
$2, 4, 6, 8$ 属于 P，不属于 Q，填入左圆独有部分。
5 属于 Q，不属于 P，填入右圆独有部分。

其余的 $1,3,7,9$ 填入矩形内、两圆外。

答：P 独有部分填 $2,4,6,8$，重叠部分填 10，Q 独有部分填 5，两圆外填 $1,3,7,9$。



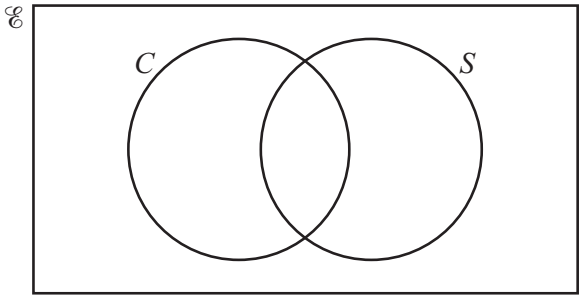
4. [2024 · May/June 0580/13 Q21(a)(i)]

提示：分别判断全集中哪些数能写成整数的平方、哪些能写成整数的立方。

(a) $\mathscr{E} = \{1, 4, 5, 8, 9, 12, 16, 64\}$

$C = \{\text{cube numbers}\}$

$S = \{\text{square numbers}\}$



(i) Complete the Venn diagram.

(a)

$\mathcal{E} = \{1, 4, 5, 8, 9, 12, 16, 64\}$

$C = \{\text{立方数}\}$

$S = \{\text{平方数}\}$

图中矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆表示集合 C，右圆表示集合 S。

(i) 补全韦恩图。

✓ **答案** C 独有部分：8；重叠部分：$1, 64$；S 独有部分：$4, 9, 16$；两圆外：$5, 12$。

解析 全集中的立方数为

$$1 = 1^3$$

$$8 = 2^3$$

$$64 = 4^3$$

全集中的平方数为

$$1 = 1^2$$

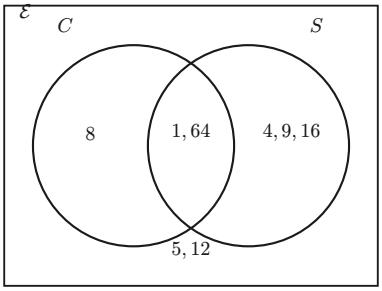
$$4 = 2^2$$

$$9 = 3^2$$

$$16 = 4^2$$

$$64 = 8^2$$

1, 64 同时是立方数和平方数，填入重叠部分。
8 是立方数而不是平方数，填入 C 独有部分。
4, 9, 16 是平方数而不是立方数，填入 S 独有部分。
5, 12 既不是立方数，也不是平方数，填入两圆外。
答：C 独有部分填 8，重叠部分填 1, 64，S 独有部分填 4, 9, 16，两圆外填 5, 12。



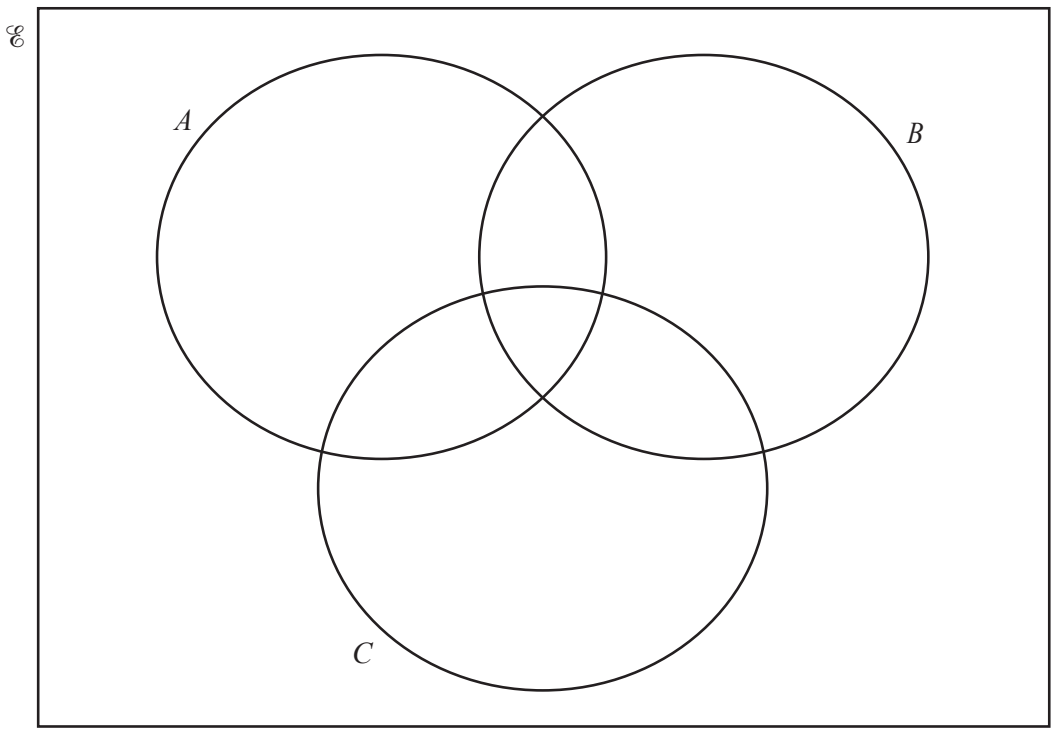
5. [2023 · May/June 0580/41 Q9(c)(i)]
提示：先看全集的取值边界，再逐数核对三个集合的条件。

(c) $\mathscr{E} = \{\text{positive integers} < 13\}$

$A = \{x : x < 9\}$

$B = \{x : x \text{ is even}\}$

$C = \{x : x \text{ is a multiple of } 3\}$



(i) Complete the Venn diagram.

(c)

$\mathcal{E} = \{$小于 13 的正整数$\}$

$$A=\{x:x<9\}$$

$$B=\{x:x\text{ 是偶数}\}$$

$$C=\{x:x\text{ 是 }3\text{ 的倍数}\}$$

图中矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左上圆表示集合 A，右上圆表示集合 B，下方圆表示集合 C。
(i) 补全韦恩图。

✓ **答案** 仅属 A：$1,5,7$；仅属 B：10；仅属 C：9；属于 A,B 而不属于 C：$2,4,8$；属于 A,C 而不属于 B：3；属于 B,C 而不属于 A：12；同时属于三个集合：6；三个圆外：11。

解析 全集由小于 13 的正整数组成，故

$$\mathcal{E}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

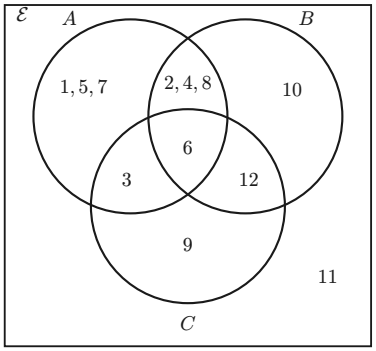
由各集合的条件得

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$B=\{2,4,6,8,10,12\}$$

$$C=\{3,6,9,12\}$$

6 同时属于三个集合，填在三个圆共同重叠的部分。
$2,4,8$ 属于 A,B 而不属于 C；3 属于 A,C 而不属于 B；12 属于 B,C 而不属于 A，分别填在相应两圆重叠且在第三个圆外的部分。
$1,5,7$ 仅属于 A，10 仅属于 B，9 仅属于 C，分别填在各圆独有部分。
11 不属于三个集合中的任何一个，填在矩形内、三个圆外。
答：A 独有部分填 $1,5,7$；B 独有部分填 10；C 独有部分填 9；A,B 重叠且在 C 外的部分填 $2,4,8$；A,C 重叠且在 B 外的部分填 3；B,C 重叠且在 A 外的部分填 12；三个圆共同重叠的部分填 6；三个圆外填 11。



1.39 用总数减去已知区域，补出韦恩图人数

题型 1 用总数减去已知区域，补出韦恩图人数（Core / Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **先填重叠区：** P、C 分别表示学物理、学化学的学生集合。$n(P)$ 表示 P 中的人数，交集 $P\cap C$ 表示两科都学。已知两科都学的有 9 人，重叠区填 _____ 人。

② **补出独有区：** 物理共有 17 人，化学共有 14 人，两科都学的有 9 人。各集合人数减去交集人数，得独有区人数。

仅学物理：

$17-9=$ _____

仅学化学：

$14-9=$ _____

③ **补出圈外：** $\mathcal{E}$ 表示全班学生的集合，$n(\mathcal{E})=24$。总人数减去三个圈内区域的人数，得两科都不学的人数。

$$24-(8+9+5)=_____$$

④ **按区域求和：** 求一个集合的人数，把该集合覆盖的区域相加。求全体人数，还须加上两圈外的人数。

学物理的人数：

$n(P)=8+9=_____$

全班人数：

$n(\mathcal{E})=8+9+5+2=_____$

⑤ **由圈外求交集：** 并集 $P\cup C$ 表示至少学一科，$(P\cup C)'$ 表示两科都不学。已知全班 24 人、圈外 2 人，先减出圈内总人数。两科人数之和减去圈内总人数，得交集人数。

$$n(P\cup C)=24-2=22$$

$$n(P\cap C)=17+14-22=_____$$

⑥ **由独有区求交集：** 若物理圈共有 17 人，其中仅学物理的有 8 人，相减得交集人数。再用化学圈的 14 人减去交集人数，补出仅学化学的人数。

$$n(P\cap C)=17-8=_____$$

$$14-9=_____$$

填空：①9　②8　③5　④2　⑤17　⑥24　⑦9　⑧9　⑨5

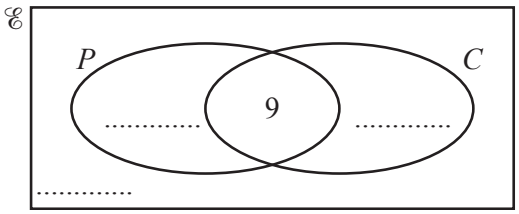
点石成金　题目出现两个相交的集合圈及人数时，先分清独有区、交集和两圈外，再按所给人数相减或相加。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q7(a)]

$\mathcal{E}$ = {students in a class}　P = {students who study Physics}　C = {students who study Chemistry}

$n(\mathcal{E})=24$　$n(P)=17$　$n(C)=14$　$n(P\cap C)=9$

(a) Complete the Venn diagram.



全集 $\mathcal{E}$ 为一个班的全体学生。P 为学习物理的学生集合，C 为学习化学的学生集合。

$$n(\mathcal{E})=24$$

$$n(P)=17$$

$$n(C)=14$$

$$n(P\cap C)=9$$

(a) 补全韦恩图。图中矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圈为 P，右圈为 C，重叠区已填 9。

解答　由两科都学的有 9 人，得仅学物理的人数为

$$17-9=8$$

仅学化学的人数为

$$14-9=5$$

方法：先看两科都学的人数填重叠区，再用各科总数减去它。

辨析：独有区是仅属于一个集合的部分，交集

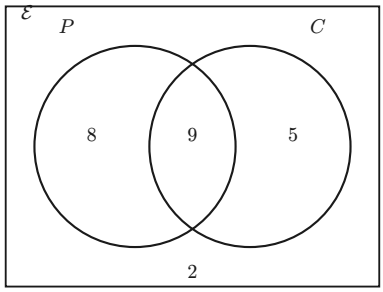
两科都不学的人数为

$$24-(8+9+5)=2$$

是同时属于两个集合的部分。

拓展：两个集合的人数相加，会把重叠区多算一次。

答：仅属于 P 的区域填 8，仅属于 C 的区域填 5，两圈外填 2。

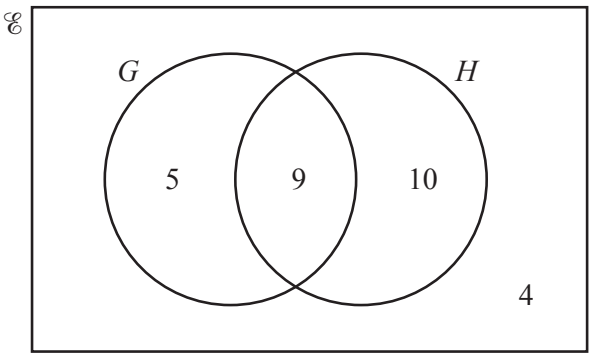


针对练习

1. [2023 · May/June 0580/33 Q1(b)(ii)]

提示：看地理圈覆盖的区域，合计时包含重叠部分。

(b) The Venn diagram shows information about the number of students in a class who study geography (G) and history (H).



(ii) Find n(G).

(b) 韦恩图表示一个班学习地理（G）和历史（H）的学生人数。
矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圈为 G，右圈为 H。仅学地理的有 5 人，两科都学的有 9 人，仅学历史的有 10 人，两科都不学的有 4 人。
(ii) 求 $n(G)$。

✓ **答案** 14

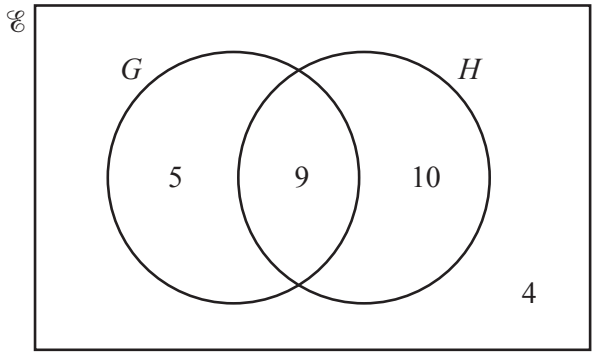
解析 集合 G 包含仅学地理和地理、历史都学的学生，

$$n(G)=5+9=14$$

答：$n(G)=14$。

2. [2023 · May/June 0580/33 Q1(b)(i)]
提示：看表示全班的整个框，合计时把圈外也计入。

(b) The Venn diagram shows information about the number of students in a class who study geography (G) and history (H).



(i) Work out the number of students in the class.

(b) 韦恩图表示一个班学习地理（G）和历史（H）的学生人数。
矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圈为 G，右圈为 H。仅学地理的有 5 人，两科都学的有 9 人，仅学历史的有 10 人，两科都不学的有 4 人。
(i) 求这个班的学生总人数。

✓ **答案** 28 人

解析 全班人数包括两个圈内及两圈外的学生，

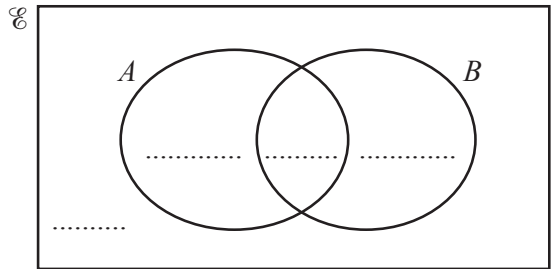
$$n(\mathcal{E}) = 5 + 9 + 10 + 4 = 28$$

答：这个班共有 28 人。

3. [2023 · October/November 0580/22 Q15(b)]
提示：先用总数扣除圈外，再比较圈内总数与两集合人数之和。

(b) $\mathrm{n}(\mathscr{E}) = 20$　　$\mathrm{n}(A \cup B)' = 1$　　$\mathrm{n}(A) = 12$　　$\mathrm{n}(B) = 10$

Complete the Venn diagram.



(b) 已知

$$n(\mathcal{E}) = 20$$

$$n((A \cup B)') = 1$$

$$n(A) = 12$$

$$n(B) = 10$$

补全韦恩图。图中矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圈为 A，右圈为 B，两圈相交。

✓ **答案** 仅属于 A：9；交集：3；仅属于 B：7；两圈外：1。

解析 由两圈外有 1 个元素，得

$$n(A \cup B) = 20 - 1 = 19$$

两个集合的人数相加，交集被计算两次，故

$$n(A\cap B)=12+10-19=3$$

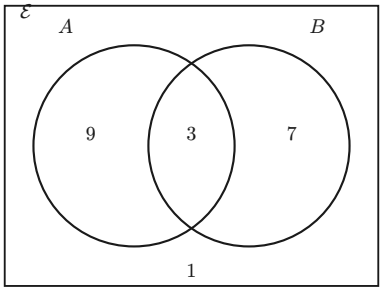
仅属于 A 的元素个数为

$$12-3=9$$

仅属于 B 的元素个数为

$$10-3=7$$

答：仅属于 A 的区域填 9，交集填 3，仅属于 B 的区域填 7，两圈外填 1。

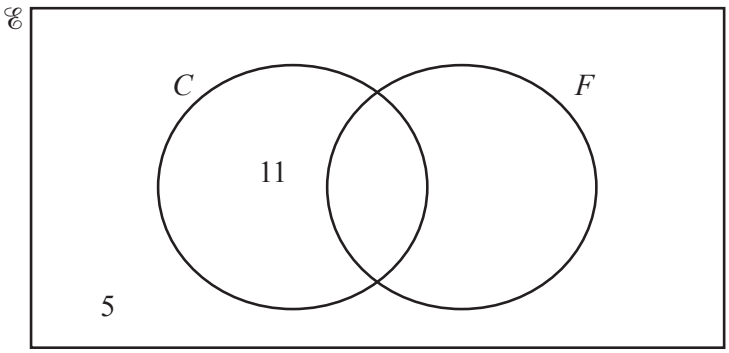


4. [2023 · October/November 0580/12 Q20(a)]
提示：先比较板球总人数与仅打板球人数，再补足球独有区。

$\mathscr{E}=\{\text{students in a class}\}$
$C=\{\text{students who play cricket}\}$
$F=\{\text{students who play football}\}$

There are 36 students in the class.
15 students play cricket.
20 students play football.

(a)



Complete the Venn diagram.

全集 $\mathcal{E}$ 为一个班的全体学生。C 为打板球的学生集合，F 为踢足球的学生集合。
这个班共有 36 名学生。
15 名学生打板球。
20 名学生踢足球。
(a) 图中矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圈为 C，右圈为 F。仅属于 C 的区域已填 11，两圈外已填 5。
补全韦恩图。

✓ **答案** 交集：4；仅属于 F：16。

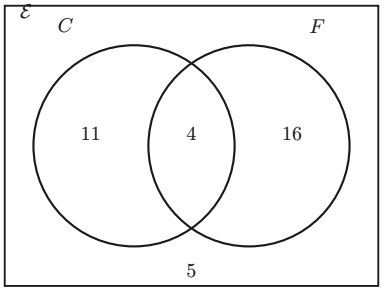
解析 板球集合共有 15 人，其中仅打板球的有 11 人，故两项都参加的人数为

$$n(C\cap F)=15-11=4$$

仅踢足球的人数为

$$20 - 4 = 16$$

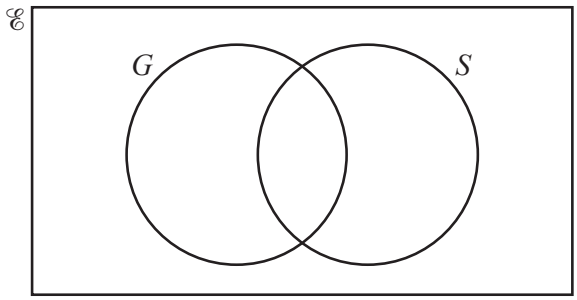
答：交集填 4，仅属于 F 的区域填 16。



5. [2023 · October/November 0580/31 Q9(c)(i)]
提示：先看两种首饰都有的人数，再用总数扣除已知区域。

(c) There are 110 people in a group.
G = { people who own gold jewellery }
S = { people who own silver jewellery }

18 people own both gold jewellery and silver jewellery.
46 people own gold jewellery.
11 people own no gold jewellery and no silver jewellery.



(i) Complete the Venn diagram.

(c) 一个群体共有 110 人。
G 为拥有金首饰的人组成的集合。
S 为拥有银首饰的人组成的集合。
18 人同时拥有金首饰和银首饰。
46 人拥有金首饰。
11 人既没有金首饰，也没有银首饰。
图中矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圈为 G，右圈为 S，两圈相交。
(i) 补全韦恩图。

✓ **答案** 仅属于 G：28；交集：18；仅属于 S：53；两圈外：11。

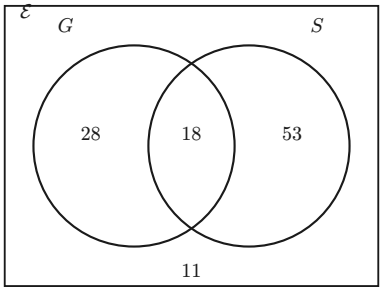
解析 同时拥有金首饰和银首饰的有 18 人，故交集填 18。仅拥有金首饰的人数为

$$46 - 18 = 28$$

既无金首饰也无银首饰的有 11 人，故仅拥有银首饰的人数为

$$110 - (28 + 18 + 11) = 53$$

答：仅属于 G 的区域填 28，交集填 18，仅属于 S 的区域填 53，两圈外填 11。

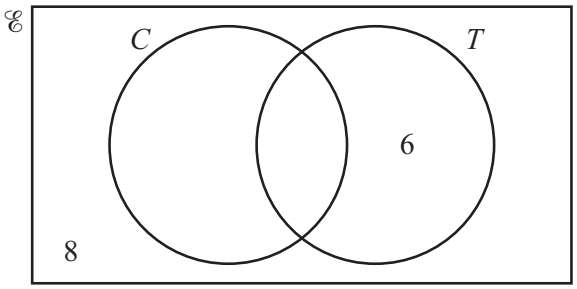


6. [2024 · October/November 0580/13 Q19(a)]

← 提示：从喝茶的总人数中减去仅喝茶的人数，求出重叠区人数。

$\mathscr{E}$ = {workers in an office}
C = {workers who drink coffee}
T = {workers who drink tea}

47 people work in the office.
32 people drink tea.



(a) Complete the Venn diagram.

$\mathcal{E}$ = {某办公室的工作人员}

C = {喝咖啡的工作人员}

T = {喝茶的工作人员}

办公室共有 47 人。
32 人喝茶。
图中矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆表示集合 C，右圆表示集合 T。仅喝茶的区域已填 6，既不喝咖啡也不喝茶的区域已填 8。
(a) 补全韦恩图。

✓ **答案** 仅喝咖啡：7；两种都喝：26；仅喝茶：6；两种都不喝：8。

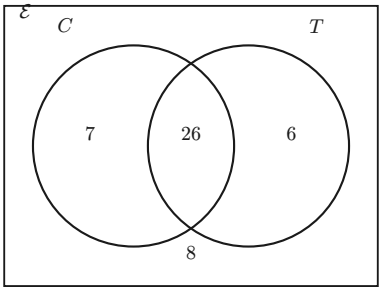
解析 喝茶的 32 人中，仅喝茶的有 6 人，两种都喝的人数为

$$32 - 6 = 26$$

总人数减去喝茶及两种都不喝的人数，得仅喝咖啡的人数。

$$47 - 32 - 8 = 7$$

答：左圆独有部分填 7，重叠部分填 26；右圆独有部分保留 6，两圆外保留 8。



1.40 按交、并和补集条件给韦恩图涂色

题型 1 按交、并和补集条件给韦恩图涂色（Core / Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **集合范围：**例题左圆表示集合 A，右圆表示集合 B。长方形内的全部区域构成全集，记作 $\mathcal{E}$。圆内表示属于该集合，圆外表示不属于。

② **交集涂色：**符号 $\cap$ 表示交集，各集合的条件须_____满足。两个集合取共同区域，三个集合继续取共同区域。

$A \cap B$

涂两圆共同的重叠区域

$A \cap B \cap C$

在两圆重叠处添画圆 C

$\xrightarrow{\text{保留圆内}}$ 三圆共同的重叠区域

③ **并集涂色：**符号 $\cup$ 表示并集，区域属于至少一个指定集合。先涂圆 A 全部，再涂圆 B 全部，重叠处_____涂色。反过来，两圆全部涂色的区域可写成集合符号。

$$A \cup B$$

④ **补集取外：**撇号表示取补集，A' 表示全集内不属于 A 的区域。涂色范围是长方形内、圆 A 的_____。其中包括圆 B 独有部分和两圆外的部分。

⑤ **交补筛选：**交集中的圆内、圆外条件须同时满足。

$A \cap B'$

先保留圆 A 内的区域

$\xrightarrow{\text{去掉圆 B 内}}$ 圆 A 独有部分

$A \cap B \cap C'$

先保留圆 A、B 的重叠区域

$\xrightarrow{\text{去掉圆 C 内}}$ 重叠区域中圆 C 外的部分

⑥ **并补合并：**以圆 A 的补集与圆 B 的并集为例。

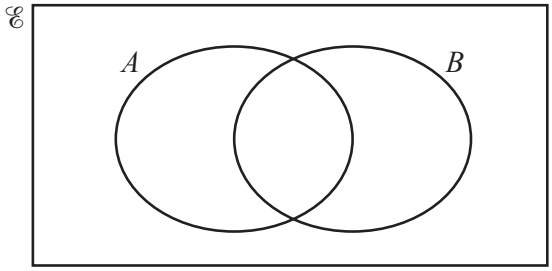
$$A' \cup B$$

先涂圆 A 外的全部区域，再涂圆 B 的全部区域。结果仅圆 A 独有部分留白，其余区域全部涂色。

← 填空：①同时　②也要　③外

点石成金　题目出现韦恩图及交、并或补集符号时，先确定各集合的圆内、圆外条件，再按交集取共同、并集合并涂色。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q13]

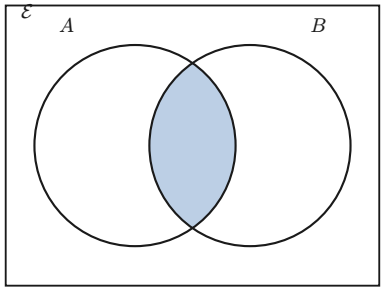


On the Venn diagram, shade the region $A \cap B$.

在韦恩图中，将区域 $A \cap B$ 涂上阴影。图中长方形表示全集 $\mathscr{E}$，左圆标为 A，右圆标为 B。

解答　由交集的含义，所涂区域须同时在圆 A 内和圆 B 内。

答：仅将两圆共同的透镜形区域涂上阴影。



方法：先看两圆标记和集合符号，再逐块核对归属条件。

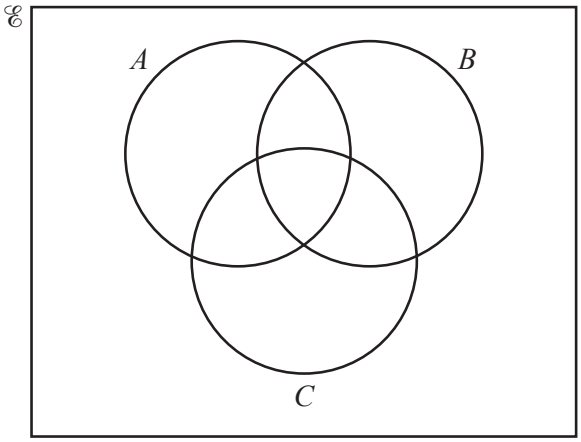
辨析：交集是同时满足各条件的区域，并集是至少满足一个条件的区域。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/22 Q20]

提示：先看撇号落在哪个字母后，再核对各块的圆内外条件。

In the Venn diagram, shade the region $A \cap B' \cap C$.



在韦恩图中，将区域 $A \cap B' \cap C$ 涂上阴影。图中长方形表示全集 $\mathscr{E}$，左上圆标为 A，右上圆标为 B，下方圆标为 C。

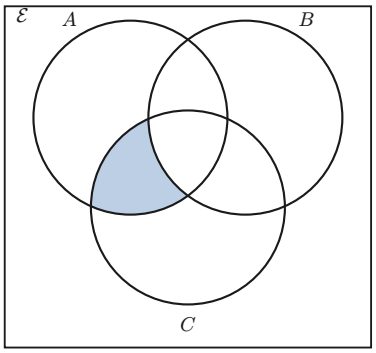
✓ **答案**　仅涂圆 A 与圆 C 的重叠区域中位于圆 B 外的部分。

解析　B' 表示全集内圆 B 外的区域。

由交集的含义，所涂区域须在圆 A 内、圆 C 内，且在圆 B 外。

先取圆 A 与圆 C 的重叠区域，再去掉圆 B 内的部分。

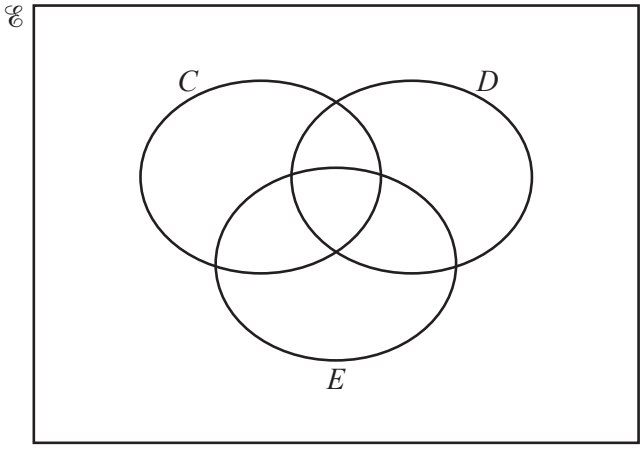
答：仅涂圆 A 与圆 C 的重叠区域中位于圆 B 外的部分。



2. [2023 · October/November 0580/21 Q14(b)]

提示：看各块分别落在几个圆内，再与交集的条件比较。

(b) In this Venn diagram, shade the region $C \cap D \cap E$.



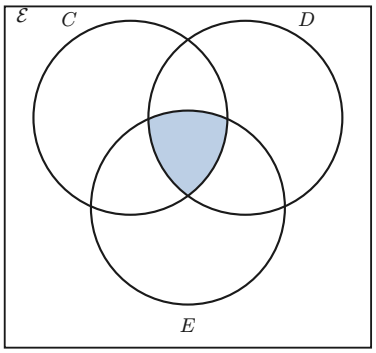
(b) 在这个韦恩图中，将区域 $C \cap D \cap E$ 涂上阴影。图中长方形表示全集 $\mathcal{E}$，左上圆标为 C，右上圆标为 D，下方圆标为 E。

✓ **答案** 仅涂圆 C、D、E 共同重叠的中央区域。

解析 由交集的含义，所涂区域须同时属于集合 C、D、E。

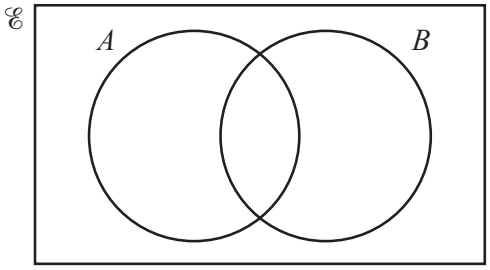
先取圆 C 与圆 D 的重叠区域，再保留其中位于圆 E 内的部分。

答：仅涂三个圆共同重叠的中央区域。



3. [2023 · May/June 0580/23 Q11(b)]
提示：先看补集对应哪个圆，再逐块核对两个条件。

(b)



Shade the region $A' \cap B$.

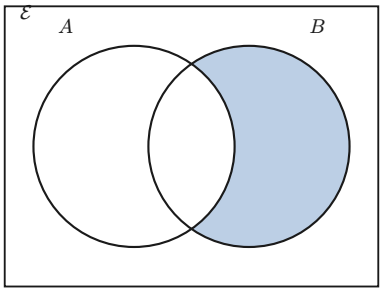
(b) 图中长方形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆标为 A，右圆标为 B。将区域 $A' \cap B$ 涂上阴影。

✓ **答案** 仅涂圆 B 内、圆 A 外的月牙形区域。

解析 A' 表示全集内圆 A 外的区域。

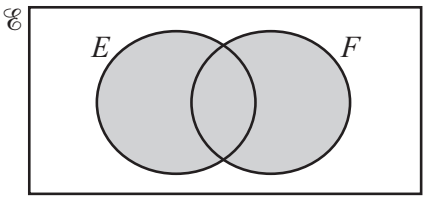
所涂区域须同时属于 A' 和 B，故保留圆 B 内的区域，并去掉与圆 A 重叠的部分。

答：仅涂圆 B 内、圆 A 外的月牙形区域。



4. [2023 · October/November 0580/31 Q9(d)]
提示：比较阴影是否覆盖各圆独有部分及重叠部分。

(d)



Use set notation to describe the shaded region.

(d) 图中长方形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆标为 E，右圆标为 F。两个圆的全部区域均已涂上阴影，包括重叠部分。用集合符号表示阴影区域。

✓ **答案**

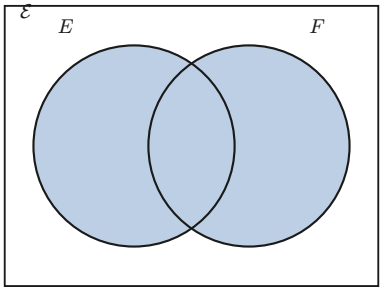
$$E \cup F$$

解析 阴影覆盖圆 E 和圆 F 的全部区域，包括两圆的重叠部分。

阴影中的区域属于 E 或 F，由并集的含义得

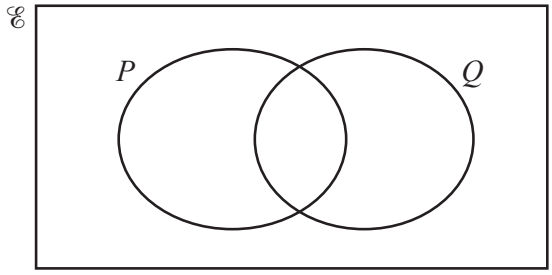
$$E \cup F$$

答：阴影区域为 $E \cup F$。



5. [2023 · October/November 0580/22 Q15(a)]
提示：先看并集两侧各指哪些区域，再检查两圆外的部分。

(a) On the Venn diagram, shade the region $P \cup Q'$.



(a) 在韦恩图中，将区域 $P \cup Q'$ 涂上阴影。图中长方形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆标为 P，右圆标为 Q。

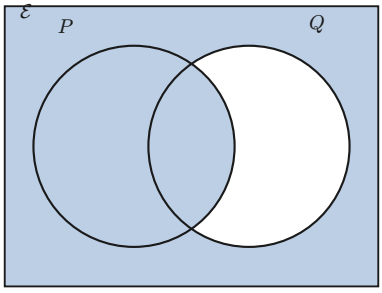
✓ **答案** 涂圆 P 的全部区域及长方形内两圆外的区域，仅圆 Q 独有部分留白。

解析 Q' 表示全集内圆 Q 外的区域。

由并集的含义，属于 P 或属于 Q' 的区域均须涂色。

先涂圆 Q 外的全部区域，再涂圆 P 的全部区域。

答：涂圆 P 的全部区域及长方形内两圆外的区域，仅圆 Q 独有部分留白。



1.41 提出平方因子，再合并同类根式

题型 1 提出平方因子，再合并同类根式（Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **平方根的含义：** $\sqrt{27}$ 表示平方后等于 27 的非负数。根号表示_____主平方根，例如：

$$3^2 = 9$$

$$\sqrt{9} = 3$$

② **分解平方因子：** 把根号内的数分解为两个因子。能写成整数平方的因子叫平方因子，通常选其中_____的。

$$27 = 9 \times 3 = 3^2 \times 3$$

$$12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$$

③ **提出平方因子：**各因子均非负时，乘积的平方根等于各因子平方根的积。把平方因子的_____移到根号外，其余因子留在根号内。

$$\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=\sqrt{9}\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

④ **合并同类根式：**化成最简根式后，根号内的数相同，称为同类根式。合并时，根号内的数不变，根号外的_____相加减。单独一个根式的系数为 1。

相加：

$3\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(3+2)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

相减：

$3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=(3-2)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

⑤ **分母非零条件：**分式的分母必须_____，根式作分母时也如此。下面的根式大于零，因此可以作分母。

$$\sqrt{3}>0$$

⑥ **共轭根式相乘：**$2+\sqrt{3}$ 与 $2-\sqrt{3}$ 仅根式项符号相反，互为共轭。相乘时，含根号的交叉项相消。

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3=1$$

填空：①非负　②最大　③平方根　④系数　⑤不为零

点石成金　题目出现两个根式相加减，且根号内的数含有平方因子时，先提出平方因子，再合并同类根式。

例 1　[2025 · May/June 0580/23 Q15(a)]

(a) Simplify.

$$\sqrt{27}+\sqrt{12}$$

(a) 化简。

$\sqrt{27}+\sqrt{12}$

解答　提出平方因子，得

$$\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$$

合并同类根式，得

$$\sqrt{27}+\sqrt{12}=3\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(3+2)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

答：$5\sqrt{3}$。

方法：先看两个根号内的数，从各自最大的平方因子起手。

辨析：平方因子是根号内可提出的整平方数，系数是根号外的倍数。

针对练习

1. [2025 · Specimen B 0580/02 Q19(a)]

提示：先找 75 的平方因子，再看后一项省略的系数。

(a) Simplify.

$$\sqrt{75}-\sqrt{3}$$

(a) 化简。

$\sqrt{75}-\sqrt{3}$

✓ **答案** $4\sqrt{3}$

解析 提出平方因子，得

$$\sqrt{75}=\sqrt{25\times 3}=5\sqrt{3}$$

由 $\sqrt{3}=1\sqrt{3}$，合并同类根式，得

$$\sqrt{75}-\sqrt{3}=5\sqrt{3}-1\sqrt{3}=(5-1)\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

答：$4\sqrt{3}$。

2. [2025 · Specimen A 0580/02 Q19(a)]

提示：分别找 32 与 98 的平方因子，再比较剩余根式。

(a) Simplify.

$$\sqrt{32}+\sqrt{98}$$

(a) 化简。

$\sqrt{32}+\sqrt{98}$

✓ **答案** $11\sqrt{2}$

解析 提出平方因子，得

$$\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{98}=\sqrt{49\times 2}=7\sqrt{2}$$

合并同类根式，得

$$\sqrt{32}+\sqrt{98}=4\sqrt{2}+7\sqrt{2}=(4+7)\sqrt{2}=11\sqrt{2}$$

答：$11\sqrt{2}$。

3. [2025 · February/March 0580/22 Q20(a)]
提示：先提出两项的平方因子，再比较根号内的数。

(a) Simplify.

$$\sqrt{300}+\sqrt{48}$$

(a) 化简。

$\sqrt{300}+\sqrt{48}$

✓ **答案** $14\sqrt{3}$

解析 提出平方因子，得

$$\sqrt{300}=\sqrt{100\times 3}=10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3}$$

合并同类根式，得

$$\sqrt{300}+\sqrt{48}=10\sqrt{3}+4\sqrt{3}=(10+4)\sqrt{3}=14\sqrt{3}$$

答：$14\sqrt{3}$。

4. [2025 · October/November 0580/23 Q24(a)]
提示：先化简两项，再按原式顺序比较系数并作差。

(a) Simplify.

$$\sqrt{125}-\sqrt{20}$$

(a) 化简。

$\sqrt{125}-\sqrt{20}$

✓ **答案** $3\sqrt{5}$

解析 提出平方因子，得

$$\sqrt{125}=\sqrt{25\times 5}=5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$$

合并同类根式，得

$$\sqrt{125}-\sqrt{20}=5\sqrt{5}-2\sqrt{5}=(5-2)\sqrt{5}=3\sqrt{5}$$

答：$3\sqrt{5}$。

5. [2026 · February/March 0580/22 Q15]
提示：分别找40与160的最大平方因子，再比较余下因子。

Simplify.

$$\sqrt{40}+\sqrt{160}$$

化简。

$\sqrt{40}+\sqrt{160}$

✓ **答案** $6\sqrt{10}$

解析 提出平方因子，得

$$\sqrt{40}=\sqrt{4\times 10}=2\sqrt{10}$$

$$\sqrt{160}=\sqrt{16\times 10}=4\sqrt{10}$$

合并同类根式，得

$$\sqrt{40}+\sqrt{160}=2\sqrt{10}+4\sqrt{10}=(2+4)\sqrt{10}=6\sqrt{10}$$

答：$6\sqrt{10}$。

1.42 逐项展开根式括号，再合并同类项

题型 1 逐项展开根式括号，再合并同类项（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **根式含义与相乘：** 两个括号中都有 $\sqrt{5}$，它表示平方为 5 的_____，称为主平方根。根式前的乘数称为系数。相乘时，系数按符号法则相乘，相同根式相乘得到被开方数。

$$\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$$

$$\left(-\sqrt{5}\right)\times\left(-3\sqrt{5}\right)=3\times 5=15$$

② **括号逐项展开：** 两个括号相乘，每个括号中各有两项。把减去的项看成负项，每项分别与另一括号中的每项相乘，共得_____个乘积。

$$\left(2-\sqrt{5}\right)\left(1-3\sqrt{5}\right)=2\times 1+2\times\left(-3\sqrt{5}\right)+\left(-\sqrt{5}\right)\times 1+\left(-\sqrt{5}\right)\times\left(-3\sqrt{5}\right)$$

③ **同类根式合并：** 根式化简后，根号内相同的项称为同类根式。合并时系数相加，根式保留。整数项另行相加。

$$-6\sqrt{5}-\sqrt{5}=(-6-1)\sqrt{5}=_____\ \sqrt{5}$$

④ **提取平方因子：** 根号内有 12 时，先作分解。因子 4 是完全平方数，称为 12 的平方因子。把平方因子的非负平方根移到根号外。

$$12=4\times 3=2^2\times 3$$

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

⑤ **对应系数比较：** 题目给出整数与根式的和时，分别比较整数项与根式的系数。把减法写成加上负数，负号属于系数。

$$17-7\sqrt{5}=17+(-7)\sqrt{5}$$

整数项为 17，$\sqrt{5}$ 的系数为 -7。

⑥ **共轭式与分母：**把 $2-\sqrt{5}$ 的两项间减号改为加号，得到它的共轭式。分子、分母同乘共轭式，可消去分母中的根式。分母及所乘的式子均须为_____。

$$(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=4+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}-5=-1$$

$$\sqrt{5}\neq 2,\quad 2-\sqrt{5}\neq 0,\quad 2+\sqrt{5}\neq 0$$

$$\frac{1}{2-\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}=-(2+\sqrt{5})$$

填空：①非负数　②四　③−7　④非零数

点石成金　题目出现两个含根式的括号相乘，并要求展开化简或求系数时，先把每一项分别相乘。

例 1　[2025 · May/June 0580/21 Q15(a)]

(a) Expand and simplify.

$$(2-\sqrt{5})(1-3\sqrt{5})$$

(a) 展开并化简。

$(2-\sqrt{5})(1-3\sqrt{5})$

解答　由乘法分配律，得

$$(2-\sqrt{5})(1-3\sqrt{5})=2-6\sqrt{5}-\sqrt{5}+3\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$$

由 $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$，合并同类项，得

$$2-6\sqrt{5}-\sqrt{5}+15=(2+15)+(-6-1)\sqrt{5}=17-7\sqrt{5}$$

方法：先看两括号各项的正负号，再列出四个乘积，分组整理。

辨析：展开是各项分别相乘，合并是同类项的系数相加。

答：$17-7\sqrt{5}$。

针对练习

1. [2026 · May/June 0580/22 Q17(a)]

提示：看负根式参与的两个乘积，分别核对符号。

(a) Expand and simplify.

$$(4-\sqrt{7})(3+2\sqrt{7})$$

(a) 展开并化简。

$(4-\sqrt{7})(3+2\sqrt{7})$

✓ **答案**

$$-2+5\sqrt{7}$$

解析　由乘法分配律，得

$$(4-\sqrt{7})(3+2\sqrt{7})=12+8\sqrt{7}-3\sqrt{7}-2\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}$$

由 $\sqrt{7}\times\sqrt{7}=7$，合并同类项，得

$$12+8\sqrt{7}-3\sqrt{7}-14=(12-14)+(8-3)\sqrt{7}=-2+5\sqrt{7}$$

答：$-2+5\sqrt{7}$。

2. [2026 · May/June 0580/21 Q26(a)]
提示：先看根号内的平方因子，再比较化简后的根式。

(a) Expand and simplify.

$$(5+\sqrt{2})(3-\sqrt{8})$$

(a) 展开并化简。
$(5+\sqrt{2})(3-\sqrt{8})$

✓ **答案**

$$11-7\sqrt{2}$$

解析 先提取根号内的平方因子，得

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$$

由乘法分配律，得

$$(5+\sqrt{2})(3-\sqrt{8})=(5+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$$

$$(5+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=15-10\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$$

由 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$，合并同类项，得

$$15-10\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4=(15-4)+(-10+3)\sqrt{2}=11-7\sqrt{2}$$

答：$11-7\sqrt{2}$。

3. [2025 · May/June 0580/22 Q18(b)]
提示：展开后分开整理整数项与根式项，再对应比较。

(b) $(5-\sqrt{2})(1+3\sqrt{2})=c+k\sqrt{2}$

Find the value of c and the value of k.

(b) 已知
$(5-\sqrt{2})(1+3\sqrt{2})=c+k\sqrt{2}$。
求 c 的值和 k 的值。

✓ **答案**

$$c=-1,\quad k=14$$

解析 由乘法分配律，得

$$(5-\sqrt{2})(1+3\sqrt{2})=5+15\sqrt{2}-\sqrt{2}-3\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$$

由 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$，合并同类项，得

$$5+15\sqrt{2}-\sqrt{2}-6=(5-6)+(15-1)\sqrt{2}=-1+14\sqrt{2}$$

与题中 $c+k\sqrt{2}$ 比较整数项和根式的系数，得

$$c=-1$$

$$k=14$$

答：$c=-1$，$k=14$。

4. [2025 · October/November 0580/21 Q21(a)]
提示：看两个根式相乘后的符号，再分别比较整数与系数。

(a) $(3-\sqrt{5})(2+3\sqrt{5})=a+b\sqrt{5}$

Find the value of a and the value of b.

(a) 已知
$(3-\sqrt{5})(2+3\sqrt{5})=a+b\sqrt{5}$。
求 a 的值和 b 的值。

✓ **答案**

$$a=-9,\quad b=7$$

解析 由乘法分配律，得

$$(3-\sqrt{5})(2+3\sqrt{5})=6+9\sqrt{5}-2\sqrt{5}-3\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$$

由 $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$，合并同类项，得

$$6+9\sqrt{5}-2\sqrt{5}-15=(6-15)+(9-2)\sqrt{5}=-9+7\sqrt{5}$$

与题中 $a+b\sqrt{5}$ 比较整数项和根式的系数，得

$$a=-9$$

$$b=7$$

答：$a=-9$，$b=7$。

1.43 分子分母同乘根式，消去单项根式分母

题型 1 分子分母同乘根式，消去单项根式分母（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **认识根式分母：** 分式 $\frac{6}{\sqrt{2}}$ 的分母是 $\sqrt{2}$。根式 $\sqrt{2}$ 表示平方等于 2 的_____数，称为主平方根。

$$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$$

② **提出平方因子：** 根号内的因数若是_____，就称为平方因子。将平方因子开方后移到根号外，其余因数留在根号内。

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

③ **分母有理化：** 分母是非零的单项根式时，分子、分母同乘该根式，使分母不含根号。这种变形称为分母有理化；同乘的根式非零，分式的值不变。

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

④ **认识共轭根式：** 两项相同、仅中间加减号相反的两个式子互为共轭。例如下列两个式子相乘，利用平方差消去根号。

$$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3})^2-1^2=3-1=2$$

⑤ **根号内有分数：**根号内是带分数时，先化成假分数。分数非负且分母为正时，分子、分母分别开方。

$$1\frac{3}{4}=\frac{1\times4+3}{4}=\frac{7}{4}$$

$$\sqrt{1\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

⑥ **合并根式系数：**根号部分相同的根式称为同类根式，相加时根号部分_____。根式前的乘数称为系数，相加时将系数相加。下式中 c 为待求系数，两边同除以非零的 $\sqrt{3}$。

$$2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$c\sqrt{3}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$c=\frac{\frac{5}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{5}{2}$$

← 填空：①非负　②完全平方数　③不变

点石成金　题目出现单项根式分母，要求分母有理化时，先将分子、分母同乘该根式。

例 1　[2025 · October/November 0580/21 Q21(b)]

(b) Rationalise the denominator.
Write your answer in its simplest form.

$$\frac{6}{\sqrt{2}}$$

(b) 将 $\frac{6}{\sqrt{2}}$ 的分母有理化，答案写成最简形式。

解答　因 $\sqrt{2}\neq0$，分子、分母同乘 $\sqrt{2}$，得

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}}{2}$$

$=3\sqrt{2}$。
答：$3\sqrt{2}$。

方法：先看分母的单项根式，从分子分母同乘它起手。

! 辨析：同乘非零根式是保持分式值，仅乘分母是改变分式值。

针对练习

1. [2025 · May/June 0580/22 Q18(a)]
← 提示：看分母根式自乘的结果，再找分子分母的公因子。

(a) $\frac{9}{\sqrt{3}}$

Rationalise the denominator.
Give your answer in its simplest form.

(a) $\frac{9}{\sqrt{3}}$。
将分母有理化，答案写成最简形式。

✓ **答案**

$$3\sqrt{3}$$

解析 因 $\sqrt{3} \neq 0$，分子、分母同乘 $\sqrt{3}$，得

$$\frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{3}$$

$= 3\sqrt{3}$。
答：$3\sqrt{3}$。

2. [2025 · May/June 0580/21 Q15(b)]
提示：看同乘后分母变成的整数，再比较它与分子系数。

(b) Rationalise the denominator.
Give your answer in its simplest form.

$$\frac{6}{\sqrt{10}}$$

(b) 将 $\frac{6}{\sqrt{10}}$ 的分母有理化，答案写成最简形式。

✓ **答案**

$$\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

解析 因 $\sqrt{10} \neq 0$，分子、分母同乘 $\sqrt{10}$，得

$$\frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{6 \times \sqrt{10}}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}}$$

$$= \frac{6\sqrt{10}}{10}$$

$= \frac{3\sqrt{10}}{5}$。
答：$\frac{3\sqrt{10}}{5}$。

3. [2026 · May/June 0580/21 Q26(b)]
提示：先看根号内的带分数，化简后比较两项的根号部分。

(b) $\sqrt{2\frac{9}{20}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = k\sqrt{5}$

Find the value of k.

(b) $\sqrt{2\frac{9}{20}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = k\sqrt{5}$。
求 k 的值。

✓ **答案**

$$k = 1.9$$

解析 将根号内的带分数化成假分数，得
$2\frac{9}{20} = \frac{2\times20+9}{20} = \frac{49}{20}$。
分子、分母分别开方，得

$\sqrt{2\frac{9}{20}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{20}}=\frac{7}{2\sqrt{5}}$。
因 $\sqrt{5}\neq 0$，分子、分母同乘 $\sqrt{5}$，得
$\frac{7}{2\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{2\times 5}=\frac{7\sqrt{5}}{10}$，
$\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$。
合并同类根式，得
$\sqrt{2\frac{9}{20}}+\frac{6}{\sqrt{5}}=\left(\frac{7}{10}+\frac{6}{5}\right)\sqrt{5}=\frac{19}{10}\sqrt{5}$。
由题意，得
$k\sqrt{5}=\frac{19}{10}\sqrt{5}$。
两边同除以非零的 $\sqrt{5}$，得
$k=\frac{19}{10}=1.9$。
答：$k=1.9$。

1.44 分子分母同乘共轭式，消去二项根式分母

题型 1 分子分母同乘共轭式，消去二项根式分母（Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **根式的含义：**例题分母中的 $\sqrt{5}$ 表示平方等于 5 的非负数。根号表示_____平方根。

$$\left(\sqrt{5}\right)^2=5$$

② **平方因子提取：**根号内的 12 含因数 $4=2^2$。能写成整数平方的因数称为_____。将它开方后移到根号外，其余因数留在根号内。

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$$

③ **同类根式合并：**化简后根号部分相同的项称为_____。根式前的乘数称为系数。合并时加减系数，根号部分不变。

$$2\sqrt{3}+\sqrt{3}=(2+1)\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

④ **共轭相乘消根：**二项式只改变两项间的加减号，所得的式子称为原式的_____。两式相乘，交叉项抵消。

原式为 $3-\sqrt{5}$
共轭式为 $3+\sqrt{5}$

原式为 $\sqrt{5}+1$
共轭式为 $\sqrt{5}-1$

$$\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)=9+3\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5=4$$

用 a、b 表示两项，平方差公式为

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

⑤ **分子分母同乘：**分母含二项根式时，分子、分母同乘其共轭式，分式的值不变。原分母与所乘的共轭式均须不为_____。使分母不含根式的变形称为分母有理化。

$$\frac{1}{3-\sqrt{5}}=\frac{1\times\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

⑥ **所得分式化简：**分子各项与分母有公因数时，各项同时约分。约分后的系数乘括号内每一项。分母为负时，约分后的系数也带负号。

分母为正：
$\frac{6\left(1+\sqrt{2}\right)}{3}=2\left(1+\sqrt{2}\right)=2+2\sqrt{2}$

分母为负：
$\frac{6\left(1-\sqrt{2}\right)}{-3}=-2\left(1-\sqrt{2}\right)=-2+2\sqrt{2}=2\left(\sqrt{2}-1\right)$

填空：①非负主　②平方因子　③同类根式　④共轭式　⑤零

点石成金　题目出现含两项且带根式的分母，并要求分母有理化时，先将分子、分母同乘分母的共轭式。

例 1　[2025 · May/June 0580/23 Q15(c)]

(c) Rationalise the denominator.

$$\frac{1}{3-\sqrt{5}}$$

（c）将 $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ 的分母有理化。

解答　分母 $3-\sqrt{5}$ 的共轭式为 $3+\sqrt{5}$，分子、分母同乘此式，得

$$\frac{1}{3-\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{9-5}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

答：$\frac{3+\sqrt{5}}{4}$。

方法：先看分母的两项及中间符号，写出共轭式，再给分子分母同乘。

辨析：共轭式是两项间变号所得的式子，相反数是各项都变号所得的式子。

针对练习

1. [2025 · October/November 0580/23 Q24(c)]

提示：看分母两项的顺序，比较各项平方后再相减。

(c) Rationalise the denominator.

$$\frac{1}{\sqrt{7}+2}$$

（c）将 $\frac{1}{\sqrt{7}+2}$ 的分母有理化。

答案

$$\frac{\sqrt{7}-2}{3}$$

解析　分母 $\sqrt{7}+2$ 的共轭式为 $\sqrt{7}-2$，分子、分母同乘此式，得

$$\frac{1}{\sqrt{7}+2}=\frac{\sqrt{7}-2}{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-2}{(\sqrt{7})^2-2^2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-2}{7-4}$$

$$= \frac{\sqrt{7}-2}{3}$$

答：$\frac{\sqrt{7}-2}{3}$。

2. [2026 · May/June 0580/22 Q17(b)]

提示：看平方差所得的分母，与分子系数比较公因数。

(b) Rationalise the denominator and simplify.

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}}$$

(b) 将 $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ 的分母有理化，并化简。

✓ **答案**

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

解析 分子、分母同乘 $3+\sqrt{5}$，得

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-5}$$

$$= \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

答：$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$。

3. [2025 · October/November 0580/22 Q18]

提示：先看约分后的括号外系数，再检查它是否乘遍两项。

Rationalise the denominator and simplify.

$$\frac{20}{4+\sqrt{6}}$$

将 $\frac{20}{4+\sqrt{6}}$ 的分母有理化，并化简。

✓ **答案**

$$8-2\sqrt{6}$$

解析 分子、分母同乘 $4-\sqrt{6}$，得

$$\frac{20}{4+\sqrt{6}} = \frac{20\left(4-\sqrt{6}\right)}{\left(4+\sqrt{6}\right)\left(4-\sqrt{6}\right)}$$

$$= \frac{20\left(4-\sqrt{6}\right)}{16-6}$$

$$= \frac{20\left(4-\sqrt{6}\right)}{10}$$

$$= 2\left(4-\sqrt{6}\right)$$

$$= 8-2\sqrt{6}$$

答：$8-2\sqrt{6}$。

4. [2025 · February/March 0580/22 Q20(b)]
提示：看平方差的正负，再检查括号外负号对两项的影响。

(b) Rationalise the denominator and simplify.

$$\frac{9}{2+\sqrt{7}}$$

(b) 将 $\frac{9}{2+\sqrt{7}}$ 的分母有理化，并化简。

✓ **答案**

$$3\left(\sqrt{7}-2\right)$$

解析 分子、分母同乘 $2-\sqrt{7}$，得

$$\frac{9}{2+\sqrt{7}} = \frac{9\left(2-\sqrt{7}\right)}{\left(2+\sqrt{7}\right)\left(2-\sqrt{7}\right)}$$

$$= \frac{9\left(2-\sqrt{7}\right)}{4-7}$$

$$= \frac{9\left(2-\sqrt{7}\right)}{-3}$$

$$= -3\left(2-\sqrt{7}\right)$$

$$= -6+3\sqrt{7}$$

$$= 3\left(\sqrt{7}-2\right)$$

答：$3\left(\sqrt{7}-2\right)$。

5. [2026 · May/June 0580/23 Q21(b)]
提示：比较分子系数与有理化后分母的公因数，再展开括号。

(b) Rationalise the denominator.

$$\frac{4}{2-\sqrt{2}}$$

Give your answer in its simplest form.

(b) 将 $\frac{4}{2-\sqrt{2}}$ 的分母有理化。
答案须写成最简形式。

✓ **答案**

$$4+2\sqrt{2}$$

解析　分子、分母同乘 $2+\sqrt{2}$，得

$$\frac{4}{2-\sqrt{2}}=\frac{4\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{4\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2}$$

$$=\frac{4\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$$

$$=2\left(2+\sqrt{2}\right)$$

$$=4+2\sqrt{2}$$

答：$4+2\sqrt{2}$。

第二章 代数与函数

Chapter 2

2.1 合并同类项前先完成乘法

题型 1 合并同类项，必要时先完成乘法（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **辨认同类项：**本例要化简的式子为

$$3a-5b-a-6b$$

$3a$ 与 $-a$字母部分都是 a | $-5b$ 与 $-6b$字母部分都是 b

字母部分完全相同的项，叫作_____。

② **读出各项系数：**字母前的数叫作系数，包括该项前的正负号。原式中，$3a$ 的系数是 3，$-5b$ 的系数是 -5。字母前没有写数字时，按下列形式读出系数。

$a=1\times a$系数是 _____ | $-a=(-1)\times a$系数是 _____

③ **移动同类各项：**把同类项移到一起，正负号随项移动。

$$3a-5b-a-6b=3a-a-5b-6b$$

④ **合并同类各项：**同类项的系数相加减，字母部分不变。例如，原式中含字母 a 的两项合并为

$$3a-a=(3-1)a=2a$$

字母部分不同的项不能合并。

⑤ **先算项内乘法：**项内有乘号时，先完成_____，再合并同类项。乘积前的减号仍须保留。

$$2\times 4b=(2\times 4)b=8b$$

$$6b-2\times 4b=6b-8b=(6-8)b=-2b$$

填空：①同类项 ②1 ③-1 ④乘法

点石成金 题目出现含字母项的式子并要求化简时，先算项内乘法，再合并字母部分相同的项。

例 1 [2023 · May/June 0580/11 Q9]

Simplify.

$3a-5b-a-6b$

化简。

$3a-5b-a-6b$

解答 把同类项移到一起，得

$$3a-5b-a-6b=3a-a-5b-6b$$

同类项的系数相加减，得

$$3a-a-5b-6b=(3-1)a+(-5-6)b=2a-11b$$

答：$2a-11b$。

方法：先看各项的字母部分，将同类项连同前面的符号归组。

辨析：系数是字母前带符号的数，字母部分是合并后保留的部分。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/32 Q8(b)]

提示：按字母分组，再比较含 b 两项的符号与系数大小。

(b) Simplify.

$$3a-7b+2a+4b$$

(b) 化简。

$3a-7b+2a+4b$

✓ **答案**

$$5a-3b$$

解析 把同类项移到一起，得

$$3a-7b+2a+4b=3a+2a-7b+4b$$

同类项的系数相加减，得

$$3a+2a-7b+4b=(3+2)a+(-7+4)b=5a-3b$$

答：$5a-3b$。

2. [2023 · October/November 0580/31 Q7(a)]

提示：分别看两组同类项，比较含 b 两项的系数。

(a) Simplify.

$$5a+3b+2a-4b$$

(a) 化简。

$5a+3b+2a-4b$

✓ **答案**

$$7a-b$$

解析 把同类项移到一起，得

$$5a+3b+2a-4b=5a+2a+3b-4b$$

同类项的系数相加减，得

$$5a+2a+3b-4b=(5+2)a+(3-4)b=7a-b$$

答：$7a-b$。

3. [2023 · October/November 0580/32 Q6(a)]

提示：先补出首项省略的系数，再看三个系数的正负号。

(a) Simplify.

$$a+4a-3a$$

(a) 化简。

$a+4a-3a$

✓ **答案**

$$2a$$

解析 各项的字母部分相同，且首项的系数为 1，得

$$a+4a-3a=(1+4-3)a=2a$$

答：$2a$。

4. [2023 · October/November 0580/32 Q6(b)]
提示：先看乘号连接的部分，算出乘积后再比较两项系数。

(b) Simplify.

$$8b-4\times 7b$$

(b) 化简。

$8b-4\times 7b$

✓ **答案**

$$-20b$$

解析 先完成乘法，得

$$4\times 7b=28b$$

再合并同类项，得

$$8b-4\times 7b=8b-28b=(8-28)b=-20b$$

答：$-20b$。

5. [2024 · February/March 0580/12 Q9]
提示：把字母部分相同的项连同前面的符号移到一起。

Simplify $4m+7k-m+3k$.

化简。

$4m+7k-m+3k$

✓ **答案**

$$3m+10k$$

解析 把同类项移到一起，得

$$4m+7k-m+3k=4m-m+7k+3k$$

合并同类项，得

$$4m-m+7k+3k=(4-1)m+(7+3)k=3m+10k$$

答：$3m+10k$。

6. [2024 · May/June 0580/13 Q3]
提示：先读出各项带正负号的系数，再合并同类项。

Simplify.

$$7x-8y-x-y$$

化简。

$7x-8y-x-y$

✓ **答案**

$$6x-9y$$

解析 把同类项移到一起，得

$$7x-8y-x-y=7x-x-8y-y$$

合并同类项，得

$$7x-x-8y-y=(7-1)x+(-8-1)y=6x-9y$$

答：$6x-9y$。

2.2 把括号外的因子乘到括号内每一项

题型 1 把括号外的因子乘到括号内每一项（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **辨认括号各项：**在 $5(2x-3y)$ 中，括号内有两项。它们是 $2x$ 和 _____。括号外的因子是 5。

② **括号外乘入：**括号外的因子要乘括号内的每一项。带负号的项也要乘。

$$5(2x-3y)=5\times 2x+5\times(-3y)=10x-15y$$

③ **两个括号展开：**两个括号相加时，分别展开各括号。括号间的加号保留。

$$3(x+2)+2(1-x)=3x+6+2-2x$$

④ **合并同类项：**所含字母相同且相同字母指数相同的项称为_____。同类项的系数相加，字母部分不变。常数项也相加。

$$3x+6+2-2x=(3-2)x+(6+2)=x+8$$

⑤ **连同符号换序：**含不同字母的项，分别归到同类项中。调整位置时，每一项连同前面的符号移动。

$$2u+v+3v-4u=2u-4u+v+3v=(2-4)u+(1+3)v=-2u+4v$$

填空：①$-3y$　②同类项

点石成金　题目出现括号外的因子，要求展开或展开并化简时，先把括号外的因子乘到括号内每一项。

例 1 [2023 · May/June 0580/32 Q8(c)]

(c) Multiply out.

$$5(2x-3y)$$

(c) 展开。

$5(2x-3y)$

解答 将括号外的 5 乘括号内每一项，得

$$5(2x-3y)=5\times 2x+5\times(-3y)$$

$$=10x-15y$$

方法：括号外的 5 要乘到括号内每一项。

辨析：负号属于后一项，乘入时一并保留。

答：$10x-15y$。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/33 Q8(a)(i)]

提示：看两个括号各自的乘数，再将字母项和常数项分别归组。

(a) Expand and simplify.

(i) $4(x+3)+2(x-1)$

(a) 展开并化简。

(i) $4(x+3)+2(x-1)$

✓ **答案**

$$6x+10$$

解析 分别展开两个括号，得

$$4(x+3)+2(x-1)=4x+12+2x-2$$

合并同类项，得

$$4x+12+2x-2=(4+2)x+(12-2)$$

$$=6x+10$$

答：$6x+10$。

2. [2023 · October/November 0580/12 Q18]

提示：看两组括号中 t 项的符号，再把同字母项连同符号归组。

Expand and simplify.

$$2(t+w)+3(w-t)$$

展开并化简。

$2(t+w)+3(w-t)$

✓ **答案**

$$5w-t$$

解析 分别展开两个括号，得

$$2(t+w)+3(w-t)=2t+2w+3w-3t$$

将同类项合并，得

$$2t+2w+3w-3t=(2+3)w+(2-3)t$$

$$=5w-t$$

答：$5w-t$。

3. [2024 · October/November 0580/13 Q14]
提示：括号内的字母项和常数项都要乘括号外的因子。

Expand $4(x-3)$.

展开。
$4(x-3)$

✓ **答案**

$$4x-12$$

解析 将括号外的因子乘括号内每一项，得

$$4(x-3)=4\times x+4\times(-3)=4x-12$$

答：$4x-12$。

4. [2024 · October/November 0580/31 Q10(c)(i)]
提示：把括号前的减号与因子一起乘到括号内每一项。

(c) Expand and simplify.

(i) $4a+5-2(a-1)$

(c) 展开并化简。
(i) $4a+5-2(a-1)$

✓ **答案**

$$2a+7$$

解析 将括号前的减号与因子一起乘入，得

$$4a+5-2(a-1)=4a+5+(-2)\times a+(-2)\times(-1)$$

负数与负数相乘得正，故

$$4a+5+(-2)\times a+(-2)\times(-1)=4a+5-2a+2$$

合并同类项，得

$$4a+5-2a+2=(4-2)a+(5+2)=2a+7$$

答：$2a+7$。

5. [2025 · February/March 0580/32 Q14(b)]
提示：分别展开两个括号，再合并字母项与常数项。

(b) Expand the brackets and simplify.

$$5(2m-1)+3(m+7)$$

(b) 展开括号并化简。
$5(2m-1)+3(m+7)$

✓ **答案**

$$13m+16$$

解析 分别将各括号外的因子乘括号内每一项，得

$$5(2m-1)+3(m+7)=10m-5+3m+21$$

合并同类项，得

$$10m-5+3m+21=(10+3)m+(-5+21)=13m+16$$

答：$13m+16$。

2.3 逐项相乘，展开两个括号

题型 1 逐项相乘，展开两个括号（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **辨认括号各项：** 下式的两个括号各有两项，减去的项带负号。

$$(2p^2-3)(3p^2-2)$$

左括号的两项	右括号的两项
$2p^2,-3$	$3p^2,-2$

② **计算字母乘积：** 两项相乘时，数与数相乘，字母与字母相乘。平方表示两个相同因数相乘。

$$p^2\cdot p^2=(p\cdot p)\cdot(p\cdot p)=p^4$$

$$(2p^2)\cdot(3p^2)=(2\times 3)\cdot(p^2\cdot p^2)=6p^4$$

③ **确定乘积符号：** 带负号的项参与相乘时，按乘法符号法则计算。

异号相乘得负	同号相乘得正
$(2p^2)\cdot(-2)=-4p^2$	$(-3)\cdot(-2)=6$

④ **逐项展开括号：** 每个括号各有两项，每项分别乘另一括号的每项。共得到 _____ 个乘积，用加号连接。

$$(2p^2-3)(3p^2-2)=(2p^2)\cdot(3p^2)+(2p^2)\cdot(-2)+(-3)\cdot(3p^2)+(-3)\cdot(-2)=6p^4-4p^2-9p^2+6$$

⑤ **合并同类项：** 字母相同且相应指数相同的项称为同类项。项中字母前的数叫系数，合并时将系数相加。字母及指数不变，合并后平方项的系数是 _____。

$$-4p^2-9p^2=(-4-9)p^2=-13p^2$$

⑥ **处理异号括号：** 两个括号中分别有减号、加号时，仍按各项的符号相乘。展开后，再合并同类项。

$$(x-2)(x+3)=x\cdot x+x\cdot 3+(-2)\cdot x+(-2)\cdot 3=x^2+3x-2x-6=x^2+x-6$$

填空：①4　②−13

点石成金　题目出现两个括号相乘，并要求展开化简时，先将每项分别乘另一括号的每项。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q5(a)]

(a) Expand and simplify.

$$(2p^2-3)(3p^2-2)$$

(a) 展开并化简。
$(2p^2-3)(3p^2-2)$

解答　将每项分别乘另一括号的每项，得

$$(2p^2-3)(3p^2-2)=6p^4-4p^2-9p^2+6$$

合并同类项，得
$6p^4-4p^2-9p^2+6=6p^4-13p^2+6$。
答：$6p^4-13p^2+6$。

方法：先圈出两括号中带符号的项，从左边首项乘遍右括号起手。

辨析：同底数幂相乘是指数相加，同类项合并是系数相加。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/33 Q8(a)(ii)]
提示：看两个负常数项相乘的符号，再找展开后的一次项。

(a) Expand and simplify.

(ii) $(m-6)(m-4)$

(a) 展开并化简。
(ii) $(m-6)(m-4)$

✓ **答案**

$$m^2-10m+24$$

解析　将每项分别乘另一括号的每项，得

$$(m-6)(m-4)=m^2-4m-6m+24$$

合并同类项，得
$m^2-4m-6m+24=m^2-10m+24$。
答：$m^2-10m+24$。

2. [2023 · May/June 0580/13 Q19]
提示：看交叉相乘所得的一次项，比较系数的符号与绝对值。

Expand and simplify.

$$(x-5)(x+8)$$

展开并化简。
$(x-5)(x+8)$

✓ **答案**

$$x^2+3x-40$$

解析　将每项分别乘另一括号的每项，得

$$(x-5)(x+8)=x^2+8x-5x-40$$

合并同类项，得
$x^2+8x-5x-40=x^2+3x-40$。
答：$x^2+3x-40$。

3. [2023 · October/November 0580/31 Q7(d)]
提示：看展开后的各项，按字母和指数找出能合并的项。

(d) Multiply out and simplify.

$$(x-3)(x+5)$$

(d) 展开并化简。
$(x-3)(x+5)$

✓ **答案**

$$x^2+2x-15$$

解析 将每项分别乘另一括号的每项，得

$$(x-3)(x+5)=x^2+5x-3x-15$$

合并同类项，得
$x^2+5x-3x-15=x^2+2x-15$。
答：$x^2+2x-15$。

4. [2024 · October/November 0580/31 Q10(c)(ii)]
提示：左括号的每一项都要乘右括号的两项，乘积保留相应符号。

(c) Expand and simplify.

(ii) $(d+7)(d-3)$

(c) 展开并化简。
(ii) $(d+7)(d-3)$

✓ **答案**

$$d^2+4d-21$$

解析 将左括号的每一项分别乘右括号的每一项，得

$$(d+7)(d-3)=d\times d+d\times(-3)+7\times d+7\times(-3)$$

$$d\times d+d\times(-3)+7\times d+7\times(-3)=d^2-3d+7d-21$$

合并同类项，得

$$d^2-3d+7d-21=d^2+(-3+7)d-21=d^2+4d-21$$

答：$d^2+4d-21$。

5. [2025 · October/November 0580/11 Q25]
提示：将带符号的每一项分别乘另一括号的每一项。

Expand and simplify.

$$(x+3)(x-2)$$

展开并化简。
$(x+3)(x-2)$

✓ **答案**

$$x^2+x-6$$

解析 将每项分别乘另一括号的每项，得

$$(x+3)(x-2)=x^2-2x+3x-6$$

合并同类项，得

$$x^2-2x+3x-6=x^2+x-6$$

答：x^2+x-6。

2.4 用同底幂乘除和幂的乘方化简

题型 1 用同底幂乘除和幂的乘方化简（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **同底幂的相除：** x^{12} 表示 12 个 x 相乘，x 为底数，12 为指数。同底幂相除，数值系数相除，指数_____。设底数为 $a\neq 0$，指数 m,n 为正整数。

$$18x^{12}\div 3x^3=(18\div 3)x^{12-3}=6x^9$$

$$a^m\div a^n=a^{m-n}$$

② **同底幂的相乘：** 单独的 x 写成 x^1；同底幂相乘，指数_____。连乘、连除时，乘的指数加上，除的指数减去。要求写成某底数的幂时，保留幂的形式。

$$x^2\times x=x^2\times x^1=x^{2+1}=x^3$$

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

$$\frac{x^2\times x^3}{x^4}=x^{2+3-4}=x^1$$

③ **括号整体乘方：** 括号内的积整体乘方，外面的指数作用于_____。每个幂原有的指数与括号外的指数_____。

$$(2x^2y)^2=2^2x^{2\times 2}y^{1\times 2}=4x^4y^2$$

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

④ **零指数的求值：** 非零的同底幂相除，两个指数相等时，指数差为 0。非零数的零次幂等于_____。

$$2^3\div 2^3=2^{3-3}=2^0=1$$

$$a^0=1\quad(a\neq 0)$$

⑤ **负指数的求值：** 指数为负整数时，改写为相应正整数次幂的_____。幂之间有加减时，先分别求值，再计算。

$$2^1 \div 2^2 = 2^{1-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

$$2^0 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

⑥ **未知指数的求法：**两边化成同底幂，底数为正且不等于 1 时，令指数_____。如下面的等式中，k 为待求指数。

$$2^5 \div 2^k = 8$$

$$8 = 2^3$$

$$2^{5-k} = 2^3$$

$$5 - k = 3$$

$$k = 2$$

填空：①相减　②相加　③每个因子　④相乘　⑤1　⑥倒数　⑦相等

点石成金　题目出现同底幂的乘除、括号整体乘方或零与负指数时，先辨明运算符号和指数的位置。

例 1　[2023 · May/June 0580/12 Q19]

Simplify.

$$18x^{12} \div 3x^3$$

化简 $18x^{12} \div 3x^3$。

解答　原式中 $x \neq 0$。数值系数相除，同底幂相除时指数相减。

$$18x^{12} \div 3x^3 = (18 \div 3)x^{12-3} = 6x^9$$

答：$6x^9$。

方法：先看除号两侧的系数与底数，把数值部分和字母部分分开处理。

辨析：系数是幂前的数值因子，指数是右上角表示乘方次数的数。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/11 Q16(b)；同题：2023 · October/November 0580/21 Q10(b)]
提示：先分开系数与字母，再比较除号两侧的底数。

Simplify.

(b) $8x^6 \div 2x^2$

(b) 化简 $8x^6 \div 2x^2$。

✓ **答案**

$$4x^4$$

解析 原式中 $x \neq 0$。数值系数相除，同底幂相除时指数相减。

$$8x^6 \div 2x^2 = (8 \div 2)x^{6-2} = 4x^4$$

答：$4x^4$。

2. [2023 · May/June 0580/13 Q15]
提示：先确认两边底数相同，再按相除的顺序处理指数。

Simplify $d^8 \div d^2$.

化简 $d^8 \div d^2$。

✓ **答案**

$$d^6$$

解析 原式中 $d \neq 0$。同底幂相除，指数相减。

$$d^8 \div d^2 = d^{8-2} = d^6$$

答：d^6。

3. [2023 · May/June 0580/42 Q9(a)(i)]
提示：逐个查看括号内的因子，连同系数一起处理外层乘方。

(a) Simplify.

(i) $(3x^2y^4)^3$

(a) (i) 化简 $(3x^2y^4)^3$。

✓ **答案**

$$27x^6y^{12}$$

解析 括号外的指数分别作用于各个因子，幂的乘方将指数相乘。

$$(3x^2y^4)^3 = 3^3x^{2\times3}y^{4\times3} = 27x^6y^{12}$$

答：$27x^6y^{12}$。

4. [2023 · October/November 0580/11 Q16(a)；同题：2023 · October/November 0580/21 Q10(a)]
提示：先补出单独字母省略的指数，再看两因子的底数。

Simplify.

(a) $n^5 \times n$

(a) 化简 $n^5 \times n$。

✓ **答案**

$$n^6$$

解析 将 n 写成 n^1，同底幂相乘时指数相加。

$$n^5 \times n = n^5 \times n^1 = n^{5+1} = n^6$$

答：n^6。

5. [2023 · May/June 0580/32 Q1(d)(ii)]
提示：先区分零指数与负指数，分别求值后再处理减号。

(d) Find the value of

(ii) $5^0 - 5^{-1}$

(d) (ii) 求 $5^0 - 5^{-1}$ 的值。

✓ **答案**

$$0.8$$

解析 非零数的零次幂等于 1，负一次幂等于该数的倒数。

$$5^0 = 1$$

$$5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$5^0 - 5^{-1} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$$

答：0.8。

6. [2023 · October/November 0580/32 Q3(h)]
提示：先把左边合成一个幂，再比较等号两侧的指数。

(h) $7^{15} \div 7^{x} = 7^{9}$

Find the value of x.

(h) 已知 $7^{15} \div 7^{x} = 7^{9}$，求 x 的值。

✓ **答案**

$$x = 6$$

解析 同底幂相除，指数相减，得

$$7^{15-x} = 7^{9}$$

两边底数均为 7，故指数相等。

$$15 - x = 9$$

$$x = 15 - 9 = 6$$

答：$x = 6$。

7. [2023 · October/November 0580/33 Q3(c)(i)]
提示：先按乘除符号整理指数，再看题目要求的表示形式。

(c) (i) Write $\dfrac{3^{2} \times 3^{4}}{3^{6}}$ as a power of 3.

(c)(i) 将 $\frac{3^{2} \times 3^{4}}{3^{6}}$ 写成以 3 为底的幂。

✓ **答案**

$$3^{0}$$

解析 同底幂相乘时指数相加，相除时指数相减。

$$\frac{3^{2} \times 3^{4}}{3^{6}} = 3^{2+4-6} = 3^{0}$$

题目要求写成以 3 为底的幂，故保留幂的形式。
答：3^{0}。

8. [2023 · October/November 0580/32 Q3(d)(ii)]
提示：先看底数是否非零，再判断零次幂规则是否适用。

(d) Find the value of

(ii) 8^{0}.

(d)(ii) 求 8^{0} 的值。

✓ **答案**

$$1$$

解析 非零数的零次幂等于 1。

$$8^{0} = 1$$

答：1。

9. [2023 · October/November 0580/33 Q3(c)(ii)]
提示：先把负指数改写成倒数，再计算正整数次幂。

(ii) Write the value of 2^{-4} as a decimal.

(c)（ii）把2^{-4}的值写成小数。

✓ **答案** 0.0625

解析 负指数表示相应正整数次幂的倒数。$2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}=0.0625$ 答：0.0625。

10. [2023 · October/November 0580/33 Q3(d)(i)]
提示：括号内外都是指数时，核对用相乘还是相加。

(d) Simplify.

(i) $(b^5)^3$

(d) 化简。(i) $(b^5)^3$。

✓ **答案** b^{15}

解析 幂的乘方，指数相乘。$(b^5)^3=b^{5\times3}=b^{15}$ 答：b^{15}。

11. [2024 · February/March 0580/22 Q21(b)]
提示：将系数的乘方与字母幂的乘方分别计算。

(b) Simplify $(4x^3)^3$.

(b) 化简。
$(4x^3)^3$

✓ **答案**

$$64x^9$$

解析 括号外的指数分别作用于各因子，得

$$(4x^3)^3=4^3x^{3\times3}=64x^9$$

答：$64x^9$。

12. [2024 · May/June 0580/11 Q20(b)]
提示：先将等式左边写成以 7 为底的一个幂。

(b) $7^{12}\div7^p=7^{17}$

Find the value of p.

(b) $7^{12}\div7^p=7^{17}$
求 p 的值。

✓ **答案**

$$p=-5$$

解析 同底幂相除，指数相减，得

$$7^{12-p}=7^{17}$$

两边底数均为 7，故指数相等。

$$12-p=17$$

$$-p=17-12=5$$

$$p=-5$$

答：$p=-5$。

13. [2024 · October/November 0580/12 Q18]
提示：分别计算系数的商与同底幂的商。

Simplify.

$$\frac{18x^6}{3x^2}$$

化简。

$\frac{18x^6}{3x^2}$

✓ **答案**

$$6x^4$$

解析 原式分母不为零，故 $x\neq 0$。
系数相除，同底幂的指数相减，得

$$\frac{18x^6}{3x^2}=(18\div 3)x^{6-2}=6x^4$$

答：$6x^4$。

2.5 把分数指数化成方根与整数幂

题型 1 把分数指数化成方根与整数幂（Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **数值开方：** 5 的五次方等于 3125。五次方根记作 $\sqrt[5]{3125}$，表示五次方等于 3125 的数。

$$5^5=3125,\quad \sqrt[5]{3125}=_____$$

② **分数指数：** 本例中指数的分母是 5，表示开五次方。分数指数的分母表示开几次方，分子表示再取几次幂。

$$3125^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{3125}=5$$

$$16^{\frac{3}{4}}=\left(\sqrt[4]{16}\right)^3=2^3=_____$$

对正数 a，m,n 为正整数且 $n\geq 2$，有

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

③ **积的乘方：** 本例括号内是数与字母幂的乘积。将括号外的指数分别作用于各因子。

$$\left(3125w^{3125}\right)^{\frac{1}{5}}=3125^{\frac{1}{5}}\left(w^{3125}\right)^{\frac{1}{5}}$$

④ **幂的乘方：** 本例中字母已有指数，括号外又有指数。幂的乘方把内外两个指数相乘。

$$\left(w^{3125}\right)^{\frac{1}{5}}=w^{3125\times\frac{1}{5}}=w^{625}$$

字母原有的指数是 12，外面的指数是 $\frac{3}{4}$，相乘得 _____。

⑤ **负的指数：** 括号外的指数带负号，先取倒数，再把指数改为正数。底数不能为零。

$$2^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

对正数 a 和正数 r，有

$$a^{-r}=\left(\frac{1}{a}\right)^{r}=\frac{1}{a^{r}}$$

⑥ **分式乘方：**取倒数后仍含分式，各因子分别乘方。设 u,v 为正数，数值部分开方，字母部分乘指数。

$$\left(\frac{4}{u^{4}v^{2}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{u^{4}v^{2}}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{u^{4\times\frac{3}{2}}v^{2\times\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[2]{4}\right)^{3}}=\frac{u^{6}v^{3}}{\underline{\qquad}}$$

← 填空：①5　②8　③9　④8

点石成金　题目出现括号外的分数指数时，先按分母开方、分子乘方；指数带负号时先取倒数。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q15]

Simplify $\left(3125w^{3125}\right)^{\frac{1}{5}}$.

化简 $\left(3125w^{3125}\right)^{\frac{1}{5}}$。

解答　数值部分开五次方，字母部分将指数相乘。

$$3125^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{3125}=5$$

$$\left(3125w^{3125}\right)^{\frac{1}{5}}=3125^{\frac{1}{5}}w^{3125\times\frac{1}{5}}=5w^{625}$$

方法：先看括号外的分数指数，从拆开数值与字母幂起手。

辨析：分母是开方的次数，分子是开方后乘方的次数。

答：$5w^{625}$。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/21 Q17]

← 提示：看四分之三，先找数值的四次方根，再处理三次幂。

Simplify $\left(81x^{12}\right)^{\frac{3}{4}}$.

化简 $\left(81x^{12}\right)^{\frac{3}{4}}$。

✓ **答案**　$27x^{9}$

解析　数值部分先开四次方，再取三次幂。

$$81^{\frac{3}{4}}=\left(\sqrt[4]{81}\right)^{3}=3^{3}=27$$

字母部分将内外两个指数相乘，得

$$\left(81x^{12}\right)^{\frac{3}{4}}=81^{\frac{3}{4}}x^{12\times\frac{3}{4}}=27x^{9}$$

答：$27x^{9}$。

2. [2024 · October/November 0580/23 Q17(b)]
提示：先将括号内的积写成一个式子的三次方。

Simplify.

(b) $\left(125y^{75}\right)^{\frac{2}{3}}$

化简。
(b) $\left(125y^{75}\right)^{\frac{2}{3}}$

✓ **答案**

$$25y^{50}$$

解析 指数 $\frac{2}{3}$ 表示先开三次方，再平方。

$$125y^{75}=5^3\left(y^{25}\right)^3=\left(5y^{25}\right)^3$$

$$\left(125y^{75}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(5y^{25}\right)^2=25y^{50}$$

答：$25y^{50}$。

3. [2023 · October/November 0580/22 Q13(b)]
提示：看数值能否写成五次幂，再将字母原指数与分母约分。

(b) Simplify.

$$\left(32x^{10}\right)^{\frac{1}{5}}$$

(b) 化简 $\left(32x^{10}\right)^{\frac{1}{5}}$。

✓ **答案** $2x^2$

解析 数值部分开五次方，字母部分将指数相乘。

$$32^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{32}=2$$

$$\left(32x^{10}\right)^{\frac{1}{5}}=32^{\frac{1}{5}}x^{10\times\frac{1}{5}}=2x^2$$

答：$2x^2$。

4. [2023 · October/November 0580/23 Q17(a)]
提示：看三分之二，数值先开立方，字母指数同时乘上该分数。

(a) Simplify.

$$\left(64y^{27}\right)^{\frac{2}{3}}$$

(a) 化简 $\left(64y^{27}\right)^{\frac{2}{3}}$。

✓ **答案** $16y^{18}$

解析 数值部分先开三次方，再取二次幂。

$$64^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{64}\right)^2=4^2=16$$

字母部分将内外两个指数相乘，得

$$\left(64y^{27}\right)^{\frac{2}{3}}=64^{\frac{2}{3}}y^{27\times\frac{2}{3}}=16y^{18}$$

答：$16y^{18}$。

5. [2023 · October/November 0580/21 Q10(c)]
提示：看分母五与分子二，检查开方后是否还需平方。

Simplify.

(c) $(243y^{20})^{\frac{2}{5}}$

（c）化简 $(243y^{20})^{\frac{2}{5}}$。

✓ **答案** $9y^8$

解析 数值部分先开五次方，再取二次幂。

$$243^{\frac{2}{5}} = \left(\sqrt[5]{243}\right)^2 = 3^2 = 9$$

字母部分将内外两个指数相乘，得

$$(243y^{20})^{\frac{2}{5}} = 243^{\frac{2}{5}} y^{20\times\frac{2}{5}} = 9y^8$$

答：$9y^8$。

6. [2023 · May/June 0580/42 Q9(a)(ii)]
提示：先看指数负号确定倒数，再检查根号中字母幂的正负。

(a) Simplify.

(ii) $\left(\dfrac{16}{x^{16}y^8}\right)^{-\frac{3}{2}}$

9（a）（ii）化简 $\left(\frac{16}{x^{16}y^8}\right)^{-\frac{3}{2}}$。

✓ **答案** $\frac{x^{24}y^{12}}{64}$

解析 原式有意义时，$x \neq 0$ 且 $y \neq 0$。由负指数取倒数，得

$$\left(\frac{16}{x^{16}y^8}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{x^{16}y^8}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$$

数值部分先开平方，再取三次幂。

$$16^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3 = 64$$

又因 $x^8y^4 > 0$，得

$$\sqrt{x^{16}y^8} = x^8y^4$$

$$\left(\frac{x^{16}y^8}{16}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{x^8y^4}{4}\right)^3 = \frac{x^{24}y^{12}}{64}$$

答：$\frac{x^{24}y^{12}}{64}$。

2.6 提出系数和字母的公因式

题型 1 提出系数和字母的公因式（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **因式分解含义：** 原式有 $8g$ 和 $-2g^2$ 两项。因式分解是把各项的和写成几个因式的_____。

$$8g-2g^2=2g(4-g)$$

② **系数公因数：**两项的系数分别为 8 和 -2。取其绝对值的最大公因数，得_____。

$$8=2\times4$$
$$2=2\times1$$

③ **字母公因式：**两项都含字母 g。幂表示相同字母相乘，共同字母取_____次幂。

$$g^2=g\times g$$
$$g^3=g\times g\times g$$
$$g=g^1$$

原式中字母 g 的次数分别为 1 和 2，故取 g。

④ **提出公因式：**将数的公因数与字母公因式相乘，得 $2g$。各项除去因式 $2g$，余下的部分写入括号。

$$8g=2g\times4$$
$$-2g^2=2g\times(-g)$$
$$8g-2g^2=2g(4-g)$$

⑤ **括号余项处理：**在 $6g^3h-3g$ 中，h 仅在一项中出现。提出 $3g$ 后，h 留在括号内，后一项余下 -1。

$$g^3h=g\times g^2h$$
$$6g^3h-3g=3g\times2g^2h-3g\times1=3g(2g^2h-1)$$

⑥ **完全分解判断：**括号内各项仍有公因式时，继续提出。

$2(4g-g^2)$
括号内仍有公因式 g。

$g(8-2g)$
括号内仍有公因数 2。

$$8g-2g^2=2g(4-g)$$

填空：①乘积　②2　③最低

点石成金　题目出现完全因式分解，且各项含有相同的数或字母因子时，先找系数的最大公因数和共同字母的最低次幂。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q14]

Factorise completely.

$$8g-2g^2$$

将下式完全因式分解：

$8g-2g^2$

解答　8 与 2 的最大公因数为 2，两项共有字母因子 g，故提出 $2g$。

$$8g-2g^2=2g\times4-2g\times g$$
$$=2g(4-g)$$

答：$2g(4-g)$。

方法：先看各项系数和字母次数，从系数公因数与共同字母起手。

辨析：公因式是各项共有的因子，括号余项是各项除以公因式的结果。

拓展：因式分解与展开互为逆过程，可用分配律展开核对。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/11 Q16]

提示：比较两项系数的公因数，再比字母次数。

Factorise completely.

$$8x^2 - 20x$$

将下式完全因式分解：

$8x^2 - 20x$

✓ **答案**

$$4x(2x - 5)$$

解析 8 与 20 的最大公因数为 4，两项共有字母因子 x，故提出 $4x$。

$$8x^2 - 20x = 4x \times 2x - 4x \times 5$$

$$= 4x(2x - 5)$$

答：$4x(2x - 5)$。

2. [2023 · October/November 0580/13 Q11]

提示：看后一项除去公因式后，符号和余项各是什么。

Factorise completely.

$$15v^2 - 3v$$

将下式完全因式分解：

$15v^2 - 3v$

✓ **答案**

$$3v(5v - 1)$$

解析 15 与 3 的最大公因数为 3，两项共有字母因子 v，故提出 $3v$。

$$15v^2 - 3v = 3v \times 5v - 3v \times 1$$

$$= 3v(5v - 1)$$

答：$3v(5v - 1)$。

3. [2023 · October/November 0580/21 Q5(a)]
提示：逐个比较字母是否两项都有，再找系数公因数。

Factorise completely.

(a) $42mk-35m$

完全因式分解。
(a) $42mk-35m$

✓ **答案**

$$7m(6k-5)$$

解析 42 与 35 的最大公因数为 7，两项共有字母因子 m。字母 k 仅在前一项中出现，故提出 $7m$。

$$42mk-35m=7m\times 6k-7m\times 5$$

$$=7m(6k-5)$$

答：$7m(6k-5)$。

4. [2023 · October/November 0580/32 Q3(f)]
提示：比较共同字母的次数，再看哪些字母仅在前项出现。

(f) Factorise completely.

$$15x^3y-3x$$

(f) 将下式完全因式分解：

$15x^3y-3x$

✓ **答案**

$$3x(5x^2y-1)$$

解析 15 与 3 的最大公因数为 3，两项中字母 x 的最低次数为 1。字母 y 仅在前一项中出现，故提出 $3x$。

$$15x^3y-3x=3x\times 5x^2y-3x\times 1$$

$$=3x(5x^2y-1)$$

答：$3x(5x^2y-1)$。

5. [2024 · May/June 0580/11 Q15]
提示：先求两项系数的最大公因数，再找共同字母因子。

Factorise completely.

$$36x^2+40x$$

将下式完全因式分解。

$36x^2+40x$

✓ **答案**

$$4x(9x+10)$$

解析 系数 36 与 40 的最大公因数为 4，两项共有字母因子 x，故提出 $4x$。

$$36x^2+40x=4x\times 9x+4x\times 10=4x(9x+10)$$

括号内两项没有除 1 外的公因式。
答：$4x(9x+10)$。

2.7 提出公因式后利用平方差分解

题型 1 用平方差分解，必要时先提公因式（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **分解与展开：**例题的原式有两项，可由下面的乘积展开得到。

$$(x+3)(x-3)=x^2-3x+3x-9=x^2-9$$

把原式写成几个因式的_____，称为因式分解。

② **辨认两个平方：**原式两项之间是减号，且每项都能写成平方。

$$9=3^2$$

$$x^2-9=x^2-3^2$$

两个平方的底数分别为 x 和 3。

③ **写成和差乘积：**两个平方相减，写成两底数的_____与_____的乘积。

$$x^2-3^2=(x+3)(x-3)$$

用 a、b 表示数或式，得到平方差公式。

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

④ **提取数字因式：**两项含有共同的数字因式时，先提取公因式。括号内每项的系数由原系数除以公因式得到。

$$8y^2-2=2(4y^2-1)$$

括号内两项仍是平方，继续分解。

$$(2y)^2=(2y)(2y)=4y^2$$

$$2(4y^2-1)=2((2y)^2-1^2)=2(2y+1)(2y-1)$$

⑤ **提取字母因式：**两项都含有同一个字母因式时，也要先提取。括号内仍有平方差，须继续分解。

$$x^3-4x=x\times x^2-x\times 4=x(x^2-4)=x(x+2)(x-2)$$

填空：①乘积　②和　③差

点石成金　题目出现两项相减并要求完全因式分解时，先提取公因式，再判断括号内是否为平方差。

例 1　[2023 · May/June 0580/42 Q9(b)(i)]

(b) (i) Factorise.

$$x^2-9$$

(b) (i) 将下式因式分解。

x^2-9

解答　将常数项写成平方，得

$$9=3^2$$

由平方差公式，得

$$x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$$

答：$(x+3)(x-3)$。

方法：先看两项间的减号，再把常数项写成平方。

辨析：因式分解是把和差写成乘积，展开是把乘积写成和差。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/21 Q5(b)]
提示：看常数项能写成谁的平方，再比较两项间的符号。

Factorise completely.

(b) $h^2 - 144$

将下式完全因式分解。
(b) $h^2 - 144$

✓ **答案**

$$(h + 12)(h - 12)$$

解析 将常数项写成平方，得

$$144 = 12^2$$

由平方差公式，得

$$h^2 - 144 = h^2 - 12^2 = (h + 12)(h - 12)$$

答：$(h + 12)(h - 12)$。

2. [2025 · October/November 0580/22 Q15(a)]
提示：先把常数项写成平方。

Factorise.

(a) $x^2 - 64$

将下式因式分解。
(a) $x^2 - 64$

✓ **答案**

$$(x + 8)(x - 8)$$

解析 将常数项写成平方，得

$$64 = 8^2$$

由平方差公式，得

$$x^2 - 64 = x^2 - 8^2 = (x + 8)(x - 8)$$

答：$(x + 8)(x - 8)$。

3. [2023 · May/June 0580/41 Q7(a)(i)]
提示：先找两项系数的公因数，再看括号内能否用平方差。

(a) Factorise fully.

(i) $27y^2 - 3$

7 (a) 将下式完全因式分解。
(i) $27y^2 - 3$

✓ **答案**

$$3(3y - 1)(3y + 1)$$

解析 两项的公因式为 3，得

$$27y^2 - 3 = 3(9y^2 - 1)$$

将括号内两项写成平方，得

$$9y^2-1=(3y)^2-1^2$$

由平方差公式，得

$$3(9y^2-1)=3(3y-1)(3y+1)$$

答：$3(3y-1)(3y+1)$。

4. [2023 · February/March 0580/42 Q5(c)(ii)]

提示：先看两项共有的字母因式，再辨认括号内的两个平方。

(c) Factorise completely.

(ii) x^3-25x

(c) 将下式完全因式分解。

(ii) x^3-25x

✓ **答案**

$$x(x+5)(x-5)$$

解析 两项都含有因式 x，得

$$x^3-25x=x(x^2-25)$$

将括号内常数项写成平方，得

$$x(x^2-25)=x(x^2-5^2)$$

由平方差公式，得

$$x(x^2-5^2)=x(x+5)(x-5)$$

答：$x(x+5)(x-5)$。

5. [2024 · February/March 0580/42 Q5(b)]

提示：先把两个括号内的式子分别看作平方的底数。

(b) Simplify.

$$(2x-3)^2-(x+1)^2$$

(b) 化简下式。

$(2x-3)^2-(x+1)^2$

✓ **答案**

$$(x-4)(3x-2)$$

解析 将两个括号内的式子分别看作平方的底数，由平方差公式，得

$$(2x-3)^2-(x+1)^2=((2x-3)+(x+1))((2x-3)-(x+1))$$

减去括号内的式子，括号内各项变号，得

$$(2x-3)^2-(x+1)^2=(2x-3+x+1)(2x-3-x-1)=(3x-2)(x-4)$$

答：$(x-4)(3x-2)$。

2.8 先分解分子分母，再约去共同因子

题型 1 先分解分子分母，再约去共同因子（Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **平方差式分解：**例题用 $x-5$ 除以 x^2-25，先将分母写成乘积。两项都是平方，且中间为减号，按平方差分解。两个因式分别为 x 与 5 的_____和_____。

$$x^2-25=x^2-5^2=(x-5)(x+5)$$

② **提取公因式：**各项含有相同的乘法因子，先提出公因式。括号内各项由原各项除以公因式得到。

$$6x^2-12x=6x\cdot x-6x\cdot 2=6x(x-2)$$

③ **首项系数为一：**三项式按平方项、一次项、常数项排列。平方项系数为 1 时，找两数，使乘积为常数项、和为一次项系数。例如，乘积为 -6、和为 -1 的两数为 -3 和 2。

$$x^2-x-6=x^2-3x+2x-6=x(x-3)+2(x-3)=(x+2)(x-3)$$

④ **首项系数非一：**平方项系数不是 1 时，先将其与常数项相乘。下式中，两数的乘积为 $2\times(-6)=-12$，和为 1，可取 4 和 -3。据此拆开一次项，再分组提出相同的括号因式。

$$2x^2+x-6=2x^2+4x-3x-6=2x(x+2)-3(x+2)=(2x-3)(x+2)$$

⑤ **四项式的分组：**四项式先两两分组，再提出相同的括号因式。后一组提出负号时，括号内各项变号。

后一组提出 1：

$$2xy-6y+x-3=2y(x-3)+(x-3)=(2y+1)(x-3)$$

后一组提出 -1：

$$2xy-6y-x+3=2y(x-3)-(x-3)=(2y-1)(x-3)$$

⑥ **约去共同因式：**分子、分母写成乘积后，约去共同因式。约去的是乘法因子，原分母须_____。本例约去 $x-5$ 后，仍保留原分母的取值条件。

$$\frac{x-5}{x^2-25}=\frac{x-5}{(x-5)(x+5)}=\frac{1}{x+5}$$

$$x\neq 5, x\neq -5$$

填空：①差　②和　③不为零

点石成金　题目出现分子、分母含多项式的分式，要求化简时，先将分子、分母分解因式。

例 1 [2023 · October/November 0580/23 Q17(b)]

(b) Simplify.

$$\frac{x-5}{x^2-25}$$

(b) 化简。

$$\frac{x-5}{x^2-25}$$

解答 由平方差公式，得

$x^2-25=(x-5)(x+5)$。

原分母不为零，故 $x\neq 5$ 且 $x\neq -5$。

$$\frac{x-5}{x^2-25}=\frac{x-5}{(x-5)(x+5)}$$

方法：先分解分母，再约去共同因式。

辨析：约分后仍须保留原式的取值限制。

$\frac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{x+5}$。
答：$\frac{1}{x+5}$。

针对练习

1. [2023 · February/March 0580/22 Q23]
提示：分子拆一次项，分母用平方差，再比括号因式。

Simplify.

$$\frac{5x^2-19x+12}{x^2-9}$$

化简。
$\frac{5x^2-19x+12}{x^2-9}$

✓ **答案**

$$\frac{5x-4}{x+3}$$

解析 将分子的一次项拆开，得

$$5x^2-19x+12 = 5x^2-15x-4x+12$$

$$5x^2-15x-4x+12 = 5x(x-3)-4(x-3)$$

$5x(x-3)-4(x-3) = (5x-4)(x-3)$。
由平方差公式，得
$x^2-9 = (x-3)(x+3)$。
原分母不为零，故 $x \neq 3$ 且 $x \neq -3$。

$$\frac{5x^2-19x+12}{x^2-9} = \frac{(5x-4)(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$\frac{(5x-4)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{5x-4}{x+3}$。
答：$\frac{5x-4}{x+3}$。

2. [2023 · May/June 0580/42 Q9(b)(ii)]
提示：分母按含不含 y 分组，与分子的平方差因式比较。

(ii) Simplify.

$$\frac{x^2-9}{2xy-6y+5x-15}$$

(ii) 化简。
$\frac{x^2-9}{2xy-6y+5x-15}$

✓ **答案**

$$\frac{x+3}{2y+5}$$

解析 由平方差公式，得
$x^2-9 = (x-3)(x+3)$。
将分母分组分解，得

$$2xy-6y+5x-15 = 2y(x-3)+5(x-3)$$

$2y(x-3)+5(x-3)=(2y+5)(x-3)$。

原分母不为零，故 $x\neq 3$ 且 $y\neq -\frac{5}{2}$。

$$\frac{x^2-9}{2xy-6y+5x-15}=\frac{(x-3)(x+3)}{(2y+5)(x-3)}$$

$\frac{(x-3)(x+3)}{(2y+5)(x-3)}=\frac{x+3}{2y+5}$。

答：$\frac{x+3}{2y+5}$。

3. [2023 · May/June 0580/23 Q21]

提示：拆分子一次项时，比两数之积与首尾系数之积。

Simplify.

$$\frac{2x^2+5x-12}{4x^2-9}$$

化简。

$\frac{2x^2+5x-12}{4x^2-9}$

✓ **答案**

$$\frac{x+4}{2x+3}$$

解析 将分子的一次项拆开，得

$$2x^2+5x-12=2x^2+8x-3x-12$$

$$2x^2+8x-3x-12=2x(x+4)-3(x+4)$$

$2x(x+4)-3(x+4)=(2x-3)(x+4)$。

由平方差公式，得

$4x^2-9=(2x-3)(2x+3)$。

原分母不为零，故 $x\neq\frac{3}{2}$ 且 $x\neq-\frac{3}{2}$。

$$\frac{2x^2+5x-12}{4x^2-9}=\frac{(2x-3)(x+4)}{(2x-3)(2x+3)}$$

$\frac{(2x-3)(x+4)}{(2x-3)(2x+3)}=\frac{x+4}{2x+3}$。

答：$\frac{x+4}{2x+3}$。

4. [2023 · October/November 0580/22 Q24]

提示：分子两两分组，后一组提出负号，再比括号。

Simplify.

$$\frac{ax-2a-x+2}{a^2-1}$$

化简。

$\frac{ax-2a-x+2}{a^2-1}$

✓ **答案**

$$\frac{x-2}{a+1}$$

解析 将分子分组分解，得

$$ax-2a-x+2=a(x-2)-(x-2)$$

$a(x-2)-(x-2)=(a-1)(x-2)$。
由平方差公式，得
$a^2-1=(a-1)(a+1)$。
原分母不为零，故 $a\neq 1$ 且 $a\neq -1$。

$$\frac{ax-2a-x+2}{a^2-1}=\frac{(a-1)(x-2)}{(a-1)(a+1)}$$

$\frac{(a-1)(x-2)}{(a-1)(a+1)}=\frac{x-2}{a+1}$。
答：$\frac{x-2}{a+1}$。

5. [2023 · October/November 0580/21 Q20(a)]
提示：分子先提公因式，分母配两数时兼比积与和。

Write as a single fraction in its simplest form.

(a) $\dfrac{10x^2-60x}{x^2-x-30}$

化为一个分式，并写成最简形式。
(a) $\frac{10x^2-60x}{x^2-x-30}$

✓ **答案**

$$\frac{10x}{x+5}$$

解析 分子提出公因式 $10x$，得
$10x^2-60x=10x(x-6)$。
分母中，所求两数的乘积为 -30，和为 -1，取 -6 和 5，得

$$x^2-x-30=x^2-6x+5x-30$$

$$x^2-6x+5x-30=x(x-6)+5(x-6)$$

$x(x-6)+5(x-6)=(x-6)(x+5)$。
原分母不为零，故 $x\neq 6$ 且 $x\neq -5$。

$$\frac{10x^2-60x}{x^2-x-30}=\frac{10x(x-6)}{(x-6)(x+5)}$$

$\frac{10x(x-6)}{(x-6)(x+5)}=\frac{10x}{x+5}$。
答：$\frac{10x}{x+5}$。

2.9 把数代入代数式并按顺序求值

题型 1 把数代入代数式并按顺序求值（Core）

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **逐列代入求值：**表中每列给定 x，代入下式求对应的 y。

$$y=x^2+5x+3$$

式中 $5x$ 表示 $5\times x$，负数代入时用括号括起。按_____、乘除、加减的顺序计算。

$$y=(-4)^2+5\times(-4)+3=16-20+3=-1$$

② **含减号的运算：**式中减去一个平方，先求平方再相减。减去负数，改为加上它的_____。

减去平方

$5+3\times(-3)-(-3)^2=5-9-9=-13$

减去负数

$1-3\times(-2)=1-(-6)=1+6=7$

③ **小数代入求值：**给定小数时，也按原式的运算顺序计算。小数的平方是这个小数与自身相乘。

$$0.2^2=0.2\times0.2=0.04$$

$$y=3\times0.2^2-2\times0.2-1=0.12-0.4-1=-1.28$$

④ **多字母代入求值：**式中有多个字母时，各自代入给定值。相邻字母或括号表示_____。有括号时，先算括号内的值。

$T=5P+3Q$

$P=1,Q=2$

$T=5\times1+3\times2=5+6=11$

$s=\frac{1}{2}(u+v)t$

$u=2,v=4,t=3$

$s=\frac{1}{2}\times(2+4)\times3=\frac{1}{2}\times6\times3=9$

⑤ **函数记号求值：**已知下式，记号 $j(-2)$ 表示当 $x=-2$ 时的函数值。把式中的 x 换成 -2，再求平方。

$$j(x)=x^2$$

$$j(-2)=(-2)^2=(-2)\times(-2)=4$$

⑥ **按序号代入求值：**第 n 项或图 n 中，n 表示_____。求前三项时，依次代入 $n=1,2,3$。例如，第 n 项为 $10-n^2$ 时求第 4 项，图 n 有 $n(n+2)$ 个白色方格时求图 2 的个数。

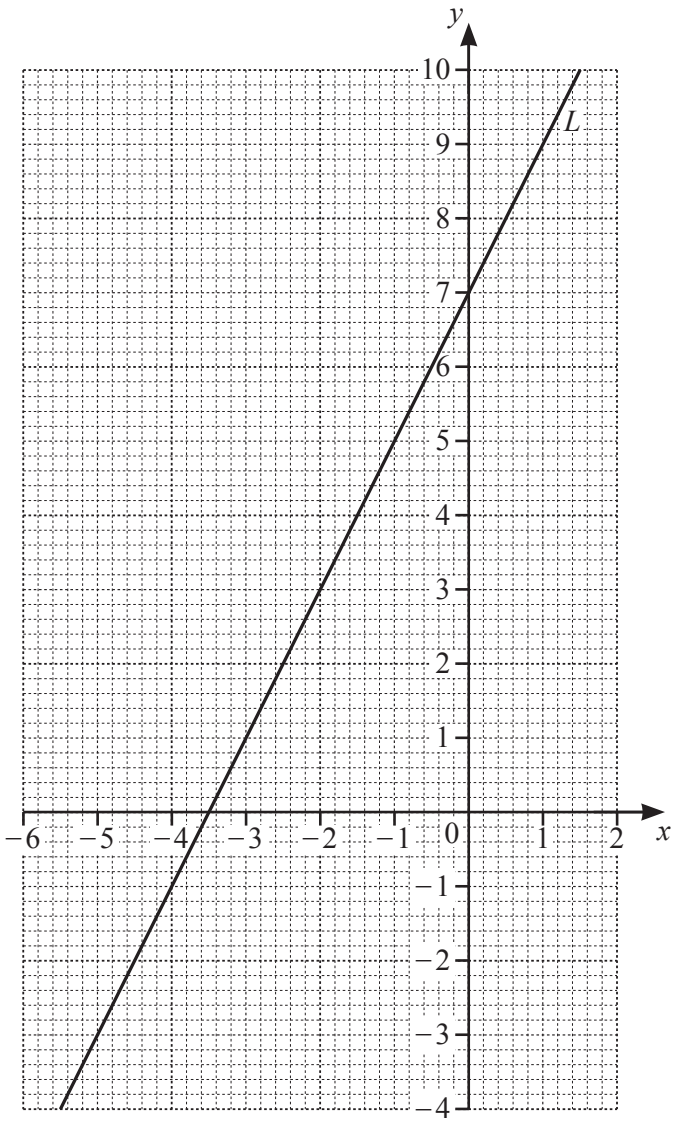
$$10-4^2=10-16=-6$$

$$2\times(2+2)=2\times4=8$$

填空：①乘方　②相反数　③乘法　④序号

点石成金　题目出现给定字母的值、待填数值表或指定项数时，先把对应的数代入式中，并按运算顺序计算。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q6(c)(i)]



(c)　(i)　Complete the table of values for　$y = x^2 + 5x + 3$.

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	9		−1			−1		

图中横轴为 x，纵轴为 y，直线标为 L。横轴标有从 −6 至 2 的整数刻度，纵轴标有从 −4 至 10 的整数刻度。

（c）（i）补全下式的数值表。

$$y = x^2 + 5x + 3$$

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	9		−1			−1		

解答　将各空格对应的数代入，得

$y = (-5)^2 + 5 \times (-5) + 3 = 25 - 25 + 3 = 3$,

$y = (-3)^2 + 5 \times (-3) + 3 = 9 - 15 + 3 = -3$,

$y = (-2)^2 + 5 \times (-2) + 3 = 4 - 10 + 3 = -3$,

$y = 0^2 + 5 \times 0 + 3 = 3$,

方法：逐个代入 x，先平方再乘、加。

辨析：负数平方时，整个负数要带括号。

$y = 1^2 + 5 \times 1 + 3 = 1 + 5 + 3 = 9$。

答：从左到右依次填入 $3, -3, -3, 3, 9$。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/31 Q6(a)]

提示：看各空格对应的数，分清三倍项与被减去的平方项。

(a) Complete the table of values for $y = 5 + 3x - x^2$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y		1			7			-5

(a) 补全下式的数值表。

$y = 5 + 3x - x^2$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y		1			7			-5

✓ **答案**

$-5, 5, 7, 5, 1$

解析 将各空格对应的数代入，得

$y = 5 + 3 \times (-2) - (-2)^2 = 5 - 6 - 4 = -5$,

$y = 5 + 3 \times 0 - 0^2 = 5$,

$y = 5 + 3 \times 1 - 1^2 = 5 + 3 - 1 = 7$,

$y = 5 + 3 \times 3 - 3^2 = 5 + 9 - 9 = 5$,

$y = 5 + 3 \times 4 - 4^2 = 5 + 12 - 16 = 1$。

答：从左到右依次填入 $-5, 5, 7, 5, 1$。

2. [2023 · May/June 0580/32 Q7(b)(i)]

提示：看同列给定值，平方项与一次项分别代入后再合并。

(b) (i) Complete the table of values for $y = x^2 + x - 8$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	-2		-8	-8		-2	4	

(b) (i) 补全下式的数值表。

$y = x^2 + x - 8$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	-2		-8	-8		-2	4	

✓ **答案**

$-6, -6, 12$

解析 将各空格对应的数代入，得

$y = (-2)^2 + (-2) - 8 = 4 - 2 - 8 = -6$,

$y = 1^2 + 1 - 8 = 1 + 1 - 8 = -6$,

$y = 4^2 + 4 - 8 = 16 + 4 - 8 = 12$。

答：从左到右依次填入 $-6, -6, 12$。

3. [2023 · May/June 0580/31 Q6(d)(i)]
提示：看空格所在列，先求给定数的两倍，再处理常数项。

(d) (i) Complete the table of values for $y = 2x + 1$.

x	-1	0	2
y			

(d)(i) 补全下式的数值表。
$y = 2x + 1$

x	-1	0	2
y			

✓ **答案**

$-1, 1, 5$

解析 将表中的数分别代入，得
$y = 2 \times (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$,
$y = 2 \times 0 + 1 = 1$,
$y = 2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$。
答：从左到右依次填入 $-1, 1, 5$。

4. [2023 · February/March 0580/42 Q5(b)(i)]
提示：看括号内两个字母各对应哪个数，先合并括号内的值。

(b) $s = \frac{1}{2}(u + v)t$

(i) Find the value of s when $u = 20$, $v = 30$ and $t = 7$.

(b) 已知
$s = \frac{1}{2}(u + v)t$。
(i) 当 $u = 20$、$v = 30$、$t = 7$ 时，求 s 的值。

✓ **答案**

175

解析 将给定的值代入，先算括号内的和，得
$s = \frac{1}{2} \times (20 + 30) \times 7 = \frac{1}{2} \times 50 \times 7 = 25 \times 7 = 175$。
答：$s = 175$。

5. [2023 · February/March 0580/42 Q11(a)]
提示：看函数括号内的输入值，平方时把负号一起括入。

$$f(x)=2x-1 \qquad g(x)=3x+2 \qquad h(x)=\frac{1}{x},\ x\neq 0 \qquad j(x)=x^2$$

(a) Find $j(-1)$.

已知
$f(x)=2x-1$，
$g(x)=3x+2$，
$h(x)=\frac{1}{x}, x\neq 0$，
$j(x)=x^2$。
(a) 求 $j(-1)$。

✓ **答案**

1

解析 由 $j(x)=x^2$，得
$j(-1)=(-1)^2=(-1)\times(-1)=1$。
答：$j(-1)=1$。

6. [2023 · May/June 0580/21 Q20(a)]
提示：比较两个输入的平方与一次项，分别检查符号。

The table shows some values for $y=3x^2-2x-1$.

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
y	4		-1		0	2.75

(a) Complete the table.

表中给出了下式的一些对应值。
$y=3x^2-2x-1$

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
y	4		-1		0	2.75

(a) 补全此表。

✓ **答案**

$0.75, -1.25$

解析 将两个空格对应的数代入，得
$y=3\times(-0.5)^2-2\times(-0.5)-1=3\times 0.25+1-1=0.75$，
$y=3\times 0.5^2-2\times 0.5-1=3\times 0.25-1-1=-1.25$。
答：从左到右依次填入 $0.75, -1.25$。

7. [2023 · May/June 0580/32 Q8(a)]
提示：看两个字母各自的给定值，分别与前面的系数相乘。

(a) $T = 5P + 3Q$

Find the value of T when $P = 6$ and $Q = 8$.

(a) 已知
$T = 5P + 3Q$。
当 $P = 6$、$Q = 8$ 时，求 T 的值。

✓ **答案**

54

解析 将给定的值代入，得
$T = 5 \times 6 + 3 \times 8 = 30 + 24 = 54$。
答：$T = 54$。

8. [2023 · May/June 0580/23 Q4]
提示：看减号后的乘积，先判定乘积正负，再处理相减。

$$v = u - 9.8t$$

Find the value of v when $u = 4$ and $t = -7$.

已知
$v = u - 9.8t$。
当 $u = 4$、$t = -7$ 时，求 v 的值。

✓ **答案**

72.6

解析 将给定的值代入，得
$v = 4 - 9.8 \times (-7) = 4 - (-68.6) = 4 + 68.6 = 72.6$。
答：$v = 72.6$。

9. [2023 · May/June 0580/11 Q17(a)]
提示：看所求项的序号，每次先求序号的平方，再做减法。

(a) The nth term of a sequence is $10 - n^2$.

Write down the first three terms of this sequence.

(a) 一个数列的第 n 项为 $10 - n^2$。
写出这个数列的前三项。

✓ **答案**

9, 6, 1

解析 依次代入 $n = 1, 2, 3$，得
$10 - 1^2 = 10 - 1 = 9$，
$10 - 2^2 = 10 - 4 = 6$，
$10 - 3^2 = 10 - 9 = 1$。
答：前三项为 $9, 6, 1$。

10. [2023 · February/March 0580/32 Q8(b)(iii)(c)]
提示：看指定图号，式中两处字母都代入同一图号。

(b) The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using small grey and small white squares to make grey and white columns.

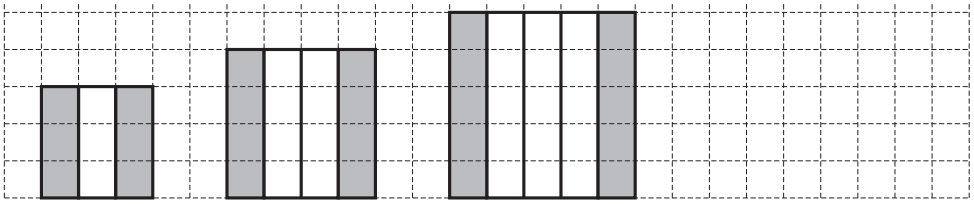


Diagram 1　Diagram 2　Diagram 3　Diagram 4

(iii)

Diagram number	1	2	3	4	5
Number of grey squares	6	8	10		
Number of white squares	3	8	15		
Total number of squares	9	16	25		

(c) The number of white squares in Diagram n is $n(n+2)$.

Work out the number of white squares in Diagram 30.

(b) 方格网中给出了一个图形序列的前三个图形。每个图形都由灰色和白色的小方格组成，排成灰色列和白色列。图中标注：图 1、图 2、图 3、图 4。

(iii)

图形序号	1	2	3	4	5
灰色方格的个数	6	8	10		
白色方格的个数	3	8	15		
方格总个数	9	16	25		

(c) 图 n 中白色方格的个数为 $n(n+2)$。

求图 30 中白色方格的个数。

✓ **答案** 960 个

解析 图 n 中白色方格的个数为 $n(n+2)$，代入 $n=30$，得

$30\times(30+2)=30\times32=960$。

答：图 30 中有 960 个白色方格。

11. [2025 · February/March 0580/22 Q4(a)]
提示：负数代入时用括号括起，先计算平方。

$$V = 4mp^2$$

(a) Find V when $m = 10$ and $p = -3$.

已知

$$V = 4mp^2$$

(a) 当 $m = 10$、$p = -3$ 时，求 V 的值。

✓ **答案**

360

解析 将给定值代入，先计算平方，得

$$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$$

$$V = 4 \times 10 \times (-3)^2 = 4 \times 10 \times 9 = 360$$

答：$V = 360$。

2.10 用逆运算把只出现一次的字母作主项

题型 1 用逆运算把只出现一次的字母作主项（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **明确所求字母：** 下式中，s 已单独写在等号左侧。

$$s = \frac{1}{2}(u + v)t$$

使 v 单独写在一侧，称为把 v 作_____。

② **消去分数因子：** 原式右侧乘有 $\frac{1}{2}$。乘法的逆运算是除法，两边同除以 $\frac{1}{2}$，即同乘_____。

$$2s = (u + v)t$$

③ **消去括号乘数：** 括号外乘有 t，两边同除以 t。作除数的 t 须满足下列条件。

$$t \neq 0$$

$$\frac{2s}{t} = u + v$$

④ **消去相加字母：** 等号右侧的 v 与 u 相加，两边同减 u。

$$\frac{2s}{t} - u = v$$

⑤ **移去加减常数：** 加上的数用减法消去，减去的数用_____法消去。

$p = 2t + 1$ ｜ $p = 2t - 1$

$p - 1 = 2t$ ｜ $p + 1 = 2t$

⑥ **除去字母系数：** 上面两式中，t 的系数均为 2。两边同除以 2，使 t 单独出现。

$t = \frac{p - 1}{2}$ ｜ $t = \frac{p + 1}{2}$

填空：①主项 ②2 ③加

点石成金　题目出现把只出现一次的字母作主项时，先辨认该字母外侧的运算，再用逆运算逐层消去。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q5(b)(ii)]

(b)　$s=\frac{1}{2}(u+v)t$

(ii)　Rearrange the formula to write v in terms of s, u and t.

（b）已知公式

$$s=\frac{1}{2}(u+v)t$$

（ii）将公式变形，用 s、u 和 t 表示 v。

解答　两边同乘 2，得

$$2s=(u+v)t$$

两边同除以 t，其中 $t\neq 0$，得

$$\frac{2s}{t}=u+v$$

两边同减 u，得

$$v=\frac{2s}{t}-u$$

答：$v=\frac{2s}{t}-u$，其中 $t\neq 0$。

方法：先看 v 外侧的运算，从消去二分之一这个乘数起手。

辨析：乘数是括号外相乘的 t，加项是括号内相加的 u。

拓展：等式两边同除以一个式子时，该式子的值须非零。

针对练习

1.　[2023 · October/November 0580/32 Q3(g)]

提示：看 n 项外相加的字母，再看 n 的系数。

(g)　Make n the subject of the formula　$V=3n+t$.

（g）将下列公式变形，使 n 成为主项。

$$V=3n+t$$

✓ **答案**

$$n=\frac{V-t}{3}$$

解析　两边同减 t，得

$$V-t=3n$$

两边同除以 3，得

$$n=\frac{V-t}{3}$$

答：$n=\frac{V-t}{3}$。

2. [2023 · October/November 0580/33 Q8(b)]
提示：看常数项前的加号，再看 t 前的乘数。

(b) Make t the subject of the formula $p = 4t + 3$.

(b) 将下列公式变形，使 t 成为主项。

$p = 4t + 3$

✓ **答案**

$$t = \frac{p - 3}{4}$$

解析 两边同减 3，得

$$p - 3 = 4t$$

两边同除以 4，得

$$t = \frac{p - 3}{4}$$

答：$t = \frac{p-3}{4}$。

3. [2023 · May/June 0580/32 Q8(e)]
提示：看常数项前的减号，比较消去加项与减项的运算。

(e) Make t the subject of the formula $p = 5t - 3$.

(e) 将下列公式变形，使 t 成为主项。

$p = 5t - 3$

✓ **答案**

$$t = \frac{p + 3}{5}$$

解析 两边同加 3，得

$$p + 3 = 5t$$

两边同除以 5，得

$$t = \frac{p + 3}{5}$$

答：$t = \frac{p+3}{5}$。

4. [2024 · February/March 0580/32 Q5(e)]
提示：先消去与含有所求字母的项相加的项。

(e) Make x the subject of the formula $y = mx + c$.

(e) 将下列公式变形，使 x 成为主项。

$y = mx + c$

✓ **答案**

$$x = \frac{y - c}{m}$$

解析 两边同减 c，得

$$y - c = mx$$

两边同除以 m，其中 $m \neq 0$，得

$$x = \frac{y - c}{m}$$

答：$x = \frac{y-c}{m}$，其中 $m \neq 0$。

5. [2024 · May/June 0580/23 Q16]
提示：先消去不含所求字母的加项。

$$A = \pi r^2 + \pi dh$$

Rearrange the formula to make h the subject.

$A = \pi r^2 + \pi dh$

将公式变形，使 h 成为主项。

✓ **答案**

$$h = \frac{A - \pi r^2}{\pi d}$$

解析 两边同减 πr^2，得

$$A - \pi r^2 = \pi dh$$

两边同除以 πd，其中 $d \neq 0$，得

$$h = \frac{A - \pi r^2}{\pi d}$$

答：$h = \frac{A-\pi r^2}{\pi d}$，其中 $d \neq 0$。

2.11 移项后开方，把有平方的字母作主项

题型 1 移项、平方或开方，把字母作主项（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **原式中的关系：**三个字母满足下列关系。

$$y = 2w^2 - x$$

把 w 作主项，须使等号一边只有 w。

② **移去加减项：**原式右边含有减去 x，两边同时_____。

$$y + x = 2w^2$$

③ **消去所乘系数：**平方项乘以 2，两边同时除以_____。

$$\frac{y+x}{2}=w^2$$

两边同除以一个数时，除数须不为 0。

④ **平方还原原数：**正数与它的相反数，平方后相等。

$3^2=9$　　|　　$(-3)^2=9$

由平方求原数，开方时须保留_____。

$$w=\pm\sqrt{\frac{y+x}{2}}$$

在实数范围内，根号内的式子须_____。

⑤ **根号两边平方：**根号单独在一边时，两边同时平方。例如，下式中的 a 非负。

$$a=\sqrt{2b-1}$$
$$a^2=2b-1$$
$$a^2+1=2b$$
$$b=\frac{a^2+1}{2}$$

← 填空：①加上 x　②2　③正负号　④大于或等于零

点石成金　题目出现所求字母的平方时，先用等式两边相同的运算分离平方项，再开方。

例 1　[2023 · October/November 0580/22 Q14]

$$y=2w^2-x$$

Rearrange the formula to make w the subject.

$y=2w^2-x$

变形公式，使 w 成为主项。

解答　由原式，两边同时加上 x，得

$$y+x=2w^2$$

两边同时除以 2，得

$$w^2=\frac{y+x}{2}$$

两边开方，得

$$w=\pm\sqrt{\frac{y+x}{2}}$$

其中 $y+x\geq 0$。

答：$w=\pm\sqrt{\frac{y+x}{2}}$。

方法：先看含 w^2 的一边，先移去加减项，再消去平方项的系数。

! 辨析：算术平方根是非负数，正数的平方根是互为相反数的两个数。

拓展：根号内为零时，带正负号的两个表达式取值相同。

针对练习

1. [2024 · October/November 0580/23 Q12]

← 提示：先将等式两边同时立方。

$$V=\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$$

Rearrange the formula to write x in terms of V and y.

$x =$ ..... [2]

$$V = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$$

变形公式，用 V 和 y 表示 x。

✓ **答案**

$$x = V^3 y$$

解析 原式分母满足 $y \neq 0$。两边同时立方，得

$$V^3 = \frac{x}{y}$$

两边同时乘以 y，得

$$V^3 y = x$$

答：$x = V^3 y$。

2. [2023 · October/November 0580/23 Q15]

提示：先看根号是否独占一边，再比较平方前后的等式。

$$T = \sqrt{3d - e}$$

Rearrange the formula to make d the subject.

$T = \sqrt{3d - e}$

变形公式，使 d 成为主项。

✓ **答案**

$$d = \frac{T^2 + e}{3}$$

解析 由原式，两边平方，得

$$T^2 = 3d - e$$

两边同时加上 e，得

$$T^2 + e = 3d$$

两边同时除以 3，得

$$d = \frac{T^2 + e}{3}$$

原式中的平方根非负，故 $T \geq 0$。

答：$d = \frac{T^2+e}{3}$。

3. [2023 · October/November 0580/31 Q7(c)]

提示：先看所求字母的系数，再核对该系数能否作除数。

(c) Make v the subject of the formula $S = kv^2$.

(c) 使 v 成为公式$S = kv^2$的主项。

✓ **答案** $v = \sqrt{\frac{S}{k}}$

解析 先除以 k，再开平方。 $v^2 = \frac{S}{k}$

$v = \sqrt{\frac{S}{k}}$

答：$v = \sqrt{\frac{S}{k}}$。这里写取非负值的分支；若 v 允许取负值，另一分支为$v = -\sqrt{\frac{S}{k}}$。

4. [2025 · February/March 0580/22 Q4(b)]
提示：先代入给定值，求出平方项的值。

$$V = 4mp^2$$

(b) Find the positive value of p when $V = 3200$ and $m = 2$.

已知

$$V = 4mp^2$$

(b) 当 $V = 3200$、$m = 2$ 时，求 p 的正值。

✓ **答案**

$$20$$

解析 将给定值代入，得

$$3200 = 4 \times 2 \times p^2 = 8p^2$$

两边同除以 8，得

$$p^2 = \frac{3200}{8} = 400$$

题目要求正值，取正平方根，得

$$p = \sqrt{400} = 20$$

答：p 的正值为 20。

5. [2025 · October/November 0580/21 Q17(b)]
提示：先将等式两边同除以 M。

$$I = M(k^2 + c^2)$$

(b) Rearrange the formula to write k in terms of I, M and c.

$$I = M(k^2 + c^2)$$

(b) 变形公式，用 I、M 和 c 表示 k。

✓ **答案**

$$k = \pm\sqrt{\frac{I}{M} - c^2}$$

解析 当 $M \neq 0$ 时，两边同除以 M，得

$$\frac{I}{M} = k^2 + c^2$$

两边同时减去 c^2，得

$$k^2 = \frac{I}{M} - c^2$$

两边开方，得

$$k = \pm\sqrt{\frac{I}{M} - c^2}$$

在实数范围内，须满足

$$\frac{I}{M}-c^2\geq 0$$

答：$k=\pm\sqrt{\frac{I}{M}-c^2}$。

2.12 把含主项的两项收在一起，再提公因式

题型 1 把含主项的两项收在一起，再提公因式（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **主项的含义：**所给公式用含 x 的分式表示 c。把 x 单独写在等号一边，称为使 x 成为_____。右栏另用一式演示同类变形。

$c=\frac{3x}{2x-5}$ | $\frac{x}{2}=3+cx$

② **清除分母：**目标字母出现在分式中，两边同乘分母。原分母必须_____；另一边有和式时，先用括号括起。

$c(2x-5)=3x$ | $x=2(3+cx)$

③ **展开括号：**括号外的因数，要乘括号内的每一项。

$c(2x-5)=2cx-5c$ | $2(3+cx)=6+2cx$

④ **移项归集：**含 x 的项移到左边，其余项移到右边。移项时，项的符号要_____。

$2cx-3x=5c$ | $x-2cx=6$

⑤ **提取公因式：**两项都含 x，提取公因式 x。单独的 x 的系数为_____。

$2cx-3x=x(2c-3)$ | $x-2cx=1x-2cx=x(1-2c)$

⑥ **除去系数：**提取后，等式左边是 x 与括号的乘积。两边同除以括号内的式子，该式子不能为零。

$x(2c-3)=5c$ | $x(1-2c)=6$

$x=\frac{5c}{2c-3}$ | $x=\frac{6}{1-2c}$

填空：①主项　②不为零　③改变　④1

点石成金　题目出现目标字母在等式中不止一处，并要求使它成为主项时，先清分母，再归集含它的项并提取公因式。

例 1 [2023 · May/June 0580/22 Q18]

Make x the subject of the formula.

$$c=\frac{3x}{2x-5}$$

使 x 成为下列公式的主项。

$$c=\frac{3x}{2x-5}$$

解答　原分母满足 $2x-5\neq 0$，两边同乘分母，得

$$c(2x-5)=3x$$

展开括号，得

$$2cx-5c=3x$$

移项，得

$$2cx-3x=5c$$

提取公因式 x，得

方法：先看分母及含 x 的项，从等式两边同乘分母起手。

辨析：归集是把含 x 项移到同侧，提取是把共同因式写到括号外。

$$x(2c-3)=5c$$

当 $2c-3\neq 0$ 时，两边同除以 $2c-3$，得

$$x=\frac{5c}{2c-3}$$

答：$x=\frac{5c}{2c-3}$。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/23 Q17]

提示：看展开后等号两侧的含 m 项，归集后比较系数。

Rearrange the formula to make m the subject.

$$R=\frac{2(m-k)}{m}$$

重新整理公式，使 m 成为主项。

$$R=\frac{2(m-k)}{m}$$

✓ **答案**

$$m=\frac{2k}{2-R}$$

解析 原分母满足 $m\neq 0$，两边同乘 m，得

$$Rm=2(m-k)$$

展开括号，得

$$Rm=2m-2k$$

把含 m 的项移到右边，得

$$2k=2m-Rm$$

提取公因式 m，得

$$2k=m(2-R)$$

当 $2-R\neq 0$ 时，两边同除以 $2-R$，得

$$m=\frac{2k}{2-R}$$

答：$m=\frac{2k}{2-R}$。

2. [2025 · October/November 0580/22 Q10(b)]
提示：先从右边两项中提取公因式 m。

$$b = dm + 2mk$$

(b) Rearrange the formula to make m the subject.

$b = dm + 2mk$

(b) 变形公式，使 m 成为主项。

✓ **答案**

$$m = \frac{b}{d + 2k}$$

解析 右边两项都含 m，提取公因式，得

$$b = m(d + 2k)$$

当 $d + 2k \neq 0$ 时，两边同除以 $d + 2k$，得

$$m = \frac{b}{d + 2k}$$

答：$m = \frac{b}{d+2k}$。

3. [2025 · October/November 0580/43 Q17]
提示：先将等式两边同乘 5 − t。

Make t the subject of the formula.

$$x = \frac{7t}{5 - t}$$

使 t 成为下列公式的主项。

$x = \frac{7t}{5 - t}$

✓ **答案**

$$t = \frac{5x}{x + 7}$$

解析 原式分母满足 $5 - t \neq 0$，即 $t \neq 5$。两边同乘 $5 - t$，得

$$x(5 - t) = 7t$$

展开括号，得

$$5x - xt = 7t$$

移项，得

$$5x = 7t + xt$$

提取公因式 t，得

$$5x = t(x + 7)$$

当 $x + 7 \neq 0$ 时，两边同除以 $x + 7$，得

$$t = \frac{5x}{x + 7}$$

答：$t=\frac{5x}{x+7}$，其中 $x\neq -7$，原式要求 $t\neq 5$。

4. [2023 · May/June 0580/41 Q7(d)]

提示：看单独的 k 与含 k 乘积项，比较两项各自的系数。

(d) Make k the subject of the formula.

$$\frac{k}{m}=4+kp$$

(d) 使 k 成为下列公式的主项。

$$\frac{k}{m}=4+kp$$

✓ **答案**

$$k=\frac{4m}{1-pm}$$

解析 原分母满足 $m\neq 0$，两边同乘 m，得

$$k=m(4+kp)$$

展开括号，得

$$k=4m+kpm$$

移项，得

$$k-kpm=4m$$

提取公因式 k，得

$$k(1-pm)=4m$$

因 $m\neq 0$，右边不为零，故 $1-pm\neq 0$。两边同除以 $1-pm$，得

$$k=\frac{4m}{1-pm}$$

答：$k=\frac{4m}{1-pm}$。

5. [2025 · May/June 0580/23 Q18]

提示：先将等式两边同乘 p t。

Make t the subject of the formula.

$$2=\frac{m(1-t)}{pt}$$

使 t 成为下列公式的主项。

$$2=\frac{m(1-t)}{pt}$$

✓ **答案**

$$t=\frac{m}{2p+m}$$

解析 原式分母满足 $pt\neq 0$，两边同乘 pt，得

$$2pt=m(1-t)$$

展开括号，得

$$2pt = m - mt$$

移项，得

$$2pt + mt = m$$

提取公因式 t，得

$$t(2p + m) = m$$

当 $2p + m \neq 0$ 时，两边同除以 $2p + m$，得

$$t = \frac{m}{2p + m}$$

答：$t = \frac{m}{2p+m}$，并须满足原式条件 $pt \neq 0$。

2.13 去括号、移项和同除，解一次方程

题型 1 去括号、移项和同除，解一次方程（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **同乘消去分母：**式中的 u 是待求的数。

$$\frac{25 - 2u}{3} = 2$$

分母为 3，等式两边同乘 _____。

$$25 - 2u = 6$$

② **移项改变符号：**把一项移到等号另一边，要改变该项的_____。含未知数的项放在一边，常数项放在另一边。

移常数项：

$$25 - 2u = 6$$

$$-2u = 6 - 25$$

两边都有未知数：

$$3u + 2 = 8 - u$$

$$3u + u = 8 - 2$$

③ **合并同类项：**字母前相乘的数称为系数。同类项的系数相加减，字母部分_____。

同类项相加：

$3u + u = (3 + 1)u = 4u$

同类项相减：

$3u - 5u = (3 - 5)u = -2u$

常数项也要算出结果。

$$6 - 25 = -19$$

$$8 - 2 = 6$$

④ **两边同除系数：**合并后，等式两边同除以未知数的系数。所除的系数不能为 _____。

系数为负数：

$$-2u = -19$$

$$u = \frac{-19}{-2} = 9.5$$

系数为正数：

$$4u = 6$$

$$u = \frac{6}{4} = 1.5$$

⑤ **乘法展开括号：**括号前有乘数时，乘数要乘括号内的_____。各项连同前面的符号参与运算。

$$2(3u - 1) = 2 \times 3u - 2 \times 1 = 6u - 2$$

⑥ **代入求出倍数：**题目给出一个倍数、求另一个倍数时，先求未知数。再把它的值代入所求式。

$$2v = 6$$

$$v = \frac{6}{2} = 3$$

$$5v = 5 \times 3 = 15$$

填空：①3　②符号　③不变　④0　⑤每一项

点石成金　题目出现含未知数的一次方程时，先去括号、去分母，再移项合并，两边同除以未知数的系数。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q20]

Solve.

$$\frac{25-2u}{3} = 2$$

解下列方程。

$\frac{25-2u}{3} = 2$

解答　等式两边同乘 3，得

$$25 - 2u = 6$$

移项，得

$$-2u = 6 - 25$$

$$-2u = -19$$

两边同除以 -2，得

$$u = \frac{-19}{-2} = 9.5$$

答：$u = 9.5$。

方法：先看分母，等式两边同乘分母，再整理未知数项。

辨析：移项是跨等号变号，合并是同侧同类项运算。

拓展：求出的数代回原方程，左右两边应相等。

针对练习

1. [2023 · February/March 0580/22 Q7(a)]

提示：看两边含字母项的符号，移到同侧后再合并系数。

Solve.

(a) $15t+8 = 4-t$

解下列方程。

(a) $15t + 8 = 4 - t$

✓ **答案**

$$t = -\frac{1}{4}$$

解析　移项，得

$$15t + t = 4 - 8$$

合并，得

$$16t = -4$$

两边同除以 16，得

$$t=\frac{-4}{16}=-\frac{1}{4}$$

答：$t=-\frac{1}{4}$。

2. [2023 · May/June 0580/32 Q8(d)]
提示：分别归拢含字母项与常数项，核对移项后的符号。

(d) Solve.

$$5x-1=3x+19$$

(d) 解下列方程。

$5x-1=3x+19$

✓ **答案**

$$x=10$$

解析 移项，得

$$5x-3x=19+1$$

合并，得

$$2x=20$$

两边同除以 2，得

$$x=\frac{20}{2}=10$$

答：$x=10$。

3. [2023 · October/November 0580/13 Q16]
提示：看合并后系数与常数的正负，再判断同除后的符号。

Solve the equation.

$$5x+7=9x-3$$

解下列方程。

$5x+7=9x-3$

✓ **答案**

$$x=2.5$$

解析 移项，得

$$5x-9x=-3-7$$

合并，得

$$-4x=-10$$

两边同除以 -4，得

$$x=\frac{-10}{-4}=2.5$$

答：$x=2.5$。

4. [2023 · October/November 0580/11 Q3(a)]
提示：先核对完整算式，再判断从哪一步起手。

Complete these statements.

(a) When $x =$ ....., $x+3=8$.

补全陈述。（a）$x+3=8$。$x=$_____。

✓ **答案** 5

解析 等式两边同时减去 3。$x=8-3=5$

答：5。

5. [2023 · October/November 0580/11 Q3(b)]
提示：比较已知倍数与所求倍数，先求字母的值再代入。

Complete these statements.

(b) When $7y=63$, $10y$

补全下列各式。

（b）当 $7y=63$ 时，$10y=$_____。

✓ **答案**

$$90$$

解析 由

$$7y=63$$

两边同除以 7，得

$$y=\frac{63}{7}=9$$

代入，得

$$10y=10\times 9=90$$

答：填 90。

6. [2024 · February/March 0580/32 Q7(b)(ii)]
提示：先展开等号左边的括号。

(b) Solve these equations.

(ii) $9(8x-7)=72$

（b）解下列方程。

（ii）$9(8x-7)=72$

✓ **答案**

$$x=1.875$$

解析 展开括号，得

$$72x-63=72$$

移项，得

$$72x=72+63$$

$$72x=135$$

两边同除以 72，得

$$x = \frac{135}{72} = \frac{15}{8} = 1.875$$

答：$x = 1.875$。

2.14 用字母表示几何量并代入公式列式

题型 1 用字母表示几何量并代入公式列式（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **长方形的面积：**图中长方形的长为 $3y$，宽为 $2y$。面积是长与宽的 _____，用 S 表示。同一字母相乘可写成平方。

$$y \times y = y^2$$

$$S = 3y \times 2y = 6y^2$$

② **三角形的面积：**三角形的高必须与对应的底垂直。面积是底与高乘积的 _____。例如底为 8 cm、对应的高为 3 cm，则面积为

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12\text{cm}^2$$

③ **各边相加求周长：**沿图形边界把各边长度相加，所得周长记作 P。图中长方形的周长为

$$P = 3y + 2y + 3y + 2y = 10y$$

边长含字母项与常数项时，分别合并，如

$$(2y + 3) + (y - 1) = (2 + 1)y + 3 - 1 = 3y + 2$$

④ **等周长求边长：**正方形四条边相等，边长是周长的 _____。与图中长方形等周长的正方形，边长记作 a，则

$$a = \frac{10y}{4} = \frac{5y}{2}$$

周长含两项时，每项都除以 4，如

$$a = \frac{8y + 12}{4} = \frac{8y}{4} + \frac{12}{4} = 2y + 3$$

⑤ **圆柱的总表面积：**圆柱半径取 y，高取 $3y$，π 表示圆周率。底面周长记作 C，一个底面积记作 B。总表面积是底面周长乘高，再加 _____ 个底面积。

$$C = 2\pi y$$

$$B = \pi y^2$$

$$S_{柱} = C \times 3y + 2B = 2\pi y \times 3y + 2\pi y^2 = 8\pi y^2$$

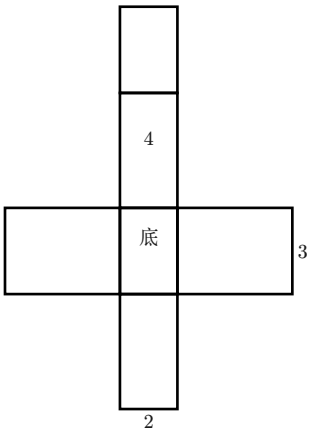
⑥ **表面积相等列式：**半径为 t 的球与上述圆柱表面积相等。球表面积记作 $S_{球}$，先分别列式，再令两者相等。等式两边同除以 4π，得球半径的平方。

$$S_{球} = 4\pi t^2$$

$$4\pi t^2 = 8\pi y^2$$

$$t^2 = \frac{8\pi y^2}{4\pi} = 2y^2$$

⑦ **长方体展开图：**展开图中的六个长方形折回后围成一个长方体。先选一个底面，底面的两条相邻边给出长与宽；与底面相连的侧面向外伸出的边给出高。下图以2 cm、3 cm、4 cm为三个尺寸。



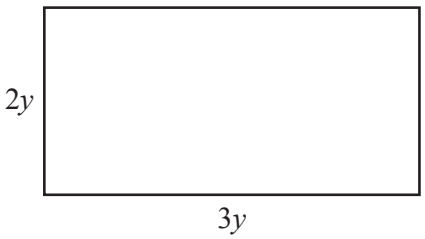
底面积是$2 \times 3 = 6\text{cm}^2$，每升高1 cm增加一个相同的底面积层；高4 cm，体积为$V = 2 \times 3 \times 4 = 24\text{cm}^3$。因此长方体体积等于长、宽、高的乘积。

填空：①积　②一半　③四分之一　④2

点石成金　题目出现用字母标注的边长、半径或高，要求周长、面积或等量关系时，先把这些量代入相应公式列式。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q9(a)]

(a)



NOT TO SCALE

Write down an expression for the area of this rectangle.
Give your answer in its simplest form.

(a) 图中长方形的长为$3y$，宽为$2y$。图形不按比例绘制。
写出这个长方形面积的表达式，并将答案化为最简形式。

解答　长方形面积等于长乘宽，得

$$S = 3y \times 2y = 6y^2$$

答：这个长方形的面积为$6y^2$。

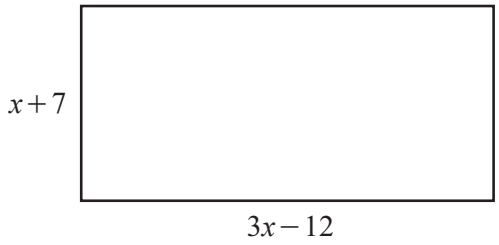
方法：先看长、宽的字母标注，从面积公式起手代入。

辨析：y^2是两个y相乘，$2y$是两个y相加。

针对练习

1. [2024 · May/June 0580/11 Q16]

提示：沿长方形边界写出四条边长的和。



NOT TO SCALE

The diagram shows a rectangle with length $3x-12$ and width $x+7$.

Find an expression for the perimeter of the rectangle.
Give your answer in its simplest form.

图中是一个长为 $3x-12$、宽为 $x+7$ 的长方形。图形不按比例绘制。
求这个长方形周长的表达式，并将答案化为最简形式。

✓ **答案**

$$8x-10$$

解析 长方形的两组对边分别相等，将四条边相加，得

$$P=(3x-12)+(x+7)+(3x-12)+(x+7)$$

$$P=(3+1+3+1)x-12+7-12+7$$

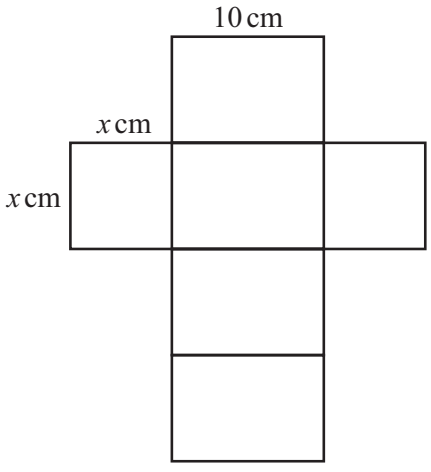
$$P=8x-10$$

答：周长的表达式为 $8x-10$。

2. [2024 · October/November 0580/31 Q8(a)(iii)]

提示：先从展开图辨认折成后长方体的长、宽、高。

(a) The diagram shows the net of a solid.



NOT TO SCALE

(iii) Write down an expression, in terms of x, for the volume of the solid.

(a) 图中是一个立体图形的展开图。上方长方形的上边标为 10 cm，左侧面的上边和左边均标为 x cm。图形不按比例绘制。
(iii) 用含 x 的式子表示这个立体图形的体积。

✓ **答案**

$$10x^2\text{cm}^3$$

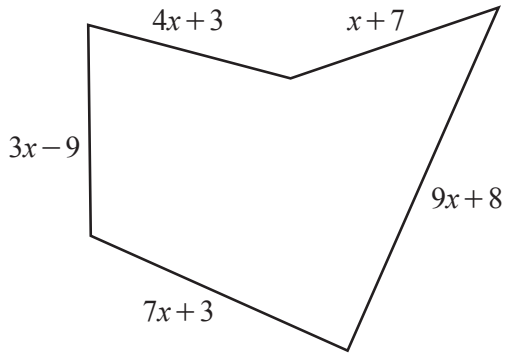
解析 展开图折成的立体是长方体，长为 10 cm，宽和高均为 x cm。
长方体体积等于长、宽、高的乘积，得

$$V = 10 \times x \times x = 10x^2\text{cm}^3$$

答：这个立体图形的体积为 $10x^2\text{cm}^3$。

3. [2023 · October/November 0580/32 Q6(c)]
提示：沿边界逐边求和，再把等周长分给正方形四边。

(c)



NOT TO SCALE

The perimeter of this shape is equal to the perimeter of a square.

Find an expression for the length of one side of the square.
Give your answer in its simplest form.

(c) 图中五边形从左上顶点起，沿边界顺时针各边长度依次为 $4x+3$、$x+7$、$9x+8$、$7x+3$、$3x-9$。图形不按比例绘制。
这个图形的周长与一个正方形的周长相等。
求这个正方形一条边长的表达式，并将答案化为最简形式。

✓ **答案**

$$6x + 3$$

解析 将五条边的长度相加，得这个图形的周长

$$P = (4x + 3) + (x + 7) + (9x + 8) + (7x + 3) + (3x - 9)$$

$$P = (4 + 1 + 9 + 7 + 3)x + 3 + 7 + 8 + 3 - 9 = 24x + 12$$

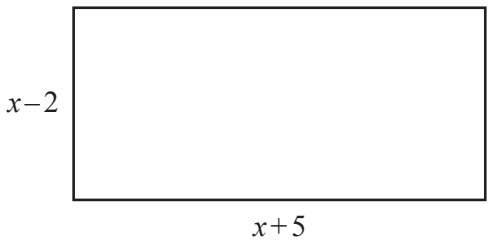
正方形的周长也为 $24x + 12$。设正方形的边长为 a，则

$$a = \frac{24x + 12}{4} = \frac{24x}{4} + \frac{12}{4} = 6x + 3$$

答：这个正方形的边长为 $6x + 3$。

4. [2024 · February/March 0580/32 Q7(g)]
提示：先将两条邻边的表达式相乘。

(g)



NOT TO SCALE

Find an expression for the area of this rectangle.
Give your answer in the form x^2+ax+b.

（g）图中长方形的两条邻边分别标为 $x-2$ 和 $x+5$。图形不按比例绘制。
求这个长方形面积的表达式，答案写成 x^2+ax+b 的形式。

✓ **答案**

$$x^2+3x-10$$

解析 长方形面积等于长乘宽，得

$$S=(x-2)(x+5)$$

将第一个括号中的每一项分别乘第二个括号，得

$$S=x^2+5x-2x-10$$

$$S=x^2+3x-10$$

答：面积的表达式为 $x^2+3x-10$。

5. [2023 · May/June 0580/43 Q8(c)]
提示：看圆柱是否计入两个底面，再与球的表面积列等式。

(c) A solid cylinder has radius x and height $6x$.
A sphere of radius r has the same surface area as the total surface area of the cylinder.

Show that $r^2=\frac{7}{2}x^2$.

[The surface area, A, of a sphere with radius r is $A=4\pi r^2$.]

（c）一个实心圆柱的半径为 x，高为 $6x$。
一个半径为 r 的球，其表面积与这个圆柱的总表面积相等。
证明

$$r^2=\frac{7}{2}x^2$$

[半径为 r 的球，其表面积 A 的公式为 $A=4\pi r^2$。]

✓ **答案**

$$r^2=\frac{7}{2}x^2$$

解析 圆柱的总表面积包括侧面积和两个底面积，得

$$S_{柱}=2\pi x\times 6x+2\pi x^2=14\pi x^2$$

球的表面积为

$$S_{球}=4\pi r^2$$

由球的表面积等于圆柱的总表面积，得

$$4\pi r^2=14\pi x^2$$

等式两边同除以 4π，得

$$r^2=\frac{14\pi x^2}{4\pi}=\frac{7}{2}x^2$$

答：$r^2=\frac{7}{2}x^2$，得证。

2.15 把文字或几何等量关系列成一次方程

题型 1 把文字或几何等量关系列成一次方程（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **周长列出方程：**本例各边长均以厘米为单位，x 是待求的数。三边长相加，等于三角形的_____。

$$(3x-10)+(x+70)+(4x-50)=526$$

② **等式两边同算：**等式两边可同加或同减同一个式子。两边也可同除以_____。如下式，两边依次减 $2x$、加 2、除以 3。

$$5x-2=2x+4$$

$$(5-2)x-2=4$$

$$3x=4+2=6$$

$$x=\frac{6}{3}=2$$

③ **直角三角形角和：**图中有直角标记，该角为 90°。三角形内角和为 180°，其余两角之和为_____。将图中两锐角的度数相加，得

$$(3x-1)+4x=180-90=90$$

④ **其余数量写成式：**纳赛尔有 x 颗弹珠。根据多出的颗数和倍数，表示其余两人的弹珠数。

塞琳娜比纳赛尔多 15 颗。

$x+15$

哈尼夫是塞琳娜的 2 倍。

$3(x+15)$

⑤ **括号外数乘各项：**每件夹克售价为 $x+27$ 美元，三件的总价为单价的 2 倍。展开括号时，括号外的数要乘括号内的_____。

$$(x+27)+(x+27)+(x+27)=3(x+27)=3x+81$$

⑥ **按关系列出等式：**总量等于各部分之和。一个数量是另一个数量的几倍，就用几乘另一个数量。

三人的弹珠总数为 26 颗。

$x+(x+2)+2(x+2)=26$

线段 AB 的长是 CD 的 2 倍。

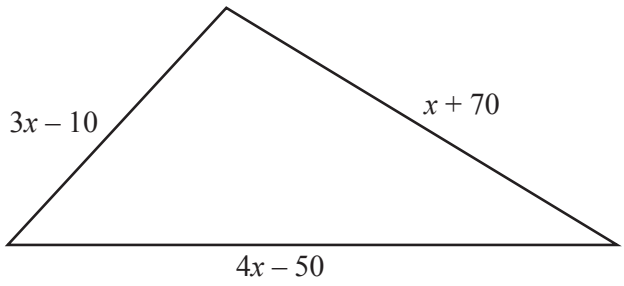
$5x+1=2(x+3)$

填空：①周长　②非零数　③90°　④每一项

点石成金　题目出现用含未知数的式子表示的边长、角度或数量，并给出周长、角和、总量或倍数关系时，先按相等关系列方程。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q9(b)]

(b) In this part, all measurements are in centimetres.



NOT TO SCALE

The perimeter of the triangle is 526 cm.

Find the value of x.

(b) 本小题中，所有测量值的单位均为厘米。图中三角形的三条边长分别为 $3x-10$、$x+70$ 和 $4x-50$。图形未按比例绘制。这个三角形的周长为 526 厘米。
求 x 的值。

解答　由三边长之和等于周长，得

$$(3x-10)+(x+70)+(4x-50)=526$$

合并含 x 的项与常数项，得

$$8x+10=526$$

两边同时减去 10，得

$$8x=526-10=516$$

两边同时除以 8，得

$$x=\frac{516}{8}=64.5$$

答：$x=64.5$。

方法：先看三边旁的式子与周长数值，从相加列等式起手。

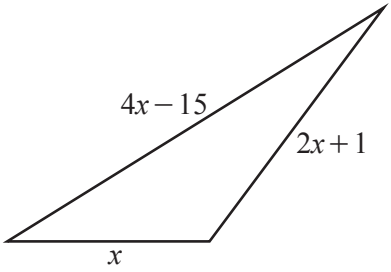
辨析：周长是三边围成一圈的总长，边长是其中一边的长度。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/33 Q8(c)]

提示：看三边旁的式子，将它们的和与周长对应。

(c) In this part, all measurements are in centimetres.



NOT TO SCALE

The perimeter of this triangle is 49 cm.

Work out the value of x.

(c) 本小题中，所有测量值的单位均为厘米。图中三角形的三条边长分别为 x、$4x-15$ 和 $2x+1$。图形未按比例绘制。
这个三角形的周长为 49 厘米。
求 x 的值。

✓ **答案**

$$x = 9$$

解析 由三边长之和等于周长，得

$$x + (4x - 15) + (2x + 1) = 49$$

$$7x - 14 = 49$$

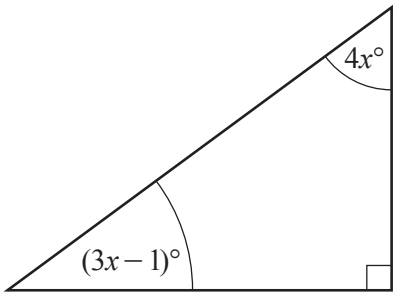
$$7x = 49 + 14 = 63$$

$$x = \frac{63}{7} = 9$$

答：$x = 9$。

2. [2023 · May/June 0580/11 Q21]

提示：看直角标记，将两锐角的和与直角度数比较。



NOT TO SCALE

The diagram shows a right-angled triangle.

Use the information in the diagram to write down and solve an equation to find the value of x.

图示为一个直角三角形。图中两个锐角分别标为 $(3x-1)°$ 和 $4x°$，另一个角有直角标记。图形未按比例绘制。
利用图中信息，列出并解一个方程，求 x 的值。

✓ **答案**

$$x = 13$$

解析　由三角形内角和为 180°，得

$$(3x - 1) + 4x + 90 = 180$$

$$7x - 1 + 90 = 180$$

$$7x = 180 - 90 + 1 = 91$$

$$x = \frac{91}{7} = 13$$

答：$x = 13$。

3. [2023 · May/June 0580/43 Q8(a)]
提示：看两类衣服的件数，将各类小计之和与总价对应。

(a) A shop sells shirts for \$$x$ and jackets for \$$(x + 27)$.
The shop sells 4 shirts and 3 jackets for a total of \$194.75 .

Write down and solve an equation to find the cost of one shirt.

(a) 一家商店出售衬衫和夹克，每件衬衫售价为 x 美元，每件夹克售价为 $(x + 27)$ 美元。
这家商店售出 4 件衬衫和 3 件夹克，总价为 194.75 美元。
列出并解一个方程，求一件衬衫的售价。

✓ **答案**　16.25 美元

解析　由四件衬衫与三件夹克的总价为 194.75 美元，得

$$4x + 3(x + 27) = 194.75$$

$$4x + 3x + 81 = 194.75$$

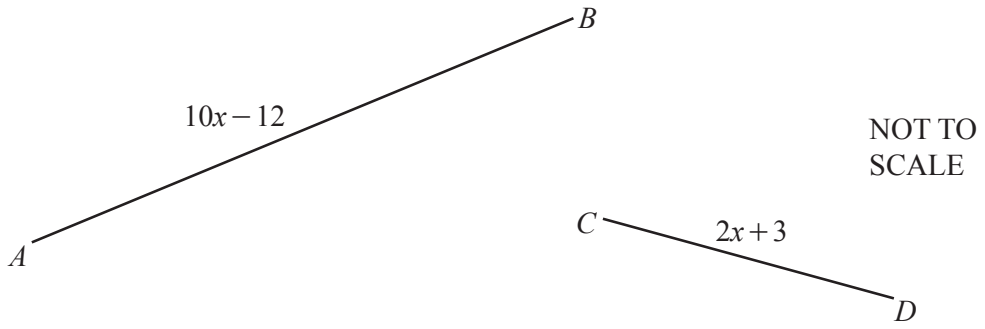
$$7x = 194.75 - 81 = 113.75$$

$$x = \frac{113.75}{7} = 16.25$$

答：一件衬衫的售价为 16.25 美元。

4. [2023 · May/June 0580/13 Q25]
提示：看倍数关系，将较长线段与较短线段的三倍对应。

In this question, both lengths are in centimetres.



The diagram shows two lines, AB and CD.
The length of AB is $10x-12$.
The length of CD is $2x+3$.
Line AB is 3 times as long as line CD.

Work out the value of x.

本题中，两条线段长度的单位均为厘米。
图中有两条线段 AB 和 CD，端点分别为 A、B 和 C、D。图形未按比例绘制。
线段 AB 的长为 $10x-12$。
线段 CD 的长为 $2x+3$。
线段 AB 的长是线段 CD 的 3 倍。
求 x 的值。

✓ **答案**

$$x = 5.25$$

解析 由线段 AB 的长是线段 CD 的 3 倍，得

$$10x - 12 = 3(2x + 3)$$

$$10x - 12 = 6x + 9$$

两边同时减去 $6x$，再同时加上 12，得

$$10x - 6x = 9 + 12$$

$$4x = 21$$

$$x = \frac{21}{4} = 5.25$$

答：$x = 5.25$。

5. [2023 · October/November 0580/31 Q7(e)]
提示：看哈尼夫的倍数以谁为基准，再将三人数量相加。

(e) Nasser has x marbles.
Selina has 15 more marbles than Nasser.
Hanif has 3 times as many marbles as Selina.
In total they have 150 marbles.

Find the value of x.

(e) 纳赛尔有 x 颗弹珠。
塞琳娜比纳赛尔多 15 颗弹珠。
哈尼夫的弹珠数是塞琳娜的 3 倍。
三人共有 150 颗弹珠。
求 x 的值。

✓ **答案**

$$x = 18$$

解析 塞琳娜有 $x + 15$ 颗弹珠，哈尼夫有 $3(x + 15)$ 颗弹珠。由三人的弹珠总数为 150 颗，得

$$x + (x + 15) + 3(x + 15) = 150$$

$$x + x + 15 + 3x + 45 = 150$$

$$5x + 60 = 150$$

$$5x = 150 - 60 = 90$$

$$x = \frac{90}{5} = 18$$

答：$x = 18$。

2.16 倍乘消元，解二元一次方程组

题型 1 倍乘消元，解二元一次方程组（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **同组数值作解：** 例题中的两个方程含有相同的未知数 x 和 y。一组解须_____满足两个方程。

$$3x - 2y = 19$$

$$x + y = 3$$

② **等式整体倍乘：** 将第二个方程乘以 2，等号两边的每一项都乘以_____。$x + y = 3 \xrightarrow{\text{两边同乘二}} 2x + 2y = 6$

③ **相加相减消元：** 同一个未知数的系数相反时，两式_____；系数相同时，两式_____。所得方程只含一个未知数。

第二式乘以 2 后相加

$(3x - 2y) + (2x + 2y) = 19 + 6$

$5x = 25$

第二式乘以 3 后相减

$(3x - 2y) - (3x + 3y) = 19 - 9$

$-5y = 10$

④ **求值以后回代：** 由只含 y 的方程求出 y，再代入原方程求 x。

$$y = \frac{10}{-5} = -2$$

$$x = 3 - y = 3 - (-2) = 5$$

⑤ **按购买量列式：** 城堡成人票每张 x 美元，儿童票每张 y 美元。每类人数乘以单价，两项相加等于总价。

$$2x + 3y = 15$$

$$3x + 5y = 23.50$$

⑥ **两式分别倍乘：**两式中 x 的系数为 2 和 3，分别乘以 3 和 2。所得系数同为 6，相减可消去 x。$3(2x+3y)=3\times 15 \xrightarrow{\text{展开}} 6x+9y=45$

$2(3x+5y)=2\times 23.50 \xrightarrow{\text{展开}} 6x+10y=47$

← 填空：①同时　②同一个数　③相加　④相减

点石成金　题目出现两个含相同未知数的一次方程，或两组购买数量与总价时，先列齐方程，再倍乘配齐一个未知数的系数。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q23]

Solve the simultaneous equations.
You must show all your working.

$$3x-2y=19$$
$$x+y=3$$

解下列二元一次方程组。必须写出全部解答过程。

$3x-2y=19$

$x+y=3$

解答　将第二个方程两边同乘 2，得

$$2x+2y=6$$

与第一个方程相加，得

$$5x=25$$

$$x=5$$

将 $x=5$ 代入第二个方程，得

$$5+y=3$$

$$y=3-5=-2$$

答：$x=5$，$y=-2$。

✓ 方法：先比两式中 y 的系数，从第二式整体乘二起手。

! 辨析：相加消元是消去系数相反的项，相减消元是消去系数相同的项。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/13 Q23]

← 提示：比较两式中 x 的系数，考虑第一式倍乘后怎样消元。

Solve the simultaneous equations.
You must show all your working.

$$3x+5y=23$$
$$6x-4y=11$$

解下列二元一次方程组。必须写出全部解答过程。

$3x+5y=23$

$6x-4y=11$

✓ **答案**　$x=3.5$，$y=2.5$。

解析　将第一个方程两边同乘 2，得

$$6x+10y=46$$

减去第二个方程，得

$$(6x+10y)-(6x-4y)=46-11$$

$$14y=35$$

$$y=\frac{35}{14}=2.5$$

将 $y=2.5$ 代入第一个方程，得

$$3x+5\times 2.5=23$$

$$3x=23-12.5=10.5$$

$$x=\frac{10.5}{3}=3.5$$

答：$x=3.5$，$y=2.5$。

2. [2023 · May/June 0580/11 Q25(c)]
提示：先找到题干所指的两式，再比较同一未知数的系数。

5 At a cinema, an adult ticket costs $\$a$ and a child ticket costs $\$c$.

(a) Farah buys 3 adult tickets and 4 child tickets for $38.50.

Complete the equation.

(b) Hana buys 6 adult tickets and 5 child tickets for $65.00.

Write down another equation in terms of a and c.

(c) Solve the two simultaneous equations to find the value of a and the value of c.
You must show all your working.

一家电影院的成人票每张 a 美元，儿童票每张 c 美元。（a）3 张成人票和 4 张儿童票共 38.50 美元。补全方程。（b）6 张成人票和 5 张儿童票共 65 美元。写出一个方程。（c）解这两个方程，求 a 和 c 的值，写出全部过程。

✓ **答案** $a=7.5$，$c=4$。

解析 由购票条件列出 $3a+4c=38.5$

$6a+5c=65$

第一式乘以 2，减去第二式：$6a+8c=77$

$3c=12\Longrightarrow c=4$

代回第一式：$3a+16=38.5\Longrightarrow 3a=22.5\Longrightarrow a=7.5$

答：$a=7.5$，$c=4$。

3. [2023 · May/June 0580/32 Q8(f)]
提示：按两组人数与总价列式，再比成人票价的系数。

(f) Entry to a castle costs $\$x$ for an adult and $\$y$ for a child.

Entry for 2 adults and 3 children costs $15.00 .
Entry for 3 adults and 5 children costs $23.50 .

Write down a pair of simultaneous equations to show this information and solve them to find the value of x and the value of y.
You must show all your working.

（f）一座城堡的成人入场费为每人 x 美元，儿童入场费为每人 y 美元。

2 名成人和 3 名儿童的入场费共计 15.00 美元。
3 名成人和 5 名儿童的入场费共计 23.50 美元。
根据这些信息列出两个二元一次方程，并解方程组，求 x 和 y 的值。必须写出全部解答过程。

✓ **答案** $2x+3y=15$，$3x+5y=23.50$；$x=4.5$，$y=2$。

解析 由两组人数与总价，得

$$2x+3y=15$$

$$3x+5y=23.50$$

将第一个方程两边同乘 3，得

$$6x+9y=45$$

将第二个方程两边同乘 2，得

$$6x+10y=47$$

用后一式减去前一式，得

$$y=47-45=2$$

将 $y=2$ 代入第一个方程，得

$$2x+3\times 2=15$$

$$2x=15-6=9$$

$$x=\frac{9}{2}=4.5$$

答：所列方程为 $2x+3y=15$ 和 $3x+5y=23.50$；$x=4.5$，$y=2$，成人和儿童的入场费分别为每人 4.50 美元和 2.00 美元。

4. [2024 · May/June 0580/11 Q22]
← 提示：将第一个方程两边同乘 2，使两式中 y 的系数互为相反数。

Solve the simultaneous equations.
You must show all your working.

$$6x+2y=29$$
$$3x-4y=17$$

解下列二元一次方程组。必须写出全部解答过程。

$$6x+2y=29$$

$$3x-4y=17$$

✓ **答案** $x=5$，$y=-0.5$。

解析 将第一个方程两边同乘 2，得

$$12x+4y=58$$

与第二个方程相加，得

$$15x=75$$

$$x=5$$

将 $x=5$ 代入第一个方程，得

$$6 \times 5 + 2y = 29$$

$$2y = -1$$

$$y = -0.5$$

答：$x = 5$，$y = -0.5$。

5. [2023 · October/November 0580/32 Q6(d)]
提示：逐组对应购买数量与总价，再比茶价的系数。

(d) Victoria buys 5 cups of tea and 4 cakes for $15.69 .
Isabella buys 3 cups of tea and 7 cakes for $17.97 .

Write down a pair of simultaneous equations and solve them to find the cost of one cup of tea and the cost of one cake.
You must show all your working.

(d) 维多利亚买了 5 杯茶和 4 块蛋糕，共花费 15.69 美元。
伊莎贝拉买了 3 杯茶和 7 块蛋糕，共花费 17.97 美元。
列出两个二元一次方程，并解方程组，求一杯茶和一块蛋糕各多少钱。必须写出全部解答过程。

✓ **答案** $5t + 4c = 15.69$，$3t + 7c = 17.97$，其中 t、c 分别为一杯茶和一块蛋糕的价格，单位为美元；一杯茶 1.65 美元，一块蛋糕 1.86 美元。

解析 设一杯茶的价格为 t 美元，一块蛋糕的价格为 c 美元。由两组购买数量与总价，得

$$5t + 4c = 15.69$$

$$3t + 7c = 17.97$$

将第一个方程两边同乘 3，得

$$15t + 12c = 47.07$$

将第二个方程两边同乘 5，得

$$15t + 35c = 89.85$$

用后一式减去前一式，得

$$23c = 89.85 - 47.07 = 42.78$$

$$c = \frac{42.78}{23} = 1.86$$

将 $c = 1.86$ 代入第一个方程，得

$$5t + 4 \times 1.86 = 15.69$$

$$5t = 15.69 - 7.44 = 8.25$$

$$t = \frac{8.25}{5} = 1.65$$

答：所列方程为 $5t + 4c = 15.69$ 和 $3t + 7c = 17.97$；一杯茶的价格为 1.65 美元，一块蛋糕的价格为 1.86 美元。

2.17 把一次关系代入二次关系，解联立方程

题型 1　把一次关系代入二次关系，解联立方程（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **代入消去一元：**本例的两个等式须由同一组 x、y 满足。由一次式表示 y，代入二次式，消去 _____。

$$6x+y=10$$

$$y=10-6x$$

$$10-6x=x^2-3x+10$$

$$x^2+3x=0$$

② **因式分解求根：**本例的二次式各项都含 x，提取公因式。两个因式的乘积为零，至少一个因式为 _____。

$$x^2+3x=x(x+3)=0$$

$x=0$ ｜ $x+3=0$，$x=-3$

③ **正负平方根：**代入后两边含相同的一次项，消去后可得到平方。平方等于正数时，根有 _____ 两个。下面演示消项与求根。

$$x+1=x^2+x-8$$

$$x^2=9$$

$x=\sqrt{9}=3$ ｜ $x=-\sqrt{9}=-3$

④ **公式求根方法：**二次式也可用求根公式求根。下式中，a、b、c 依次为二次项系数、一次项系数、常数项。实数范围内，须满足下列条件。

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a\neq 0,\quad b^2-4ac\geq 0$$

$$x=\frac{-b+-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

例如：

$$x^2+x-1=0$$

$$a=1,\quad b=1,\quad c=-1$$

$$x=\frac{-1+-\sqrt{1^2-4\times 1\times(-1)}}{2\times 1}=\frac{-1+-\sqrt{5}}{2}$$

⑤ **逐根回代配对：**求交点坐标时，把每个根分别代回一次式。坐标 (x,y) 中，前一个数为横坐标，后一个数为纵坐标。本例回代如下。

$x=0$
$y=10-6\times 0=10$
$(x,y)=(0,10)$

$x=-3$
$y=10-6\times(-3)=28$
$(x,y)=(-3,28)$

⑥ **近似坐标取值：**用求根公式所得的根回代时，保留根式或完整中间数值。完成回代后，再将两个坐标取到指定的 _____。续用上面的公式求根演示，令 $y=2-x$，保留两位小数。

$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$y=2-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$
$(x,y)\approx(0.62,1.38)$

$x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
$y=2-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$
$(x,y)\approx(-1.62,3.62)$

填空：①y　②零　③正、负　④小数位数

点石成金　题目出现一个一次关系和一个二次关系，要求解或交点坐标时，先由一次关系表示一个未知数，再代入二次关系。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q19]

Find the values of x when $6x+y=10$ and $y=x^2-3x+10$.

当 $6x+y=10$ 且 $y=x^2-3x+10$ 时，求 x 的值。

解答　由一次方程得

$$y=10-6x$$

代入二次方程，得

$$10-6x=x^2-3x+10$$

$$x^2+3x=0$$

$$x(x+3)=0$$

∵ 两个因式的乘积为零，∴

$$x=0$$

或

$$x+3=0$$

$$x=-3$$

答：$x=0$ 或 $x=-3$。

方法：先看一次式，表示出纵坐标，再代入二次式消去纵坐标。

辨析：乘积为零是至少一个因式为零，和为零是两项互为相反数。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/23 Q22]

提示：先核对曲线方程是否完整，再找可代入的一次关系。

Find the coordinates of the point where the line $4x+y=9$ intersects the curve $y+x^2=5$.
You must show all your working.

求直线$4x+y=9$与曲线$y+x^2=5$的交点坐标。必须写出全部计算过程。

✓ **答案**

$$(2,1)$$

解析　由直线方程得$y=9-4x$，代入曲线方程：$9-4x+x^2=5$
$x^2-4x+4=0$
$(x-2)^2=0\Longrightarrow x=2$
代回直线方程：$y=9-4\times2=1$
答：交点为$(2,1)$。

2. [2023 · October/November 0580/22 Q21]

提示：比较代入后两边的一次项，消项后求根并逐个回代。

The line $y = x + 1$ intersects the curve $y = x^2 + x - 3$ at two points.

Find the coordinates of the two points.

直线 $y = x + 1$ 与曲线 $y = x^2 + x - 3$ 相交于两点。求这两个点的坐标。

✓ **答案** $(2, 3)$ 和 $(-2, -1)$

解析 将一次关系代入二次关系，得

$$x + 1 = x^2 + x - 3$$

消去两边的 x，整理得

$$x^2 = 4$$

$$x = +-\sqrt{4}$$

$$x = +-2$$

当 $x = 2$ 时，

$$y = 2 + 1 = 3$$

当 $x = -2$ 时，

$$y = -2 + 1 = -1$$

答：两个交点的坐标为 $(2, 3)$ 和 $(-2, -1)$。

3. [2023 · May/June 0580/43 Q8(b)]

提示：看括号外的系数，展开时逐项相乘，再整理分解。

(b) Solve the simultaneous equations.
You must show all your working.

$$x^2 + 4y = 37$$
$$5x + y = -8$$

(b) 解下列联立方程。必须写出全部计算过程。

$$x^2 + 4y = 37$$

$$5x + y = -8$$

✓ **答案** $(x, y) = (-3, 7)$ 或 $(x, y) = (23, -123)$

解析 由一次方程得

$$y = -8 - 5x$$

代入另一方程，得

$$x^2 + 4(-8 - 5x) = 37$$

$$x^2 - 32 - 20x = 37$$

$$x^2 - 20x - 69 = 0$$

$$(x - 23)(x + 3) = 0$$

∴

$$x = 23$$

或

$$x = -3$$

当 $x = 23$ 时，

$$y = -8 - 5 \times 23 = -123$$

当 $x = -3$ 时，

$$y = -8 - 5 \times (-3) = 7$$

答：$(x, y) = (-3, 7)$ 或 $(x, y) = (23, -123)$。

4. [2023 · May/June 0580/42 Q9(c)]

提示：看整理后的三个系数，用公式求根，保留根式回代。

(c) Solve the simultaneous equations.
You must show all your working and give your answers correct to 2 decimal places.

$$2x + y = 7$$
$$y = 5x^2 + 2x - 13$$

（c）解下列联立方程。必须写出全部计算过程，答案保留两位小数。

$$2x + y = 7$$

$$y = 5x^2 + 2x - 13$$

✓ **答案** $(x, y) = (1.64, 3.72)$ 或 $(x, y) = (-2.44, 11.88)$

解析 由一次方程得

$$y = 7 - 2x$$

代入二次方程，得

$$7 - 2x = 5x^2 + 2x - 13$$

$$5x^2 + 4x - 20 = 0$$

由求根公式得

$$x = \frac{-4 + -\sqrt{4^2 - 4 \times 5 \times (-20)}}{2 \times 5}$$

$$x = \frac{-4 + -\sqrt{416}}{10}$$

$$x = \frac{-2 + -2\sqrt{26}}{5}$$

当取正号时，

$$x = \frac{-2 + 2\sqrt{26}}{5} \approx 1.64$$

保留根式回代，得

$$y = 7 - 2 \times \frac{-2 + 2\sqrt{26}}{5}$$

$$y = \frac{39 - 4\sqrt{26}}{5} \approx 3.72$$

当取负号时，

$$x = \frac{-2 - 2\sqrt{26}}{5} \approx -2.44$$

保留根式回代，得

$$y = 7 - 2 \times \frac{-2 - 2\sqrt{26}}{5}$$

$$y = \frac{39 + 4\sqrt{26}}{5} \approx 11.88$$

答：$(x, y) = (1.64, 3.72)$ 或 $(x, y) = (-2.44, 11.88)$，均保留两位小数。

5. [2024 · February/March 0580/42 Q5(e)]
提示：先由一次方程用 x 表示 y，再代入二次方程。

(e) Solve the simultaneous equations.
You must show all your working.

$$x - 3y = 13$$
$$2x^2 - 9y = 116$$

(e) 解下列联立方程。必须写出全部解答过程。

$$x - 3y = 13$$

$$2x^2 - 9y = 116$$

✓ **答案** $(x, y) = (7, -2)$ 或 $(x, y) = \left(-\frac{11}{2}, -\frac{37}{6}\right)$。

解析 由第一个方程得

$$3y = x - 13$$

$$y = \frac{x - 13}{3}$$

代入第二个方程，得

$$2x^2 - 9 \times \frac{x - 13}{3} = 116$$

$$2x^2 - 3(x - 13) = 116$$

$$2x^2 - 3x + 39 = 116$$

$$2x^2 - 3x - 77 = 0$$

由求根公式得

$$x=\frac{3+-\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-77)}}{2\times2}=\frac{3+-25}{4}$$

$$x=7 \quad 或 \quad x=-\frac{11}{2}$$

当 $x=7$ 时，

$$y=\frac{7-13}{3}=-2$$

当 $x=-\frac{11}{2}$ 时，

$$y=\frac{-\frac{11}{2}-13}{3}=\frac{-\frac{37}{2}}{3}=-\frac{37}{6}$$

答：$x=7$，$y=-2$；或 $x=-\frac{11}{2}$，$y=-\frac{37}{6}$。

2.18 先写分母限制，再清分母解方程

题型 1 先写分母限制，再清分母解方程（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **分母取值限制：**本例的分母是 x，分母不能为 _____。先写未知数的取值限制。

$$x\neq0$$

② **同乘含元分母：**等式两边同乘 x，约去分母后求解。

$$\frac{30}{x}=6$$

$$30=6x$$

$$x=\frac{30}{6}=\text{_____}$$

③ **取正负平方根：**清分母后若含平方，先求平方的值。

$$\frac{1}{x}=9x \quad (x\neq0)$$

$$1=9x^2$$

$$x^2=\frac{1}{9}$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$　　$\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

平方等于正数时，要取 _____ 个平方根。

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}$$

④ **公倍式去分母：**出现两个不同的分母，两边同乘它们的公倍式。以下两边同乘 $(x+1)(x-1)$。

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{2}{x-1}=1 \quad (x\neq -1, x\neq 1)$$

$$(x-1)^2-2(x+1)=(x+1)(x-1)$$

⑤ **展开合并同类：**乘积按分配律展开，再消去两边相同的项。

$$(x-1)^2=(x-1)(x-1)=x^2-x-x+1=x^2-2x+1$$

$$(x+1)(x-1)=x^2-x+x-1=x^2-1$$

代入上式，得

$$x^2-2x+1-2x-2=x^2-1$$

$$-4x=0$$

$$x=0$$

⑥ **代入原式验根：**所得数须使原式分母不为零，且左右两边相等。上式代入 $x=0$，得

$$\frac{0-1}{0+1}-\frac{2}{0-1}=-1+2=1$$

所以 $x=0$ 是原方程的解。

⑦ **函数式相等：**$f(x)$和$g(x)$分别表示把x放进两个给定表达式得到的值。例如$f(x)=2x+1$、$g(x)=7$时，$f(x)=g(x)$表示$2x+1=7$，两边减1再除以2，得到$x=3$。两个函数表达式相等后，沿用已学的方程解法。

填空：①0　②5　③2

点石成金　题目出现分母含未知数的方程时，先写分母不为零的限制，再清分母求解并验根。

例 1　[2023 · May/June 0580/22 Q8(a)]

Solve.

(a) $\dfrac{30}{x}=6$

求解。

(a) $\frac{30}{x}=6$。

解答　由分母不为零，得

$x\neq 0$。

两边同乘 x，得

$30=6x$，

$x=\frac{30}{6}=5$。

代入原方程，左边为

$\frac{30}{5}=6$，

与右边相等，且分母不为零。

答：$x=5$。

方法：先圈出分母中的含元因式，列出禁值后再同乘。

辨析：禁值是使分母为零的数，解是使原等式成立的允许值。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/43 Q7(b)(ii)]

提示：清分母后看未知数的次数，比较正负数平方的结果。

On the diagram, sketch the graph of $y=\dfrac{1}{2x}$, $x\neq 0$.

(ii) Solve the equation $\dfrac{1}{2x}=2x$.

在图中，画出函数 $y=\frac{1}{2x}$ 的图象草图，其中 $x\neq 0$。

(ii) 解方程 $\frac{1}{2x}=2x$。

✓ **答案**

$$x=\pm\frac{1}{2}$$

解析 由分母不为零，得

$x\neq 0$。

两边同乘 $2x$，得

$1=4x^2$，

$x^2=\frac{1}{4}$，

$x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$。

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，

$\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}=1$，

$2\times\frac{1}{2}=1$。

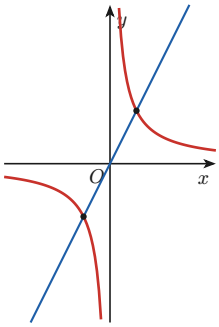
当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，

$\frac{1}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=-1$，

$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$。

两根均使原方程左右两边相等，且分母不为零。

答：$x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-\frac{1}{2}$。



2. [2023 · May/June 0580/41 Q7(b)]

提示：对照两个分母选公倍式，展开后比较两边的平方项。

(b) Solve $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{6}{x-1}=1$.

(b) 解方程 $\frac{x-1}{x+1}-\frac{6}{x-1}=1$。

✓ **答案**

$$x=-\frac{1}{2}$$

解析 由分母不为零，得

$x\neq -1$，　$x\neq 1$。

两边同乘 $(x+1)(x-1)$，得

$(x-1)^2-6(x+1)=(x+1)(x-1)$。

展开，得

$x^2-2x+1-6x-6=x^2-1$，

$-8x-5=-1$，

$-8x=4$，

$x=-\frac{1}{2}$。

代入原方程，左边为

$\frac{(-\frac{1}{2})-1}{(-\frac{1}{2})+1}-\frac{6}{(-\frac{1}{2})-1}=-3+4=1$，

与右边相等，且两个分母均不为零。

答：$x=-\frac{1}{2}$。

3. [2025 · May/June 0580/21 Q18(c)]

提示：先分别用路程除以速率表示两段时间，再写出时间差。

One day, Anya runs 12 km at a speed of x km/h.
The next day she walks 10 km at a speed of $(x-4)$ km/h.

(a) Write down an expression, in terms of x, for the time she spends running.

(b) Write down an expression, in terms of x, for the time she spends walking.

(c) The time Anya spends walking is 1 hour more than the time she spends running.

Write an equation in terms of x and show that it simplifies to $x^2-2x-48=0$.

一天，安雅以 x km/h 的速率跑了 12 km。第二天，她以 $(x-4)$ km/h 的速率步行了 10 km。
(a) 用含 x 的式子表示她跑步所用的时间。
(b) 用含 x 的式子表示她步行所用的时间。
(c) 安雅步行所用的时间比跑步所用的时间多 1 小时。
列出一个关于 x 的方程，并证明它可化简为
$x^2-2x-48=0$。

✓ **答案** $\frac{10}{x-4}-\frac{12}{x}=1$，化简得 $x^2-2x-48=0$。

解析 由两次运动的速率均为正数，得 $x>4$。

时间等于路程除以速率，跑步和步行所用时间分别为 $\frac{12}{x}$ 小时、$\frac{10}{x-4}$ 小时。

由步行时间比跑步时间多 1 小时，得

$$\frac{10}{x-4}-\frac{12}{x}=1$$

两边同乘 $x(x-4)$，得

$$10x-12(x-4)=x(x-4)$$

展开，得

$$10x-12x+48=x^2-4x$$

$$-2x+48=x^2-4x$$

移项，得

$$x^2-2x-48=0$$

答：所列方程为 $\frac{10}{x-4}-\frac{12}{x}=1$，化简后为 $x^2-2x-48=0$。

4. [2025 · October/November 0580/21 Q22]
提示：先写出两个分母不能为零的条件，再同乘它们的乘积。

Solve.

$$\frac{2}{x-1}=\frac{x}{x+2}$$

解方程。

$\frac{2}{x-1}=\frac{x}{x+2}$

✓ **答案** $x=-1$ 或 $x=4$

解析 由分母不为零，得

$x\neq 1$，$x\neq -2$。

两边同乘 $(x-1)(x+2)$，得

$2(x+2)=x(x-1)$，

$2x+4=x^2-x$，

$x^2-3x-4=0$。

用已学的求根公式，得

$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1}=\frac{3\pm5}{2}$。

$x=4$或$x=-1$。

当 $x=4$ 时，原方程两边分别为

$\frac{2}{4-1}=\frac{2}{3}$，

$\frac{4}{4+2}=\frac{2}{3}$。

当 $x=-1$ 时，原方程两边分别为

$\frac{2}{-1-1}=-1$，

$\frac{-1}{-1+2}=-1$。

两值均使分母不为零，且左右两边相等。

答：$x=-1$ 或 $x=4$。

5. [2025 · October/November 0580/22 Q20(b)]
提示：先把两个函数的表达式代入等式，再写出分母限制。

$$\mathrm{f}(x)=\frac{21}{2x-1},\ x\neq\frac{1}{2}\qquad \mathrm{g}(x)=3x+4$$

(b) Solve $\mathrm{f}(x)=\mathrm{g}(x$

已知

$f(x)=\frac{21}{2x-1}$，$x\neq\frac{1}{2}$，

$g(x)=3x+4$。

(b) 解方程 $f(x)=g(x)$。

✓ **答案** $x=\frac{5}{3}$ 或 $x=-\frac{5}{2}$

解析 将两个函数的表达式代入，得

$\frac{21}{2x-1}=3x+4$，$x\neq\frac{1}{2}$。

两边同乘 $2x-1$，得

$21=(3x+4)(2x-1)$，

$21=6x^2+5x-4$，

$6x^2+5x-25=0$。

用已学的求根公式，得

$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times6\times(-25)}}{2\times6}=\frac{-5\pm25}{12}$。

$x=\frac{5}{3}$或$x=-\frac{5}{2}$。

分别代入，得

$f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{21}{2\times\frac{5}{3}-1}=9$，

$g\left(\frac{5}{3}\right)=3\times\frac{5}{3}+4=9$；

$f(-\frac{5}{2})=\frac{21}{2\times(-\frac{5}{2})-1}=-\frac{7}{2}$，
$g(-\frac{5}{2})=3\times(-\frac{5}{2})+4=-\frac{7}{2}$。
两值均不为 $\frac{1}{2}$，且使两个函数值相等。
答：$x=\frac{5}{3}$ 或 $x=-\frac{5}{2}$。

2.19 按相邻项的固定差续写数列

题型 1 按相邻项的固定差续写数列（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **相邻项作差：**数列 $23,17,11,5$ 中的每个数称为一项。用后一项减前一项，求相邻项的差。

$$17-23=11-17=5-11=-6$$

这三个差均为 _____。

② **固定差续项：**上述三个差相同，按每次减 6 续写。在前一项上加固定差，得到后一项。

$$5+(-6)=5-6=-1$$

$$-1+(-6)=-1-6=-7$$

连续求两项时，后一项接着前一次的结果计算。

③ **含负数作差：**本例续写得到 $-1,-7$，仍用后一项减前一项。减去负数，等于加上它的相反数。

$$-7-(-1)=-7+1=-6$$

④ **增减规则表述：**棒数 $5,9,13$ 的相邻差均为 4。用每次增加或减少的数说明逐项规则。

$$9-5=13-9=4$$

差为 4每次加 _____　　差为 -6每次减 _____

⑤ **图表连续填数：**表中图形编号 $1,2,3$ 对应棒数 $5,9,13$。沿棒数一行按固定差续填。连续两个空格，要在前一次结果上再加 _____。

填空：①-6　②4　③6　④4

点石成金　题目出现数列或图形数量表，要求续项、填表或说明逐项规则时，先用后一项减前一项，求相邻项的差。

例 1 [2023 · February/March 0580/22 Q4(a)]

23,　17,　11,　5,　....

(a) Write down the next number in this sequence.

23, 17, 11, 5, ...

(a) 写出这个数列的下一个数。

解答 相邻项的差为

$$17-23=11-17=5-11=-6$$

故每次减 6，下一项为

$$5-6=-1$$

答：下一项是 -1。

方法：看数列中相邻的两项，先算后一项减前一项。

辨析：项是数列中的数，差是相邻两项按顺序相减的结果。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/32 Q9(a)(ii)]

提示：比较各组相邻项的差，用增减方向和变化量表述规则。

(a) These are the first four terms of a sequence.

$$2 \qquad 8 \qquad 14 \qquad 20$$

(ii) Write down the term to term rule for continuing the sequence.

(a) 这是一个数列的前四项。

$2, 8, 14, 20$

(ii) 写出继续这个数列的逐项规则。

✓ **答案** 每次加 6。

解析 相邻项的差为

$$8-2=14-8=20-14=6$$

答：逐项规则是每次加 6。

2. [2023 · May/June 0580/32 Q9(a)(i)]

提示：先比较相邻项的差，再从末项按同样的变化续写。

(a) These are the first four terms of a sequence.

$$2 \qquad 8 \qquad 14 \qquad 20$$

(i) Write down the next term.

(a) 这是一个数列的前四项。

$2, 8, 14, 20$

(i) 写出下一项。

✓ **答案**

$$26$$

解析 相邻项的差为

$$8-2=14-8=20-14=6$$

故每次加 6，下一项为

$$20+6=26$$

答：下一项是 26。

3. [2023 · October/November 0580/12 Q3(a)]

提示：首组作差涉及减负数，算后与其余相邻项的差比较。

These are the first four terms in a sequence.

$$-3 \qquad 4 \qquad 11 \qquad 18$$

(a) Find the next term.

这是一个数列的前四项。

$-3, 4, 11, 18$

(a) 求下一项。

✓ **答案**

$$25$$

解析 相邻项的差为

$$4-(-3)=4+3=7$$

$$11-4=18-11=7$$

故每次加 7，下一项为

$$18+7=25$$

答：下一项是 25。

4. [2023 · October/November 0580/12 Q3(b)]

提示：对照相邻项的变化，说明末项如何按同一规则续写。

These are the first four terms in a sequence.

$$-3 \qquad 4 \qquad 11 \qquad 18$$

(a) Find the next term.

(b) Explain how you worked out your answer.

数列的前四项为−3，4，11，18。（a）写出下一项。（b）解释如何得出答案。

✓ **答案** 相邻两项每次增加 7，所以在 18 上加 7。

解析 由

$$4-(-3)=4+3=7$$

$$11-4=18-11=7$$

得相邻两项每次增加 7，所以

$$18+7=25$$

答：每次加 7，因此在 18 上加 7 得到下一项。

5. [2023 · May/June 0580/33 Q5(b)]

提示：沿棒数一行比较相邻差，第二空接着第一空续算。

The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using sticks.

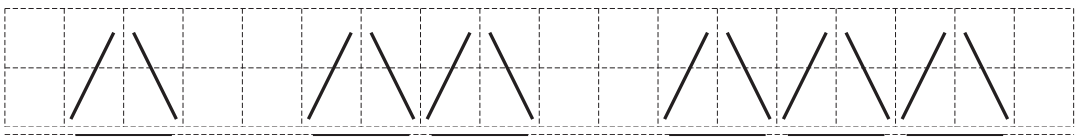


Diagram 1　　Diagram 2　　Diagram 3

(b) Complete the table.

Diagram number	1	2	3	4	5
Number of sticks	5	9	13		

方格图展示了一个图形序列的前三个图形。
每个图形都由棒搭成。

图形 1　图形 2　图形 3

(b) 补全表格。

图形编号	1	2	3	4	5
棒数	5	9	13		

✓ **答案**

$17, 21$

解析 相邻图形的棒数之差为

$$9 - 5 = 13 - 9 = 4$$

故每个图形比前一个多 4 根棒。图形 4 的棒数为

$$13 + 4 = 17$$

图形 5 的棒数为

$$17 + 4 = 21$$

答：两个空格依次填 $17, 21$。

6. [2024 · May/June 0580/13 Q10(a)(i)]

提示：先用后一项减前一项，求相邻项的差。

(a) These are the first four terms of a sequence.

$$3 \qquad 10 \qquad 17 \qquad 24$$

(i) Write down the next term.

(a) 一个数列的前四项如下。

$3, 10, 17, 24$

(i) 写出下一项。

✓ **答案**

31

解析 相邻项的差为

$10 - 3 = 17 - 10 = 24 - 17 = 7$。

每次加 7，下一项为

$24 + 7 = 31$。

答：下一项是 31。

7. [2024 · October/November 0580/32 Q3(b)(i)]
提示：先求固定差，求出一项后，再接着求后一项。

(b) These are the first four terms of a sequence.

32　　25　　18　　11

(i) Find the next two terms.

(b) 一个数列的前四项如下。

32, 25, 18, 11

(i) 求接下来的两项。

✓ **答案**

$4, -3$

解析 相邻项的差为

$25-32=18-25=11-18=-7$。

每次减 7，接下来的两项为

$11-7=4$，

$4-7=-3$。

答：接下来的两项依次是 4 和 -3。

2.20 由首项和公差写等差数列通项

题型 1 由首项和公差写等差数列通项（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **计算相邻项差：**数列 $23, 17, 11, 5, \ldots$ 中，用后一项减前一项。各差相等时，称为等差数列，共同的差叫公差，记为 d。

$$d=17-23=11-17=5-11=_____$$

② **确定公差次数：**用 n 表示项的位置，n 是从 1 开始的正整数。从首项到第 2 项加一次公差，到第 3 项加两次。

$$17=23+(-6)$$

$$11=23+2\times(-6)$$

到第 n 项共加_____次公差。

③ **写出通项公式：**本例的首项为 23，公差为 -6。用 a 表示首项，a_n 表示第 n 项。首项加上公差的相应倍数，得到通项公式。

$$a_n=a+(n-1)d$$

$$a_n=23+(n-1)\times(-6)$$

④ **展开括号整理：**括号外的数要乘括号内的每一项。

公差为正，如 $d=3$：

$3(n-1)=3n-3$

公差为负，如 $d=-6$：

$(-6)(n-1)=-6n+6$

本例整理为

$$a_n=23-6n+6=29-6n$$

⑤ **图形转成数列：**相邻两点间的一段计为一条线，共用边计一次。一排相邻正方形，首个有 4 条边，每添一个增加 3 条。边数依次为

$$4, 7, 10, \ldots$$

$$d = 7 - 4 = 10 - 7 = 3$$

$$a_n = 4 + 3(n-1) = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$$

⟵ 填空：①-6　②$n-1$

点石成金　题目出现相邻两项差相等的数列或规律图形，并求第 n 项时，先确定首项和公差。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q4(b)]

23,　17,　11,　5,　....

(b) Find the *n*th term of this sequence.

23, 17, 11, 5, ...

(b) 求这个数列的第 n 项。

解答　由相邻两项的差得

$$d = 17 - 23 = 11 - 17 = 5 - 11 = -6$$

首项为 23，故第 n 项为

$$a_n = 23 + (n-1) \times (-6)$$

$$a_n = 23 - 6n + 6 = 29 - 6n$$

答：第 n 项为 $29 - 6n$。

方法：先找数列开头的一项，再比较相邻项的差，按间隔数累加。

辨析：项号是从一开始的位置编号，公差次数是从首项起的间隔数。

拓展：通项中的位置取一时，应还原首项，可据此检验整理结果。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/11 Q17(b)]

⟵ 提示：比较相邻项的增量，再数首项到目标项的间隔。

(b) These are the first four terms of another sequence.

7　　10　　13　　16

Find an expression for the *n*th term of this sequence.

(b) 下面是另一个数列的前四项。

7, 10, 13, 16

求这个数列第 n 项的表达式。

✓ **答案**

$$3n + 4$$

解析　由相邻两项的差得

$$d = 10 - 7 = 13 - 10 = 16 - 13 = 3$$

首项为 7，故第 n 项为

$$a_n = 7 + 3(n-1)$$

$$a_n = 7 + 3n - 3 = 3n + 4$$

答：第 n 项为 $3n + 4$。

2. [2023 · May/June 0580/32 Q9(a)(iii)]
提示：对照首项与每步增量，展开后再核对常数项。

(a) These are the first four terms of a sequence.

2　　8　　14　　20

(iii) Find an expression for the nth term.

9 (a) 下面是一个数列的前四项。

$2, 8, 14, 20$

(iii) 求第 n 项的表达式。

✓ **答案**

$$6n - 4$$

解析 由相邻两项的差得

$$d = 8 - 2 = 14 - 8 = 20 - 14 = 6$$

首项为 2，故第 n 项为

$$a_n = 2 + 6(n - 1)$$

$$a_n = 2 + 6n - 6 = 6n - 4$$

答：第 n 项为 $6n - 4$。

3. [2023 · May/June 0580/33 Q5(c)(i)]
提示：先数首图木棒，再比较后两图各添了多少根。

The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using sticks.

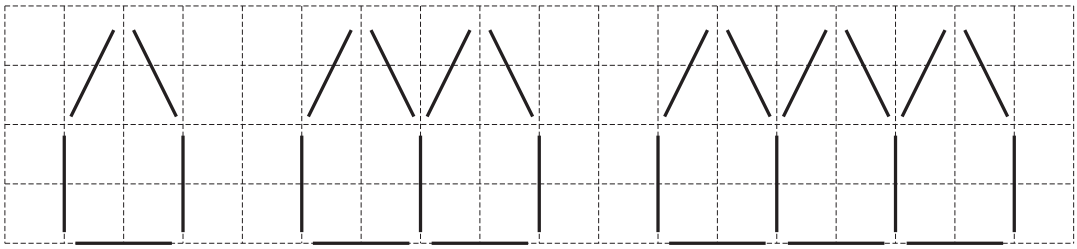


Diagram 1　　Diagram 2　　Diagram 3

(c) **(i)** Find an expression, in terms of n, for the number of sticks in Diagram n.

方格图给出了一个图形序列的前三个图。每个图均由木棒搭成。

图 1　图 2　图 3

(c) (i) 用含 n 的式子表示图 n 中木棒的根数。

✓ **答案**

$$4n + 1$$

解析 前三个图的木棒数依次为 $5, 9, 13$。

$$d = 9 - 5 = 13 - 9 = 4$$

首项为 5，故图 n 中的木棒数为

$$a_n = 5 + 4(n - 1)$$

$$a_n = 5 + 4n - 4 = 4n + 1$$

答：图 n 中有 $4n + 1$ 根木棒。

4. [2023 · October/November 0580/22 Q19(a)]
提示：看数列递减的方向，展开负公差时逐项核对符号。

Find the nth term of each sequence.

(a) 11, 8, 5, 2, −1, …

求下列每个数列的第 n 项。
(a) $11, 8, 5, 2, -1, \ldots$

✓ **答案**

$$14 - 3n$$

解析 由相邻两项的差得

$$d = 8 - 11 = 5 - 8 = 2 - 5 = -1 - 2 = -3$$

首项为 11，故第 n 项为

$$a_n = 11 + (n - 1) \times (-3)$$

$$a_n = 11 - 3n + 3 = 14 - 3n$$

答：第 n 项为 $14 - 3n$。

5. [2023 · October/November 0580/33 Q7(d)(i)]
提示：首图分横竖计数，再比较添一列时两类线的增量。

These are the first four diagrams in a sequence.
The diagrams are made using dots and lines.

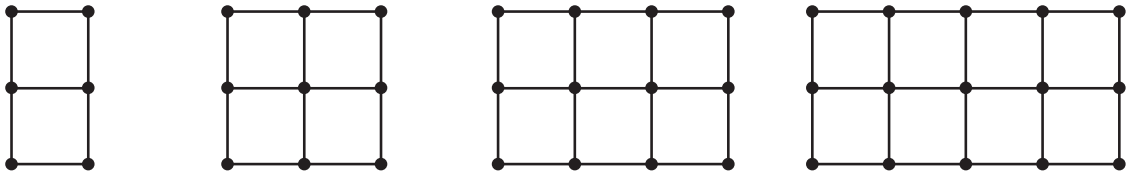


Diagram 1　Diagram 2　Diagram 3　Diagram 4

(d) (i) Find an expression, in terms of n, for the number of lines in Diagram n.

下面是一个图形序列的前四个图。各图由点和线组成。
图 1　图 2　图 3　图 4
(d) (i) 用含 n 的式子表示图 n 中线的条数。

✓ **答案**

$$5n + 2$$

解析　图 1 有 3 条横线和 4 条竖线，故首项为

$$a = 3 + 4 = 7$$

每增加一列，添 3 条横线和 2 条竖线，故公差为

$$d = 3 + 2 = 5$$

图 n 中的线数为

$$a_n = 7 + 5(n - 1)$$

$$a_n = 7 + 5n - 5 = 5n + 2$$

答：图 n 中有 $5n + 2$ 条线。

2.21　由首项和公比写等比数列通项

题型 1　由首项和公比写等比数列通项（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **相邻两项求比：**数列中后一项除以前一项，所得比值相同。这类数列称为等比数列。

$$\frac{12}{24} = \frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

这个固定比值称为公比，记为 q，本例为_____。

② **重复相乘写幂：**从 24 得到 6，要连续乘两次公比。相同因数连乘可写成_____。

$$6 = 24 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 24\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

③ **项号对应指数：**用 n 表示项的序号，从 1 开始。第 n 项由首项乘_____次公比得到。首项对应指数 0，非零数的零次幂为 1。

$$24\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 24 \times 1 = 24$$

④ **首项公比通项：**第 n 项记为 a_n，本例首项为 24。把首项乘公比的相应次幂，得

$$a_n = 24\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

一般地，首项记为 a，通项公式为

$$a_n = aq^{n-1}$$

其中

$$q \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

⑤ **首项为一化简：**首项为 1 时，乘式中的因数 1 可以省去。例如首项为 1、公比为 3 时，

$$a_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

填空：①$\frac{1}{2}$　②乘方　③$n-1$

点石成金　题目出现一列数并要求第 n 项时，先算相邻两项的比值，判断公比是否固定。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q20(b)]

Find the nth term of each sequence.

(b)　24,　12,　6,　3,　1.5,　…

求下列每个数列的第 n 项。

(b) $24, 12, 6, 3, 1.5, \ldots$

解答　由相邻两项的比值得

$$q = \frac{12}{24} = \frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

首项为 24，故

$$a_n = 24\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

方法：先看相邻两项，用后一项除以前一项，再核对其他相邻项的比。

辨析：项号是项的位置，指数是从首项起乘公比的次数。

答：第 n 项为 $24\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/22 Q19(b)]

提示：看首项能否省写，再核对项号与乘公比次数的关系。

Find the nth term of each sequence.

(b)　1,　5,　25,　125,　625,　…

求下列每个数列的第 n 项。

(b) $1, 5, 25, 125, 625, \ldots$

✓ **答案**

$$5^{n-1}$$

解析　由相邻两项的比值得

$$q = \frac{5}{1} = \frac{25}{5} = \frac{125}{25} = \frac{625}{125} = 5$$

首项为 1，故

$$a_n = 1 \times 5^{n-1} = 5^{n-1}$$

答：第 n 项为 5^{n-1}。

2. [2023 · May/June 0580/42 Q6(b)(ii)]

提示：比较各组相邻项的比，再核对通项代入第一项时的值。

(b) Find the nth term of each sequence.

(ii)　100,　50,　25,　12.5,　6.25,　…

(b) 求下列每个数列的第 n 项。

(ii) $100, 50, 25, 12.5, 6.25, \ldots$

✓ **答案**

$$100\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

解析 由相邻两项的比值得

$$q=\frac{50}{100}=\frac{25}{50}=\frac{12.5}{25}=\frac{6.25}{12.5}=\frac{1}{2}$$

首项为 100，故

$$a_n=100\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

答：第 n 项为 $100\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$。

3. [2024 · February/March 0580/22 Q8(b)]

提示：先求相邻两项的比值，再确定从首项起相乘的次数。

(b) These are the first five terms of a different sequence.

1　　3　　9　　27　　81

Find the *n*th term of this sequence.

(b) 另一个数列的前五项如下。

$1, 3, 9, 27, 81$

求这个数列的第 n 项。

✓ **答案**

$$3^{n-1}$$

解析 相邻两项的比值为

$\frac{3}{1}=\frac{9}{3}=\frac{27}{9}=\frac{81}{27}=3$。

首项为 1，公比为 3，故第 n 项为

$a_n=1\times 3^{n-1}=3^{n-1}$。

答：第 n 项为 3^{n-1}。

4. [2024 · May/June 0580/42 Q5(b)]

提示：先确定首项和公比，写出首项乘公比相应次幂的形式。

(b) These are the first five terms of a sequence.

$\frac{1}{6}$　　1　　6　　36　　216

Find the *n*th term of the sequence.

(b) 一个数列的前五项如下。

$\frac{1}{6}, 1, 6, 36, 216$

求这个数列的第 n 项。

✓ **答案**

$$6^{n-2}$$

解析 相邻两项的比值为

$1\div\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{1}=\frac{36}{6}=\frac{216}{36}=6$。

首项为 $\frac{1}{6}$，公比为 6，故第 n 项为
$a_n = \frac{1}{6} \times 6^{n-1}$。
由负整数指数的含义，得
$\frac{1}{6} = 6^{-1}$。
同底数幂相乘，指数相加，故
$a_n = 6^{-1} \times 6^{n-1} = 6^{-1+n-1} = 6^{n-2}$。
答：第 n 项为 6^{n-2}。

5. [2024 · October/November 0580/22 Q20]
提示：先求相邻两项的比，再将首项和公比代入通项公式。

Find an expression for the nth term of this sequence.

$$\frac{1}{7}, \quad 1, \quad 7, \quad 49, \quad 343, \quad 2401, \quad \ldots$$

求这个数列第 n 项的表达式。

$\frac{1}{7}, 1, 7, 49, 343, 2401, \ldots$

✓ **答案**

$$7^{n-2}$$

解析 相邻两项的比相同，公比为

$$q = \frac{1}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{1} = \frac{49}{7} = \frac{343}{49} = \frac{2401}{343} = 7$$

首项为 $\frac{1}{7}$，故第 n 项为

$$a_n = \frac{1}{7} \times 7^{n-1} = \frac{7^{n-1}}{7} = 7^{n-2}$$

当 $n = 1$ 时，

$$7^{1-2} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

答：第 n 项为 7^{n-2}。

2.22 与平方数、立方数比较，写出数列通项

题型 1 与平方数、立方数比较，写出数列通项（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **项号从一开始：** 数列 $-1, 0, 7, 26, 63, \ldots$ 的首项是 -1。用 a_n 表示第 n 项，n 为正整数。通项表示项的数值与项号的关系。

② **计算平方立方：** 平方是两个相同数相乘，立方是三个相同数相乘。

平方：

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9$$

立方：

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$0^3 = 0, \quad 1^3 = 1, \quad 2^3 = 8$$

$$3^3 = 27, \quad 4^3 = 64$$

③ **比较平方数：** 以数列 $4, 7, 12, \ldots$ 为例。各项减去对应项号的平方，所得差相同。

$$4 - 1 = 7 - 4 = 12 - 9 = 3$$

$$a_n = n^2 + _____$$

④ **比较立方数：**以数列 $3, 10, 29, \ldots$ 为例。各项减去对应项号的立方，所得差相同。

$$3-1 = 10-8 = 29-27 = 2$$

$$a_n = n^3 + _____$$

⑤ **补成立方再定位：**原数列各项加 1，得到一列立方数。立方的底数从 0 开始，比项号少 1。写出第 n 项时，再减去补上的 1。

$$-1+1 = 0^3, \quad 0+1 = 1^3, \quad 7+1 = 2^3$$

$$26+1 = 3^3, \quad 63+1 = 4^3$$

第 n 项所对应的立方底数为 _____。

$$a_n = (n-1)^3 - _____$$

⑥ **立方数列的倍率与偏移：**若数列为$5, 26, 83$，比较$n = 1, 2, 3$的立方$1, 8, 27$。设每项为$an^3 + b$，前两项给出 $a + b = 5$

$8a + b = 26$

相减得$7a = 21$，所以$a = 3$；再由$a + b = 5$得$b = 2$。通项为$3n^3 + 2$，代入$n = 3$得$3 \times 27 + 2 = 83$，与第三项相符。

⟵ 填空：①3　②2　③$n-1$　④1

点石成金　题目出现一列数并要求第 n 项时，先将各项与平方数、立方数比较，求差或补成立方数。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q20(a)]

Find the *n*th term of each sequence.

(a)　−1,　0,　7,　26,　63,　…

求下列各数列的第 n 项。

(a) $-1, 0, 7, 26, 63, \ldots$

解答　各项加 1，得

$$0, 1, 8, 27, 64, \ldots$$

这些数依次为

$$0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$$

立方的底数比项号少 1，所以

$$a_n + 1 = (n-1)^3$$

$$a_n = (n-1)^3 - 1$$

答：第 n 项为 $(n-1)^3 - 1$。

方法：看首项及后面几项，先试加同一个数能否补成立方数。

辨析：项号是从一开始的序号，立方底数是参与三次相乘的数。

针对练习

1.　[2024 · October/November 0580/32 Q3(c)(ii)]

⟵ 提示：先比较各项与对应项号的立方。

(ii)　1,　8,　27,　64,　.....

Find the *n*th term of this sequence.

(ii) $1, 8, 27, 64, \ldots$

求这个数列的第 n 项。

✓ **答案**

$$n^3$$

解析 各项依次为

$$1 = 1^3$$

$$8 = 2^3$$

$$27 = 3^3$$

$$64 = 4^3$$

各项均为对应项号的立方。
答：第 n 项为 n^3。

2. [2023 · May/June 0580/42 Q6(b)(i)]
提示：将前几项分别减去对应项号的立方，比较所得差。

(b) Find the *n*th term of each sequence.

(i) 6, 13, 32, 69, 130, …

(b) 求下列各数列的第 n 项。
(i) $6, 13, 32, 69, 130, \ldots$

✓ **答案**

$$n^3 + 5$$

解析 项号的立方依次为

$$1^3 = 1, \quad 2^3 = 8, \quad 3^3 = 27$$

$$4^3 = 64, \quad 5^3 = 125$$

各项减去对应项号的立方，得

$$6 - 1 = 13 - 8 = 32 - 27 = 69 - 64 = 130 - 125 = 5$$

所以

$$a_n - n^3 = 5$$

$$a_n = n^3 + 5$$

答：第 n 项为 $n^3 + 5$。

3. [2023 · May/June 0580/32 Q9(b)(ii)]
提示：将前几项分别减去对应项号的平方，比较所得差。

(ii) These are the first four terms of another sequence.

7　　10　　15　　22

Find an expression for the *n*th term of this sequence.

(ii) 以下是另一个数列的前四项。

$7, 10, 15, 22$

求这个数列第 n 项的表达式。

✓ **答案**

$$n^2+6$$

解析 项号的平方依次为

$$1^2=1,\quad 2^2=4,\quad 3^2=9,\quad 4^2=16$$

各项减去对应项号的平方，得

$$7-1=10-4=15-9=22-16=6$$

所以

$$a_n-n^2=6$$

$$a_n=n^2+6$$

答：第 n 项为 n^2+6。

4. [2024 · October/November 0580/21 Q13(b)]

提示：先算数列 A 的相邻差，再比较数列 B 与项号立方的关系。

(b) The table shows the first five terms of sequences A and B.

	1st term	2nd term	3rd term	4th term	5th term	nth term
Sequence A	–6	–2	2	6	10	
Sequence B	3	17	55	129	251	

Complete the table to show the nth term of each sequence.

(b) 表中给出了数列 A 和 B 的前五项。

	第 1 项	第 2 项	第 3 项	第 4 项	第 5 项	第 n 项
数列 A	−6	−2	2	6	10	_____
数列 B	3	17	55	129	251	_____

补全表格，写出每个数列的第 n 项。

✓ **答案** 数列 A：$4n-10$；数列 B：$2n^3+1$。

解析 数列 A 的相邻两项之差为

$$-2-(-6)=2-(-2)=6-2=10-6=4$$

从首项到第 n 项，共增加 $n-1$ 次，故

$$a_n=-6+4(n-1)=-6+4n-4=4n-10$$

数列 B 的前两项之差与对应立方数之差的比为

$$\frac{17-3}{2^3-1^3}=\frac{14}{7}=2$$

各项减去对应项号立方的 2 倍，得

$$3-2\times 1^3=1$$

$$17-2\times 2^3=1$$

$$55-2\times 3^3=1$$

$$129-2\times 4^3=1$$

$$251-2\times 5^3=1$$

故数列 B 的第 n 项为

$$b_n=2n^3+1$$

答：数列 A 的第 n 项为 $4n-10$，数列 B 的第 n 项为 $2n^3+1$。

2.23 令通项等于指定值，求项号并检查整数条件

题型 1 令通项等于指定值，求项号并检查整数条件（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **小棒数量规律：**图 1、2、3 的小棒数为 5、9、13。相邻两图增加 _____ 根。用 n 表示图号，写出小棒数的通项。

$$5+4(n-1)=4n+1$$

② **项值列成方程：**小棒数为 $9\xrightarrow{\text{通项等于项值}}$ 列出方程。移项后，除以项号前的数。

$$4n+1=9$$

$$4n=9-1=8$$

$$n=\frac{8}{4}=2$$

③ **项号取值条件：**图号须为_____。求得的数不符合条件，便不存在对应的图。例如，小棒数为 7 时：

$$4n+1=7$$

$$4n=7-1=6$$

$$n=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$\frac{3}{2}$ 不是正整数，不存在对应的图。

④ **奇偶性质判断：**整数的 2 倍为偶数，偶数加 1 为奇数。先判断通项的奇偶性，再判断给定值能否出现。

小棒数为 5、9、13、…。

$$4n+1=2(2n)+1$$

小棒数恒为_____数。

14 为偶数，不可能出现。

灰色方块数为 6、8、10、…。

$$6+2(n-1)=2n+4=2(n+2)$$

灰色方块数恒为_____数。

9 为奇数，不可能出现。

⑤ **平方通项求号：**例如总数依次为 4、9、16，分别是 2、3、4 的平方。图 n 每边有 n+1 个小方块。总数为 49 时，边长为正，取正平方根。

$$(n+1)^2=49$$

$$n+1=\sqrt{49}=7$$

$$n = 7 - 1 = 6$$

⑥ **分式通项求号：**已知通项如下，n 表示项号。

$$\frac{n}{2n+3}$$

求第 k 项时，用 k 替换 n，例如项值为 $\frac{1}{3}$。因 k 为正整数，分母不为零，两边同乘 $3(2k+3)$。

$$\frac{k}{2k+3} = \frac{1}{3}$$

$$3k = 2k + 3$$

$$3k - 2k = 3$$

$$k = 3$$

填空：①4　②正整数　③奇　④偶

点石成金　题目出现指定的小棒数、点数、方块数或项值，要求图号或项号时，先令通项等于指定值。

例 1　[2023 · May/June 0580/33 Q5(c)(ii)]

The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using sticks.

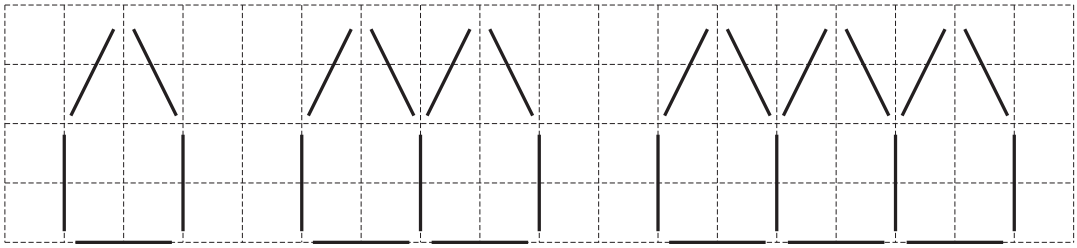


Diagram 1　　Diagram 2　　Diagram 3

(ii) One of the diagrams has 73 sticks.

Work out its Diagram number.

5 方格纸上给出了一个图形序列的前三个图。每个图均由小棒拼成。图 1；图 2；图 3。(ii) 其中一个图用了 73 根小棒。求这个图的图号。

解答　前三个图的小棒数为 5、9、13，每次增加 4 根。设图号为 n，小棒数为

$$5 + 4(n-1) = 4n + 1$$

由小棒数为 73，得

$$4n + 1 = 73$$

$$4n = 73 - 1 = 72$$

$$n = \frac{72}{4} = 18$$

18 为正整数。答：图号为 18。

方法：先看指定的小棒数，令通项等于该数，解出后检查图号是否为正整数。

辨析：项值是小棒的数量，项号是图的位置编号，两者不能互换。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/33 Q7(b)]

提示：看给定整数除以二的余数，与奇偶数的定义比较。

These are the first four diagrams in a sequence.
The diagrams are made using dots and lines.

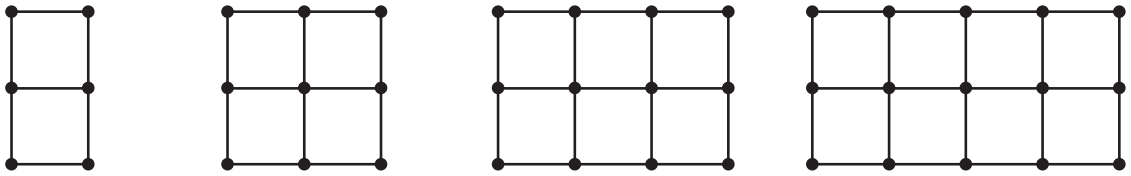


Diagram 1　Diagram 2　Diagram 3　Diagram 4

(b) Complete this statement.

A diagram in this sequence cannot have 51 small squares because .....

图给出了用点和线段组成的前四幅图，每幅图的高度都是 2 个小正方形，宽分别为 1、2、3、4 个小正方形。（b）补全陈述：这个数列中的图形不可能有 51 个小正方形，因为_____。

✓ **答案** 51 是奇数。

解析 第 n 幅图有 2 行、每行 n 个小正方形，因此总数为 $2n$，必为偶数。$51 = 2 \times 25 + 1$ 51 为奇数，不可能等于 $2n$。答：因为每幅图的小正方形总数都是偶数，而 51 是奇数。

2. [2023 · May/June 0580/42 Q6(a)(ii)]

提示：令分式通项等于给定值，交叉相乘后比较两边同类项。

(a) A sequence has nth term $\dfrac{n}{2n+3}$.

(ii) The kth term of this sequence is $\dfrac{12}{25}$.

Find the value of k.

6 (a) 一个数列的第 n 项为 $\frac{n}{2n+3}$。(ii) 这个数列的第 k 项为 $\frac{12}{25}$。求 k 的值。

✓ **答案** 36

解析 第 k 项为 $\frac{12}{25}$，得

$$\frac{k}{2k+3} = \frac{12}{25}$$

因 k 为正整数，分母不为零，交叉相乘得

$$25k = 12(2k+3)$$

$$25k = 24k + 36$$

$$25k - 24k = 36$$

$$k = 36$$

36 为正整数，符合项号条件。答：$k = 36$。

3. [2023 · February/March 0580/32 Q8(b)(iii)(d)]
提示：看总数与边长的平方关系，开方后再比较边长与图号。

(b) The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using small grey and small white squares to make grey and white columns.

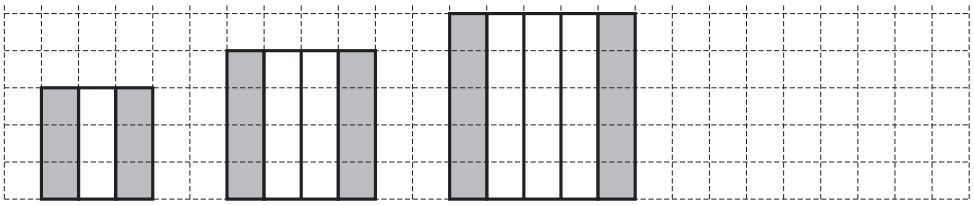


Diagram 1　Diagram 2　Diagram 3　Diagram 4

(iii)

Diagram number	1	2	3	4	5
Number of grey squares	6	8	10		
Number of white squares	3	8	15		
Total number of squares	9	16	25		

(d) Diagram k has a **total** of 1296 squares.

Work out the value of k.

(b) 方格纸上给出了一个图形序列的前三个图。每个图都用灰色和白色的小正方形拼成灰色列和白色列。图 1；图 2；图 3；图 4。(iii)

图号	1	2	3	4	5
灰色小正方形的数量	6	8	10		
白色小正方形的数量	3	8	15		
小正方形的总数	9	16	25		

(d) 图 k 共有 1296 个小正方形。求 k 的值。

✓ **答案** 34

解析 前三个图每边的小方块数为 3、4、5，故图 k 每边有 $k+2$ 个小方块。由方块总数为 1296，得

$$(k+2)^2 = 1296$$

因 k 为正整数，$k+2>0$，取正平方根得

$$k+2 = \sqrt{1296} = 36$$

$$k = 36-2 = 34$$

34 为正整数，符合图号条件。答：$k=34$。

4. [2023 · October/November 0580/33 Q7(c)]
提示：看点数通项中的常数项，列方程后先消去它，再求图号。

These are the first four diagrams in a sequence.
The diagrams are made using dots and lines.

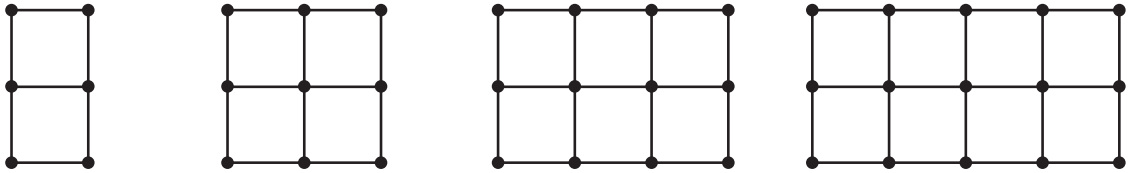


Diagram 1　Diagram 2　Diagram 3　Diagram 4

(c) An expression for the number of dots in Diagram n is $3n+3$.

Which diagram has 249 dots?

这些是一个图形序列的前四个图。这些图由点和线段组成。图 1；图 2；图 3；图 4。(c) 图 n 中点的数量可用表达式 $3n+3$ 表示。哪个图有 249 个点?

✓ **答案** 82

解析 设图号为 n，由点数为 249，得

$$3n+3=249$$

$$3n=249-3=246$$

$$n=\frac{246}{3}=82$$

82 为正整数，符合图号条件。答：图 82 有 249 个点。

5. [2025 · October/November 0580/13 Q21(c)(ii)]
提示：先由相邻两项的差写出通项，再令通项等于题给的数。

These are the first four terms of a sequence.

$$-6 \qquad 1 \qquad 8 \qquad 15$$

(c) (i) Find the nth term.

(ii) Is 688 a term in this sequence?

Explain how you decide.

以下是一个数列的前四项。

$-6, 1, 8, 15$

(c)（i）求第 n 项。
(ii) 688 是这个数列的一项吗?
说明判断的理由。

✓ **答案** 688 不是这个数列的一项。

解析 相邻两项之差为

$$1-(-6)=8-1=15-8=7$$

设第 n 项为 a_n，其中 n 为正整数，则

$$a_n=-6+7(n-1)=7n-13$$

若 688 是这个数列的一项，则

$$7n - 13 = 688$$

$$7n = 688 + 13 = 701$$

$$n = \frac{701}{7} = 100 + \frac{1}{7}$$

所得项号不是整数。

答：688 不是这个数列的一项。

6. [2026 · May/June 0580/12 Q21(c)]

提示：先把灰色与白色正方形的数量相加。

These are the first four diagrams in a sequence.
The diagrams are made using grey squares and white squares.

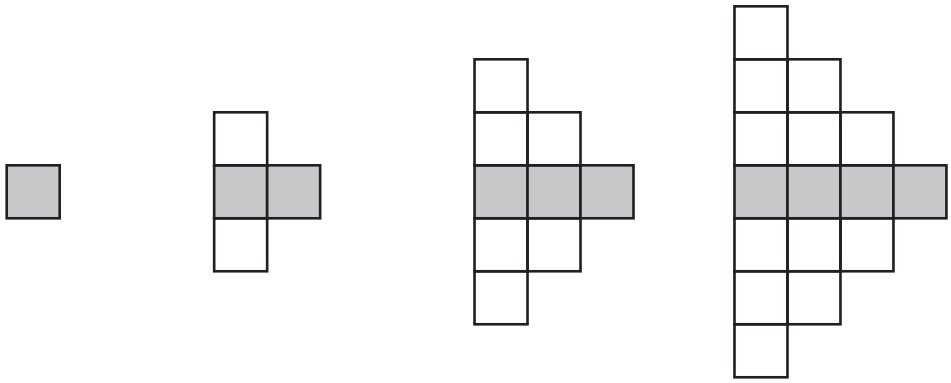


diagram 1　　diagram 2　　diagram 3　　diagram 4

(b) Complete the table for diagram 4 and diagram n.

diagram	**1**	**2**	**3**	**4**		**n**
number of grey squares	1	2	3			
number of white squares	0	2	6			$n(n-1)$
total number of squares	1	4	9			

(c) Complete this statement.

A diagram in this sequence can **not** have a total number of 120 squares because .....

这些是一个图形序列的前四个图。各图由灰色正方形和白色正方形组成。图中依次标有图 1、图 2、图 3、图 4。

(b) 补全表中图 4 和图 n 对应的各项。

图号	1	2	3	4	n
灰色正方形的数量	1	2	3	_____	_____
白色正方形的数量	0	2	6	_____	$n(n-1)$
正方形的总数	1	4	9	_____	_____

(c) 补全下列陈述。

这个序列中的图形不可能共有 120 个正方形，因为 _____。

✓ **答案** 120 不是平方数。

解析 （b）图 4 的灰色小正方形有4个，白色有$4\times(4-1)=12$个，总数$4+12=16$。图n灰色有n个，总数为$n+n(n-1)=n+n^2-n=n^2$。

解：由图形的灰色横排可知，图 n 有 n 个灰色正方形。

由表中白色正方形的数量，得正方形总数为

$$n+n(n-1)=n+n^2-n=n^2$$

图号 n 为正整数，总数须为整数的平方。

$$10^2=100$$

$$11^2=121$$

$$100<120<121$$

120 在两个相邻整数的平方之间，不是平方数。

答：120 不是平方数。

2.24 正比例与反比例

题型 1 反比例：先求比例常数，再代入新值（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **平方反比关系：**例题中，y 与 x^2 成反比例，先算平方。

$$3^2=3\times3=9,\quad 2^2=2\times2=4$$

平方量乘几倍，y 就除以相同的倍数。两者的乘积保持_____。

② **反比式的写法：**用 k 表示不变的乘积，称为比例常数。

$$yx^2=k$$

两边同除以 x^2，且除数不能为零。

$$y=\frac{k}{x^2}\quad(x\neq0)$$

③ **已知值定常数：**将已知的一组值代入关系式。等式两边同乘分母，求出 k。

$$2=\frac{k}{3^2}=\frac{k}{9}$$

$$k=2\times9=_____$$

④ **新值代回原式：**同一反比例关系沿用同一个 k。代入新的 x，先算分母，再做除法。

$$y=\frac{18}{2^2}=\frac{18}{4}$$

⑤ **立方根的读法：**三个相同的数相乘得 64，这个数是 64 的立方根。根号左上角的 3 表示求立方根。

$$4^3=4\times4\times4=64$$

$$\sqrt[3]{64}=4$$

⑥ **括号整体入分母：**括号内先求和，再平方或求立方根。所得的整个量作分母，且分母不为零。

m 与 $(t+2)^2$ 成反比例：

y 与 $\sqrt[3]{x+5}$ 成反比例：

$$m=\frac{k}{(t+2)^2}\quad(t\neq -2)$$

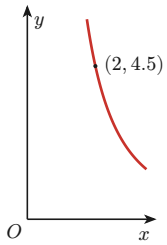
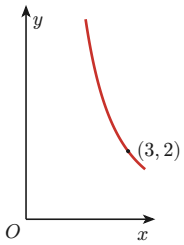
例如，$t=1$ 时，分母为
$(1+2)^2=3^2=9$

$$y=\frac{k}{\sqrt[3]{x+5}}\quad(x\neq -5)$$

例如，$x=59$ 时，分母为
$\sqrt[3]{59+5}=\sqrt[3]{64}=4$

填空：①不变　②18

固定 $k=18$：比较两组对应值

	$x=2$	$x=3$
同一关系	$y=\frac{18}{x^2},\quad x>0$	
曲线上点		
分母	$x^2=4$	$x^2=9$
对应的值	$y=\frac{18}{4}=4.5$	$y=\frac{18}{9}=2$

点石成金　题目出现一个量与平方量或立方根量成反比例，并给出一组对应值时，先把指定量整体放入分母，设比例常数。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q16]

y is inversely proportional to x^2.
When $x=3$, $y=2$.

Find y when $x=2$.

y 与 x^2 成反比例。当 $x=3$ 时，$y=2$。求 $x=2$ 时 y 的值。

解答　由反比例关系，设 k 为比例常数，则
$y=\frac{k}{x^2}$。
代入已知值，得
$2=\frac{k}{3^2}$，
$k=2\times 3^2=18$。
当 $x=2$ 时，
$y=\frac{18}{2^2}=\frac{18}{4}=4.5$。
答：$y=4.5$。

方法：先看成反比例的是哪个量，从已知一组值与平方量的乘积起手。

辨析：平方是两个相同数相乘，立方根是由三次乘方的结果反求原数。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/22 Q19]

提示：看平方覆盖的括号，比较括号整体平方后的大小。

m is inversely proportional to the square of $(t+2)$.
$m = 0.64$ when $t = 3$.

Find m when $t = 8$.

m 与 $t+2$ 的平方成反比例。当 $t=3$ 时，$m=0.64$。求 $t=8$ 时 m 的值。

✓ **答案**

0.16

解析 由反比例关系，设 k 为比例常数，则
$m = \frac{k}{(t+2)^2}$。
代入已知值，得
$0.64 = \frac{k}{(3+2)^2} = \frac{k}{25}$，
$k = 0.64 \times 25 = 16$。
当 $t = 8$ 时，
$m = \frac{16}{(8+2)^2} = \frac{16}{100} = 0.16$。
答：$m = 0.16$。

2. [2023 · May/June 0580/23 Q18]

提示：看立方根覆盖的范围，比较两组值对应的整个分母。

y is inversely proportional to the cube root of $(x + 5)$.
When $x = 3$, $y = 12$.

Find y when $x = 22$.

y 与 $x+5$ 的立方根成反比例。当 $x=3$ 时，$y=12$。求 $x=22$ 时 y 的值。

✓ **答案**

8

解析 由反比例关系，设 k 为比例常数，则
$y = \frac{k}{\sqrt[3]{x+5}}$。
代入已知值，得
$12 = \frac{k}{\sqrt[3]{3+5}} = \frac{k}{\sqrt[3]{8}} = \frac{k}{2}$，
$k = 12 \times 2 = 24$。
当 $x = 22$ 时，
$y = \frac{24}{\sqrt[3]{22+5}} = \frac{24}{\sqrt[3]{27}} = \frac{24}{3} = 8$。
答：$y = 8$。

3. [2025 · May/June 0580/22 Q20(a)]

提示：先把比例关系写成含比例常数的等式。

$$y \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(a) When $x = 9$, $y = 2$.

Find the value of y when $x = 36$.

y 与 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 成正比例。
(a) 当 $x=9$ 时，$y=2$。
求 $x=36$ 时 y 的值。

✓ **答案**

1

解析 设比例常数为 k，由比例关系得

$$y=\frac{k}{\sqrt{x}}\quad(x>0)$$

代入 $x=9$、$y=2$，得

$$2=\frac{k}{\sqrt{9}}=\frac{k}{3}$$

$$k=2\times 3=6$$

当 $x=36$ 时，

$$y=\frac{6}{\sqrt{36}}=\frac{6}{6}=1$$

答：$y=1$。

4. [2024 · February/March 0580/22 Q22]

提示：先将反比的整个平方量写在分母，再代入已知值求比例常数。

y is inversely proportional to the square of $(x+3)$.
When $x=5$, $y=0.375$.

Find y in terms of x.

y 与 $(x+3)$ 的平方成反比例。
当 $x=5$ 时，$y=0.375$。
用含 x 的式子表示 y。

✓ **答案**

$$y=\frac{24}{(x+3)^2}$$

解析 设比例常数为 k，由反比例关系得

$$y=\frac{k}{(x+3)^2}\quad(x\neq -3)$$

代入 $x=5$、$y=0.375$，得

$$0.375=\frac{k}{(5+3)^2}=\frac{k}{64}$$

$$k=0.375\times 64=24$$

答：$y=\frac{24}{(x+3)^2}$，其中 $x\neq -3$。

5. [2024 · October/November 0580/23 Q19]

提示：把整个平方根写在反比例关系式的分母中。

y is inversely proportional to $\sqrt{x+2}$.
When $x=2$, $y=3$.

Find y in terms of x.

$y=$ ..... [2]

y 与 $\sqrt{x+2}$ 成反比例。
当 $x=2$ 时，$y=3$。
用含 x 的式子表示 y。

✓ **答案**

$$y=\frac{6}{\sqrt{x+2}}$$

解析 设 k 为比例常数，由反比例关系，得

$$y=\frac{k}{\sqrt{x+2}}$$

代入已知值，得

$$3=\frac{k}{\sqrt{2+2}}=\frac{k}{2}$$

$$k=3\times 2=6$$

平方根在分母中，故

$$x+2>0$$

$$x>-2$$

答：$y=\frac{6}{\sqrt{x+2}}$，其中 $x>-2$。

2.25 按图形的重复单元计数并列式

题型 1 按图形的重复单元计数并列式（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **续画相邻图：**灰白方格图的边长依次为3格、4格、5格。续画时，边长增加_____格，两侧灰列不变。木棒图每次增加一个屋形，与原图共用一条竖边。

② **保留固定部分：**图 1 至图 3 的白列数分别为1、2、3，与图号相同。用n表示图号，n为正整数。两侧共有_____列灰色列，合并两种颜色的列数。

$$\text{总列数}=n+2$$

③ **按颜色数方格：**图 2 每列有4格，格数等于列数乘每列格数。

灰色方格：
$2\times 4=8$

白色方格：
$2\times 4=8$

图n每列有$n+2$格，分别计数后相加。

$$\text{灰格数}=2(n+2)=2\times n+2\times 2=2n+4$$

$$\text{白格数}=n(n+2)$$

$$\text{总格数}=2(n+2)+n(n+2)=(n+2)(n+2)=(n+2)^2$$

④ **求部分所占比例：**图 2 共有4列，其中2列为灰色。求灰色列所占的比例，用灰色列数除以_____。

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

图n的灰色列数仍为2，总列数为$n+2$。

$$\text{灰色列所占比例}=\frac{2}{n+2}$$

⑤ **共用边线计数：**点线图有2行小正方形、3排点。以图 2 为例，按类别计数。相邻正方形的共用边只计一次。

类别	计数
小正方形	$2\times 2=4$
点	$3\times(2+1)=9$
横线段	$3\times 2=6$
竖线段	$2\times(2+1)=6$
线段总数	$6+6=12$

⑥ **指定各图相加：**木棒图按斜边、底边、竖边分别计数。

图 1 的木棒数：

$2+1+2=5$

图 2 的木棒数：

$4+2+3=9$

求前两图共需多少根，将各图用量相加。

$$5+9=14$$

填空：①1　②2　③总列数

点石成金　题目出现按图号排列的方格、木棒或点线图，并要求续画、计数或列式时，先分开数固定部分和重复部分。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q8(b)(i)]

(b) The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using small grey and small white squares to make grey and white columns.

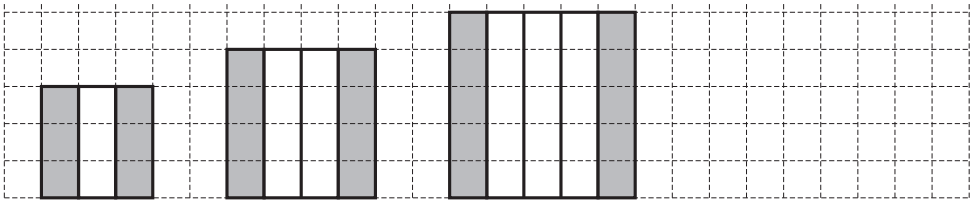


Diagram 1　Diagram 2　Diagram 3　Diagram 4

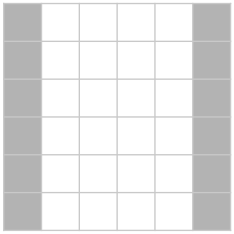
(i) On the grid, draw Diagram 4.

(b) 方格纸上给出了一个图形序列的前三幅图。每幅图都用灰色和白色的小正方形拼成灰色列和白色列。
图中标签：图 1、图 2、图 3、图 4。
(i) 在方格纸上画出图 4。

解答　前三幅图的边长分别为3格、4格、5格，每次增加1格。

$$5+1=6$$

图 4 为每边6格的正方形，左右两列涂灰，中间四列留白。



答：图 4 如上。

方法：先比较相邻图每边增加的格数，再按原来的灰列位置续画。

辨析：边长是每边包含的格数，灰列数是灰色竖列的数量。

针对练习

1. [2023 · February/March 0580/32 Q8(b)(ii)(a)]
提示：看左右两端的灰色竖列，比较各图是否变化。

(b) The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using small grey and small white squares to make grey and white columns.

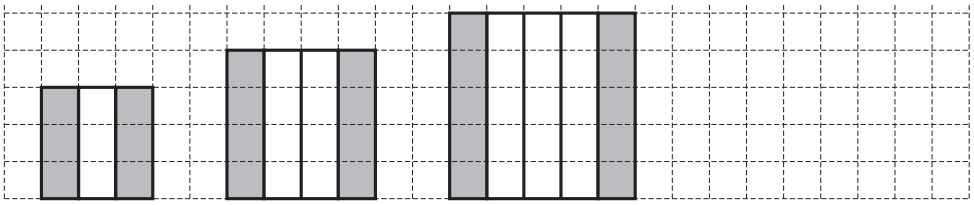


Diagram 1　Diagram 2　Diagram 3　Diagram 4

(ii) **(a)** Complete this statement.

Diagram n has ..... grey columns.

(b) 方格图给出了前三幅图。每幅图由灰色与白色小正方形组成，形成灰色列和白色列，最左及最右列为灰色。(ii)(a) 补全陈述：第 n 幅图有_____列灰色列。

✓ **答案** 2

解析 各图左右两端各有1列灰色列。

$$1+1=2$$

答：2。

2. [2023 · February/March 0580/32 Q8(b)(ii)(b)]
提示：先比白列数与图号，再把固定的灰列计入总数。

(b) The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using small grey and small white squares to make grey and white columns.

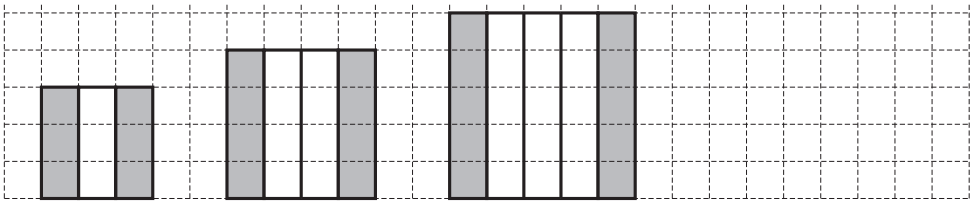


Diagram 1　Diagram 2　Diagram 3　Diagram 4

(b) Find an expression, in terms of n, for the total number of columns in Diagram n.

(b) 方格纸上给出了一个图形序列的前三幅图。每幅图都用灰色和白色的小正方形拼成灰色列和白色列。
图中标签：图 1、图 2、图 3、图 4。
(b) 用含n的式子表示图n的总列数。

✓ **答案** $n+2$

解析 图 1、图 2、图 3 分别有1、2、3列白色列，每次增加1列。图n有n列白色列和2列灰色列。

$$\text{总列数}=n+2$$

答：$n+2$。

3. [2023 · February/March 0580/32 Q8(b)(ii)(c)]
提示：先分清灰色列和全部列，比例的分母对应整体。

(b) The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using small grey and small white squares to make grey and white columns.

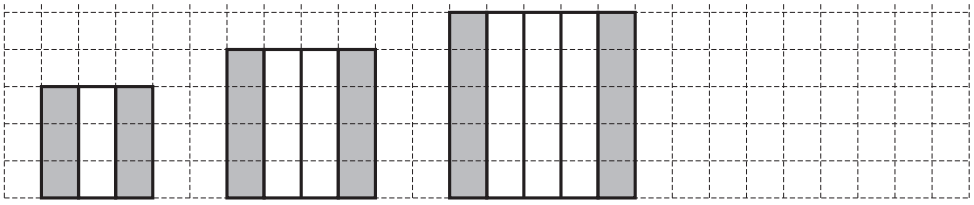


Diagram 1　Diagram 2　Diagram 3　Diagram 4

(c) Find an expression, in terms of n, for the fraction of columns that are grey in Diagram n.

(b) 方格纸上给出了一个图形序列的前三幅图。每幅图都用灰色和白色的小正方形拼成灰色列和白色列。
图中标签：图 1、图 2、图 3、图 4。
(c) 用含n的式子表示图n中灰色列占总列数的几分之几。

✓ **答案** $\frac{2}{n+2}$

解析 图n有n列白色列和2列灰色列。

$$\text{总列数} = n + 2$$

灰色列数除以总列数，得

$$\text{灰色列所占比例} = \frac{2}{n+2}$$

答：$\frac{2}{n+2}$。

4. [2023 · May/June 0580/33 Q5(a)]
提示：看新增屋形接在哪里，共用竖边不重复添棒。

The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using sticks.

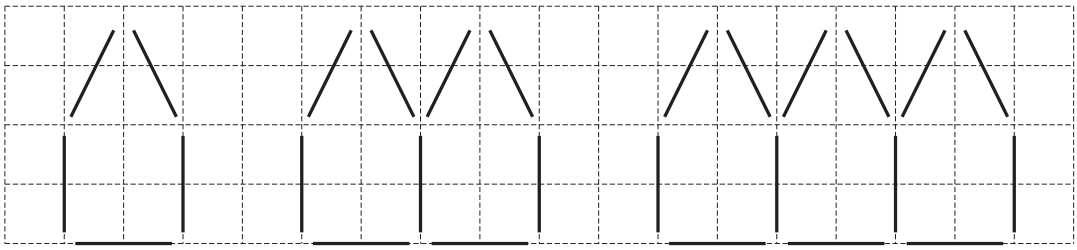


Diagram 1　Diagram 2　Diagram 3

(a) On the grid, draw Diagram 4.

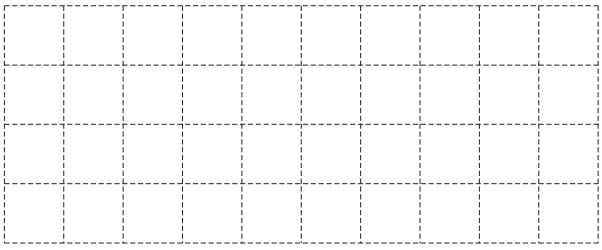


Diagram 4

方格纸上给出了一个图形序列的前三幅图。每幅图都由木棒拼成。
图中标签：图 1、图 2、图 3。
(a) 在方格纸上画出图 4。
作图处标签：图 4。

✓ **答案** 四个并排的屋形，相邻屋形共用一条竖边，共17根木棒。

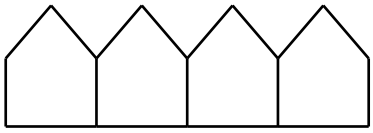
解析 前三幅图分别有1、2、3个屋形，每次增加1个。图 4 有4个屋形，相邻屋形共用一条竖边。

$$斜边木棒数 = 2 \times 4 = 8$$

$$底边木棒数 = 4$$

$$竖边木棒数 = 4 + 1 = 5$$

$$木棒总数 = 8 + 4 + 5 = 17$$



答：图 4 如上。

5. [2023 · February/March 0580/32 Q8(b)(iii)(b)]

提示：看灰色共有几列，再找每列格数随图号的变化。

(b) The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using small grey and small white squares to make grey and white columns.

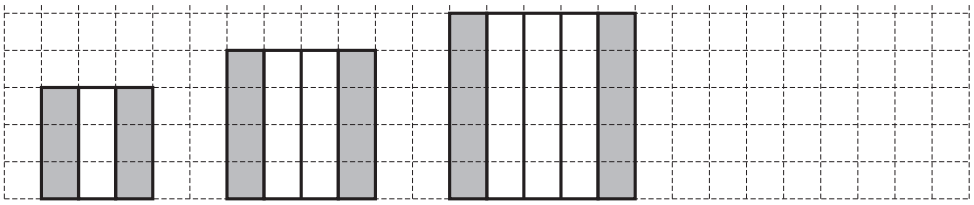


Diagram 1　Diagram 2　Diagram 3　Diagram 4

(iii)

Diagram number	1	2	3	4	5
Number of grey squares	6	8	10		
Number of white squares	3	8	15		
Total number of squares	9	16	25		

(b) Write an expression, in terms of n, for the number of grey squares in Diagram n.

(b) 方格纸上给出了一个图形序列的前三幅图。每幅图都用灰色和白色的小正方形拼成灰色列和白色列。
图中标签：图 1、图 2、图 3、图 4。
(iii)

图号	1	2	3	4	5
灰色小正方形数	6	8	10		
白色小正方形数	3	8	15		
小正方形总数	9	16	25		

(b) 用含n的式子表示图n中灰色小正方形的个数。

✓ **答案** $2n + 4$

解析 图 1、图 2、图 3 每列分别有3、4、5个小正方形，每次增加1个。图n每列有$n + 2$个小正方形，且灰色列始终有2列。

$$灰色小正方形数 = 2(n + 2) = 2n + 4$$

答：$2n+4$。

6. [2023 · May/June 0580/33 Q5(d)(i)]

提示：各图分别按斜棒、底边棒、竖棒计数，再合计各图用量。

The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using sticks.

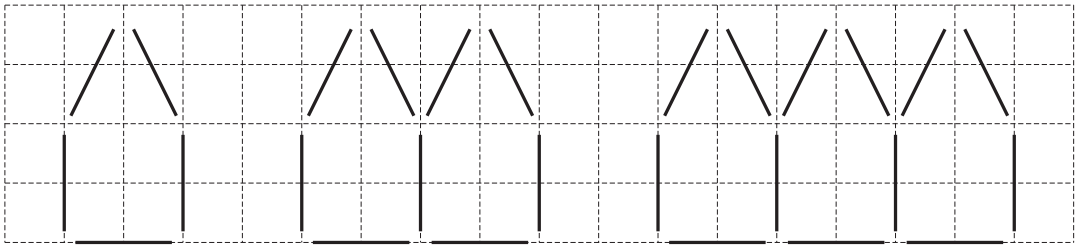


Diagram 1　　Diagram 2　　Diagram 3

(d) (i) Show that the total number of sticks needed to make the first 3 diagrams is 27.

方格纸上给出了一个图形序列的前三幅图。每幅图都由木棒拼成。
图中标签：图 1、图 2、图 3。
(d)(i) 证明拼成前三幅图所需的木棒总数为27根。

✓ **答案** $5+9+13=27$根

解析 图 1 有2根斜棒、1根底边棒和2根竖棒。

$$\text{图 1 的木棒数}=2+1+2=5$$

图 2 有4根斜棒、2根底边棒和3根竖棒。

$$\text{图 2 的木棒数}=4+2+3=9$$

图 3 有6根斜棒、3根底边棒和4根竖棒。

$$\text{图 3 的木棒数}=6+3+4=13$$

将前三幅图的用量相加，得

$$5+9+13=27$$

答：拼成前三幅图共需27根木棒。

7. [2023 · October/November 0580/33 Q7(a)]

提示：分别看方格行列、点的排数，横竖线段分开数。

These are the first four diagrams in a sequence.
The diagrams are made using dots and lines.

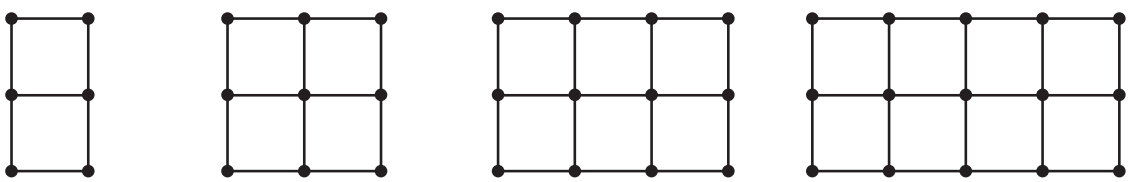


Diagram 1　　Diagram 2　　Diagram 3　　Diagram 4

(a) Complete the table.

Diagram	1	2	3	4
Number of small squares	2	4	6	
Number of dots	6	9	12	
Number of lines	7	12	17	

下图是一个图形序列的前四幅图。这些图形由点和线段组成。
图中标签：图 1、图 2、图 3、图 4。
(a) 补全表格。

图号	1	2	3	4
小正方形数	2	4	6	
点数	6	9	12	
线段数	7	12	17	

✓ **答案** 小正方形数8，点数15，线段数22。

解析 图 4 有2行、4列小正方形。

$$\text{小正方形数} = 2 \times 4 = 8$$

点分成3排，每排有5个。

$$\text{点数} = 3 \times 5 = 15$$

横线段分成3排，每排有4条；竖线段分成5列，每列有2条。

$$\text{线段数} = 3 \times 4 + 5 \times 2 = 12 + 10 = 22$$

答：依次填8、15、22。

8. [2023 · February/March 0580/32 Q8(b)(iii)(a)]

提示：先看每列有几格，再分颜色数列，用两色之和核对总数。

(b) The grid shows the first three diagrams in a sequence.
Each diagram is made using small grey and small white squares to make grey and white columns.

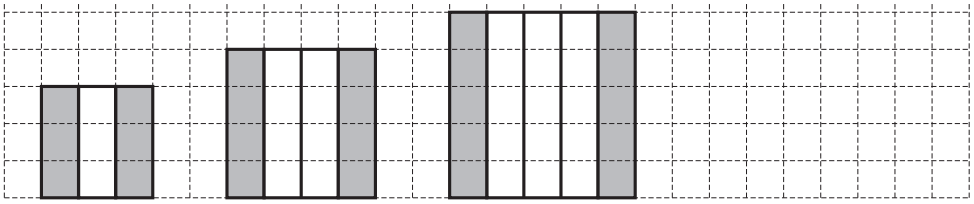


Diagram 1 Diagram 2 Diagram 3 Diagram 4

(iii)

Diagram number	1	2	3	4	5
Number of grey squares	6	8	10		
Number of white squares	3	8	15		
Total number of squares	9	16	25		

(a) Complete the table.

(b) 方格纸上给出了一个图形序列的前三幅图。每幅图都用灰色和白色的小正方形拼成灰色列和白色列。
图中标签：图 1、图 2、图 3、图 4。
(iii)

图号	1	2	3	4	5
灰色小正方形数	6	8	10		
白色小正方形数	3	8	15		
小正方形总数	9	16	25		

(a) 补全表格。

✓ **答案**

图号	4	5
灰色小正方形数	12	14
白色小正方形数	24	35
小正方形总数	36	49

解析 图 4 每列有6格，其中灰色列有2列，白色列有4列。

$$\text{图 4 的灰格数} = 2 \times 6 = 12$$

$$\text{图 4 的白格数} = 4 \times 6 = 24$$

$$\text{图 4 的总格数} = 12 + 24 = 36$$

图 5 每列有7格，其中灰色列有2列，白色列有5列。

$$\text{图 5 的灰格数} = 2 \times 7 = 14$$

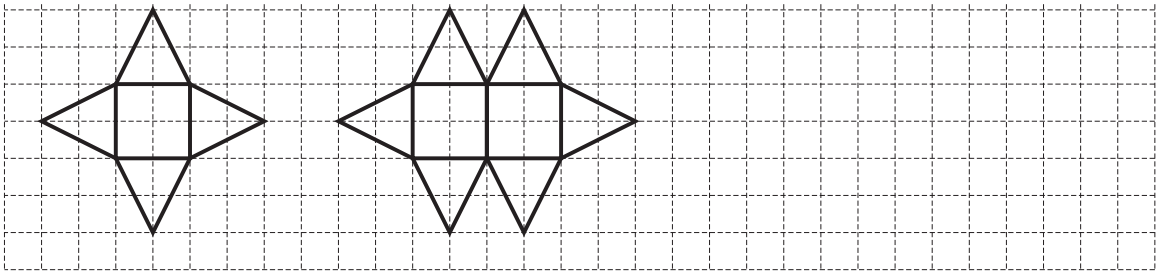
$$\text{图 5 的白格数} = 5 \times 7 = 35$$

$$\text{图 5 的总格数} = 14 + 35 = 49$$

答：灰色一行填12、14；白色一行填24、35；总数一行填36、49。

9. [2024 · October/November 0580/32 Q3(a)(ii)]
提示：将上方、下方和左右两端的三角形分别计数。

(a) A sequence of shapes is made with squares and triangles.



Shape 1　　Shape 2　　Shape 3

(ii) Find the number of triangles in Shape 5.

(a) 一个图形序列由正方形和三角形组成。
图中标签：图 1、图 2、图 3。
(ii) 求图 5 中三角形的个数。

✓ **答案**

解析　图 1 有上下各一个三角形，左右各一个三角形。
图 2 有上下各两个三角形，左右仍各一个三角形。
每增加一个正方形，上下各增加一个三角形。
图 5 有上下各五个三角形，左右各一个三角形。

$$5+5+1+1=12$$

答：图 5 有 12 个三角形。

10. [2026 · February/March 0580/32 Q16(b)]
提示：分别数右列和底行，并辨明交角的一格计了几次。

These are the first four diagrams in a sequence.
The diagrams are made using grey squares and white squares.

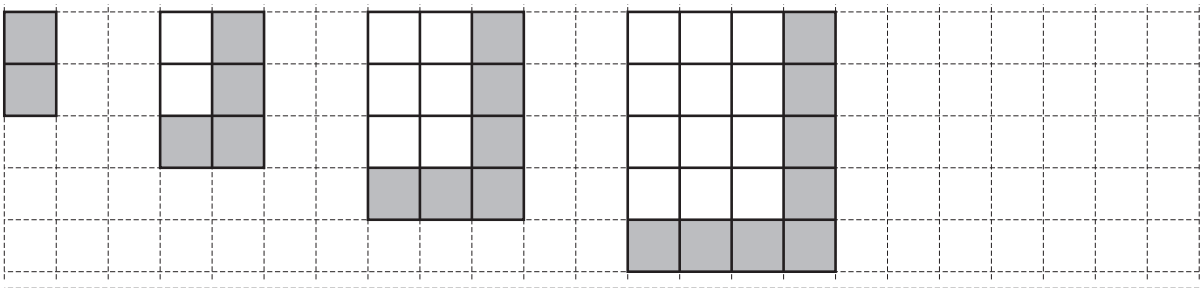


diagram 1　diagram 2　diagram 3　diagram 4　diagram 5

(b) Complete the table for diagram 4 and diagram n.
Write your answers for diagram n in their simplest form.

diagram	**1**	**2**	**3**	**4**		***n***
number of grey squares	2	4	6			
number of white squares	0	2	6			$n(n-1)$
total number of squares	2	6	12			

下图是一个图形序列的前四幅图。
这些图形由灰色和白色的小正方形组成。
图中标签：图 1、图 2、图 3、图 4、图 5。
(b) 补全图 4 和图 n 对应的表格。
图 n 的答案须写成最简形式。

图号	1	2	3	4	n
灰色小正方形数	2	4	6	_____	_____
白色小正方形数	0	2	6	_____	$n(n-1)$
小正方形总数	2	6	12	_____	_____

✓ **答案**

图号	4	n
灰色小正方形数	8	$2n$
白色小正方形数	12	$n(n-1)$
小正方形总数	20	$n(n+1)$

解析　图 4 有 4 列，每列有 5 格。
右列和底行均为灰色，右下角的一格重复计数，须减去一次。

$$\text{图 4 灰格数}=5+4-1=8$$

白色部分有 3 列，每列有 4 格。

$$图\ 4\ 白格数 = 3 \times 4 = 12$$

$$图\ 4\ 总格数 = 4 \times 5 = 20$$

图 n 有 n 列，每列有 $n+1$ 格。

$$图\ n\ 灰格数 = (n+1) + n - 1 = 2n$$

$$图\ n\ 总格数 = n(n+1)$$

答：图 4 的灰格数、白格数、总格数依次为 8、12、20；图 n 的灰格数为 $2n$，总格数为 $n(n+1)$。

11. [2026 · May/June 0580/12 Q21(b)]

提示：先确定灰格数与图号的关系，再把两种颜色的格数相加。

These are the first four diagrams in a sequence.
The diagrams are made using grey squares and white squares.

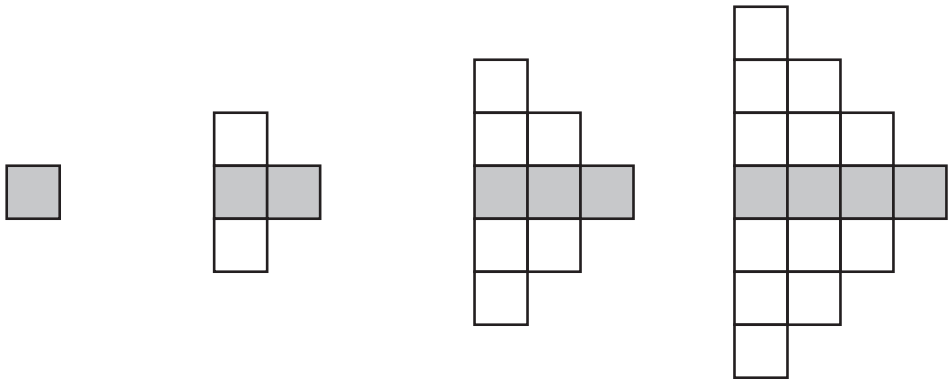


diagram 1　　diagram 2　　diagram 3　　diagram 4

(b) Complete the table for diagram 4 and diagram n.

diagram	**1**	**2**	**3**	**4**		**n**
number of grey squares	1	2	3			
number of white squares	0	2	6			$n(n-1)$
total number of squares	1	4	9			

下图是一个图形序列的前四幅图。
这些图形由灰色和白色的小正方形组成。
图中标签：图 1、图 2、图 3、图 4。
(b) 补全图 4 和图 n 对应的表格。

图号	1	2	3	4	n
灰色小正方形数	1	2	3	_____	_____
白色小正方形数	0	2	6	_____	$n(n-1)$
小正方形总数	1	4	9	_____	_____

✓ **答案**

图号	4	n
灰色小正方形数	4	n
白色小正方形数	12	$n(n-1)$
小正方形总数	16	n^2

解析　灰色小正方形排成一行，个数与图号相同。

$$\text{图 4 灰格数} = 4$$

由表中白格数的表达式，得

$$\text{图 4 白格数} = 4(4-1) = 4\times 3 = 12$$

$$\text{图 4 总格数} = 4 + 12 = 16$$

图 n 有 n 个灰色小正方形。
将两种颜色的格数相加，得

$$\text{图 } n \text{ 总格数} = n + n(n-1) = n + n^2 - n = n^2$$

答：图 4 的灰格数、白格数、总格数依次为 4、12、16；图 n 的灰格数为 n，总格数为 n^2。

2.26　把一个函数的输出代入另一个函数

题型 1　把一个函数的输出代入另一个函数（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **函数输入输出：**函数 g 把输入数乘 3 后加 2。记号 $g(x)$ 表示输入 x 时的_____。

$$g(x) = 3x + 2$$

$$g(1) = 3\times 1 + 2 = 5$$

② **整式整体代入：**输入变为 $x+1$ 时，原式中的 x 换成整个 $x+1$。代入时先加_____，再展开。

$$g(x+1) = 3(x+1) + 2 = 3x + 3 + 2 = 3x + 5$$

③ **复合运算顺序：**记号 $gf(x)$ 表示 $g(f(x))$，先算 f，再算 g。复合函数由_____计算。

$$f(x) = 2x - 1$$

$$gf(x) = g(2x-1) = 3(2x-1) + 2 = 6x - 1$$

④ **分式整体代入：**输入含分式或代入倒数函数时，仍把输入整体替换。各式的分母均不能为 0。

已知 $h(x) = \frac{1}{x}$：

$$hg(x) = h(3x+2) = \frac{1}{3x+2}$$

$3x + 2 \neq 0$，即 $x \neq -\frac{2}{3}$。

已知 $f(x) = 2x - 1$：

$$fh(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 2\times\frac{1}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$$

由 $h(x)$ 有意义，得 $x \neq 0$。

⑤ **乘积展开合并：**两个括号相乘时，前一括号各项分别乘后一括号各项。展开后合并同类项。

$$(x+2)(x+1) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

⑥ **分式通分相加：**分母为 $x+1$ 和 x 时，公分母可取 $x(x+1)$。各分式的分子、分母同乘缺少的因式，再把分子相加。以下各式要求 $x \neq 0$ 且 $x \neq -1$。

$$\frac{1}{x+1} + \frac{x+2}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{(x+2)(x+1)}{x(x+1)}$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{x+2}{x}=\frac{x+x^2+3x+2}{x(x+1)}=\frac{x^2+4x+2}{x(x+1)}$$

⑦ **比较恒等式的系数：**若两个式子对所有允许的x都相等，它们表示同一个表达式。例如$ax+b=9x+8$恒成立。令$x=0$得到$b=8$，再令$x=1$得到$a+8=17$，所以$a=9$。这与只在某个x处相等的方程不同。

填空：①输出　②括号　③内向外

同一函数连续作用两次

	图像	数量关系
同一关系	$x \xrightarrow{f} 3x+2 \xrightarrow{g} 9x+8$	$g(g(x))=3(3x+2)+2=9x+8$

点石成金　题目出现求复合函数或把一个式子输入函数时，先把输入式加括号代入，复合时由内向外计算。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q11(c)]

$\mathrm{f}(x)=2x-1$　　$\mathrm{g}(x)=3x+2$　　$\mathrm{h}(x)=\frac{1}{x}, x\neq 0$　　$\mathrm{j}(x)=x^2$

(c) Find gg(x), giving your answer in its simplest form.

已知函数
$f(x)=2x-1$，$g(x)=3x+2$，
$h(x)=\frac{1}{x}$，其中 $x\neq 0$，
$j(x)=x^2$。
(c) 求 $gg(x)$，答案写成最简形式。

解答　$gg(x)$ 表示 $g(g(x))$，由内向外代入，得

$$gg(x)=g(3x+2)=3(3x+2)+2$$

$$gg(x)=9x+6+2=9x+8$$

答：$9x+8$。

方法：先看复合记号右侧的函数，从内层输出起手。

辨析：内层是先求输出的函数，外层是接收该输出的函数。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/23 Q20(a)]

提示：看括号内的输入式，核对乘数是否乘到每一项。

$$f(x)=6x-7 \qquad g(x)=x^{-3}$$

(a) Find $f(x+2)$.
Give your answer in its simplest form.

已知函数
$f(x)=6x-7$，$g(x)=x^{-3}$。
(a) 求 $f(x+2)$，答案写成最简形式。

✓ **答案**

$$6x+5$$

解析 把 $x+2$ 整体代入 $f(x)=6x-7$，得

$$f(x+2)=6(x+2)-7$$

$$f(x+2)=6x+12-7=6x+5$$

答：$6x+5$。

2. [2025 · October/November 0580/22 Q20(a)(ii)]

提示：先将 -1 代入 f(x)。

$$f(x)=\frac{21}{2x-1},\ x\neq\frac{1}{2} \qquad g(x)=3x+4$$

(a) Find

(ii) $gf(-1)$

已知函数
$f(x)=\frac{21}{2x-1}$，其中 $x\neq\frac{1}{2}$，
$g(x)=3x+4$。
(a)(ii) 求 $gf(-1)$。

✓ **答案**

$$-17$$

解析 $gf(-1)$ 表示先求 $f(-1)$，再代入 g。
当 $x=-1$ 时，分母不为零，得

$$f(-1)=\frac{21}{2\times(-1)-1}=\frac{21}{-3}=-7$$

$$gf(-1)=g(-7)=3\times(-7)+4=-17$$

答：$gf(-1)=-17$。

3. [2023 · February/March 0580/42 Q11(d)]

提示：先看各复合式的内层，再比较通分时各分母缺的因式。

$$f(x)=2x-1 \qquad g(x)=3x+2 \qquad h(x)=\frac{1}{x},\ x\neq 0 \qquad j(x)=x^2$$

(d) Find $hf(x)+gh(x)$, giving your answer as a single fraction in its simplest form.

已知函数
$f(x)=2x-1$，$g(x)=3x+2$，

$h(x)=\frac{1}{x}$，其中 $x\neq 0$，
$j(x)=x^2$。
(d) 求 $hf(x)+gh(x)$，答案写成一个最简分式。

✓ **答案**

$$\frac{4x^2+5x-3}{x(2x-1)}$$

解析 分别求两个复合函数，得

$$hf(x)=h(2x-1)=\frac{1}{2x-1}$$

$$gh(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}+2=\frac{2x+3}{x}$$

由各分母不为 0，得 $x\neq 0$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$。通分得

$$hf(x)+gh(x)=\frac{1}{2x-1}+\frac{2x+3}{x}$$

$$hf(x)+gh(x)=\frac{x+(2x+3)(2x-1)}{x(2x-1)}$$

$$hf(x)+gh(x)=\frac{x+4x^2-2x+6x-3}{x(2x-1)}$$

$$hf(x)+gh(x)=\frac{4x^2+5x-3}{x(2x-1)}$$

答：$\frac{4x^2+5x-3}{x(2x-1)}$，其中 $x\neq 0$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$。

4. [2025 · May/June 0580/21 Q14(c)]
提示：先把内层函数的整个输出代入外层函数。

$\mathrm{f}(x)=3x-4$　　$\mathrm{g}(x)=4x+1$

(c) $\mathrm{fg}(x)=ax+b$

Find the value of a, and the value of b.

已知函数
$f(x)=3x-4$

$g(x)=4x+1$

(c) $fg(x)=ax+b$。
求 a 的值和 b 的值。

✓ **答案** $a=12$，$b=-1$

解析 先求 $g(x)$，再将所得式子代入 f，得

$$fg(x)=f(4x+1)=3(4x+1)-4$$

$$fg(x)=12x+3-4=12x-1$$

由题意，得

$$ax+b=12x-1$$

两式的 x 项系数与常数项分别相等，得

$$a=12$$

$$b=-1$$

答：$a=12$，$b=-1$。

5. [2025 · May/June 0580/23 Q22(c)]
提示：先写出复合函数的表达式，再令它等于题给的数。

$\mathrm{f}(x)=2x+5$　　$\mathrm{g}(x)=x-4$　　$\mathrm{h}(x)=5^x$

(c) Solve $\mathrm{fg}(x)=25$.

已知函数

$f(x)=2x+5$

$g(x)=x-4$

$h(x)=5^x$

(c) 解方程 $fg(x)=25$。

✓ **答案**

$$x=14$$

解析 先求 $g(x)$，再代入 f，得

$$fg(x)=f(x-4)=2(x-4)+5$$

$$fg(x)=2x-8+5=2x-3$$

由题意，得

$$2x-3=25$$

两边同加 3，得

$$2x=28$$

两边同除以 2，得

$$x=14$$

答：$x=14$。

2.27 反函数

题型 1 交换输入输出后逐步求出反函数（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **输入输出关系：**题中函数把输入先立方，再加 1。用 x 表示输入，y 表示输出。

$$y=f(x)=x^3+1$$

② **反函数的记号：**原函数把 2 变为 9，反函数把 9 变回 2。用 f^{-1} 表示反函数，上标 -1 不表示倒数。

$$f(2)=2^3+1=9$$

$$f^{-1}(9)=2$$

③ **交换输入输出：**求反函数，先将原函数等式中的输入与输出_____。

$$y=x^3+1$$

$$x=y^3+1$$

④ **撤销加减运算：**交换后，先撤销含 y 一边的加减运算。等式两边同加或同减一个数。

$x=2y+3$	$x=2y-3$
$2y=x-3$	$2y=x+3$

⑤ **撤销乘法运算：**由左栏等式求 y，等式两边同_____。除数不能为 0。

$$y=\frac{x-3}{2}$$

⑥ **认识立方根：**一个数的立方等于 a，这个数叫作 a 的_____。每个实数 a 都有唯一的实数立方根，记作 $\sqrt[3]{a}$。

$$2^3=8,\sqrt[3]{8}=2$$

$$(-2)^3=-8,\sqrt[3]{-8}=-2$$

由下式求 y，等式两边取立方根。

$$y^3=a$$

$$y=\sqrt[3]{a}$$

填空：①交换　②除以 2　③立方根

点石成金　题目出现求 $f^{-1}(x)$ 时，先写出原函数等式，再交换输入与输出。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q25]

$$\mathrm{f}(x)=x^3+1$$

Find $\mathrm{f}^{-1}(x)$.

已知函数
$f(x)=x^3+1$。
求 $f^{-1}(x)$。

解答　设
$y=x^3+1$。
交换 x 与 y，得
$x=y^3+1$。
两边同减 1，得
$y^3=x-1$。
两边取立方根，得
$y=\sqrt[3]{x-1}$。
答：$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$。

方法：先看原式先立方后加一的顺序，交换输入输出后从撤销加法起手。

辨析：反函数是把输出还原为输入，倒数是与原数相乘得一的数。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/22 Q14]

提示：看交换后含未知量的一边，比较加法与乘法的撤销顺序。

$$f(x) = 5x + 2$$

Find $f^{-1}(x)$.

已知函数
$f(x) = 5x + 2$。
求 $f^{-1}(x)$。

✓ **答案**

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{5}$$

解析 设
$y = 5x + 2$。
交换 x 与 y，得
$x = 5y + 2$。
两边同减 2，得
$5y = x - 2$。
两边同除以 5，得
$y = \frac{x-2}{5}$。
答：$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{5}$。

2. [2023 · May/June 0580/23 Q20(b)]

提示：看交换后的负常数项，比较等式两边应同加还是同减。

$$f(x) = 6x - 7 \qquad g(x) = x^{-3}$$

(b) Find $f^{-1}(x$

已知函数
$f(x) = 6x - 7$，
$g(x) = x^{-3}$。
(b) 求 $f^{-1}(x)$。

✓ **答案**

$$f^{-1}(x) = \frac{x+7}{6}$$

解析 设
$y = 6x - 7$。
交换 x 与 y，得
$x = 6y - 7$。
两边同加 7，得
$6y = x + 7$。
两边同除以 6，得
$y = \frac{x+7}{6}$。
答：$f^{-1}(x) = \frac{x+7}{6}$。

3. [2024 · October/November 0580/41 Q8(a)(ii)]

提示：交换输入与输出后，把含未知数的项移到另一边。

(a) $f(x) = 7 - 3x \qquad g(x) = x^2 - 16$

(ii) Find $f^{-1}(x)$.

(a) 已知函数
$f(x)=7-3x$，$g(x)=x^2-16$。
(ii) 求 $f^{-1}(x)$。

✓ **答案**

$$f^{-1}(x)=\frac{7-x}{3}$$

解析 设

$$y=7-3x$$

交换 x 与 y，得

$$x=7-3y$$

两边同加 $3y$，得

$$x+3y=7$$

两边同减 x，得

$$3y=7-x$$

两边同除以 3，得

$$y=\frac{7-x}{3}$$

答：$f^{-1}(x)=\frac{7-x}{3}$。

4. [2025 · May/June 0580/21 Q14(b)]
← 提示：设 y = 3x-4，交换输入与输出。

$f(x)=3x-4$ $g(x)=4x+1$

(b) Find $f^{-1}(x$

已知函数
$f(x)=3x-4$，$g(x)=4x+1$。
(b) 求 $f^{-1}(x)$。

✓ **答案**

$$f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3}$$

解析 设

$$y=3x-4$$

交换 x 与 y，得

$$x=3y-4$$

两边同加 4，得

$$3y=x+4$$

两边同除以 3，得

$$y=\frac{x+4}{3}$$

答：$f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3}$。

5. [2025 · May/June 0580/23 Q22(b)]
提示：交换输入与输出后，先撤销加 5 的运算。

$\mathrm{f}(x)=2x+5$　　$\mathrm{g}(x)=x-4$　　$\mathrm{h}(x)=5^x$

(b) Find $\mathrm{f}^{-1}(x$

已知函数
$f(x)=2x+5$，$g(x)=x-4$，$h(x)=5^x$。
(b) 求 $f^{-1}(x)$。

✓ **答案**

$$f^{-1}(x)=\frac{x-5}{2}$$

解析 设

$$y=2x+5$$

交换 x 与 y，得

$$x=2y+5$$

两边同减 5，得

$$2y=x-5$$

两边同除以 2，得

$$y=\frac{x-5}{2}$$

答：$f^{-1}(x)=\frac{x-5}{2}$。

2.28 移项求范围，再按要求写整数解

题型 1 移项求范围，再按要求写整数解（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **整数范围：**本例用 x 表示所求的整数，包括负整数、零和正整数。两个不等式同时成立，合写为

$$-3\le x<3$$

② **端点取舍：**看不等号是否含等号，确定端点能否取到。

含等号	不含等号
$x\ge -3$	$x<3$
可以取到_____。	不能取到_____。

③ **整数列举：**从范围内最小的整数起，逐个加 1。本例从 -3 起，写到_____为止。

④ **去掉括号：**不等式中出现括号时，括号外的数乘括号内每一项。

$$3(x-1)\ge x+5$$

$$3x-3\ge x+5$$

⑤ **移项合并：**含 x 的项移到左边，常数项移到右边。移项时改变该项的正负号，再合并同类项。

$$3x - x \geq 5 + 3$$

$$2x \geq 8$$

⑥ **同除正数：**两边同除以正数 2，不等号方向_____。

$$x \geq 4$$

填空：①−3　②3　③2　④不变

点石成金　题目出现含未知数的不等式或要求列出所有整数值时，先确定未知数的取值范围。

例 1　[2023 · May/June 0580/12 Q16]

x is an integer where $x \geqslant -3$ and $x < 3$.

Write down all the possible values of x.

x 是整数，且 $x \geq -3$、$x < 3$。
写出 x 的所有可能值。

解答　由 $x \geq -3$，得范围内最小的整数为 -3。
由 $x < 3$，得范围内最大的整数为 2。
答：x 的所有可能值为 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$。

方法：先看两端的不等号，确定端点取舍，再从最小整数逐个列举。

辨析：含等号的端点是可取的，不含等号的端点是不可取的。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/22 Q8(b)]

提示：先看括号外的系数，再核对移项后各项的正负号。

Solve.

(b) $11x - 3 \geqslant 2(2x + 9)$

求解。
(b) $11x - 3 \geq 2(2x + 9)$

✓ **答案**

$$x \geq 3$$

解析　去括号，得

$$11x - 3 \geq 4x + 18$$

移项并合并同类项，得

$$11x - 4x \geq 18 + 3$$

$$7x \geq 21$$

两边同除以正数 7，得

$$x \geq 3$$

答：$x \geq 3$。

2. [2026 · February/March 0580/22 Q8]
提示：先判断左右两个端点能否取到。

Find the integer values of x that satisfy $-3 \leqslant x < 1$.

求满足下列不等式的 x 的整数值。

$-3 \leq x < 1$

✓ **答案**

$-3, -2, -1, 0$

解析 由 $x \geq -3$，得范围内最小的整数为 -3。
由 $x < 1$，得范围内最大的整数为 0。
从 -3 起逐个加 1，列至 0。
答：x 的所有整数值为 $-3, -2, -1, 0$。

3. [2024 · February/March 0580/32 Q7(e)]
提示：先根据两端的不等号，确定最小和最大的整数。

(e) n is an integer where $n > -3$ and $n \leqslant 1$.

Write down all the possible values of n.

(e) n 是整数，且 $n > -3$、$n \leq 1$。
写出 n 的所有可能值。

✓ **答案**

$-2, -1, 0, 1$

解析 由 $n > -3$，得范围内最小的整数为 -2。
由 $n \leq 1$，得范围内最大的整数为 1。
从 -2 起逐个加 1，列出范围内的全部整数。
答：n 的所有可能值为 $-2, -1, 0, 1$。

4. [2025 · February/March 0580/12 Q19(a)]
提示：先确定整数范围，再保留其中的奇数。

(a) n is an **odd** number.

Write down the values of n that satisfy $7 < n \leqslant 15$.

(a) n 是奇数。
写出满足 $7 < n \leq 15$ 的所有 n 值。

✓ **答案**

$9, 11, 13, 15$

解析 由 $7 < n \leq 15$，得范围内的整数为
$8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$。
其中奇数为 $9, 11, 13, 15$。
答：n 的所有可能值为 $9, 11, 13, 15$。

5. [2023 · October/November 0580/21 Q11]
提示：先看括号内每项是否都乘了系数，再比较两边同类项。

Solve.

$$4(2x-3) \geqslant 43+3x$$

求解。

$4(2x-3) \geq 43+3x$

✓ **答案**

$$x \geq 11$$

解析 去括号，得

$$8x - 12 \geq 43 + 3x$$

移项并合并同类项，得

$$8x - 3x \geq 43 + 12$$

$$5x \geq 55$$

两边同除以正数 5，得

$$x \geq 11$$

答：$x \geq 11$。

2.29 画出边界并取满足所有不等式的公共区域

题型 1 画出边界并取满足所有不等式的公共区域（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **数量关系转写：**裁缝一周做 x 条连衣裙、y 件衬衫。两类衣服的总数为_____，按数量限制列出不等式。

数量限制	不等式
至少做 4 条连衣裙	$x \geq 4$
至多做 7 件衬衫	$y \leq 7$
两类衣服合计少于 14 件	$x + y < 14$
衬衫数超过连衣裙数的 $\frac{2}{3}$	$y > \frac{2}{3}x$

② **确定边界线型：**把不等号换成等号，得到边界直线。包含相等时画实线，不包含相等时画虚线。

原不等式：

$$x \geq 4$$

边界：

$$x = 4$$

画_____线。

原不等式：

$$x + y < 14$$

边界：

$$x + y = 14$$

画_____线。

③ **描点画出直线：**在边界上取两个点，连接并延长。含两项的不等式可先整理为 y 的形式。

$$2x + 3y < 6$$

$$3y < 6 - 2x$$

$$y < \frac{6 - 2x}{3} = 2 - \frac{2}{3}x$$

边界直线	线上两点
$x = 4$	$(4, 0), (4, 2)$
$y = 7$	$(0, 7), (2, 7)$
$y = \frac{2}{3}x$	$(0, 0), (3, 2)$
$y = x + 1$	$(0, 1), (1, 2)$
$y = 2 - \frac{2}{3}x$	$(0, 2), (3, 0)$

④ **判断水平竖直：**竖直边界比较横坐标，水平边界比较纵坐标。保留满足不等式的半平面，遮去另一侧。

$x \geq 4$

保留直线右侧。

$$x \leq 4$$

保留直线_____侧。

$y \leq 7$

保留直线下方。

$$y > 7$$

保留直线_____方。

⑤ **判断斜线两侧：**整理为 y 的形式后，比较纵坐标。也可取边界外一点代入，确定保留哪一侧。

$y > \frac{2}{3}x$

保留斜线上方，遮去下方。

取 $(0,1)$，代入得

$$1 > \frac{2}{3} \times 0 = 0$$

保留含此点的一侧。

$y < 2 - \frac{2}{3}x$

保留斜线下方，遮去上方。

取 $(0,0)$，代入原式得

$$2 \times 0 + 3 \times 0 = 0 < 6$$

保留含此点的一侧。

⑥ **保留公共区域：**把不满足各条不等式的部分分别涂阴影。本例中的点 $(5,4)$ 同时满足四个条件：

$$5 \geq 4$$

$$4 \leq 7$$

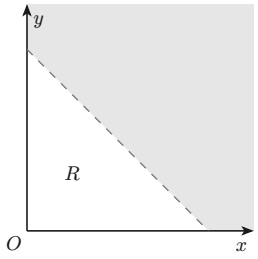
$$5 + 4 = 9 < 14$$

$$4 > \frac{2}{3} \times 5 = \frac{10}{3}$$

余下未遮部分是_____，在其内部标上 R。

⟵ 填空：①$x+y$　②实　③虚　④左　⑤上　⑥公共区域

按边界方向留下公共区域

	图像	数量关系
同一关系		$x \geq 0$，$y \geq 0$，$x + y < 4$。

点石成金　题目出现数量限制或要求画出满足多个不等式的区域时，先列不等式并确定边界线型。

例 1　[2023 · May/June 0580/41 Q8(a)]

A tailor makes x dresses and y shirts in one week.
In one week

- he makes at least 4 dresses
- he makes no more than 7 shirts
- he makes less than 14 dresses and shirts altogether
- the number of shirts he makes is more than $\frac{2}{3}$ of the number of dresses.

One of the inequalities that shows this information is $x \geqslant 4$.

(a) Write down the other three inequalities in x and/or y.

一名裁缝一周制作 x 条连衣裙和 y 件衬衫。
在一周内：
• 他至少制作 4 条连衣裙；
• 他制作的衬衫不超过 7 件；
• 他制作的连衣裙和衬衫合计少于 14 件；
• 他制作的衬衫数量超过连衣裙数量的 $\frac{2}{3}$。
表示这些信息的一个不等式是 $x \geq 4$。
(a) 写出其余三个关于 x 和 / 或 y 的不等式。

解答　由每周至多做 7 件衬衫，得

$$y \leq 7$$

由两类衣服合计少于 14 件，得

$$x + y < 14$$

由衬衫数超过连衣裙数的 $\frac{2}{3}$，得

$$y > \frac{2}{3}x$$

方法：先圈出数量限制词，再按衣服种类写出对应数量关系。

辨析：至多是允许等于上限，少于是排除等于上限。

拓展：多个不等式的解集是各自所表示半平面的交集。

答：其余三个不等式为 $y \leq 7$，$x + y < 14$，$y > \frac{2}{3}x$。

针对练习

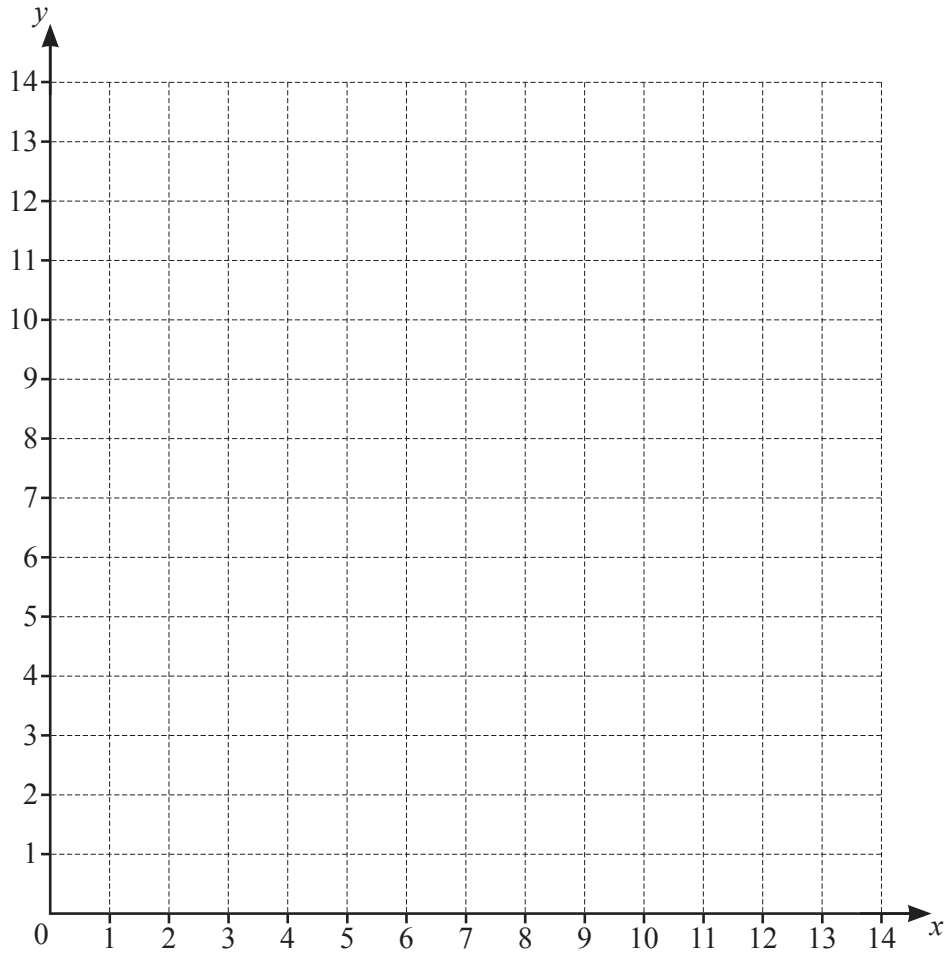
1. [2023 · May/June 0580/41 Q8(b)]
提示：先查不等号是否含等号，再用线外点检验保留侧。

A tailor makes x dresses and y shirts in one week.
In one week

- he makes at least 4 dresses
- he makes no more than 7 shirts
- he makes less than 14 dresses and shirts altogether
- the number of shirts he makes is more than $\frac{2}{3}$ of the number of dresses.

One of the inequalities that shows this information is $x \geqslant 4$.

(b)



On the grid, draw 4 straight lines and shade the unwanted regions to show these inequalities.
Label the region R that satisfies the 4 inequalities.

一名裁缝一周制作 x 条连衣裙和 y 件衬衫。
在一周内：
• 他至少制作 4 条连衣裙；
• 他制作的衬衫不超过 7 件；
• 他制作的连衣裙和衬衫合计少于 14 件；
• 他制作的衬衫数量超过连衣裙数量的 $\frac{2}{3}$。
表示这些信息的一个不等式是 $x \geq 4$。
(b) 图中横轴标为 x，纵轴标为 y；两轴刻度均从 0 到 14，每格表示 1。
在方格图上画出 4 条直线，并将不需要的区域涂上阴影，以表示这些不等式。将满足全部 4 个不等式的区域标为 R。

✓ **答案** 实线为 $x=4$、$y=7$，虚线为 $x+y=14$、$y=\frac{2}{3}x$。遮去 $x<4$、$y>7$、$x+y\geq 14$、$y\leq \frac{2}{3}x$ 的部分，余下区域标为 R。

解析 由题意，四个不等式为 $x\geq 4$，$y\leq 7$，$x+y<14$，$y>\frac{2}{3}x$。
含相等的边界画实线，故画 $x=4$，$y=7$。
不含相等的边界画虚线，故画 $x+y=14$，$y=\frac{2}{3}x$。
直线 $x+y=14$ 经过 $(0,14)$，$(14,0)$。
直线 $y=\frac{2}{3}x$ 经过 $(0,0)$，$(3,2)$。
分别遮去直线 $x=4$ 左侧、直线 $y=7$ 上方，以及两条斜线的不满足部分：$y\geq 14-x$，$y\leq \frac{2}{3}x$。
余下部分位于竖直实线右侧、水平实线下方，并在两条虚线之间。
取点 $(5,4)$，有

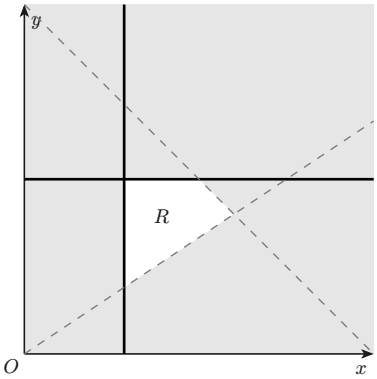
$$5\geq 4$$

$$4 \leq 7$$

$$5+4=9<14$$

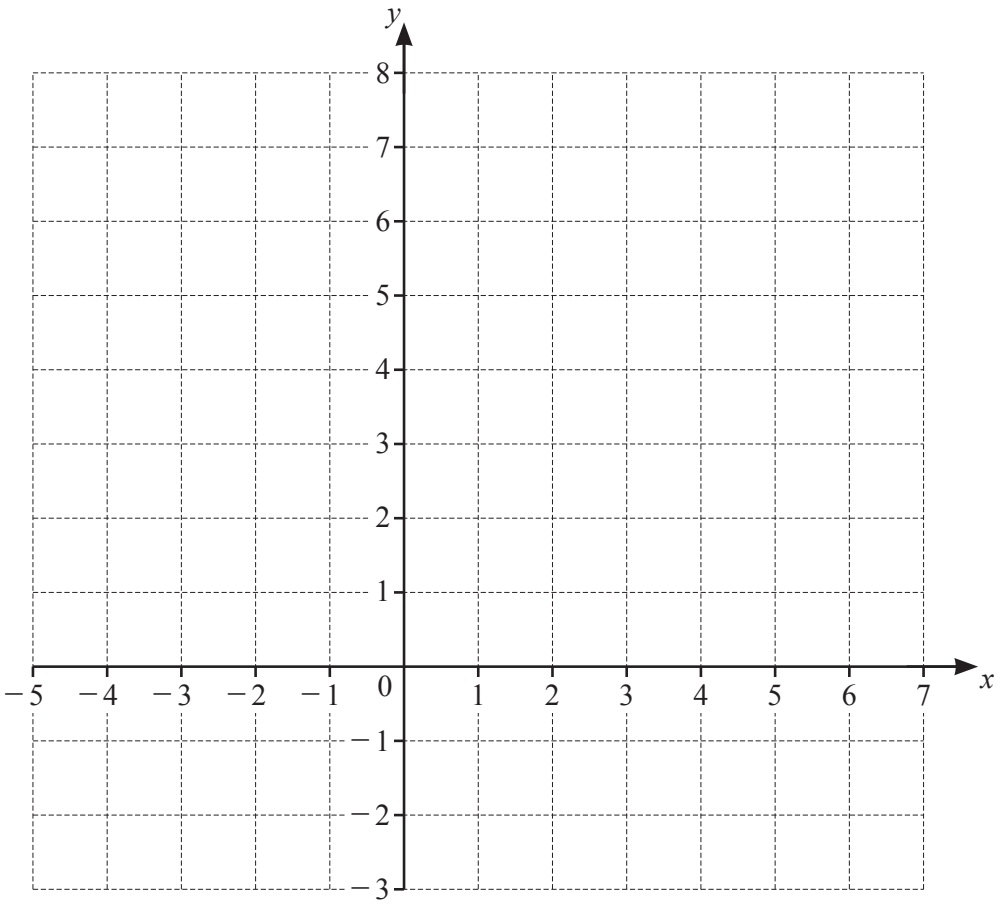
$4>\frac{2}{3}\times 5=\frac{10}{3}$。

答：在含点 $(5,4)$ 的未遮公共区域内标上 R；两条实线上的相应边界包含在内，两条虚线均不包含在内。



2. [2023 · October/November 0580/21 Q15]

提示：竖线比较横坐标，斜线比较同一横坐标下的纵坐标。



By shading the **unwanted** regions of the grid, draw and label the region R which satisfies these inequalities.

$$y>1 \qquad x\leqslant 2 \qquad y\geqslant x+2$$

图中横轴标为 x，刻度从 -5 到 7；纵轴标为 y，刻度从 -3 到 8。两轴每格均表示 1，原点标为 0。

将方格图中不需要的区域涂上阴影，画出并标明满足下列不等式的区域 R。$y>1$，$x\leq 2$，$y\geq x+2$。

✓ **答案** 画虚线 $y=1$，实线 $x=2$、$y=x+2$。遮去 $y\le 1$、$x>2$、$y<x+2$ 的部分，余下公共区域标为 R。

解析 由 $y>1$，

画虚线 $y=1$，遮去该线及其下方。

由 $x\le 2$，

画实线 $x=2$，遮去该线右侧。

由 $y\ge x+2$，

画实线 $y=x+2$。

取

$$x=0,\quad y=2$$

$$x=2,\quad y=4,$$

连接 $(0,2)$、$(2,4)$ 并延长，遮去该线下方。

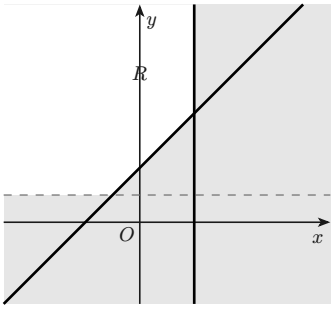
取点 $(0,3)$，有

$$3>1$$

$$0\le 2$$

$3\ge 0+2=2$。

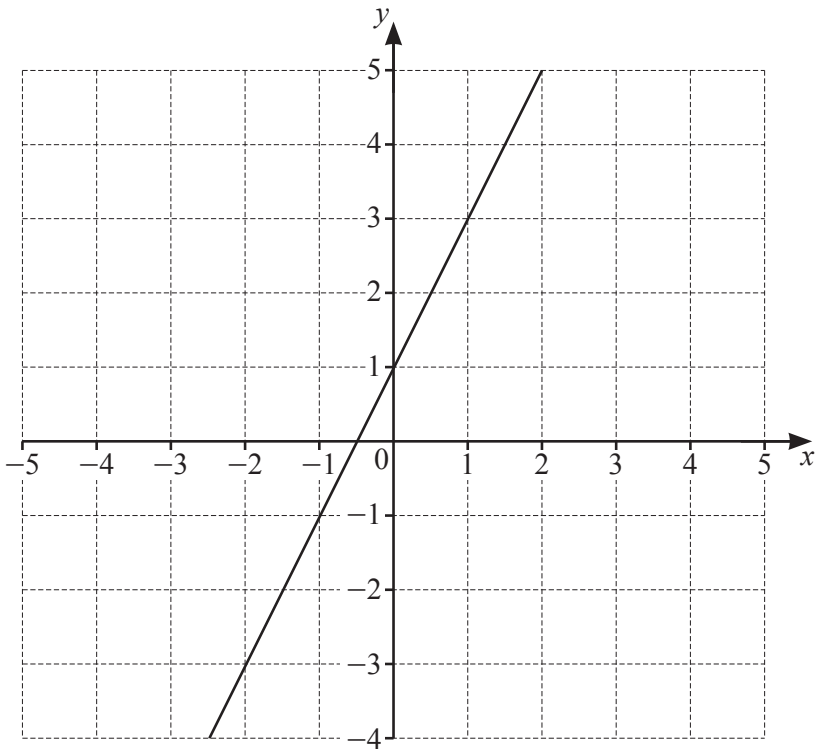
答：在虚线上方、竖直实线左侧、斜实线上方的未遮公共区域内标上 R，标记可放在 $(0,3)$ 附近。



3. [2023 · October/November 0580/23 Q13]

提示：先核对已画直线，再把两项不等式整理成纵坐标形式。

The graph of $y = 2x + 1$ is drawn on the grid.



By shading the **unwanted** regions of the grid, find and label the region R which satisfies these inequalities.

$$y \geqslant 2x + 1 \qquad y \geqslant 1 \qquad 4x + 3y < 12$$

方格图上已画出直线 $y = 2x + 1$。

图中横轴标为 x，刻度从 -5 到 5；纵轴标为 y，刻度从 -4 到 5。两轴每格均表示 1，原点标为 0。

将方格图中不需要的区域涂上阴影，找出并标明满足下列不等式的区域 R。 $y \geq 2x + 1$， $y \geq 1$， $4x + 3y < 12$。

✓ **答案** 保留已画出的实线 $y = 2x + 1$，补画实线 $y = 1$ 和虚线 $4x + 3y = 12$。遮去 $y < 2x + 1$、$y < 1$、$4x + 3y \geq 12$ 的部分，余下公共区域标为 R。

解析 已画出的直线为 $y = 2x + 1$。

由 $y \geq 2x + 1$，

保留该实线及其上方，遮去下方。

由 $y \geq 1$，

画实线 $y = 1$，遮去下方。

由 $4x + 3y < 12$，

得

$$3y < 12 - 4x$$

$y < \frac{12-4x}{3} = 4 - \frac{4}{3}x$。

边界不包含相等，故画虚线 $4x + 3y = 12$。

当 $x = 0$ 时， $y = 4$；

当 $y = 0$ 时， $x = 3$。

连接 $(0, 4)$、$(3, 0)$ 并延长，遮去该虚线及其上方。

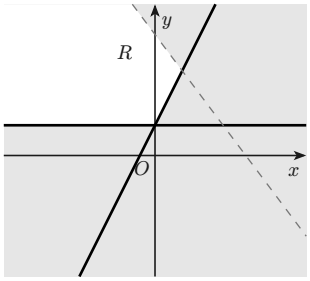
取点 $(0, 2)$，有

$$2 \geq 2 \times 0 + 1 = 1$$

$$2 \geq 1$$

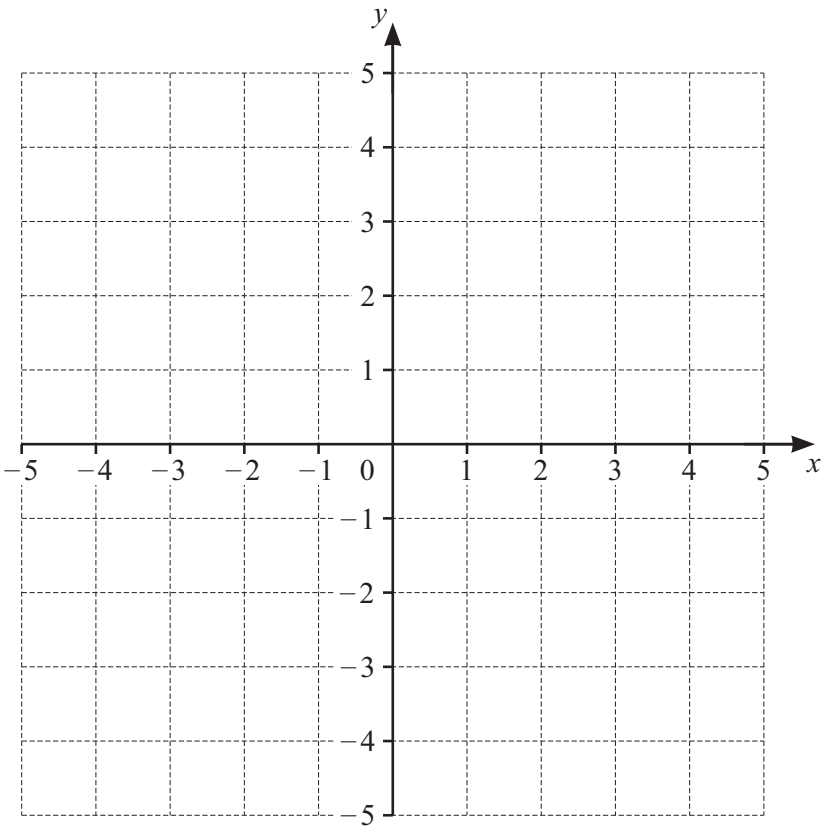
$4 \times 0 + 3 \times 2 = 6 < 12$。

答：在两条实线上方、虚线下方的未遮公共区域内标上 R，标记可放在 $(0, 2)$ 附近。



4. [2024 · October/November 0580/22 Q13]

提示：先把连写的不等式分成两个条件，再确定三条边界的线型。



The region R satisfies these inequalities.

$$-3 < y \leqslant 2 \qquad\qquad y \leqslant x - 1$$

By drawing suitable straight lines and shading **unwanted** regions, find and label the region R.

图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 0。两轴刻度均从 -5 到 5，每格表示 1。

区域 R 满足下列不等式：

$$-3 < y \leq 2, \quad y \leq x - 1$$

画出适当的直线，并将不需要的区域涂上阴影，找出并标明区域 R。

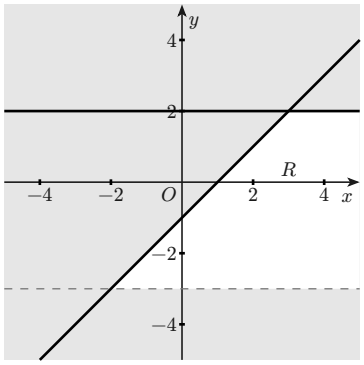
✓ **答案** 画虚线 $y = -3$，实线 $y = 2$、$y = x - 1$。遮去 $y \leq -3$、$y > 2$、$y > x - 1$ 的部分，余下公共区域标为 R。

解析 由 $-3 < y \leq 2$，画虚线 $y = -3$ 和实线 $y = 2$。

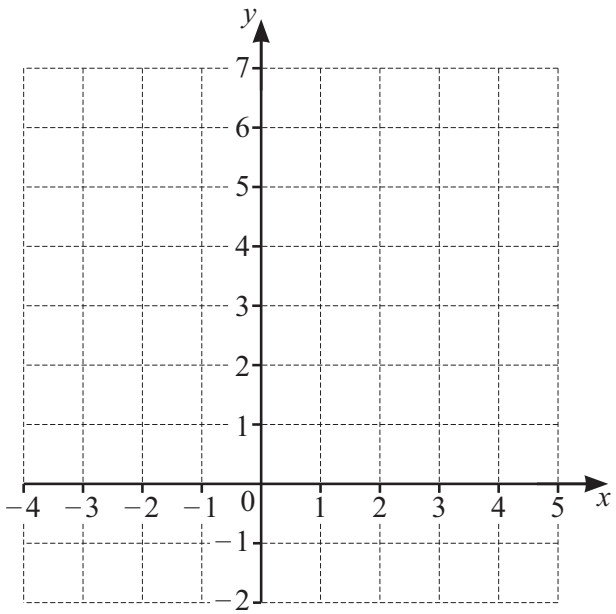
遮去下方满足 $y \leq -3$ 的部分及上方满足 $y > 2$ 的部分。

由 $y \leq x - 1$，其边界为实线

$y = x - 1$。
取 $x = 0$，得
$y = 0 - 1 = -1$。
取 $x = 3$，得
$y = 3 - 1 = 2$。
经过 $(0, -1)$、$(3, 2)$ 画实线，并延伸至方格图边界。
遮去斜线上方满足 $y > x - 1$ 的部分。
答：余下位于两条水平线之间、斜线下方的公共区域标为 R；下边界不包含，上边界和斜边界包含。



5. [2025 · May/June 0580/43 Q16]
提示：分别判断竖线保留哪一侧、另外两条线保留哪一方。



By shading the **unwanted** regions of the grid, draw and label the region R which satisfies these three inequalities.

$$y < 3 \qquad x \leqslant 2 \qquad y < x + 3$$

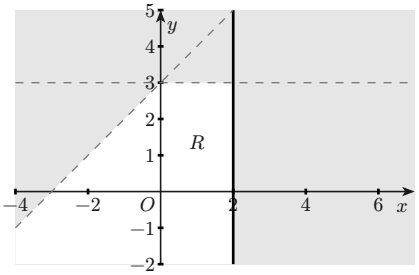
图中横轴标为 x，刻度从 -4 到 5；纵轴标为 y，刻度从 -2 到 7。两轴每格均表示 1，原点标为 0。
将方格图中不需要的区域涂上阴影，画出并标明满足下列三个不等式的区域 R。

$$y < 3, \quad x \leq 2, \quad y < x + 3$$

✓ **答案** 画虚线 $y = 3$、$y = x + 3$，实线 $x = 2$。遮去 $y \geq 3$、$x > 2$、$y \geq x + 3$ 的部分，余下公共区域标为 R。

解析 由 $y < 3$，画虚线 $y = 3$，遮去满足 $y \geq 3$ 的部分。
由 $x \leq 2$，画实线 $x = 2$，遮去右侧满足 $x > 2$ 的部分。
由 $y < x + 3$，其边界为虚线
$y = x + 3$。

取 $x=-3$，得
$y=-3+3=0$。
取 $x=0$，得
$y=0+3=3$。
经过 $(-3,0)$、$(0,3)$ 画虚线，并延伸至方格图边界。
遮去斜线上方及斜线本身满足 $y\geq x+3$ 的部分。
答：余下位于竖线左侧、水平线下方且斜线下方的公共区域标为 R；竖直边界包含，两条虚线边界不包含。



6. [2024 · May/June 0580/42 Q8(b)]
提示：先由四条数量限制分别确定边界方程和线型。

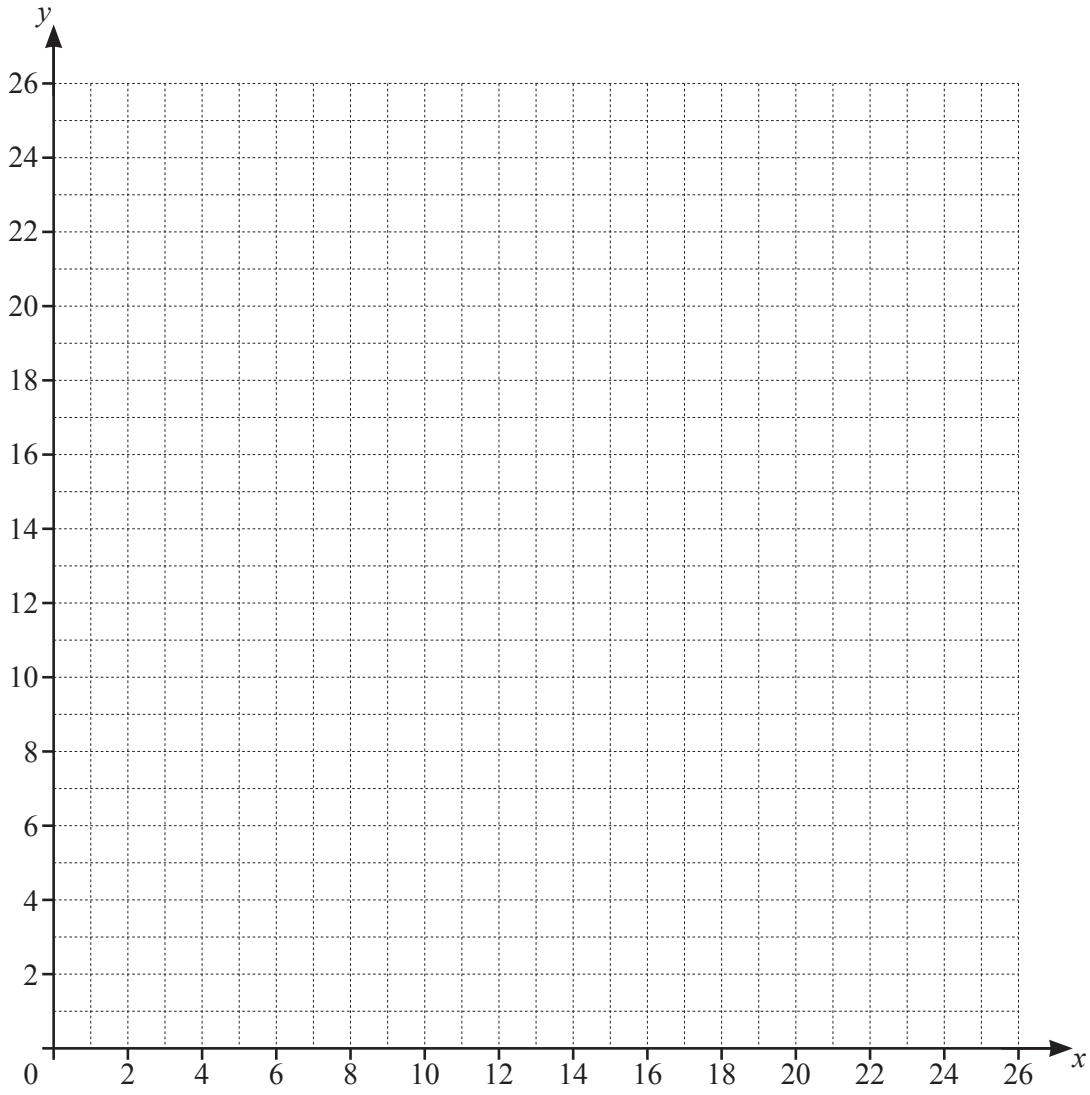
A baker decorates x small cakes and y large cakes.
In one day, he decorates:

- not more than 16 small cakes
- less than 10 large cakes
- more small cakes than large cakes
- a total of not more than 24 cakes.

One of the inequalities that shows this information is $x\leqslant 16$.

(a) Write down the other three inequalities in x and/or y.

(b) On the grid, draw four straight lines and shade the unwanted regions to show these inequalities. Label the region, R, which satisfies the four inequalities.



一名面包师装饰 x 个小蛋糕和 y 个大蛋糕。

一天内，他装饰的蛋糕满足：

- 小蛋糕不超过 16 个；
- 大蛋糕少于 10 个；
- 小蛋糕比大蛋糕多；
- 蛋糕总数不超过 24 个。

表示这些信息的一个不等式是 $x \leq 16$。

(a) 写出其余三个关于 x 和 / 或 y 的不等式。

(b) 在方格图上画出四条直线，并将不需要的区域涂上阴影，以表示这些不等式。将满足全部四个不等式的区域标为 R。

图中横轴标为 x，纵轴标为 y；两轴标出的刻度均为 $0, 2, 4, \ldots, 26$。

✓ **答案** 画实线 $x = 16$、$x + y = 24$，虚线 $y = 10$、$y = x$。在图示第一象限内遮去 $x > 16$、$y \geq 10$、$y \geq x$、$x + y > 24$ 的部分，余下公共区域标为 R。

解析 由题给条件，所求区域同时满足

$x \leq 16$，　$y < 10$，　$y < x$，　$x + y \leq 24$。

含等号的边界画实线，不含等号的边界画虚线。

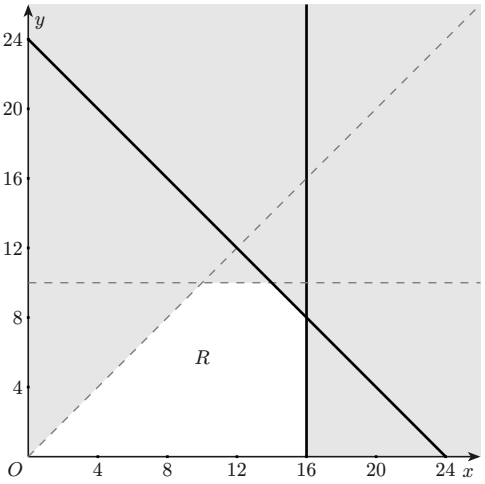
画实线 $x = 16$，遮去右侧满足 $x > 16$ 的部分。

画虚线 $y = 10$，遮去满足 $y \geq 10$ 的部分。

边界 $y = x$ 经过 $(0, 0)$、$(24, 24)$。

经过这两点画虚线，遮去满足 $y \geq x$ 的部分。

由总数限制，另一条边界为
$x+y=24$。
取 $x=0$，得
$y=24$。
取 $y=0$，得
$x=24$。
经过 $(0,24)$、$(24,0)$ 画实线，遮去满足 $x+y>24$ 的部分。
答：图示第一象限内余下的公共区域标为 R；实线边界包含，虚线边界不包含。



2.30 描出两个点，画一次函数直线

题型 1 描出两个点，画一次函数直线（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **坐标点的表示：**图中横轴记为 x，纵轴记为 y。点的坐标先写横坐标，再写纵坐标。

$$(x,y)$$

② **固定纵坐标取点：**题给的直线经过纵坐标为 6 的点。取两个不同的横坐标，所得点的纵坐标均为 _____。

$$y=6$$

$x=-4$	$x=1$
$(-4,6)$	$(1,6)$

③ **水平直线画法：**在图上描出上述两点。用直尺连线并向两端延伸，所得直线与横轴 _____。

④ **含横坐标的取点：**若纵坐标随横坐标改变，须分别代入求值。例如下式中的 $2x$ 表示 2 与 x 相乘。

$$y=2x$$

$x=0$	$x=1$
$y=2\times0=0$	$y=2\times1=2$

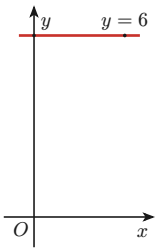
⑤ **两点连线延伸：**由上述代入结果，描出下列两点。用直尺连线，并向两端延伸至方格图边界。

$$(0,0),\quad (1,2)$$

⑥ **梯度与走格描点：**一条直线的梯度是纵坐标的变化量除以横坐标的变化量。$y=2x$上，从$(0,0)$到$(1,2)$，向右1、向上2，梯度为$\frac{2}{1}=2$。一般地，$y=mx+c$中，x每增加1，y增加m，所以m就是梯度。例如梯度为$\frac{2}{3}$、经过$(1,2)$的直线，可以从$(1,2)$向右走3、向上走2，得到另一点$(4,4)$。把这两个点连接并延长，得到所求直线。

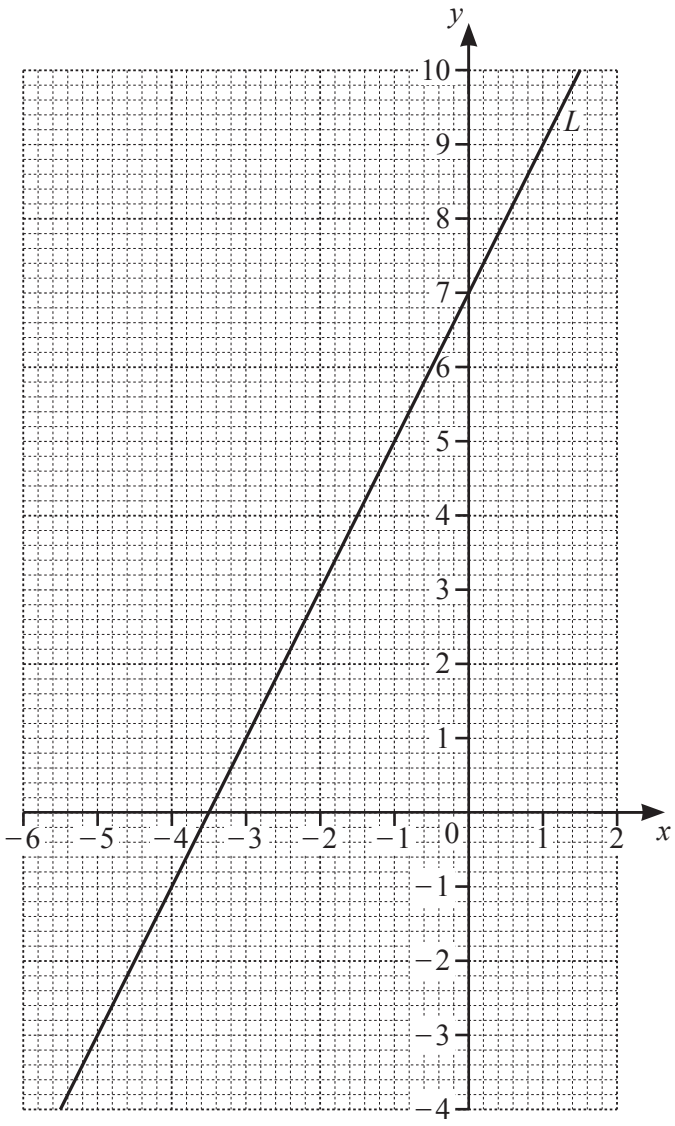
填空：①6　②平行

常数函数是一条水平线

	图像	数量关系
同一关系		$y=6$ 上每个点的纵坐标均为 6。

点石成金　题目出现方格图并要求画给定方程的直线时，先取两个横坐标，求出对应的纵坐标。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q6(d)(i)]



(d) (i) On the grid, draw the line $y=6$.

(d)(i) 在方格图上画出直线

$$y=6$$

图中横轴标为 x，纵轴标为 y，已画出的直线标为 L。横轴刻度从 -6 到 2，纵轴刻度从 -4 到 10。

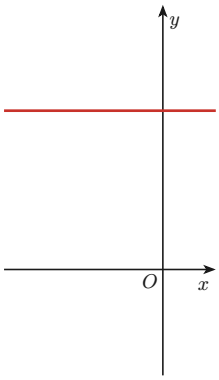
解答 由题给方程，得线上各点的纵坐标均为 6。

$$y = 6$$

取两个不同的横坐标，得两点

$$(-4, 6),\quad (1, 6)$$

在图上描出这两点，用直尺连线并延伸至方格图两侧边界。
答：画出经过 $(0, 6)$ 且平行于横轴的直线。



方法：先看方程中纵坐标是否固定，再选两个不同的横坐标取点。

辨析：横坐标是左右位置的数值，纵坐标是上下位置的数值。

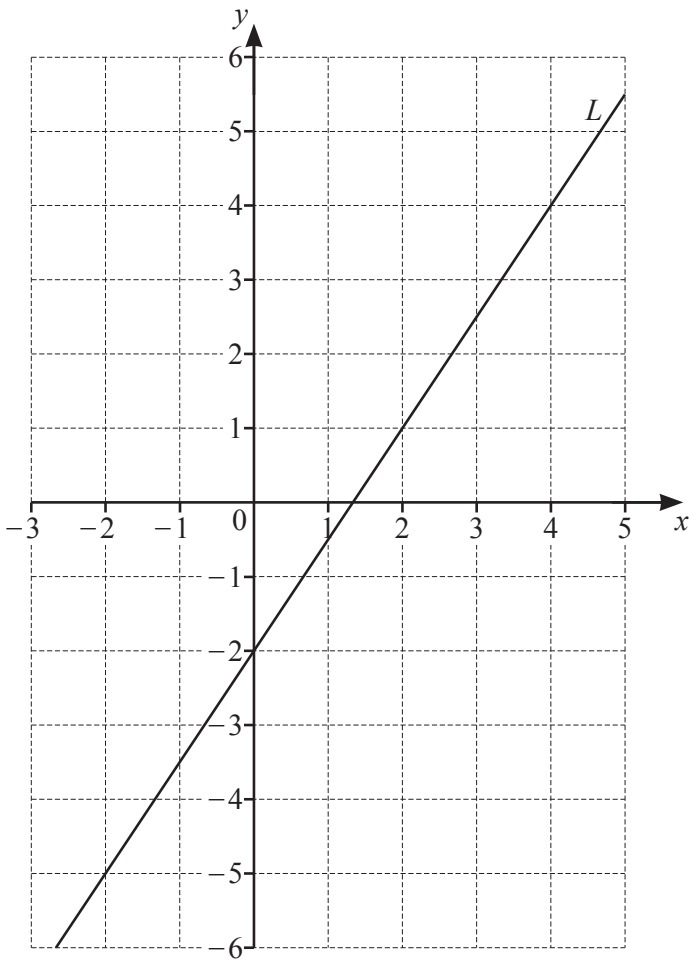
拓展：两个不同的点确定一条直线，连线后还须向两端延伸。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/32 Q7(a)(ii)]

提示：看方程固定了哪个坐标，再比较所取两点的对应坐标。

(a)



(ii) On the grid, draw the line $y = 1$.

7(a)(ii) 在方格图上画出直线

$$y = 1$$

图中横轴标为 x，纵轴标为 y，已画出的直线标为 L。横轴刻度从 -3 到 5，纵轴刻度从 -6 到 6。

✓ **答案** 经过 $(0,1)$ 且平行于横轴的直线。

解析 由题给方程，得线上各点的纵坐标均为 1。

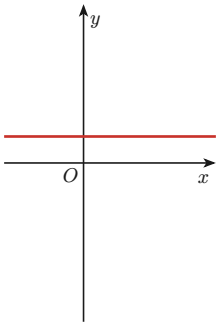
$$y = 1$$

取两个不同的横坐标，得两点

$$(-2,1),\quad (4,1)$$

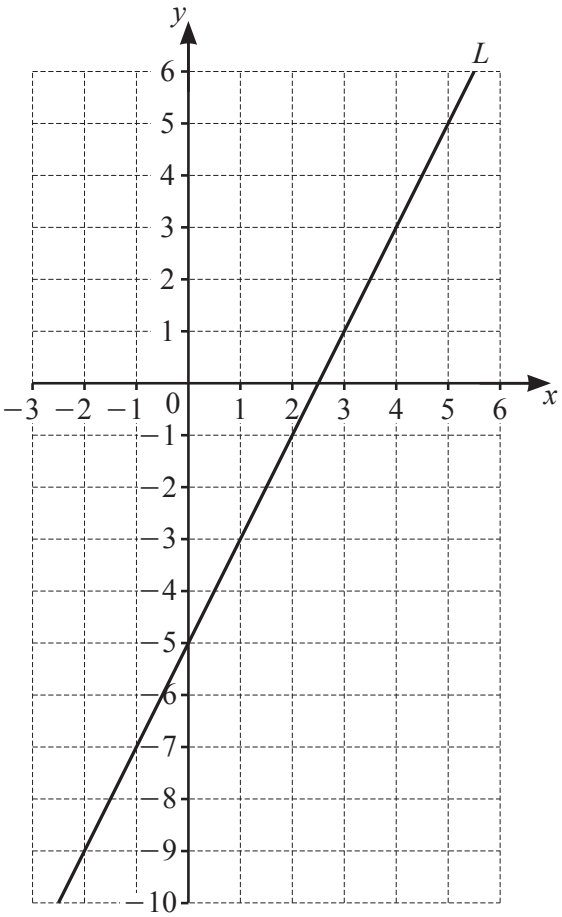
在图上描出这两点，用直尺连线并延伸至方格图两侧边界。

答：画出经过 $(0,1)$ 且平行于横轴的直线。



2. [2023 · October/November 0580/31 Q8(b)(i)]

提示：看横纵坐标的关系，选两个横坐标分别代入求值。



(b) (i) On the grid, draw the line $y = x$.

(b)(i) 在方格图上画出直线

$$y = x$$

图中横轴标为 x，纵轴标为 y，已画出的直线标为 L。横轴刻度从 -3 到 6，纵轴刻度从 -10 到 6。

✓ **答案** 用直尺画出经过 $(0,0)$ 和 $(5,5)$ 的直线，并延伸至方格图边界。

解析 由题给方程，得线上各点的纵坐标等于横坐标。

$$y = x$$

取横坐标为 0，代入得

$$y = 0$$

取横坐标为 5，代入得

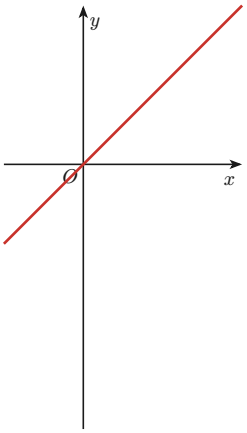
$$y = 5$$

故直线经过两点

$$(0,0),\quad (5,5)$$

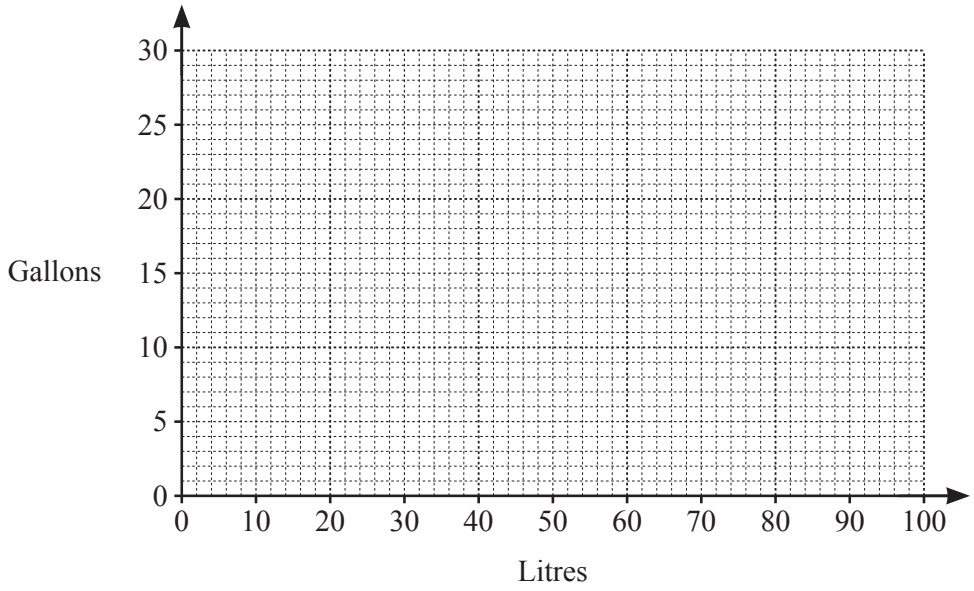
在图上描出这两点，用直尺连线，并向两端延伸至方格图边界。

答：画出经过原点和 $(5,5)$ 的直线。



3. [2024 · February/March 0580/32 Q2(c)(i)]
提示：先求图中一个便于描出的升数所对应的加仑数。

(c) (i) Use 1 litre = 0.22 gallons to complete this conversion graph.



(c)（i）利用 1 升等于 0.22 加仑，完成此换算图。
图中横轴表示升数，标出的刻度为 $0, 10, 20, \ldots, 100$；纵轴表示加仑数，标出的刻度为 $0, 5, 10, \ldots, 30$。

✓ **答案** 用直尺画出经过 $(0,0)$ 和 $(100,22)$ 的直线段。

解析 设横坐标 x 为升数，纵坐标 y 为加仑数。

每升对应 0.22 加仑，故

$y = 0.22x$。

取 $x = 0$，得

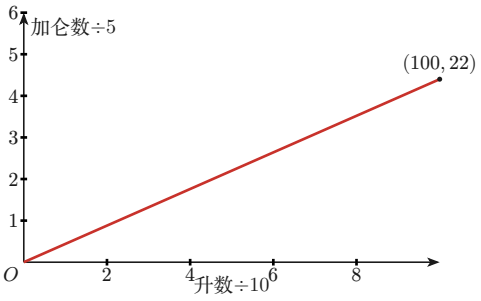
$y = 0.22 \times 0 = 0$。

取 $x = 100$，得

$y = 0.22 \times 100 = 22$。

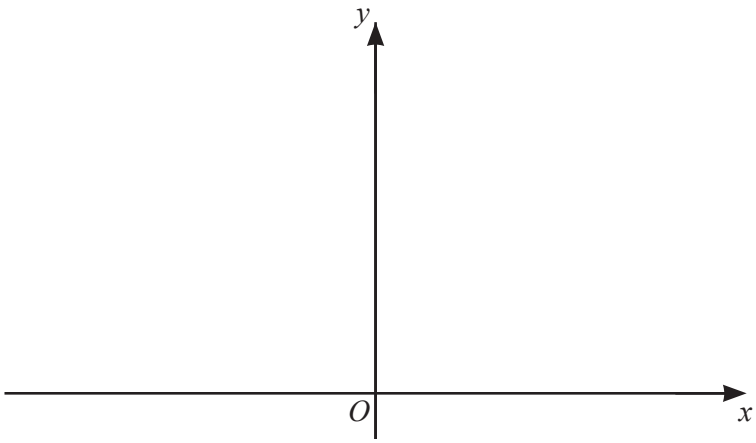
在图上描出 $(0,0)$、$(100,22)$，用直尺连接。

答：换算图为从 $(0,0)$ 到 $(100,22)$ 的直线段。



4. [2024 · February/March 0580/42 Q8(a)]
提示：取两个不同的横坐标，分别代入求纵坐标。

(a) On the axes, sketch the graph of $y = 4 - 3x$.



(a) 在所给坐标轴上画出下列函数的图象草图。

$y = 4 - 3x$

图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

✓ **答案** 经过 $(0, 4)$ 和 $(1, 1)$ 的直线。

解析 当 $x = 0$ 时，

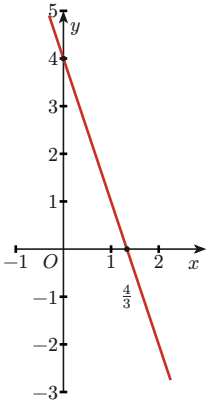
$$y = 4 - 3 \times 0 = 4$$

当 $x = 1$ 时，

$$y = 4 - 3 \times 1 = 1$$

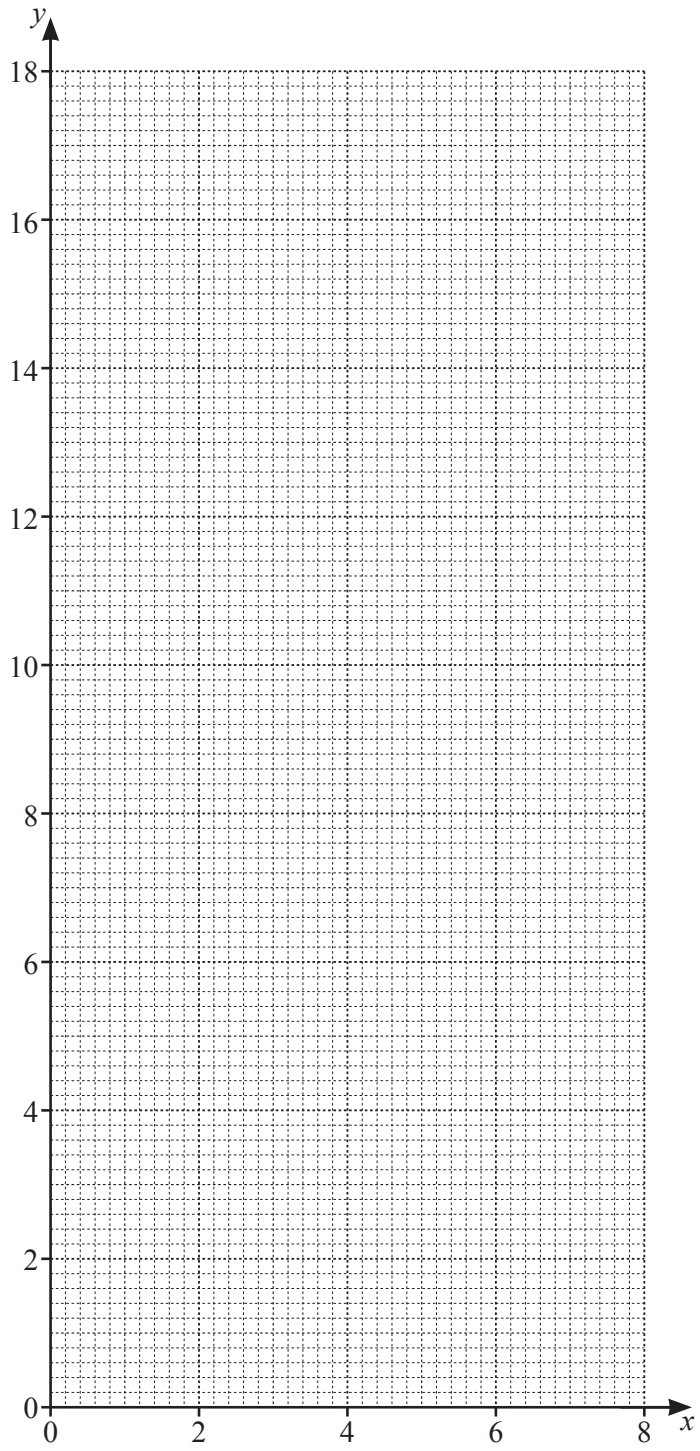
描出两点 $(0, 4)$ 和 $(1, 1)$，用直尺连线并向两端延伸。

答：所画直线经过 $(0, 4)$ 和 $(1, 1)$，从左向右下降。



5. [2024 · May/June 0580/32 Q6(b)(i)]

提示：从已知点出发，按梯度确定另一个点。



(b) A straight line has a gradient of $\frac{1}{2}$ and passes through the point (2, 7).

(i) On the grid, draw this line for $0 \leqslant x \leqslant 8$.

(b) 一条直线的梯度为 $\frac{1}{2}$，且经过点 $(2,7)$。

(i) 在方格图上画出这条直线，范围为

$$0 \leq x \leq 8$$

图中横轴标为 x，横轴标数从 0 到 8，纵轴标数从 0 到 18。

✓ **答案** 连接 $(0,6)$ 与 $(8,10)$ 的线段。

解析 梯度为 $\frac{1}{2}$，横坐标每增加 2，纵坐标增加 1。

由直线经过 $(2,7)$，当 $x=0$ 时，

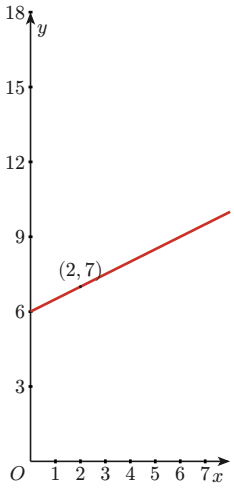
$$y=7-2\times\frac{1}{2}=6$$

当 $x=8$ 时，

$$y=7+(8-2)\times\frac{1}{2}=10$$

在方格图上描出 $(0,6)$、$(2,7)$ 和 $(8,10)$，用直尺连接，画至两个端点。

答：画出连接 $(0,6)$ 与 $(8,10)$ 的线段。



2.31 代入求值、描点并画二次函数曲线

题型 1 代入求值、描点并画二次函数曲线（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **负数代入求值：** 例题给出横坐标与纵坐标的关系。

$$y=x^2+5x+3$$

把横坐标代入，算出对应的纵坐标；负数平方时带上括号。

$$x=-2$$

$$y=(-2)^2+5\times(-2)+3=4-10+3=-3$$

对应的纵坐标为 _____。

② **平方运算顺序：** 横坐标是小数时，仍先算平方，再算乘法与加减。

$$x=-2.5$$

$$y=(-2.5)^2+5\times(-2.5)+3=6.25-12.5+3=-3.25$$

平方前有系数，先平方再乘系数。

$$2\times(0.5)^2=2\times0.25=0.5$$

平方前有负号，先平方再取相反数。

$$-(-2)^2=-4$$

③ **辨认曲线开口：** 例题中平方项的系数为正，曲线开口向上。一般写成下式，其中 a、b、c 是常数。

$$y=ax^2+bx+c,\quad a\neq0$$

由二次项系数的正负判断开口。

$a>0$	$a<0$
开口向 _____。	开口向 _____。

④ **确定曲线顶点：**例题中，二次项系数与一次项系数分别为：

$$a=1,\quad b=5$$

对称轴经过曲线的最高点或最低点，这个点称为顶点。

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{5}{2\times 1}=-2.5$$

将这个横坐标代入原式，得顶点坐标。

$$y=(-2.5)^2+5\times(-2.5)+3=-3.25$$

例题的顶点为 _____。

⑤ **依照刻度描点：**点的坐标中，前数对应横轴，后数对应纵轴。例题的点 $(-2,-3)$，从原点向左 _____ 个单位，再向下 _____ 个单位。若纵轴相邻标数相差 2，纵坐标 -3 应描在 -2 与 -4 的正中。

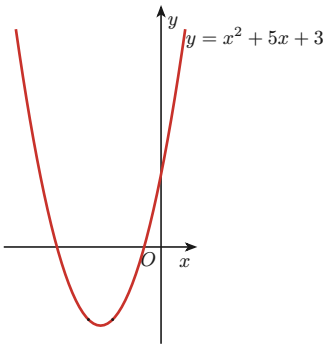
⑥ **光滑连接各点：**例题中，顶点及其两侧的点为：

$$(-3,-3),\quad (-2.5,-3.25),\quad (-2,-3)$$

按横坐标从小到大，用一条光滑曲线经过各点，顶点处画成圆滑的弧。相邻点之间不画折线，曲线画到指定区间的两个端点。

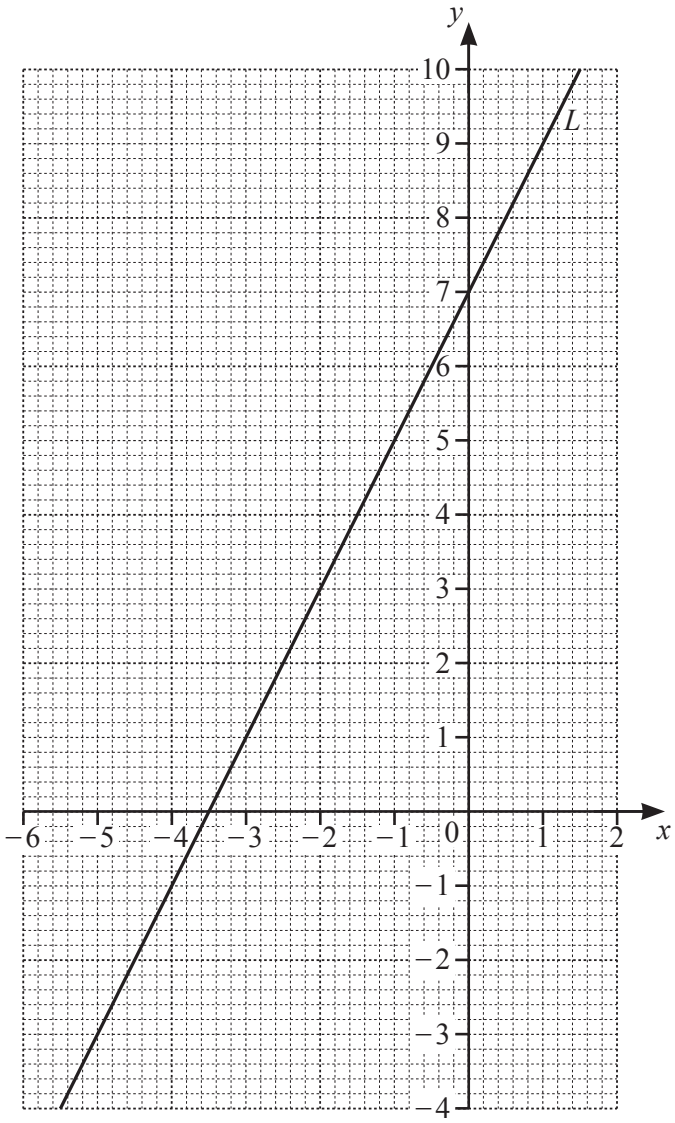
⟵ 填空：①-3　②上　③下　④$(-2.5,-3.25)$　⑤2　⑥3

函数值表上的点连成曲线

	图像	数量关系
同一关系		$y=x^2+5x+3$；点 $(-3,-3)$、$(-2,-3)$ 关于 $x=-2.5$ 对称。

点石成金　题目出现函数式、取值范围和画图网格时，先代入求出各点坐标，再按刻度描点并平滑连接。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q6(c)(ii)]



(ii) On the grid, draw the graph of $y = x^2 + 5x + 3$ for $-6 \leqslant x \leqslant 1$.

(ii) 在所给网格上，画出下列函数在指定范围内的图象。

$$y = x^2 + 5x + 3, \quad -6 \leq x \leq 1$$

图中横轴标为 x，纵轴标为 y，已有直线标为 L。网格横坐标范围为 -6 至 2，纵坐标范围为 -4 至 10。

解答　将各横坐标代入函数式，例如：

$$x = -6$$

$$y = (-6)^2 + 5 \times (-6) + 3 = 36 - 30 + 3 = 9$$

同理，得各点的坐标如下。

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	9	3	-1	-3	-3	-1	3	9

二次项系数为正，曲线开口向上，对称轴为：

方法：先看函数式和取值表，从负数代入时给底数加括号起手。

辨析：对称轴是一条直线，顶点是曲线上最高或最低的点。

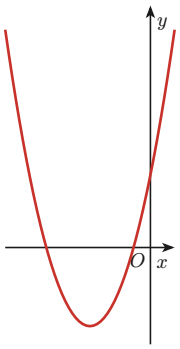
拓展：横坐标到对称轴距离相等的两点，纵坐标相同。

$$x=-\frac{5}{2\times 1}=-2.5$$

当横坐标为对称轴对应的值时，

$$y=(-2.5)^2+5\times(-2.5)+3=-3.25$$

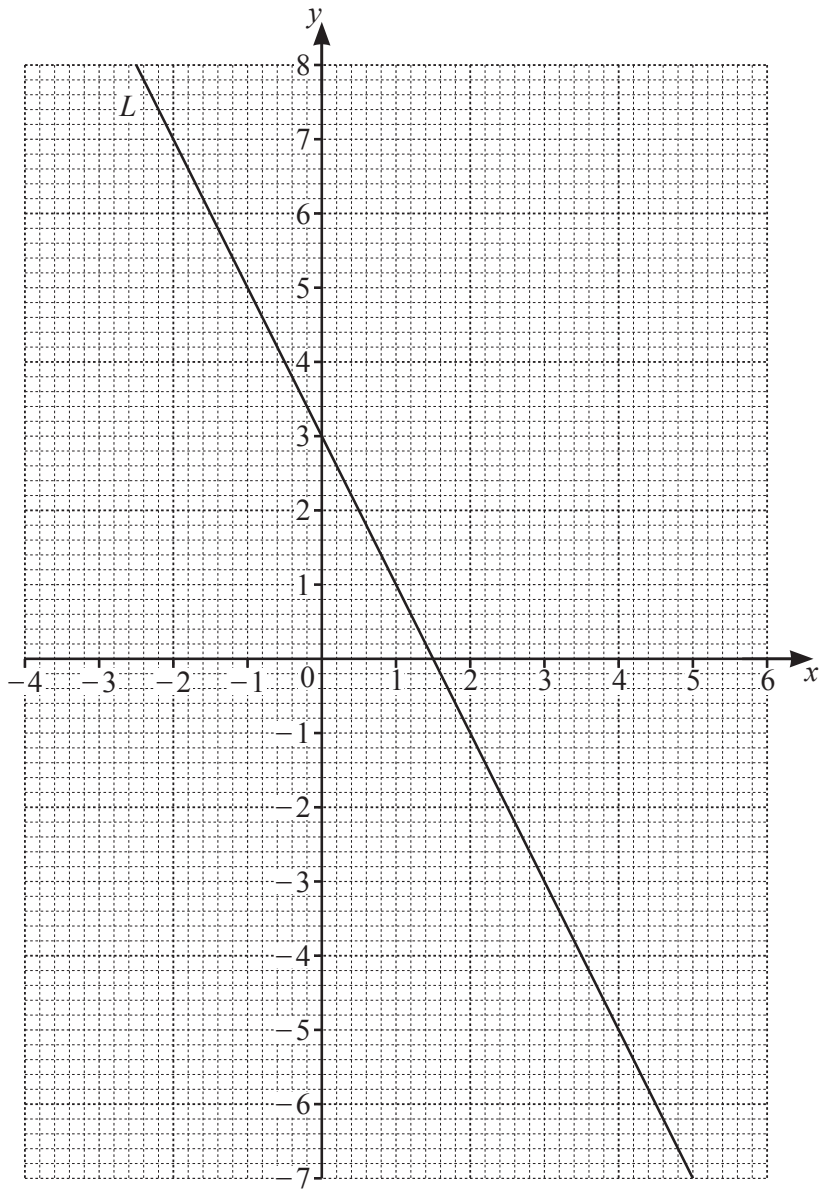
故顶点为 $(-2.5,-3.25)$。
在原网格上描出表中各点及顶点，以一条光滑曲线依次连接。
答：所画曲线开口向上，经过表中各点，顶点为 $(-2.5,-3.25)$，左右端点分别为 $(-6,9)$、$(1,9)$。



针对练习

1. [2023 · May/June 0580/33 Q6(b)(ii)]

提示：看表中纵坐标相同的点，比较横坐标，寻找对称位置。



(ii) On the grid, draw the graph of $y = x^2 - 3x - 3$ for $-2 \leqslant x \leqslant 5$.

(ii) 在所给网格上，画出下列函数在指定范围内的图象。

$$y = x^2 - 3x - 3, \quad -2 \leq x \leq 5$$

图中横轴标为 x，纵轴标为 y，已有直线标为 L。网格横坐标范围为 -4 至 6，纵坐标范围为 -7 至 8。

✓ **答案** 开口向上的抛物线段，顶点为 $(1.5, -5.25)$，对称轴为 $x = 1.5$，左右端点分别为 $(-2, 7)$、$(5, 7)$。

解析 将各横坐标代入函数式，例如：

$$x = -2$$

$$y = (-2)^2 - 3 \times (-2) - 3 = 4 + 6 - 3 = 7$$

同理，得各点的坐标如下。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	7	1	-3	-5	-5	-3	1	7

二次项系数为正，曲线开口向上，对称轴为：

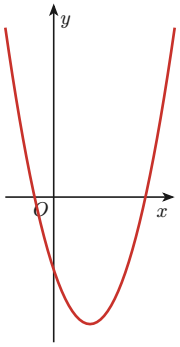
$$x = -\frac{-3}{2 \times 1} = 1.5$$

将顶点的横坐标代入，得：

$$y = 1.5^2 - 3 \times 1.5 - 3 = 2.25 - 4.5 - 3 = -5.25$$

在原网格上描出表中各点及顶点，以一条光滑曲线依次连接。

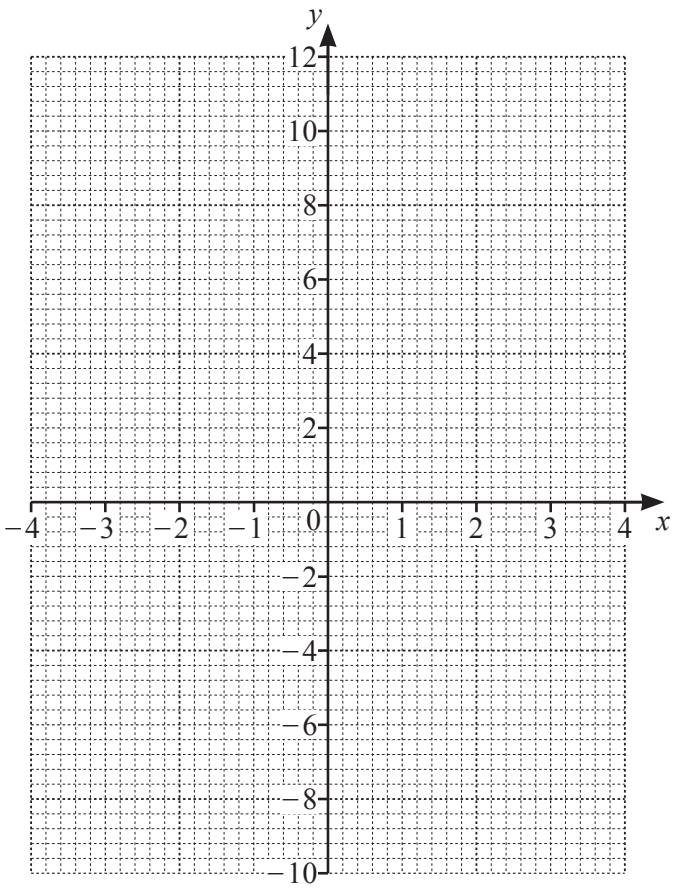
答：所画曲线经过表中各点，顶点为 $(1.5, -5.25)$，从 $(-2, 7)$ 画至 $(5, 7)$。



2. [2023 · May/June 0580/32 Q7(b)(ii)]

提示：看纵轴相邻标数之差，比较顶点与附近水平线的位置。

(ii) On the grid, draw the graph of $y = x^2 + x - 8$ for $-4 \leqslant x \leqslant 4$.



（ii）在所给网格上，画出下列函数在指定范围内的图象。

$$y = x^2 + x - 8, \quad -4 \leq x \leq 4$$

图中横轴标为 x，纵轴标为 y。横轴相邻标数相差 1，纵轴相邻标数相差 2；网格横坐标范围为 -4 至 4，纵坐标范围为 -10 至 12。

✓ **答案**　开口向上的抛物线段，顶点为 $(-0.5,-8.25)$，对称轴为 $x=-0.5$，左右端点分别为 $(-4,4)$、$(4,12)$。

解析　将各横坐标代入函数式，例如：

$$x=-3$$

$$y=(-3)^2+(-3)-8=9-3-8=-2$$

同理，得各点的坐标如下。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	-2	-6	-8	-8	-6	-2	4	12

二次项系数为正，曲线开口向上，对称轴为：

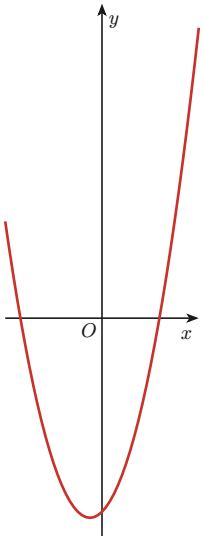
$$x=-\frac{1}{2\times 1}=-0.5$$

将顶点的横坐标代入，得：

$$y=(-0.5)^2+(-0.5)-8=0.25-0.5-8=-8.25$$

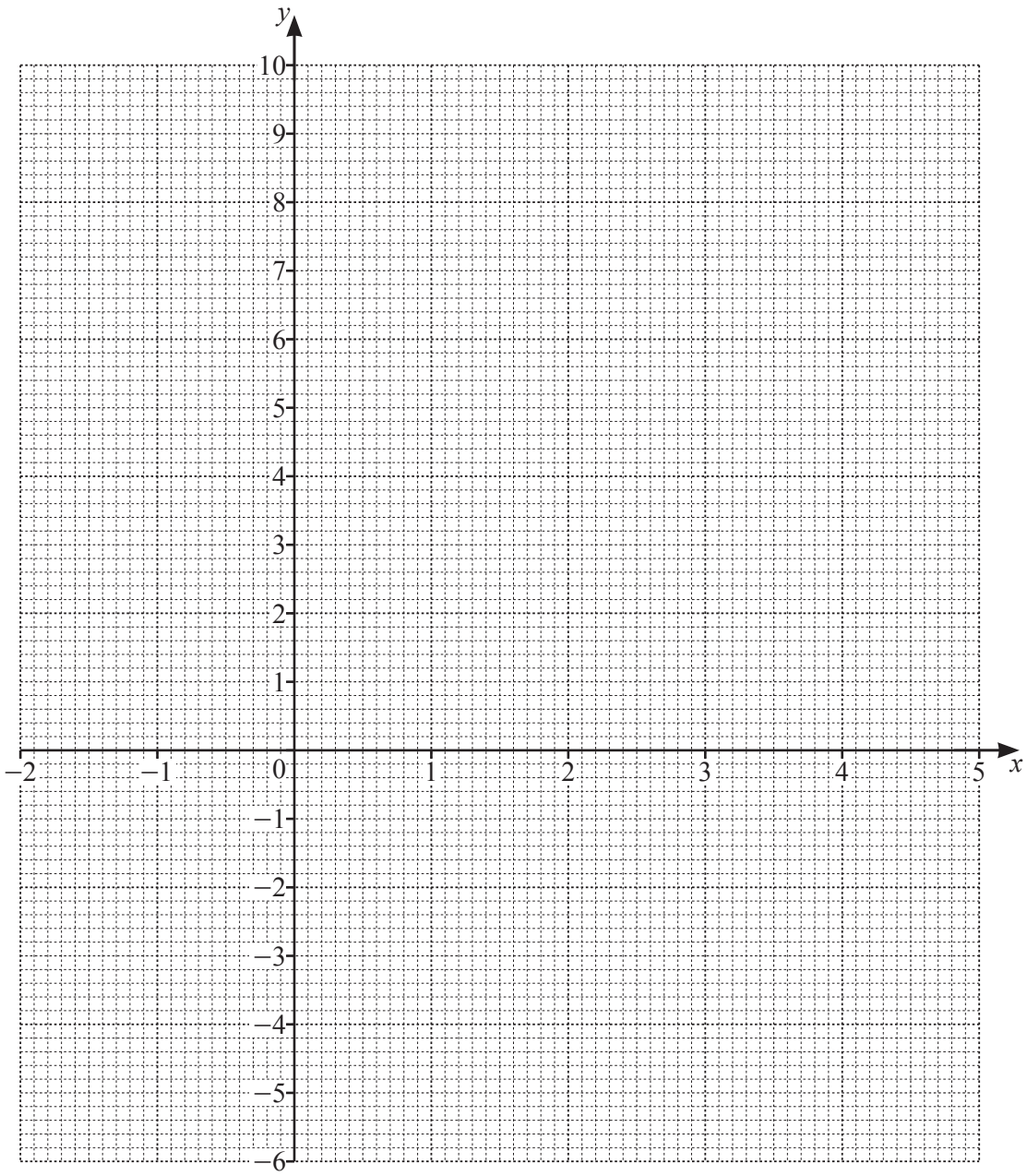
纵轴相邻标数相差 2，按相应刻度描出表中各点及顶点。用一条光滑曲线依次连接，顶点略低于纵坐标为 -8 的水平线。

答：所画曲线经过表中各点，顶点为 $(-0.5,-8.25)$，从 $(-4,4)$ 画至 $(4,12)$。



3. [2023 · October/November 0580/32 Q4(b)]
提示：看表中纵坐标的变化，比较最低点两侧的对应点。

(b) On the grid, draw the graph of $y = x^2 - 4x - 2$ for $-2 \leqslant x \leqslant 5$.



(b) 在所给网格上，画出下列函数在指定范围内的图象。

$$y = x^2 - 4x - 2, \quad -2 \leq x \leq 5$$

图中横轴标为 x，纵轴标为 y。网格横坐标范围为 -2 至 5，纵坐标范围为 -6 至 10。

✓ **答案** 开口向上的抛物线段，顶点为 $(2, -6)$，对称轴为 $x = 2$，左右端点分别为 $(-2, 10)$、$(5, 3)$。

解析 将各横坐标代入函数式，例如：

$$x = -2$$

$$y = (-2)^2 - 4 \times (-2) - 2 = 4 + 8 - 2 = 10$$

同理，得各点的坐标如下。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	10	3	-2	-5	-6	-5	-2	3

二次项系数为正，曲线开口向上，对称轴为：

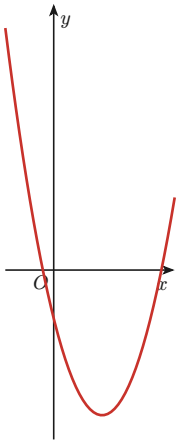
$$x = -\frac{-4}{2 \times 1} = 2$$

将顶点的横坐标代入，得：

$$y = 2^2 - 4 \times 2 - 2 = 4 - 8 - 2 = -6$$

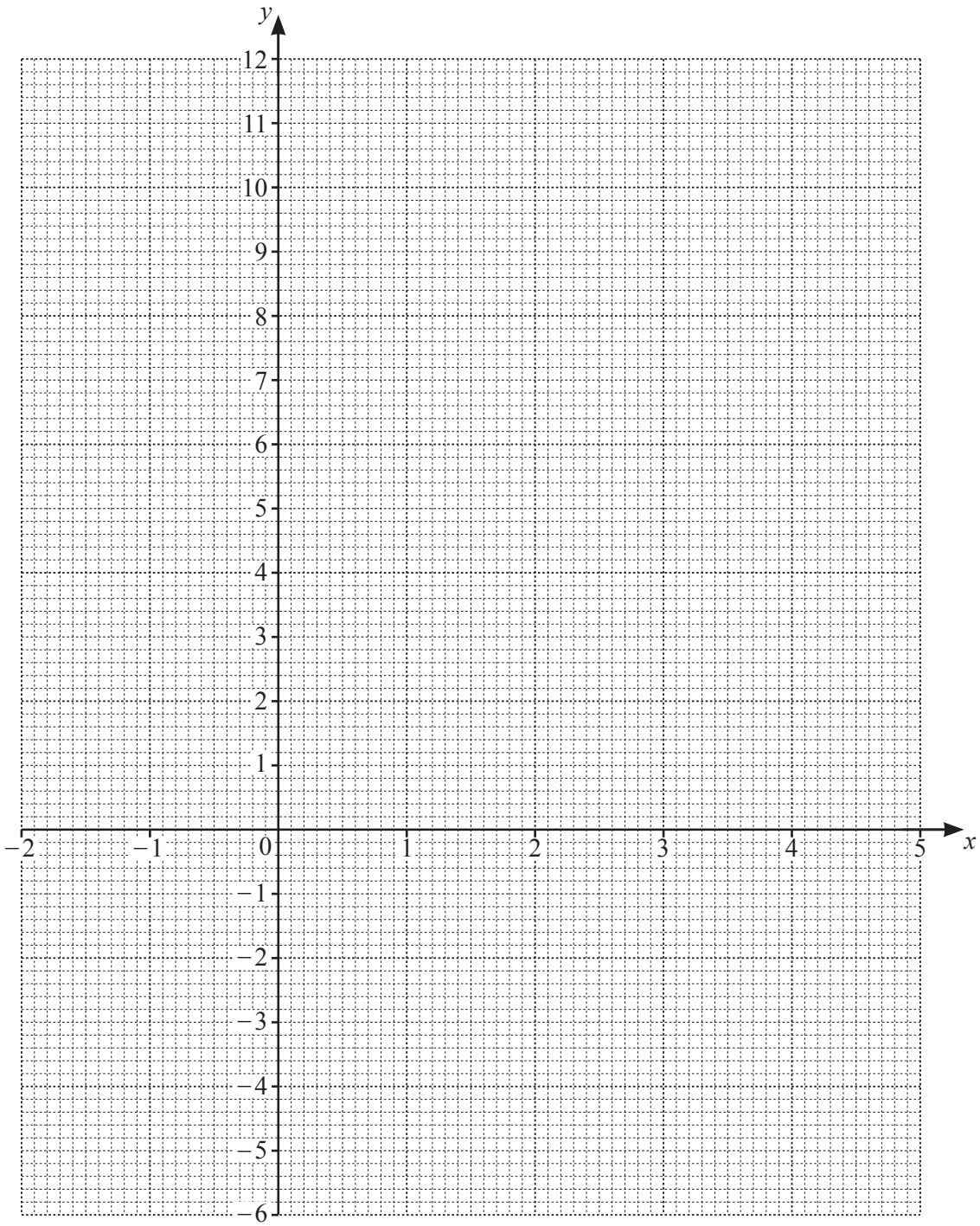
在原网格上描出表中各点，以一条光滑曲线依次连接，在 $(2, -6)$ 处圆滑转弯。

答：所画曲线经过表中各点，顶点为 $(2, -6)$，从 $(-2, 10)$ 画至 $(5, 3)$。



4. [2023 · May/June 0580/31 Q6(b)]
提示：看平方项前的符号，比较平方与取相反数的先后顺序。

(b) On the grid, draw the graph of $y = 5 + 3x - x^2$ for $-2 \leqslant x \leqslant 5$.



(b) 在所给网格上，画出下列函数在指定范围内的图象。

$$y = 5 + 3x - x^2, \quad -2 \leq x \leq 5$$

图中横轴标为 x，纵轴标为 y。网格横坐标范围为 -2 至 5，纵坐标范围为 -6 至 12。

✓ **答案** 开口向下的抛物线段，顶点为 $(1.5, 7.25)$，对称轴为 $x = 1.5$，左右端点分别为 $(-2, -5)$、$(5, -5)$。

解析 将各横坐标代入函数式，例如：

$$x = -2$$

$$y = 5 + 3 \times (-2) - (-2)^2 = 5 - 6 - 4 = -5$$

同理，得各点的坐标如下。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-5	1	5	7	7	5	1	-5

由二次项与一次项的系数，得：

$$a=-1,\quad b=3$$

二次项系数为负，曲线开口向下，对称轴为：

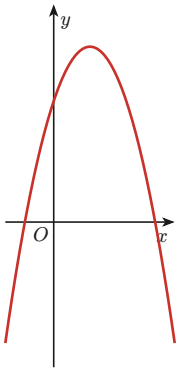
$$x=-\frac{3}{2\times(-1)}=1.5$$

将顶点的横坐标代入，得：

$$y=5+3\times1.5-1.5^2=5+4.5-2.25=7.25$$

在原网格上描出表中各点及顶点，以一条光滑曲线依次连接。顶点在纵坐标为 7 的水平线上方，两侧曲线向下延伸。

答：所画曲线经过表中各点，顶点为 $(1.5,7.25)$，从 $(-2,-5)$ 画至 $(5,-5)$。



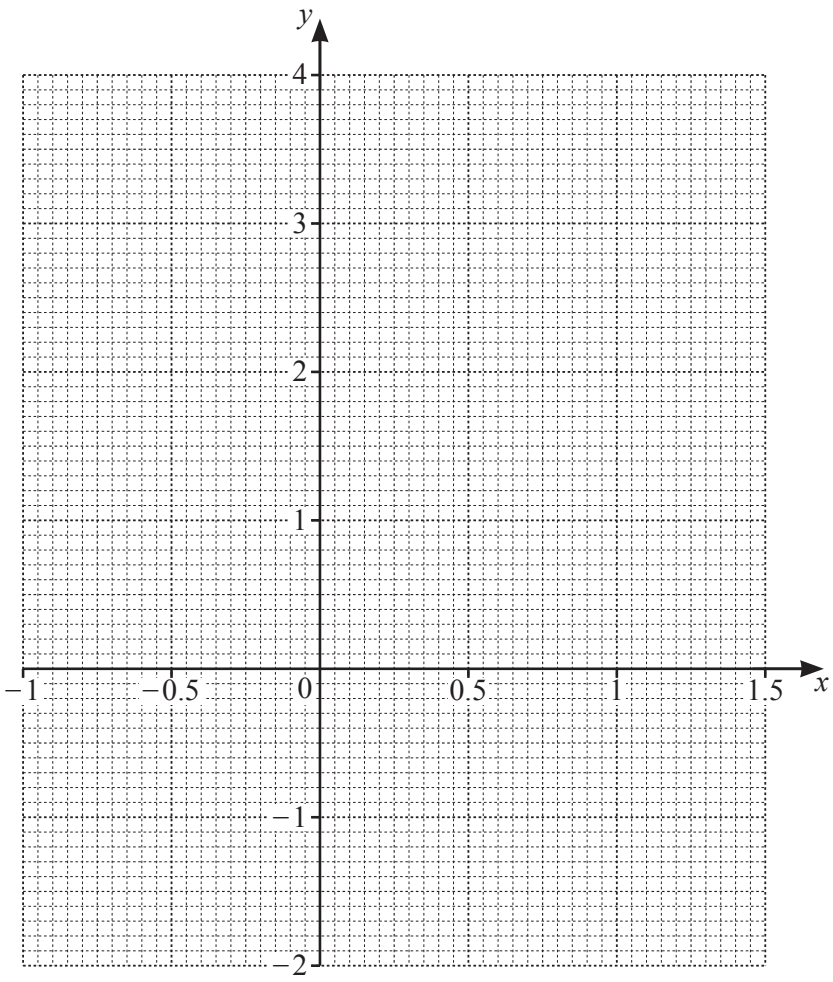
5. [2023 · May/June 0580/21 Q20(b)]

提示：看小数横坐标的平方项，比较顶点与表中最低点的位置。

The table shows some values for $y=3x^2-2x-1$.

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
y	4		-1		0	2.75

(b) On the grid, draw the graph of $y=3x^2-2x-1$ for $-1\leqslant x\leqslant 1.5$.



下表给出了下列函数的部分对应值。

$$y = 3x^2 - 2x - 1$$

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
y	4		-1		0	2.75

(b) 在所给网格上，画出下列函数在指定范围内的图象。

$$y = 3x^2 - 2x - 1, \quad -1 \le x \le 1.5$$

图中横轴标为 x，纵轴标为 y。横轴相邻标数相差 0.5，纵轴相邻标数相差 1；网格横坐标范围为 -1 至 1.5，纵坐标范围为 -2 至 4。

✓ **答案** 开口向上的抛物线段，顶点为 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$，对称轴为 $x = \frac{1}{3}$，左右端点分别为 $(-1, 4)$、$(1.5, 2.75)$。

解析 把表中尚缺纵坐标的横坐标代入函数式，得：

$$x = -0.5$$

$$y = 3 \times (-0.5)^2 - 2 \times (-0.5) - 1 = 0.75 + 1 - 1 = 0.75$$

$$x = 0.5$$

$$y = 3 \times 0.5^2 - 2 \times 0.5 - 1 = 0.75 - 1 - 1 = -1.25$$

完整的数值表为：

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
y	4	0.75	-1	-1.25	0	2.75

二次项系数为正，曲线开口向上，对称轴为：

$$x=-\frac{-2}{2\times 3}=\frac{1}{3}\approx 0.333$$

将顶点的横坐标代入，得：

$$y=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\times\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}\approx -1.333$$

在原网格上描出表中六个点，并在横坐标约为 0.33、纵坐标约为 -1.33 的位置补出顶点。用一条光滑曲线依次连接。

答：所画曲线经过表中各点，顶点为 $\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$，从 $(-1,4)$ 画至 $(1.5,2.75)$。



2.32 利用抛物线的左右对称确定对称轴或对应点

题型 1 利用抛物线的左右对称确定对称轴或对应点（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **同高两点定轴：**例题所求的对称轴是一条将抛物线分成左右对称两部分的竖直线。同高两点若为 $(0,1)$、$(4,1)$，横坐标取_____：

$$x=\frac{0+4}{2}=2$$

两同高点的横坐标分别记为 x_1、x_2，则：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

② **写出对称轴：**对称轴的横坐标为 2，轴上各点的横坐标都等于 2，方程写为：

$$x=2$$

对称轴的横坐标若记为 h，方程写为_____。

③ **画出对称轴：**已知对称轴方程为：

$$x=2$$

在横轴上标出横坐标为 2 的位置，过该处画一条与 y 轴_____的直线。这条竖直线就是所求的对称轴。

④ **确定最低点：**开口向上的抛物线在转向处取得最低点。

已给曲线读取转向处的横坐标和纵坐标　　已给函数式将对称轴的横坐标代入求纵坐标

续用经过前述两点的抛物线，将对称轴横坐标 2 代入：

$$y=x^2-4x+1$$

$$y=2^2-4\times 2+1=-3$$

坐标按_____的顺序写为：

$$(2,-3)$$

⑤ **求另一横坐标：**同高的两个不同点关于对称轴对称。续用对称轴 $x=2$，一横坐标为 5，另一横坐标记为 t：

$$\frac{5+t}{2}=2$$

$$5+t=4$$

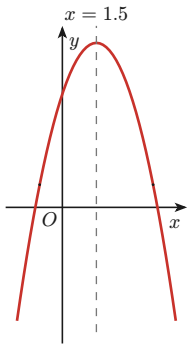
$$t=4-5=-1$$

另一横坐标等于对称轴横坐标的_____减去已知横坐标：

$$x_2 = 2h - x_1$$

填空：①平均值　②$x = h$　③平行　④先横后纵　⑤两倍

同高点的横坐标关于对称轴配对

	图像	数量关系
同一关系		$\frac{-1+4}{2} = 1.5$；相同函数值的两个横坐标的平均数落在对称轴上。

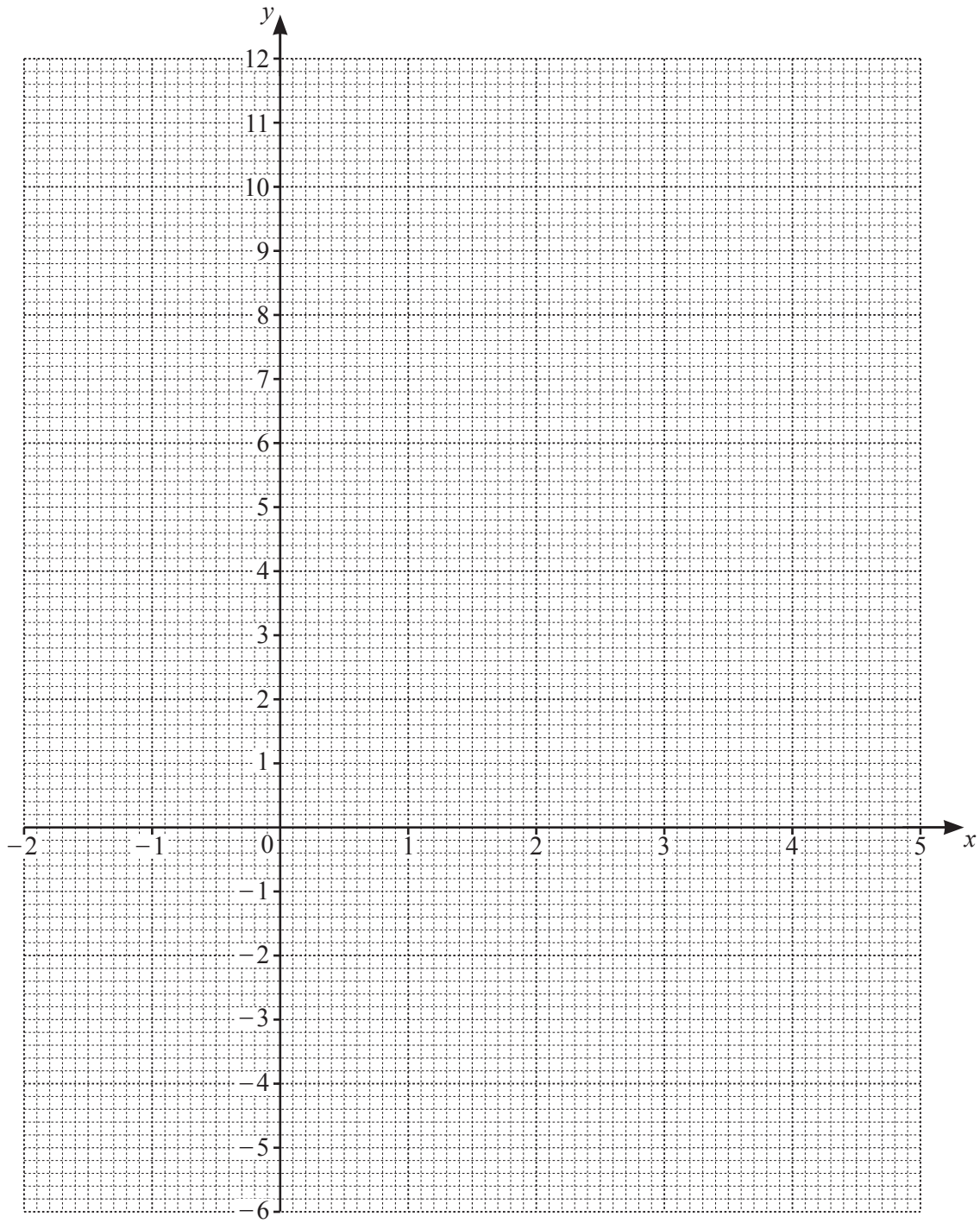
点石成金　题目出现抛物线的对称轴、最低点或同高对应点时，先由转向处或同高两点确定对称轴的横坐标。

例 1　[2023 · May/June 0580/31 Q6(c)]

(a) Complete the table of values for $y = 5 + 3x - x^2$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y		1			7			–5

(b) On the grid, draw the graph of $y = 5 + 3x - x^2$ for $-2 \leqslant x \leqslant 5$.



(c) Write down the equation of the line of symmetry of the graph.

表中给出了$y = 5 + 3x - x^2$的部分值。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y		1			7			-5

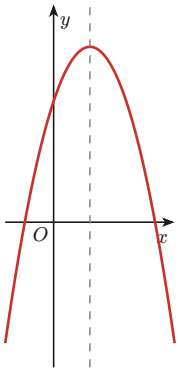
(a) 补全数值表。 (b) 在坐标网格上画出$y = 5 + 3x - x^2$，范围为$-2 \leq x \leq 5$。 (c) 写出图象对称轴的方程。

解答 沿用前问所画的抛物线，转向处的横坐标为 1.5。对称轴经过转向处，并与 y 轴平行，故其方程为

$x = 1.5$。

答：$x = 1.5$。

方法：先看图上曲线的转向处，读横坐标，再写对称轴方程。



! 辨析：对称轴是一条竖直线，顶点是曲线转向处的点。

针对练习

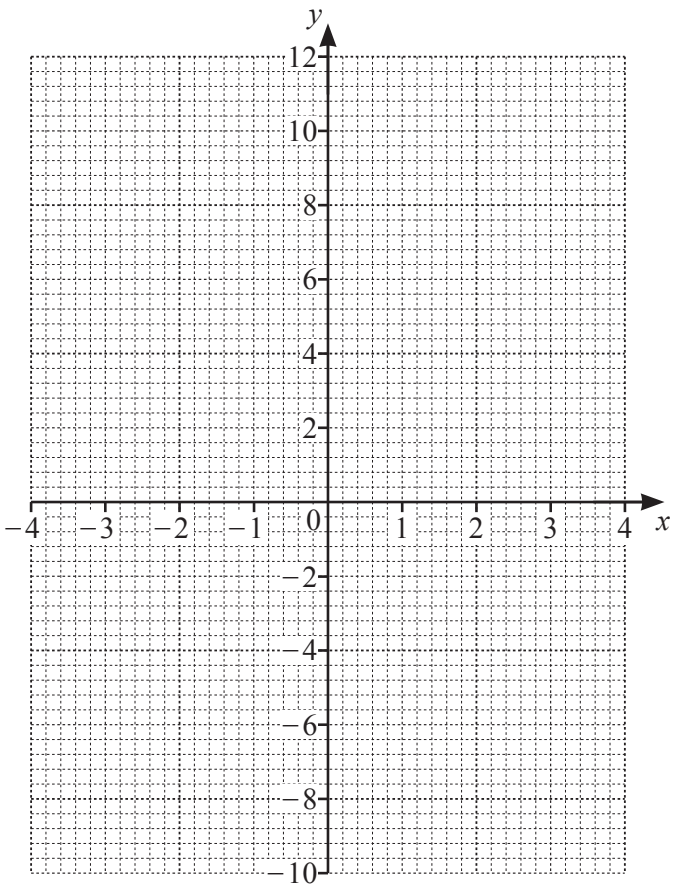
1. [2023 · May/June 0580/32 Q7(b)(iii)]

提示：看转向处在横轴上的对应位置，确定轴的位置。

(b) (i) Complete the table of values for $y = x^2 + x - 8$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	-2		-8	-8		-2	4	

(ii) On the grid, draw the graph of $y = x^2 + x - 8$ for $-4 \leqslant x \leqslant 4$.



(iii) Write down the equation of the line of symmetry of the graph.

表中给出了$y = x^2 + x - 8$的部分值。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	-2		-8	-8		-2	4	

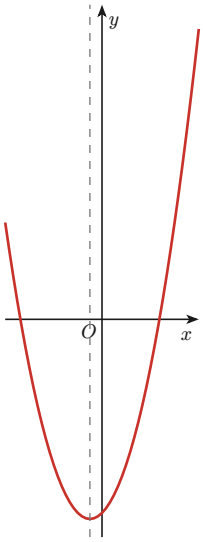
（b(i)）补全数值表。（b(ii)）在坐标网格上画出$y = x^2 + x - 8$，范围为$-4 \leq x \leq 4$。（iii）写出该图象对称轴的方程。

✓ **答案**

$$x=-\frac{1}{2}$$

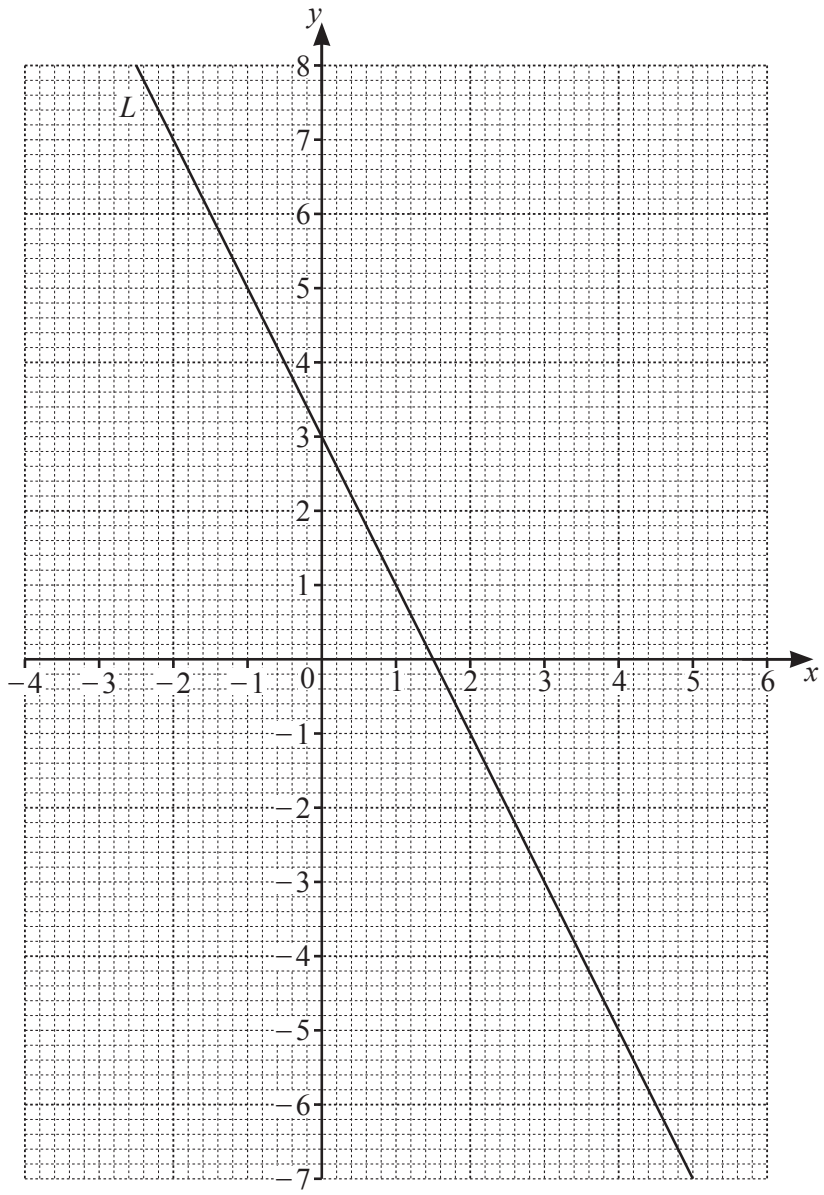
解析 沿用前问所画的抛物线，转向处的横坐标为 -0.5。对称轴经过转向处，并与 y 轴平行，故其方程为 $x=-0.5=-\frac{1}{2}$。

答：$x=-\frac{1}{2}$。



2. [2023 · May/June 0580/33 Q6(c)(iii)]

提示：找纵坐标相同的两点，取横坐标的中间值。



(b) (i) Complete the table of values for $y = x^2 - 3x - 3$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y		1		-5	-5		1	

(ii) On the grid, draw the graph of $y = x^2 - 3x - 3$ for $-2 \leqslant x \leqslant 5$.

(c) (i) Write down the coordinates of the lowest point of the graph of $y = x^2 - 3x - 3$.

(ii) On the grid, draw the line of symmetry of the graph of $y = x^2 - 3x - 3$.

(iii) Write down the equation of the line of symmetry.

表中给出了$y = x^2 - 3x - 3$的部分值。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y		1		-5	-5		1	

(b(i)) 补全数值表。 (b(ii)) 在坐标网格上画出$y = x^2 - 3x - 3$，范围为$-2 \le x \le 5$。 (c) (i) 写出最低点的坐标。(ii) 画出对称轴。(iii) 写出对称轴的方程。

✓ **答案**

$$x = 1.5$$

解析 沿用前问的抛物线，

$y = x^2 - 3x - 3$。

当 $x = 0$ 时，

$y = 0^2 - 3 \times 0 - 3 = -3$。

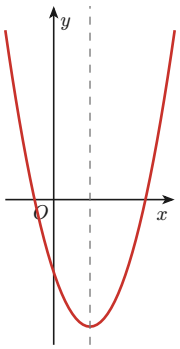
当 $x = 3$ 时，

$y = 3^2 - 3 \times 3 - 3 = -3$。

两点同高，对称轴的横坐标为两点横坐标的平均值，故

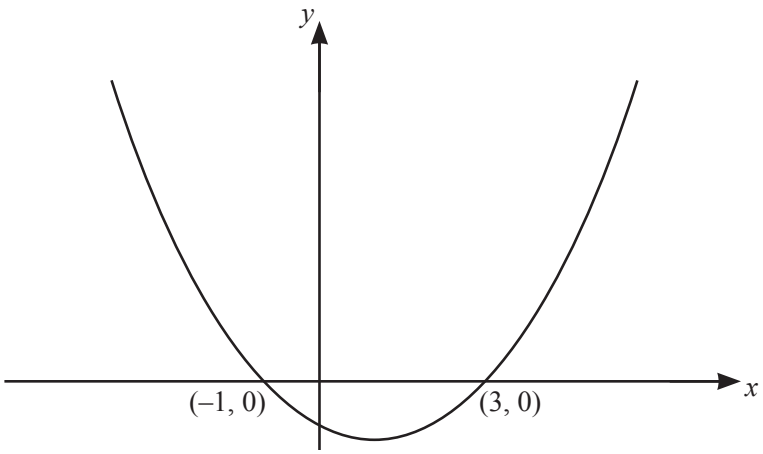
$x = \frac{0+3}{2} = 1.5$。

答：$x = 1.5$。



3. [2023 · October/November 0580/33 Q10(a)]

提示：看曲线与横轴的两个交点，比较它们的横坐标。



NOT TO SCALE

The sketch shows the graph of $y = x^2 - 2x - 3$.
The graph crosses the x-axis at $(-1, 0)$ and $(3, 0)$.

(a) Find the equation of the line of symmetry of the graph.

示意图给出了函数

$$y = x^2 - 2x - 3$$

的图象。图象与 x 轴交于 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，两个交点分别标为 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$；示意图不按比例绘制。(a) 求该图象对称轴的方程。

✓ **答案**

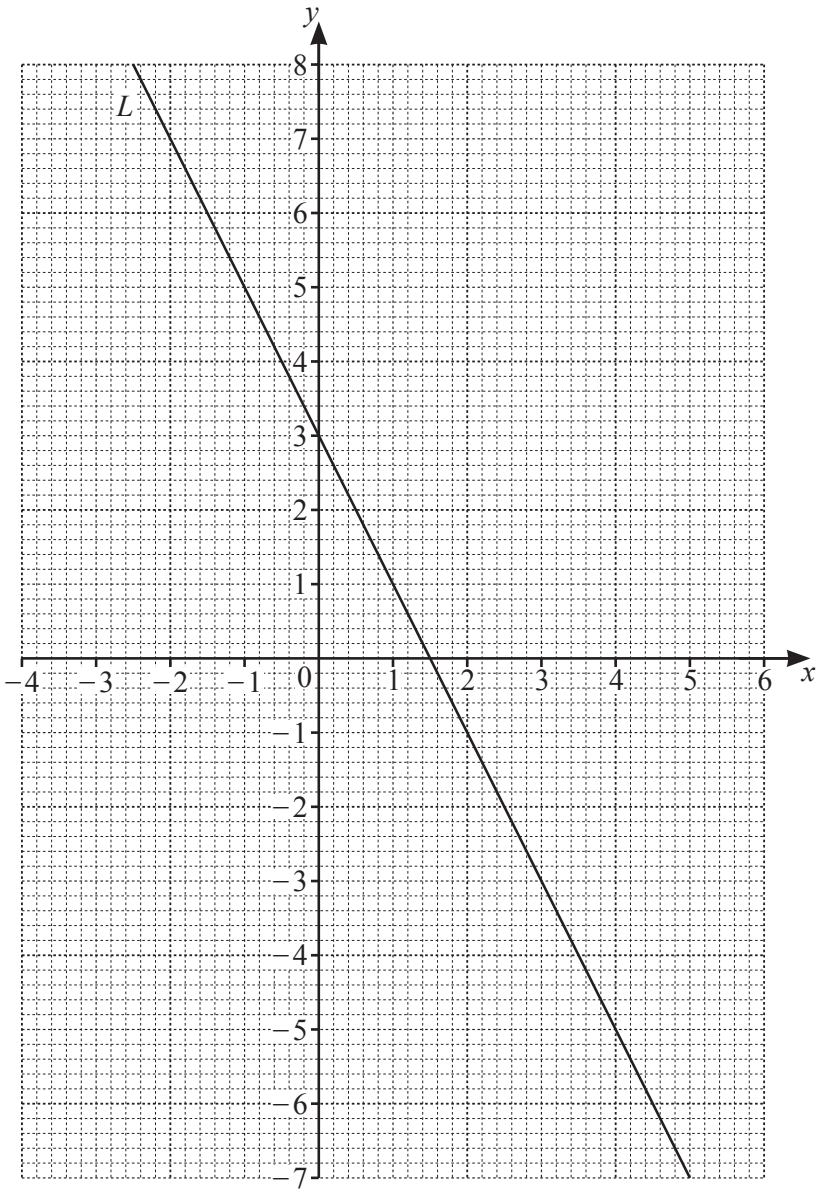
$$x = 1$$

解析 图象与 x 轴的两个交点为 $(-1,0)$ 和 $(3,0)$。两点的纵坐标相同，对称轴的横坐标为 $x=\frac{-1+3}{2}=1$。

答：$x=1$。

4. [2023 · May/June 0580/33 Q6(c)(ii)]

提示：先找同高两点的水平中间位置，再确定画线方向。



(ii) On the grid, draw the line of symmetry of the graph of $y=x^2-3x-3$.

图中标有横轴 x、纵轴 y 和直线 L。横轴的整数标数从 -4 到 6，纵轴的整数标数从 -7 到 8。

(ii) 在方格纸上画出函数

$$y=x^2-3x-3$$

的图象的对称轴。

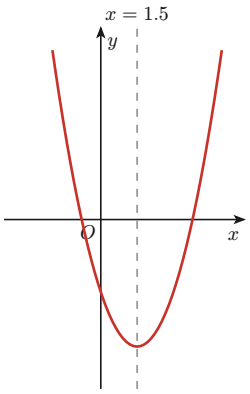
✓ **答案** 过 $(1.5,0)$ 画与 y 轴平行的直线 $x=1.5$。

解析 当 $x=0$ 时，

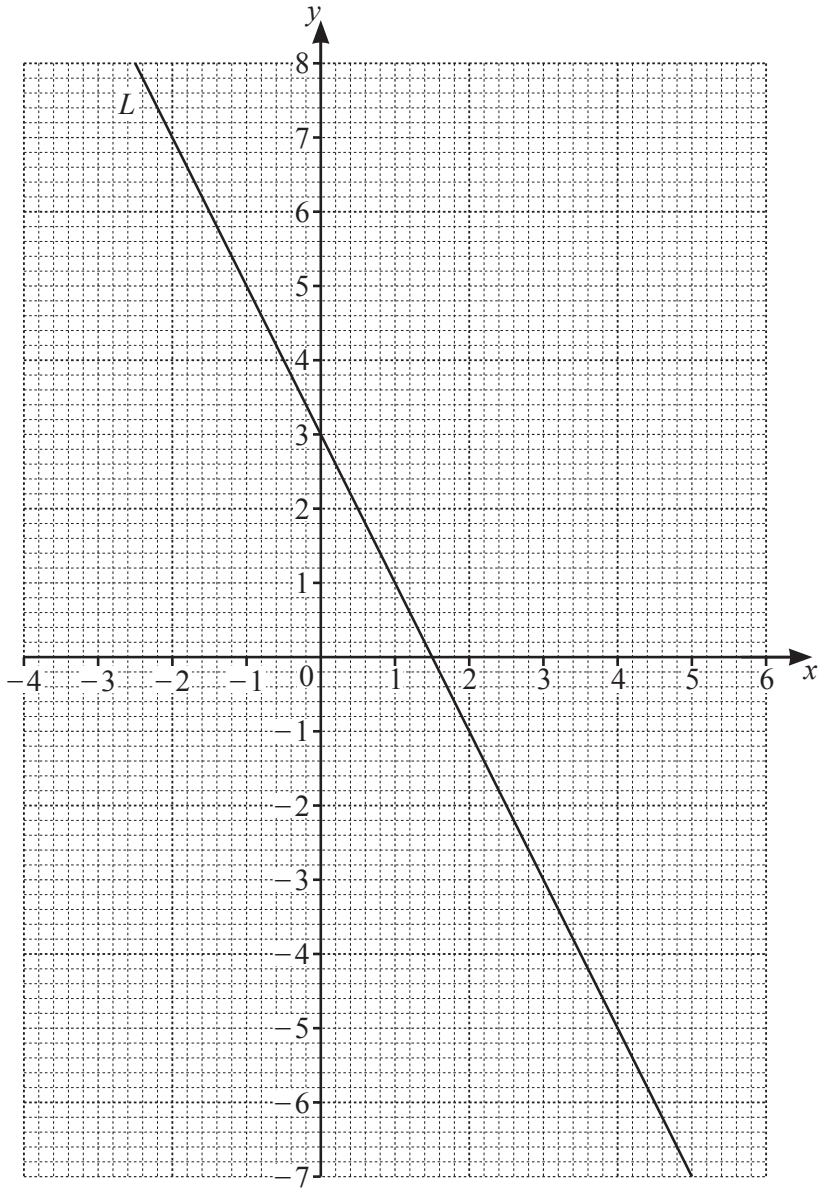
$y=0^2-3\times0-3=-3$。

当 $x=3$ 时，

$y = 3^2 - 3 \times 3 - 3 = -3$。
两点同高，故对称轴为
$x = \frac{0+3}{2} = 1.5$。
在横轴上标出 $(1.5, 0)$，过该点画一条与 y 轴平行的直线，贯穿方格区域。
答：所画竖直线的方程为 $x = 1.5$。



5. [2023 · May/June 0580/33 Q6(c)(i)]
提示：先用同高两点定轴，再代入函数式求最低点纵坐标。



(c) (i) Write down the coordinates of the lowest point of the graph of $y = x^2 - 3x - 3$.

图中标有横轴 x、纵轴 y 和直线 L。横轴的整数标数从 -4 到 6，纵轴的整数标数从 -7 到 8。
(c)（i）写出函数

$$y = x^2 - 3x - 3$$

的图象的最低点坐标。

✓ **答案**

$$(1.5, -5.25)$$

解析 当 $x = 0$ 时，
$y = 0^2 - 3 \times 0 - 3 = -3$。
当 $x = 3$ 时，
$y = 3^2 - 3 \times 3 - 3 = -3$。
两点同高，故对称轴为
$x = \frac{0+3}{2} = 1.5$。
抛物线开口向上，最低点在对称轴上。将 $x = 1.5$ 代入，得
$y = 1.5^2 - 3 \times 1.5 - 3 = -5.25$。
答：最低点的坐标为 $(1.5, -5.25)$。

6. [2025 · October/November 0580/23 Q14(a)]
提示：对称轴经过曲线的最低点。

The minimum point on a quadratic curve is (–3, –5).

(a) Find the equation of the line of symmetry of the curve.

一条二次函数曲线的最低点为 $(-3, -5)$。
(a) 求这条曲线的对称轴方程。

✓ **答案**

$$x = -3$$

解析 对称轴经过最低点，并与 y 轴平行。
最低点 $(-3, -5)$ 的横坐标为 -3，故对称轴方程为

$$x = -3$$

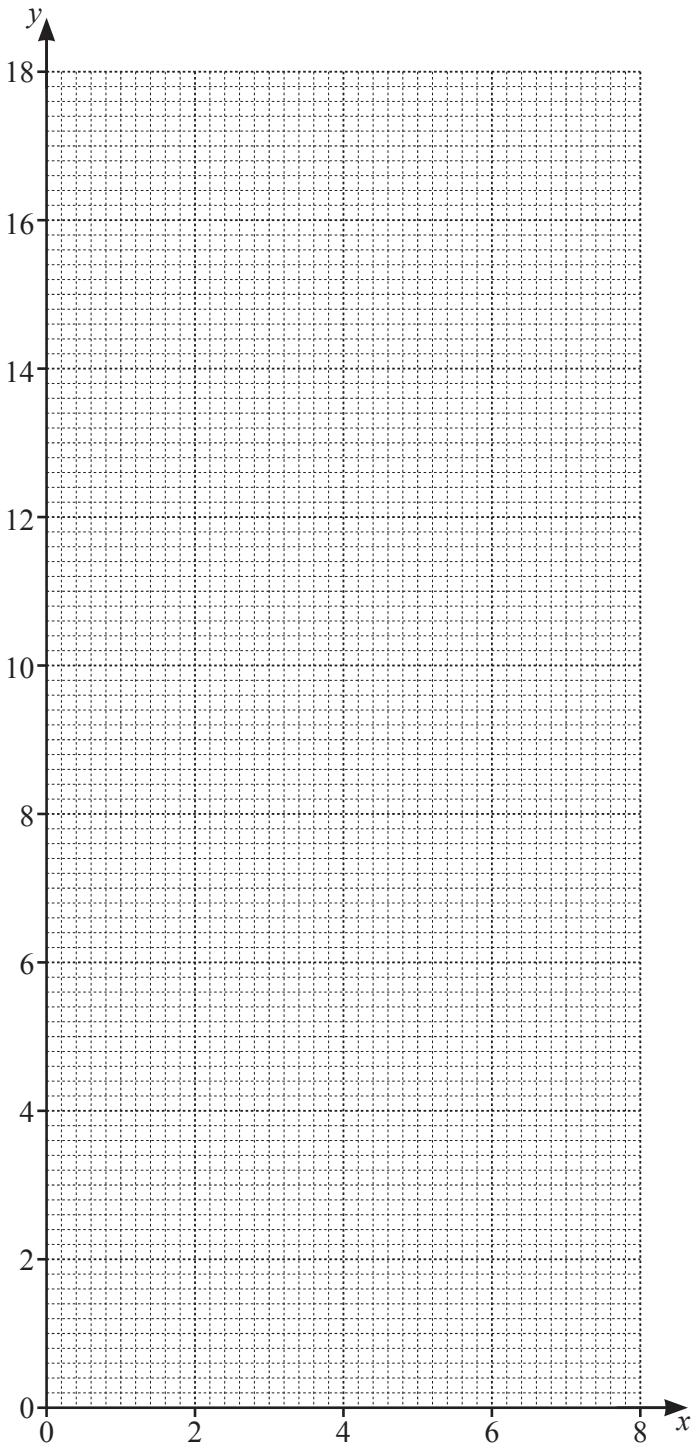
答：$x = -3$。

7. [2024 · May/June 0580/32 Q6(a)(iii)]
提示：在表中找出纵坐标相同的两个不同点。

(a) (i) Complete the table of values for $y = -x^2 + 8x + 1$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y			13		17		13		1

(ii) On the grid, draw the graph of $y = -x^2 + 8x + 1$ for $0 \leqslant x \leqslant 8$.



(iii) Write down the equation of the line of symmetry of the graph.

(a) (i) 补全下列函数的数值表。

$$y = -x^2 + 8x + 1$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y			13		17		13		1

(ii) 在方格图上画出下列函数的图象。

$$y = -x^2 + 8x + 1, \quad 0 \leq x \leq 8$$

图中横轴标为 x，纵轴标为 y。横轴标数从 0 到 8，纵轴标数从 0 到 18。
(iii) 写出该图象的对称轴方程。

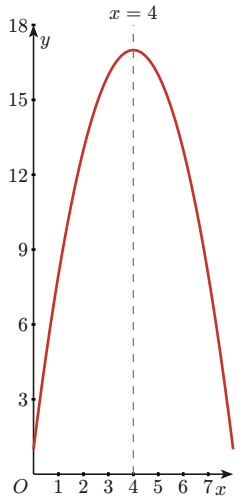
✓ **答案**

$$x = 4$$

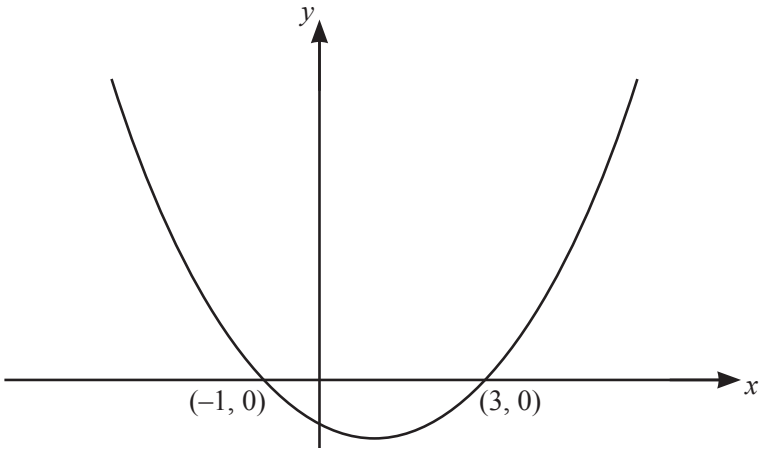
解析 (i) 依次代入$x = 0, 1, 3, 5, 7$，空格依次为$1, 8, 16, 16, 8$。完整纵坐标为 $1, 8, 13, 16, 17, 16, 13, 8, 1$。
(ii) 按表中各点画出下图的光滑抛物线。
解：表中两点 $(2, 13)$ 和 $(6, 13)$ 的纵坐标相同。
对称轴位于这两点之间，横坐标为

$$\frac{2+6}{2} = 4$$

答：对称轴方程为 $x = 4$。



8. [2023 · October/November 0580/33 Q10(b)(ii)]
提示：先由横轴交点定轴，再比较同高两点到轴的水平距离。



NOT TO SCALE

The sketch shows the graph of $y = x^2 - 2x - 3$.
The graph crosses the x-axis at $(-1, 0)$ and $(3, 0)$.

(b) (i) The point A with coordinates $(6, k)$ lies on the graph.

Show that the value of k is 21.

(ii) The point B with coordinates $(p, 21)$ also lies on the graph.

Find the value of p.

示意图为$y = x^2 - 2x - 3$，与 x 轴交于$(-1, 0)$和$(3, 0)$，不按比例绘制。 （b）（i）坐标为$(6, k)$的点 A 在图象上。证明$k = 21$。 （ii）点$B(p, 21)$也在图象上。求 p。

✓ **答案**

$$p = -4$$

解析 由两个横截点，得对称轴 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$
前问的点 A 为$(6, 21)$。点 B 与 A 不同，两点关于$x = 1$对称，故 $\frac{p+6}{2} = 1 \Longrightarrow p + 6 = 2 \Longrightarrow p = -4$
答：$p = -4$。

2.33 把方程写成两个函数相等，再由交点读解

题型 1 把方程写成两个函数相等，再由交点读解（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **读取交点坐标：**例题中，两条直线交于横坐标为 2、纵坐标为 1 的点。交点的坐标记作 (x, y)，其中 x 表示_____，y 表示_____。

$$(x, y) = (2, 1)$$

② **区分两类所求：**例题交点处，两条直线在 $x = 2$ 时都有 $y = 1$。将两个函数的表达式用等号连接，所得方程的解为交点的_____。

求交点坐标	求方程的解
$(2, 1)$	$x = 2$

③ **常数对应直线：**对例题中的直线，令函数值等于常数，就与相应的水平直线相交。右端为零时，读取图象与_____交点的横坐标。

$$y = 1.5x - 2$$

$1.5x - 2 = 1$	$1.5x - 2 = 0$
补画 $y = 1$，读得 $x = 2$。	横轴为 $y = 0$，读得 $x \approx 1.3$。

④ **按横坐标取舍：**若读得两个交点的横坐标分别为 -1、2，应按题目给出的范围取舍。不满足范围的交点应_____，范围含等号时保留符合条件的端点。

限定 $x > 0$	限定 $-1 \le x \le 1$
$-1 < 0$，　$2 > 0$	$-1 \le -1 \le 1$，　$2 > 1$
保留 $x = 2$。	保留 $x = -1$。

⑤ **配成已画函数：**已有曲线时，将待解方程写成曲线的表达式等于一次式。先移项，再将等号左边配成已画函数，右边给出所补_____的方程。

已画 $y = 2^x - 3$	已画 $y = 3x^2 - 2x - 1$
$2^x - x - 2 = 0$	$3x^2 - 3x - 2 = 0$
$2^x = x + 2$	两边加上 $x + 1$，得
两边减去 3，得	$3x^2 - 2x - 1 = x + 1$
$2^x - 3 = x + 2 - 3 = x - 1$	

⑥ **描点补画直线：**对所得直线 $y = x - 1$，取两个横坐标求点。用直尺连接两点，并在作图区内延长。读取直线与曲线交点的横坐标，非整格处按小格估读。

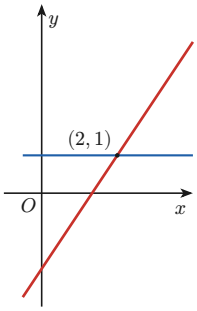
$$x = 0, \quad y = 0 - 1 = -1$$

$$x = 2, \quad y = 2 - 1 = 1$$

$$(0, -1), \quad (2, 1)$$

填空：①横坐标 ②纵坐标 ③横坐标 ④横轴 ⑤舍去 ⑥直线

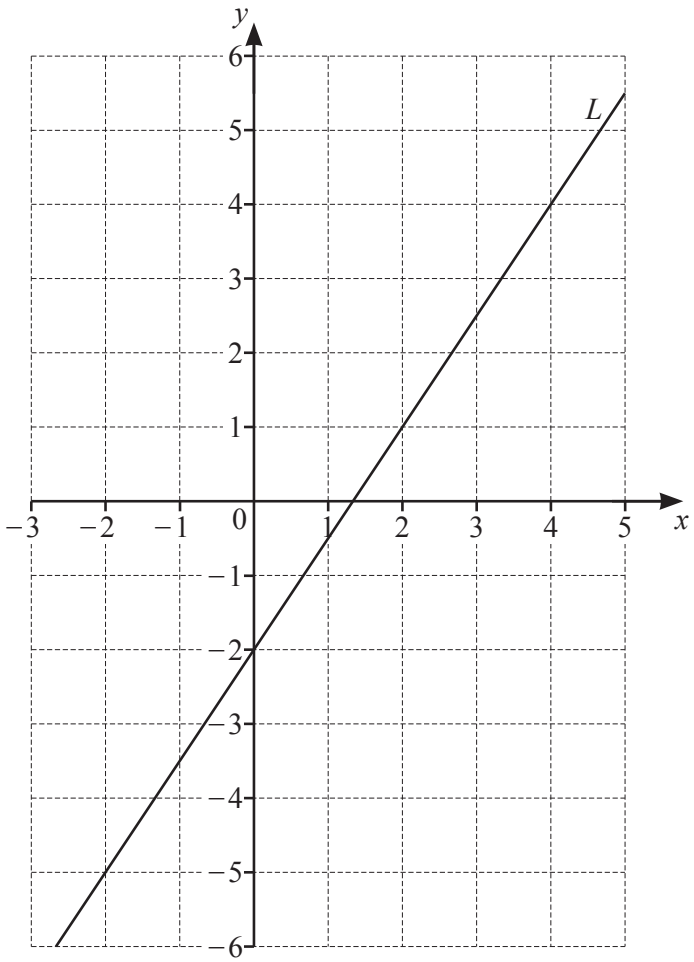
交点同时满足两个方程

	图像	数量关系
同一关系		$1.5x - 2 = 1$ 的解为 $x = 2$。

点石成金　题目出现两图交点或要求用图象解方程时，先将方程两边分别对应到两个图象。

例 1　[2023 · May/June 0580/32 Q7(a)(iii)]

(a)



(ii) On the grid, draw the line $y = 1$.

(iii) Write down the coordinates of the point where the two lines intersect.

坐标网格已给出直线 L。（a）（ii）在网格上画出$y = 1$的图象。（iii）写出两条直线交点的坐标。

解答 由两条直线的交点向两坐标轴作垂线，读得

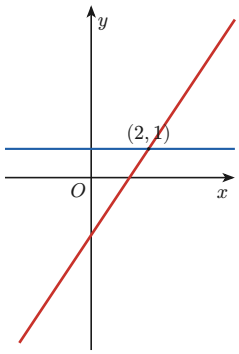
$$x = 2$$

$$y = 1$$

答：交点的坐标为 $(2, 1)$。

方法：先找两线交会处，再沿网格读横坐标、纵坐标。

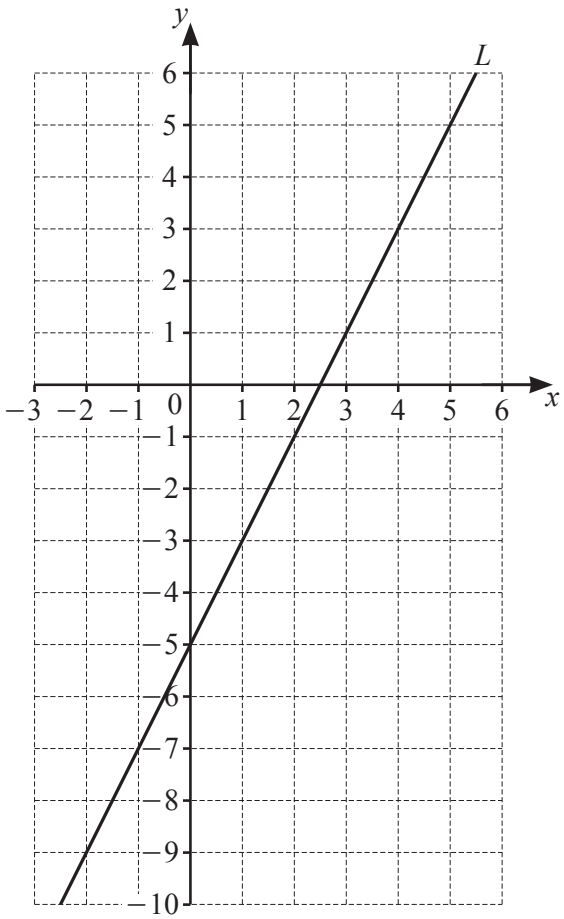
辨析：交点坐标是一对数，方程的解是交点的横坐标。



针对练习

1. [2023 · October/November 0580/31 Q8(b)(ii)]

提示：找横纵坐标相等的点画线，再看与另一线的交会处。



(ii) Write down the coordinates of the point where the line $y = x$ intersects line L.

图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，直线标为 L。
（ii）写出直线 $y = x$ 与直线 L 的交点坐标。

✓ **答案** $(5,5)$

解析 直线 $y=x$ 经过 $(0,0)$、$(5,5)$。用直尺连接两点，画出直线，与 L 相交。由交点读得

$$x=5$$

$$y=5$$

答：交点的坐标为 $(5,5)$。

2. [2023 · May/June 0580/43 Q10(c)]

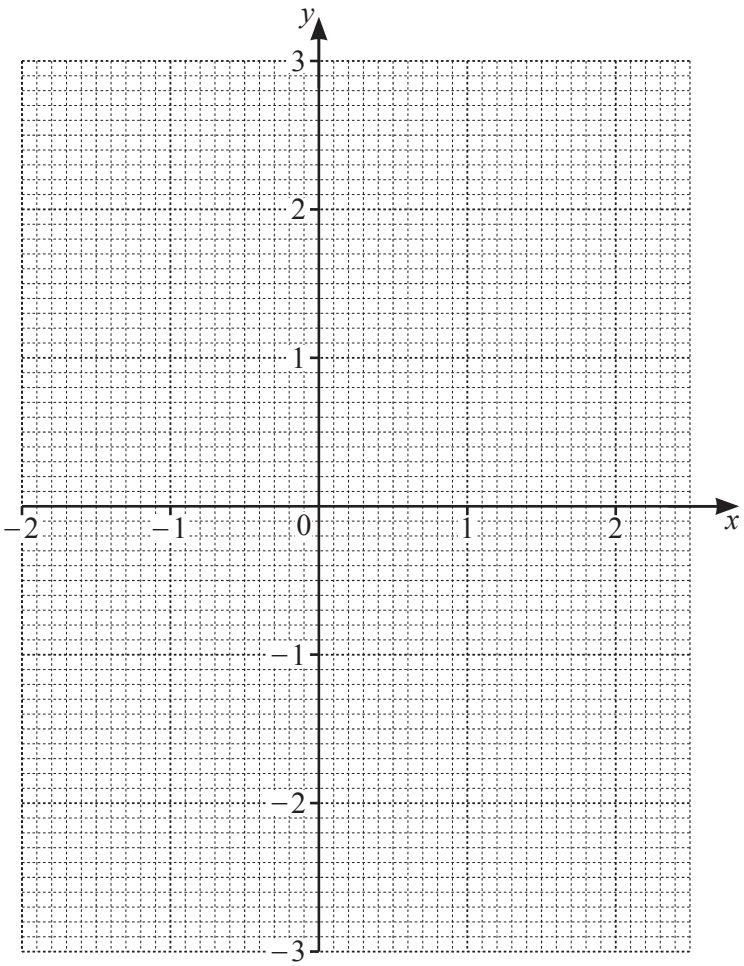
提示：看所求函数值对应的高度，再读交点的横坐标。

The table shows some values for $y=2^x-3$.

x	-2	-1	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	-2.75			-1.58		-0.17	1	2.66

(a) Complete the table.

(b) On the grid, draw the graph of $y=2^x-3$ for $-2 \leqslant x \leqslant 2.5$.



(c) Use your graph to solve the equation $2^x-3=2$.

表中给出了$y=2^x-3$的部分值。

x	-2	-1	0	0.5	1	1.5	2	2.5

y	-2.75			-1.58		-0.17	1	2.66

(a) 补全数值表。 (b) 在坐标网格上画出$y = 2^x - 3$，范围为$-2 \le x \le 2.5$。 (c) 用图象解$2^x - 3 = 2$。

✓ **答案** $x \approx 2.3$

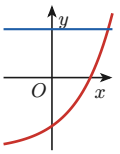
解析 已画曲线的方程为

$$y = 2^x - 3$$

所求方程对应曲线与水平直线 $y = 2$ 的交点。画出 $y = 2$，由交点读得

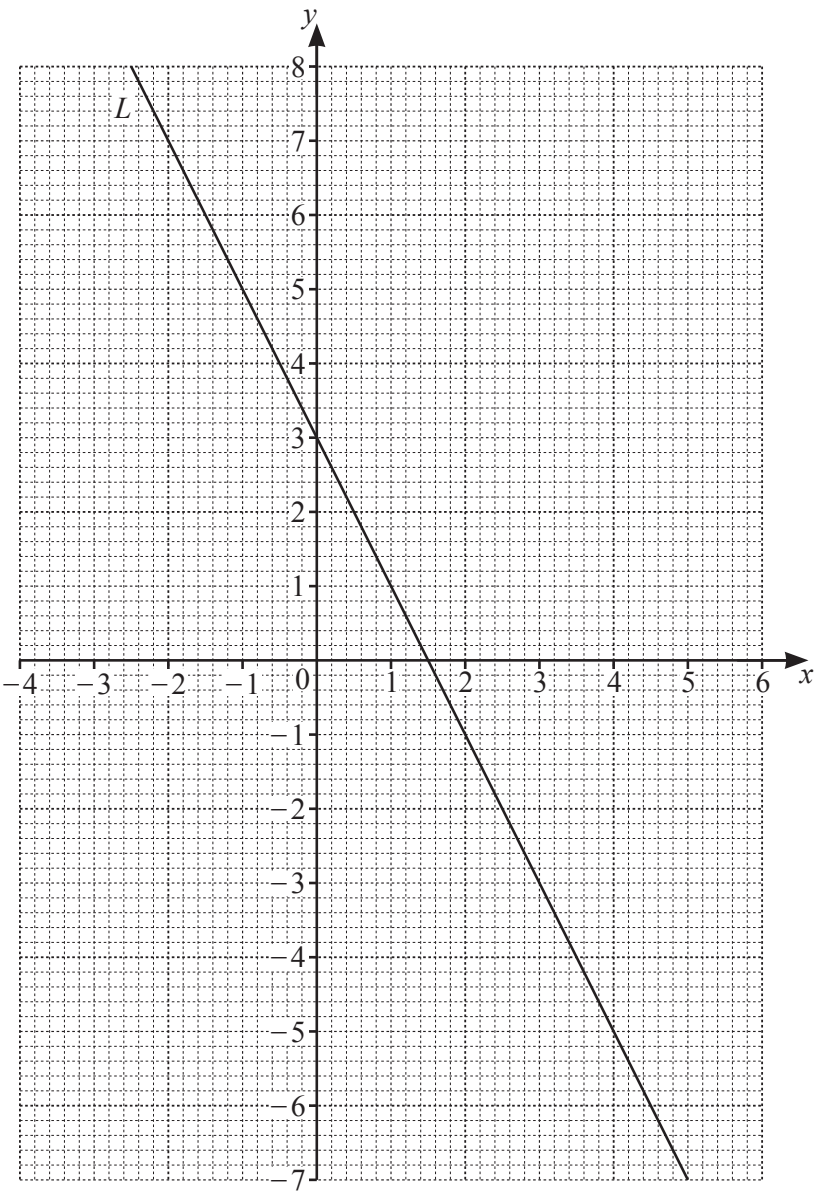
$$x \approx 2.3$$

答：$x \approx 2.3$。



3. [2023 · May/June 0580/33 Q6(d)]

提示：先按横坐标范围筛交点，再沿网格读纵坐标。



(b) **(i)** Complete the table of values for $y = x^2 - 3x - 3$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y		1		-5	-5		1	

(ii) On the grid, draw the graph of $y = x^2 - 3x - 3$ for $-2 \leqslant x \leqslant 5$.

(d) Write down the coordinates of the point where line L intersects the graph of $y = x^2 - 3x - 3$ for $x > 0$.

表中给出了$y = x^2 - 3x - 3$的部分值。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y		1		-5	-5		1	

(b(i)) 补全数值表。 (b(ii)) 在坐标网格上画出$y = x^2 - 3x - 3$，范围为$-2 \leq x \leq 5$。 (d) 写出给定直线 L 与曲线在$x > 0$时的交点坐标。

✓ **答案** $(3, -3)$

解析 由图可知，直线 L 的方程为

$$y = -2x + 3$$

直线与曲线的交点满足

$$x^2 - 3x - 3 = -2x + 3$$

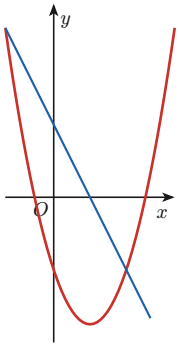
由两图交点读得

$$x \approx -2 \quad 或 \quad x \approx 3$$

$\because x > 0$，$\therefore$取 $x = 3$。代入直线方程，得

$$y = -2 \times 3 + 3 = -3$$

答：所求交点的坐标为 $(3, -3)$。



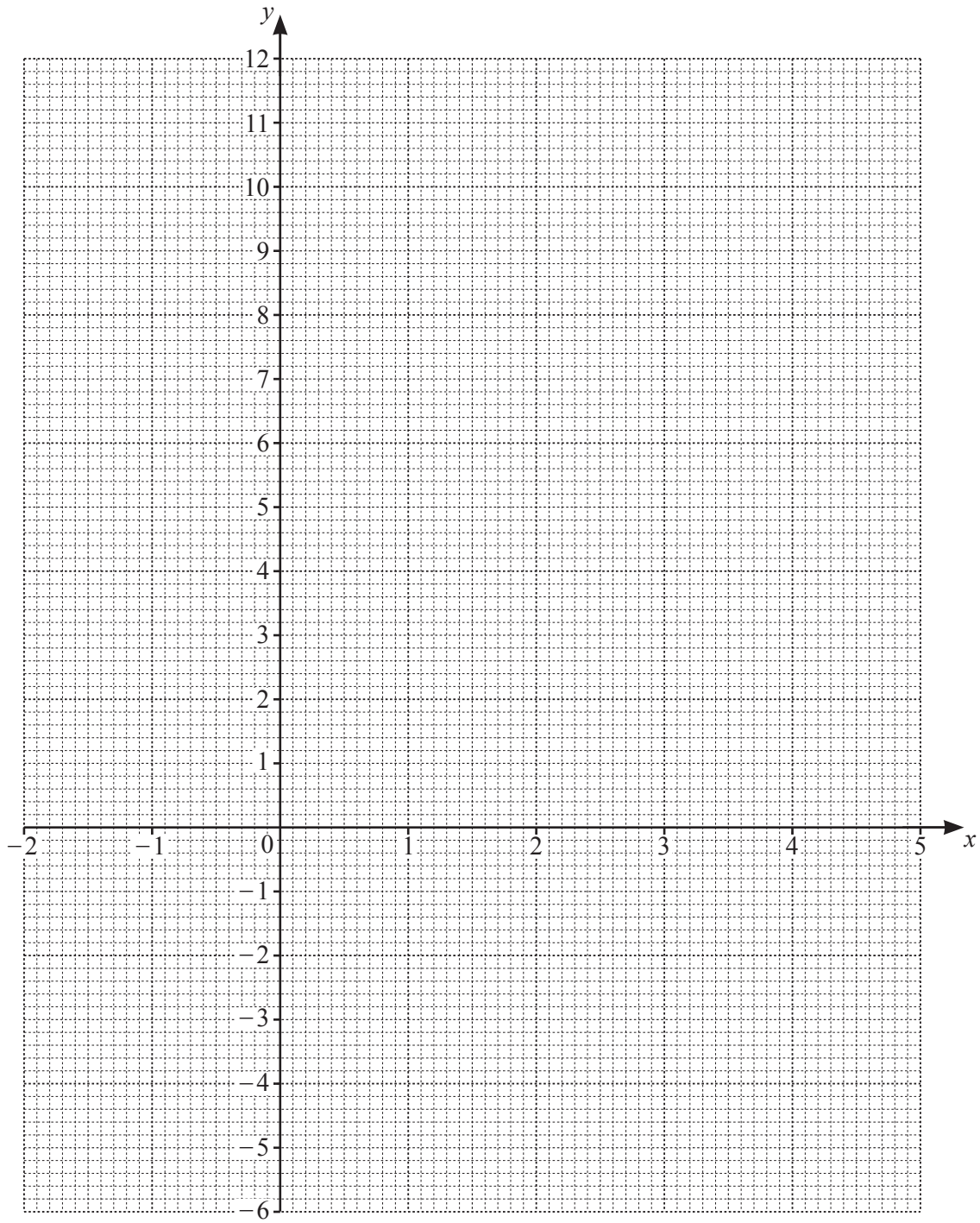
4. [2023 · May/June 0580/31 Q6(e)]

提示：看指定范围内的两处交会，分别配对横纵坐标。

(a) Complete the table of values for $y = 5 + 3x - x^2$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y		1			7			-5

(b) On the grid, draw the graph of $y = 5 + 3x - x^2$ for $-2 \leqslant x \leqslant 5$.



(d) **(i)** Complete the table of values for $y = 2x + 1$.

x	-1	0	2
y			

(ii) On the grid, draw the graph of $y = 2x + 1$ for $-2 \leqslant x \leqslant 5$.

(e) Write down the coordinates of the two points where the two graphs intersect.

表中给出了$y = 5 + 3x - x^2$的部分值。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5

y		1			7			-5

(a) 补全数值表。 (b) 在坐标网格上画出$y=5+3x-x^2$，范围为$-2\le x\le 5$。 (d) (i) 补全$y=2x+1$的数值表：x 取-1、0、2。(ii) 在同一网格上画出其在$-2\le x\le 5$的图象。(e) 写出两个图象交点的坐标。

✓ **答案** 约为 $(-1.6,-2.2)$ 和 $(2.6,6.2)$

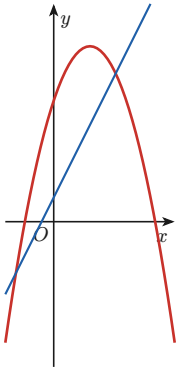
解析 在 $-2\le x\le 5$ 内画出直线 $y=2x+1$，与曲线相交于两点。由左侧交点读得

$$x\approx -1.6,\quad y\approx -2.2$$

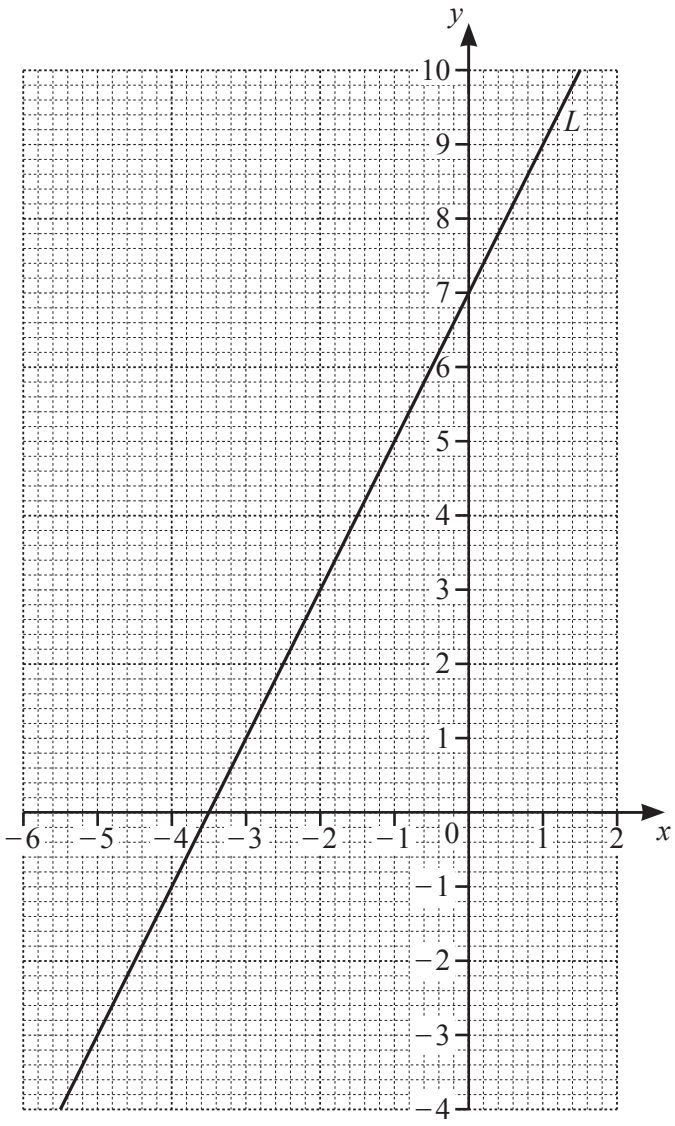
由右侧交点读得

$$x\approx 2.6,\quad y\approx 6.2$$

答：两个交点的坐标约为 $(-1.6,-2.2)$ 和 $(2.6,6.2)$。



5. [2023 · February/March 0580/32 Q6(d)(ii)]
提示：按等号右边的常数定高度，再看水平线与曲线的交会。



(c) (i) Complete the table of values for $y = x^2 + 5x + 3$.

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	9		−1			−1		

(ii) On the grid, draw the graph of $y = x^2 + 5x + 3$ for $-6 \leqslant x \leqslant 1$.

(d) (i) On the grid, draw the line $y = 6$.

(ii) Use your graphs to solve the equation $x^2 + 5x + 3 = 6$.

表中给出了$y = x^2 + 5x + 3$的部分值。

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	9		−1			−1		

(c(i)) 补全数值表。 (c(ii)) 在坐标网格上画出$y = x^2 + 5x + 3$，范围为$-6 \leq x \leq 1$。 (d) (i) 画出直线$y = 6$。(ii) 用图象解$x^2 + 5x + 3 = 6$。

✓ **答案** $x \approx -5.5$ 或 $x \approx 0.5$

解析 将方程两边分别对应为曲线与水平直线，得

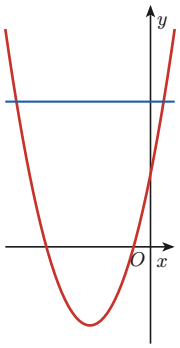
$$y = x^2 + 5x + 3$$

$$y = 6$$

在曲线所在的坐标网格上画出水平直线 $y = 6$。由两个交点读得

$$x \approx -5.5 \quad 或 \quad x \approx 0.5$$

答：$x \approx -5.5$ 或 $x \approx 0.5$。



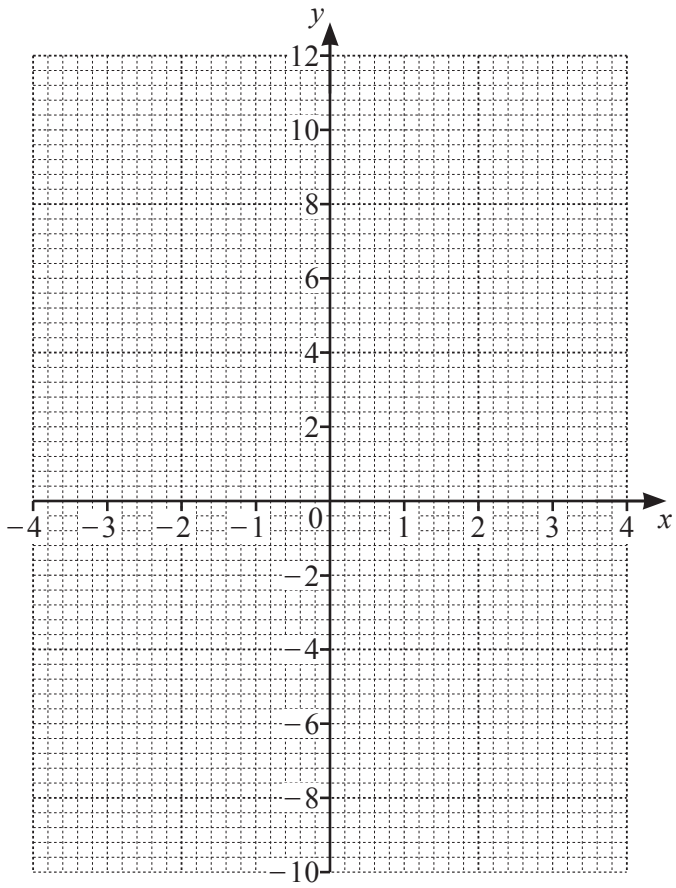
6. [2023 · May/June 0580/32 Q7(b)(iv)]

提示：看函数值为零的位置，沿横轴读出各交点的位置。

(b) (i) Complete the table of values for $y = x^2 + x - 8$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	-2		-8	-8		-2	4	

(ii) On the grid, draw the graph of $y = x^2 + x - 8$ for $-4 \leqslant x \leqslant 4$.



(iv) Use your graph to solve the equation $x^2+x-8=0$.

表中给出了$y=x^2+x-8$的部分值。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	-2		-8	-8		-2	4	

(b(i)) 补全数值表。 (b(ii)) 在坐标网格上画出$y=x^2+x-8$，范围为$-4\le x\le 4$。 (iv) 用图象解$x^2+x-8=0$。

✓ **答案** $x\approx -3.4$ 或 $x\approx 2.4$

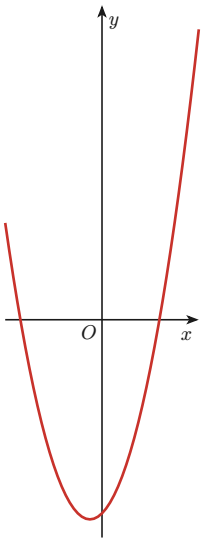
解析 所求方程为

$$x^2+x-8=0$$

横轴的方程为 $y=0$，故读取曲线 $y=x^2+x-8$ 与横轴交点的横坐标，得

$$x\approx -3.4 \quad 或 \quad x\approx 2.4$$

答：$x\approx -3.4$ 或 $x\approx 2.4$。



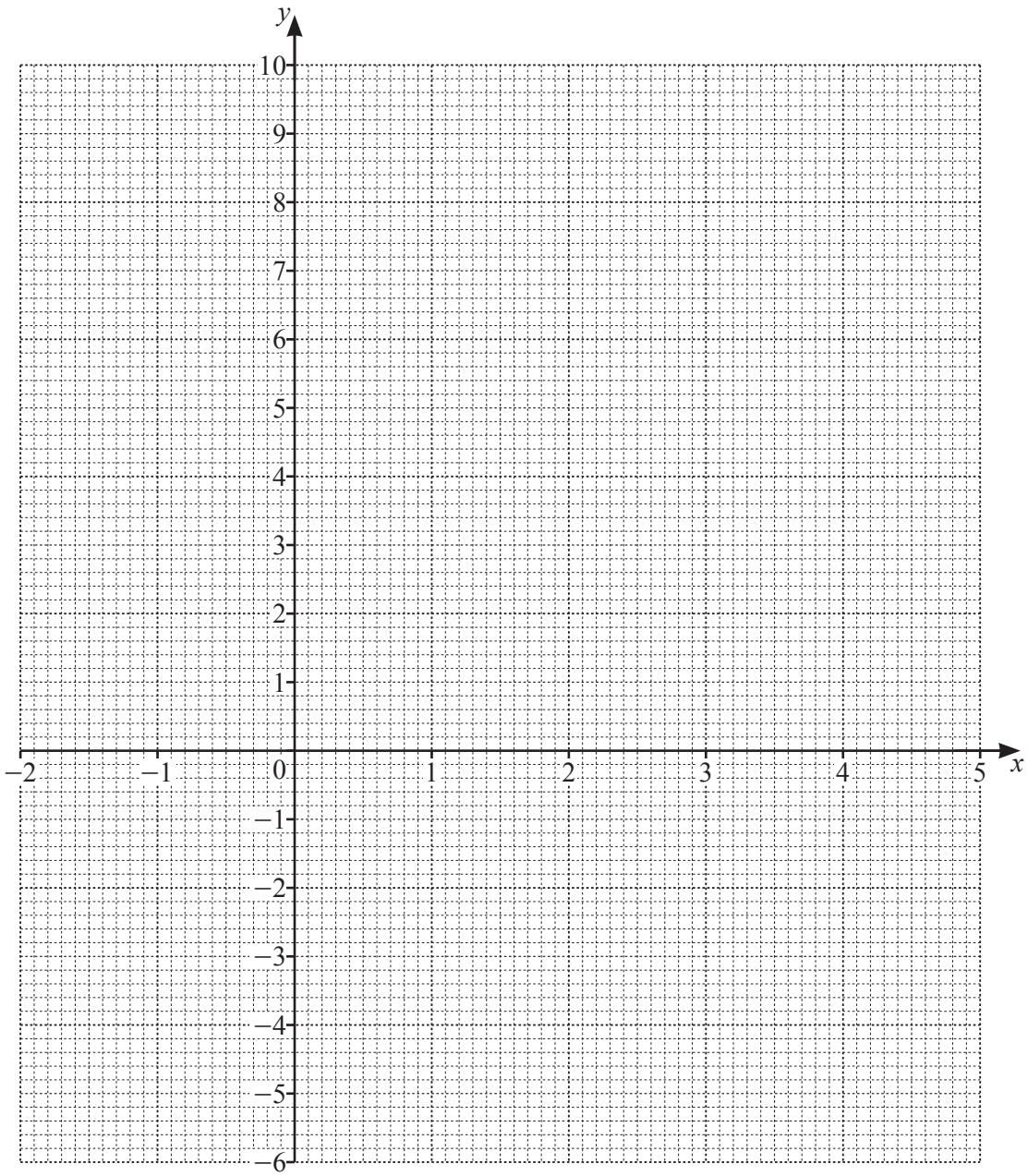
7. [2023 · October/November 0580/32 Q4(c)]

提示：找曲线穿过横轴的各处，再对照横轴刻度估读。

(a) Complete the table of values for $y=x^2-4x-2$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y		3	-2	-5		-5	-2	3

(b) On the grid, draw the graph of $y = x^2 - 4x - 2$ for $-2 \leqslant x \leqslant 5$.



(c) Use your graph to solve the equation $x^2 - 4x - 2 = 0$.

表中给出了$y = x^2 - 4x - 2$的部分值。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y		3	-2	-5		-5	-2	3

（a）补全数值表。（b）在坐标网格上画出$y = x^2 - 4x - 2$，范围为$-2 \leq x \leq 5$。（c）用图象解$x^2 - 4x - 2 = 0$。

✓ **答案** $x \approx -0.4$ 或 $x \approx 4.4$

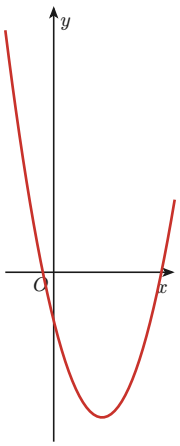
解析 所求方程为

$$x^2 - 4x - 2 = 0$$

横轴的方程为 $y = 0$，故读取曲线 $y = x^2 - 4x - 2$ 与横轴交点的横坐标，得

$$x \approx -0.4 \quad 或 \quad x \approx 4.4$$

答：$x \approx -0.4$ 或 $x \approx 4.4$。



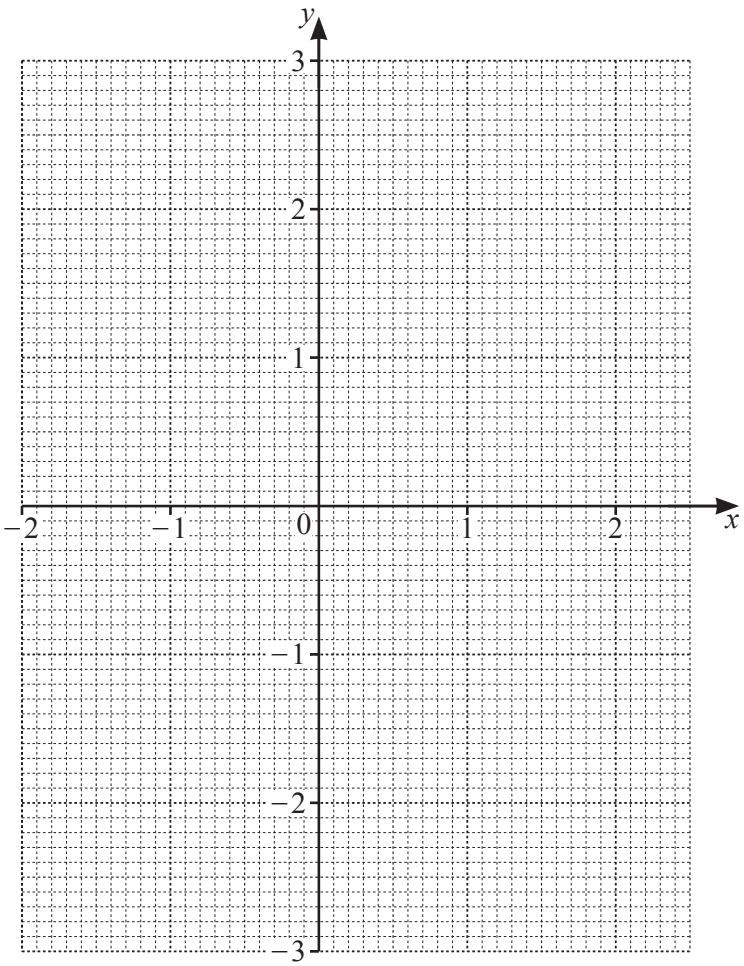
8. [2023 · May/June 0580/43 Q10(d)]
提示：对照已画曲线的表达式，移项配成相同的左边。

The table shows some values for $y = 2^x - 3$.

x	-2	-1	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	-2.75			-1.58		-0.17	1	2.66

(a) Complete the table.

(b) On the grid, draw the graph of $y = 2^x - 3$ for $-2 \leqslant x \leqslant 2.5$.



(d) By drawing a suitable straight line, solve the equation $2^x - x - 1.5 = 0$.

表中给出了$y = 2^x - 3$的部分值。

x	-2	-1	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	-2.75			-1.58		-0.17	1	2.66

（a）补全数值表。（b）在坐标网格上画出$y = 2^x - 3$，范围为$-2 \le x \le 2.5$。（d）画一条适当的直线，解$2^x - x - 1.5 = 0$。

✓ **答案** 画直线 $y = x - 1.5$；$x \approx -1$ 或 $x \approx 1.6$

解析 已画曲线的方程为

$$y = 2^x - 3$$

由待解方程，得

$$2^x - x - 1.5 = 0$$

$$2^x = x + 1.5$$

两边减去 3，得

$$2^x - 3 = x + 1.5 - 3 = x - 1.5$$

故补画直线 $y = x - 1.5$。取两点，得

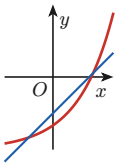
$$x = 0, \quad y = 0 - 1.5 = -1.5$$

$$x = 2, \quad y = 2 - 1.5 = 0.5$$

用直尺连接 $(0, -1.5)$、$(2, 0.5)$，并在作图区内延长。由直线与曲线的两个交点读得

$$x \approx -1 \quad 或 \quad x \approx 1.6$$

答：补画直线 $y = x - 1.5$，方程的解约为 -1 和 1.6。



9. [2023 · May/June 0580/21 Q20(c)]

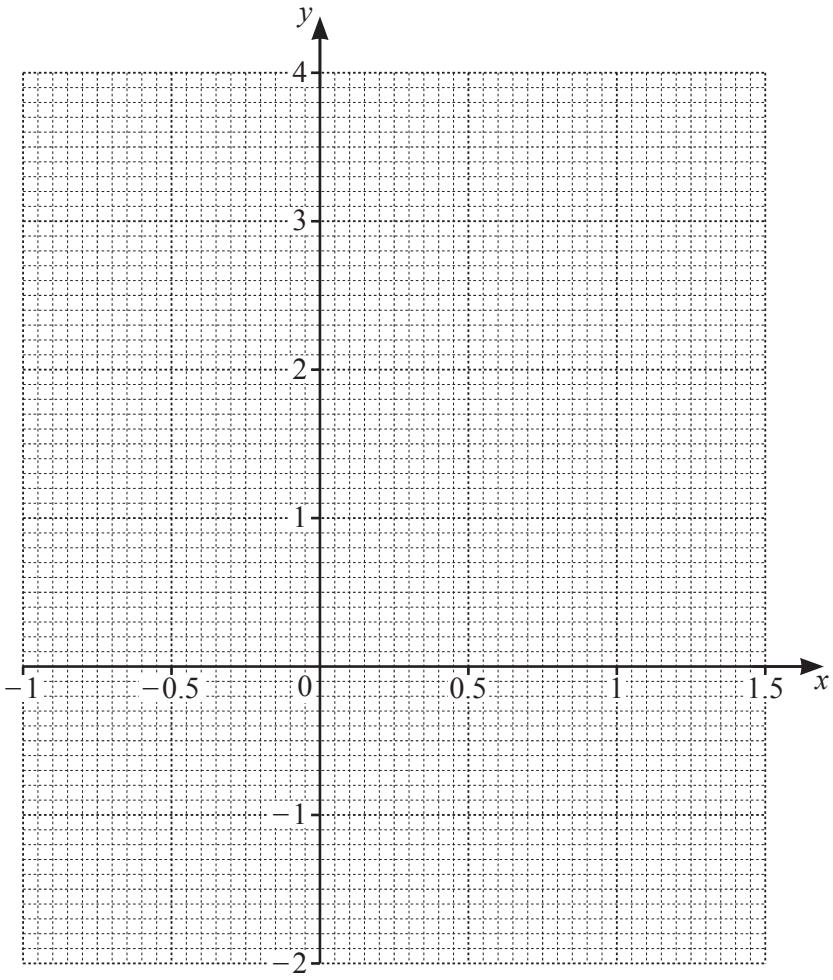
提示：对照曲线表达式配出左边，再按指定范围筛交点。

The table shows some values for $y = 3x^2 - 2x - 1$.

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
y	4		-1		0	2.75

(a) Complete the table.

(b) On the grid, draw the graph of $y = 3x^2 - 2x - 1$ for $-1 \leqslant x \leqslant 1.5$.



(c) By drawing a suitable straight line, solve the equation $3x^2 - 4x - 2 = 0$ for $-1 \leqslant x \leqslant 1.5$.

表中给出了$y = 3x^2 - 2x - 1$的部分值。

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
y	4		-1		0	2.75

（a）补全数值表。（b）在坐标网格上画出$y = 3x^2 - 2x - 1$，范围为$-1 \leq x \leq 1.5$。（c）画一条适当的直线，在$-1 \leq x \leq 1.5$内解$3x^2 - 4x - 2 = 0$。

✓ **答案** 画直线 $y = 2x + 1$；$x \approx -0.4$

解析 已画曲线的方程为

$$y = 3x^2 - 2x - 1$$

由待解方程，得

$$3x^2 - 4x - 2 = 0$$

两边加上 $2x + 1$，得

$$3x^2 - 2x - 1 = 2x + 1$$

故补画直线 $y = 2x + 1$。取两点，得

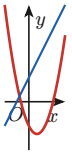
$$x = -1, \quad y = 2 \times (-1) + 1 = -1$$

$$x = 1, \quad y = 2 \times 1 + 1 = 3$$

用直尺连接 $(-1,-1)$、$(1,3)$，并在作图区内延长。在指定范围内，由直线与曲线的交点读得

$$x \approx -0.4$$

答：补画直线 $y=2x+1$，所求解为 $x \approx -0.4$。



2.34 用幂函数求导法则求导数和定点梯度

题型 1 用幂函数求导法则求导数和定点梯度（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **函数与曲线：**本例曲线的方程为

$$y=f(x)=x^3-3x^2-4$$

其中，x 为横坐标，y 为纵坐标。$f(x)$ 表示横坐标为 x 时的函数值。

② **导数与梯度：**曲线在某点的梯度是该点的切线斜率。求导得到梯度关于横坐标的表达式。导数的两种记号为

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

③ **幂项的求导：**对幂项求导，原指数乘到系数上，指数减 1。

$\frac{d(x^3)}{dx}=3x^2$　　$\frac{d(x^2)}{dx}=2x$

用 n 表示正整数，求导法则为

$$\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$$

例如

$\frac{d(x^4)}{dx}=4x^3$　　$\frac{dx}{dx}=1$

④ **常数项求导：**常数项不随横坐标改变，导数为_____。本例中的常数项求导得

$$\frac{d(-4)}{dx}=0$$

⑤ **各项分别求导：**多项式中的各项分别求导，再按原来的加减关系合并。带系数的幂项，保留系数再乘幂项的导数。

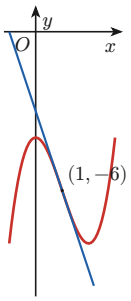
$$f'(x)=3x^2-3\times 2x-0=3x^2-6x$$

⑥ **求定点梯度：**给出点的坐标时，将横坐标代入导数。本例曲线上点 $(3,-4)$ 的横坐标为 3，该点梯度为

$$f'(3)=3\times 3^2-6\times 3=_____$$

填空：①0　②9

定点梯度与经过该点的切线

	图像	数量关系
同一关系		$f(x)=x^3-3x^2-4$，$f'(1)=-3$，切线为 $y=-3x-3$。

点石成金　题目出现多项式曲线，要求导数或指定点的梯度时，先逐项求导；求定点梯度再代入横坐标。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q9(a)]

$$f(x)=x^3-3x^2-4$$

(a) Find the gradient of the graph of $y=f(x)$ where $x=1$.

$f(x)=x^3-3x^2-4$

(a) 求图象 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的梯度。

解答　由幂函数求导法则，得

$$f'(x)=3x^2-3\times 2x-0=3x^2-6x$$

当 $x=1$ 时，

$$f'(1)=3\times 1^2-6\times 1=-3$$

答：图象在 $x=1$ 处的梯度为 -3。

方法：先看多项式各项的指数，逐项求导后再代入指定横坐标。

辨析：函数值是点的纵坐标，梯度是该点的切线斜率。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/21 Q21(a)]

提示：看所给点的横坐标，核对代入的是原函数还是导数。

A curve has equation $y = x^3 - 12x$.

(a) Find the gradient of the curve at the point $(1,-11)$.

一条曲线的方程为

$$y = x^3 - 12x$$

(a) 求曲线在点 $(1,-11)$ 处的梯度。

✓ **答案**

$$-9$$

解析 由幂函数求导法则，得

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12 \times 1 = 3x^2 - 12$$

点 $(1,-11)$ 的横坐标为 1，代入导数得

$$3 \times 1^2 - 12 = -9$$

答：曲线在点 $(1,-11)$ 处的梯度为 -9。

2. [2023 · May/June 0580/43 Q12(a)]

提示：看各幂项的系数和指数，核对求导后两者的变化。

The equation of a curve is $y = x^4 - 8x^2 + 5$.

(a) Find the derivative, $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$, of $y = x^4 - 8x^2 + 5$.

一条曲线的方程为

$$y = x^4 - 8x^2 + 5$$

(a) 求 $y = x^4 - 8x^2 + 5$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$。

✓ **答案**

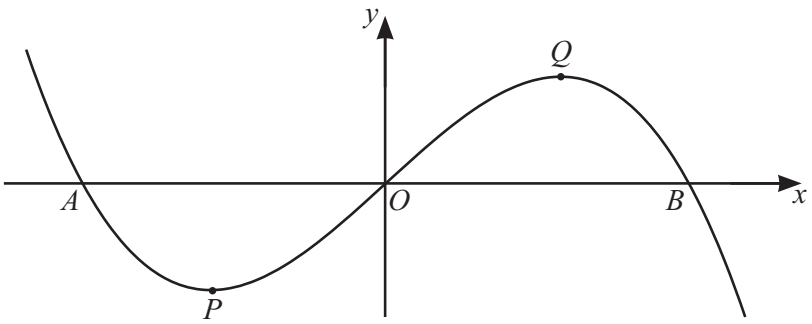
$$4x^3 - 16x$$

解析 由幂函数求导法则，得

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 8 \times 2x + 0 = 4x^3 - 16x$$

答：导数为 $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 16x$。

3. [2025 · May/June 0580/22 Q21(b)(i)]
提示：分别对一次项和三次项求导。



NOT TO SCALE

The diagram shows the graph of $y = 3x - x^3$.
The graph crosses the x-axis at A, at O and at B.
The turning points of the graph are at P and at Q.

(b) (i) Differentiate $3x - x^3$.

示意图给出了下列函数的图象。

$$y = 3x - x^3$$

图象与 x 轴交于点 A、O 和 B。
图象的转折点为 P 和 Q。
图中横轴标为 x，纵轴标为 y，O 为原点。示意图不按比例绘制。
(b)(i) 对下式关于 x 求导。

$$3x - x^3$$

✓ **答案**

$$3 - 3x^2$$

解析 由幂函数求导法则，各项分别求导，得

$$\frac{dy}{dx} = 3 \times 1 - 3x^2 = 3 - 3x^2$$

答：导数为 $3 - 3x^2$。

4. [2024 · May/June 0580/41 Q8(b)(i)]
提示：各项分别求导，再按原来的加减关系合并。

(b) (i) Find the derivative of $y = x^2 - 3x - 28$.

(b)(i) 求下列函数的导数。

$$y = x^2 - 3x - 28$$

✓ **答案**

$$2x - 3$$

解析 由幂函数求导法则，常数项的导数为 0，得

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3 \times 1 - 0 = 2x - 3$$

答：导数为 $2x - 3$。

5. [2024 · October/November 0580/42 Q10(a)]
提示：按原来的加减关系，将各项分别求导。

A curve has the equation $y = x^3 - 9x^2 - 48x$.

(a) Differentiate $x^3 - 9x^2 - 48x$.

一条曲线的方程为
$$y = x^3 - 9x^2 - 48x$$

(a) 求 $x^3 - 9x^2 - 48x$ 的导数。

✓ **答案**

$$3x^2 - 18x - 48$$

解析 由幂函数求导法则，各项分别求导，得
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 9 \times 2x - 48 \times 1 = 3x^2 - 18x - 48$$

答：导数为 $3x^2 - 18x - 48$。

2.35 令导数为零，再判断转折点的性质

题型 1 令导数为零，再判断转折点的性质（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **转折点的斜率：**曲线的函数如下，$f(x)$ 表示对应的纵坐标。
$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$$
导数 $f'(x)$（也记作 y'）表示切线斜率。曲线在转折点处改变升降方向，导数为_____。

② **多项式求导：**本例含三次项、二次项和常数项，分别求导后相加。
$$f'(x) = (x^3)' - 3(x^2)' + (-4)' = 3x^2 - 3 \times 2x + 0 = 3x^2 - 6x$$
对于正整数 n，幂函数的求导法则为
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
常数项的导数为零。

③ **零导数的求解：**求转折点的横坐标，先令导数为零，再提取公因式。
$$3x^2 - 6x = 0$$
$$3x(x - 2) = 0$$
乘积为零，至少有一个因式为零。
$$x = 0 \text{ 或 } x = 2$$

④ **多个因式求零：**乘积中含平方项时，先分情况，再解平方方程。
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x = 0 \text{ 或 } x^2 = 1$$
$$x = 0 \text{ 或 } x = \pm 1$$
平方方程中的正、负两根都应保留。

⑤ **横纵坐标配对：**求得横坐标后，代回_____求纵坐标。本例取其中一个横坐标代入。
$$f(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 - 4 = -4$$
对应的转折点为 $(0, -4)$，其余横坐标同样配对。

⑥ **转折点的判别：**对一阶导数再求导，所得 $f''(x)$ 称为二阶导数。

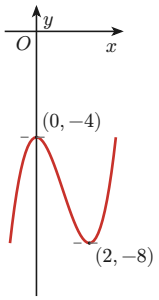
$$f''(x) = 6x - 6$$

在已求出的转折点处，按二阶导数的正负判断。

$f''(0) = -6 < 0$	$f''(2) = 6 > 0$
$(0, -4)$ 为极大点	$(2, -8)$ 为极小点
二阶导数为_____时是极大点	二阶导数为正时是极小点

填空：①零　②原函数　③负

导数为零的位置与转折点

	图像	数量关系
同一关系		$f'(x) = 3x(x-2) = 0$，得 $x = 0, 2$。

点石成金　题目出现曲线的函数式，要求转折点坐标或判断极大点时，先求导并令导数为零。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q9(b)]

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$$

(b) Find the coordinates of the turning points of the graph of $y = f(x$

函数为
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$。
(b) 求函数图象 $y = f(x)$ 的转折点坐标。

解答　对函数求导，得

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

方法：看函数式中各项的次数，先逐项求导，再找零斜率处。

辨析：原函数值是曲线的纵坐标，导函数值是切线的斜率。

令导数为零，得

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x = 2$$

分别代回原函数，得

$$f(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 - 4 = -4$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 - 4 = 8 - 12 - 4 = -8$$

答：转折点的坐标为 $(0, -4)$ 和 $(2, -8)$。

针对练习

1. [2024 · May/June 0580/42 Q11(b)(ii)]

提示：驻点处导数为零，求解时保留平方方程的正、负两根。

(b) A different curve has equation $y = 2x^3 - 6x + 8$.

(ii) Find the x-coordinates of the stationary points of this curve.

(b) 另一条曲线的方程为

$y = 2x^3 - 6x + 8$

(ii) 求这条曲线的驻点的横坐标。

✓ **答案** $x = 1$ 或 $x = -1$

解析 对曲线方程求导，得

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6$$

驻点处导数为零，得

$$6x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \text{ 或 } x = -1$$

答：驻点的横坐标为 1 和 -1。

2. [2023 · May/June 0580/21 Q21(b)]

提示：看导数方程化出的平方关系，检查正负两支是否齐全。

A curve has equation $y = x^3 - 12x$.

(b) Find the coordinates of the turning points of the curve.

一条曲线的方程为

$y = x^3 - 12x$。

(b) 求这条曲线的转折点坐标。

✓ **答案** $(-2, 16)$ 和 $(2, -16)$

解析 对曲线的函数求导，得

$$y' = 3x^2 - 12$$

令导数为零，得

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

分别代回原函数，得

$$y = (-2)^3 - 12 \times (-2) = -8 + 24 = 16$$

$$y = 2^3 - 12 \times 2 = 8 - 24 = -16$$

答：转折点的坐标为 $(-2,16)$ 和 $(2,-16)$。

3. [2023 · May/June 0580/43 Q12(b)]

提示：看导数各项的公因式，分别检查每个因式为零的情形。

The equation of a curve is $y=x^4-8x^2+5$.

(b) Find the coordinates of the three turning points.
You must show all your working.

一条曲线的方程为
$y=x^4-8x^2+5$。
（b）求三个转折点的坐标。必须写出全部计算过程。

✓ **答案** $(0,5)$、$(-2,-11)$ 和 $(2,-11)$

解析 对曲线的函数求导，得

$$y'=4x^3-16x$$

令导数为零，得

$$4x^3-16x=0$$

$$4x(x^2-4)=0$$

$$x=0 \text{ 或 } x^2=4$$

$$x=0 \text{ 或 } x=\pm 2$$

分别代回原函数，得

$$y=0^4-8\times 0^2+5=5$$

$$y=(-2)^4-8\times(-2)^2+5=16-32+5=-11$$

$$y=2^4-8\times 2^2+5=16-32+5=-11$$

答：三个转折点的坐标为 $(0,5)$、$(-2,-11)$ 和 $(2,-11)$。

4. [2024 · February/March 0580/42 Q8(c)(i)]

提示：先求导，再令导数为零，提取公因式。

(c) (i) Find the coordinates of the turning points of the graph of $y=10+9x^2-2x^3$.
You must show all your working.

（c）（i）求函数图象
$y=10+9x^2-2x^3$
的转折点坐标。必须写出全部计算过程。

✓ **答案** $(0,10)$ 和 $(3,37)$

解析 对函数求导，得

$$\frac{dy}{dx}=18x-6x^2$$

转折点处导数为零，得

$$18x - 6x^2 = 0$$

$$6x(3 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x = 3$$

分别代回原函数，得

$$y = 10 + 9 \times 0^2 - 2 \times 0^3 = 10$$

$$y = 10 + 9 \times 3^2 - 2 \times 3^3 = 10 + 81 - 54 = 37$$

答：转折点坐标为 $(0, 10)$ 和 $(3, 37)$。

5. [2024 · October/November 0580/42 Q10(c)]
提示：先求转折点的横坐标，再代入二阶导数判断正负。

A curve has the equation $y = x^3 - 9x^2 - 48x$.

(a) Differentiate $x^3 - 9x^2 - 48x$.

(b) Find the coordinates of the turning points of the graph of $y = x^3 - 9x^2 - 48x$. You must show all your working.

(c) Determine whether each of the turning points is a maximum or a minimum. Give reasons for your answers.

一条曲线的方程为

$$y = x^3 - 9x^2 - 48x$$

(a) 求 $x^3 - 9x^2 - 48x$ 的导数。
(b) 求函数图象 $y = x^3 - 9x^2 - 48x$ 的转折点坐标。必须写出全部计算过程。
(c) 判断每个转折点是极大点还是极小点，并说明理由。

✓ **答案** $x = -2$ 处为极大点，$x = 8$ 处为极小点。

解析 对曲线方程求导，得

$$y' = 3x^2 - 18x - 48$$

转折点处一阶导数为零，得

$$3x^2 - 18x - 48 = 0$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times (-16)}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2}$$

$$x = -2 \text{ 或 } x = 8$$

代回曲线方程，得到两点的纵坐标。$y(-2) = (-2)^3 - 9(-2)^2 - 48(-2) = 52$
$y(8) = 8^3 - 9 \times 8^2 - 48 \times 8 = -448$
转折点为$(-2, 52)$和$(8, -448)$。
对一阶导数再求导，得

$$y'' = 6x - 18$$

当 $x = -2$ 时，

$$y'' = 6 \times (-2) - 18 = -30 < 0$$

故此处为极大点。

当 $x=8$ 时，

$$y''=6\times 8-18=30>0$$

故此处为极小点。

答：$x=-2$ 处为极大点，$x=8$ 处为极小点。

6. [2023 · May/June 0580/43 Q12(c)]

提示：将各候选横坐标代入二阶导数，比较所得值的正负。

The equation of a curve is $y=x^4-8x^2+5$.

(c) Determine which one of these turning points is a maximum. Justify your answer.

一条曲线的方程为 $y=x^4-8x^2+5$。

(c) 判断这些转折点中哪一个是极大点，并说明理由。

✓ **答案** $(0,5)$；该点处二阶导数为 $-16<0$。

解析 对曲线的函数求导，得

$$y'=4x^3-16x$$

令导数为零，得

$$4x(x^2-4)=0$$

$$x=0 \text{ 或 } x=\pm 2$$

再次求导，得

$$y''=12x^2-16$$

当 $x=0$ 时，

$$y''=12\times 0^2-16=-16<0$$

故此处为极大点，对应纵坐标为

$$y=0^4-8\times 0^2+5=5$$

当 $x=\pm 2$ 时，

$$y''=12\times 2^2-16=32>0$$

故另两个转折点均为极小点。

答：极大点为 $(0,5)$，因为该点处二阶导数为负。

2.36 从路程时间图读时刻并求经历的时间

题型 1 从路程时间图读时刻并求经历的时间（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **时间刻度：**迭戈的图中，横轴表示时刻。从 10 : 00 到 10 : 30 有 6 小格，每小格表示的时间为：

$$30\div 6=_____ \text{ min}$$

② **起讫读时：**从行程线的起点或终点向时间轴作垂线，读出时刻。迭戈的行程线从家出发，到游泳池结束。出发时刻为 _____，到达时刻为 10 : 40。

③ **相遇读时：**两车的距离从同一地点量起，图线的交点表示相遇。例如，交点在 11 : 00 的竖线上，高度为 3 km。沿这条竖线读时间轴，相遇时刻为 _____。

④ **停留计时：**图线出现水平线段，表示距离不变，物体停留。读出水平段两端的时刻，再求时间差。例如，水平段从 11 : 10 延伸至 11 : 25，停留时间为：

$$11:25-11:10=_____\ \text{min}$$

⑤ **跨时计时：**迭戈从 10 : 40 留到 12 : 20，可分成整点前后几段。换算时，一小时等于 60 分钟。

$$20\ \text{min}+60\ \text{min}+20\ \text{min}=100\ \text{min}$$

$$100\ \text{min}=60\ \text{min}+40\ \text{min}=1\ \text{h}\ _____\ \text{min}$$

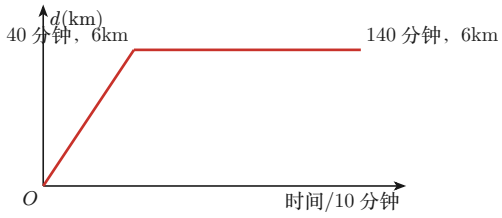
⑥ **比较行程：**分别求出发至到达的时长，其中包含停留时间。例如，两段行程先各求时长，再相减。

$9:30-9:00=30\ \text{min}$　　$9:35-9:10=25\ \text{min}$

$$30\ \text{min}-25\ \text{min}=_____\ \text{min}$$

填空：①5　②10 : 00　③11 : 00　④15　⑤40　⑥5

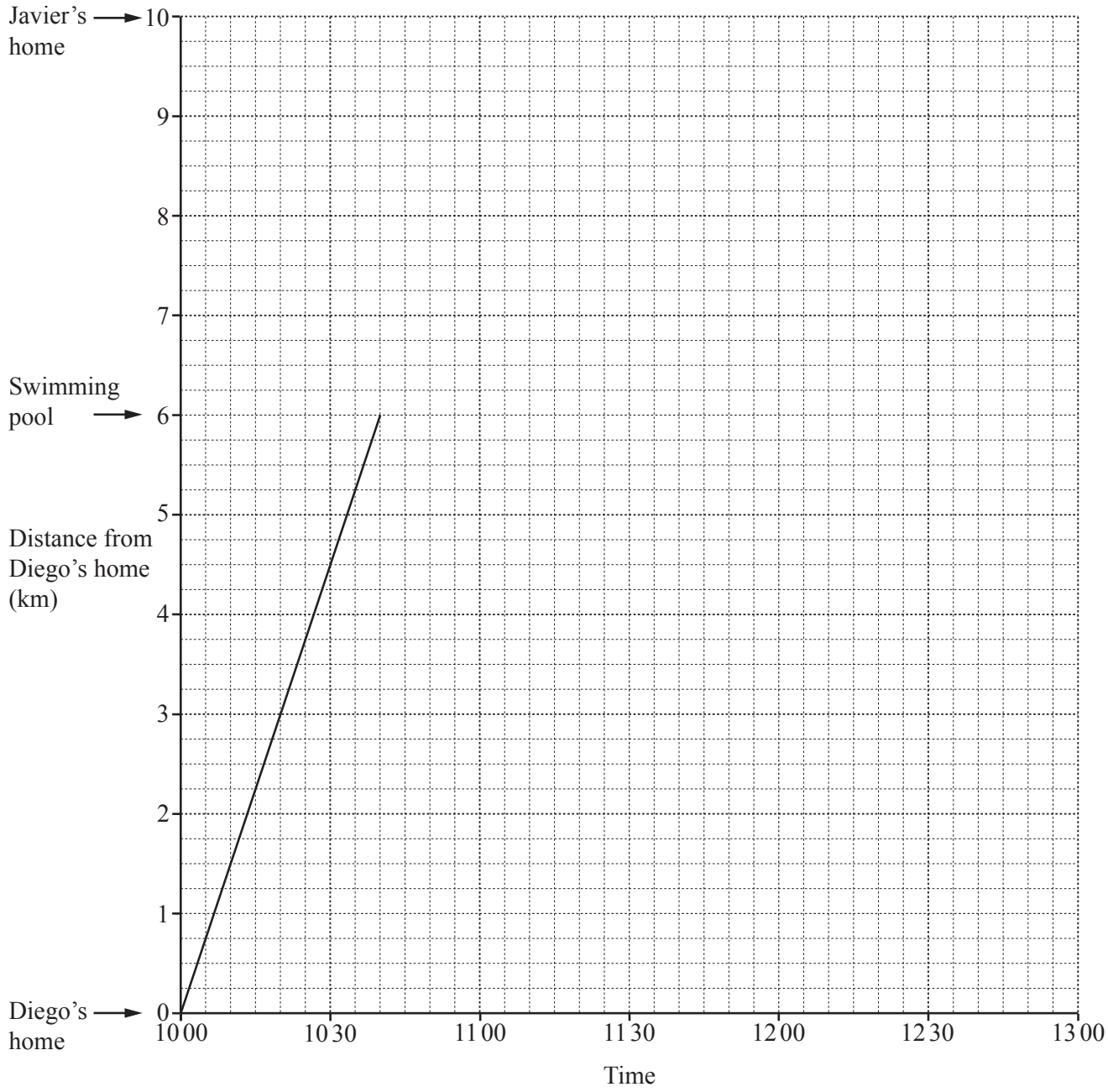
水平线段表示位置不变

	图像	数量关系
同一关系		140 − 40 = 100 分钟，即 1 小时 40 分钟。

点石成金　题目出现行程图，要求出发、相遇时刻或经历的时间时，先在相应点向时间轴读数。

例 1　[2023 · May/June 0580/31 Q8(b)(ii)]

Two friends, Diego and Javier, meet at a swimming pool.
The travel graph shows Diego's journey by bicycle from his home to the swimming pool.



(b) Diego stays at the swimming pool until 12 20.

(ii) Work out how long, in hours and minutes, he is at the swimming pool.

8　两位朋友迭戈（Diego）和哈维尔（Javier）在一个游泳池见面。行程图表示迭戈骑自行车从家到游泳池的行程。横轴为时刻，标有 10 : 00、10 : 30、11 : 00、11 : 30、12 : 00、12 : 30、13 : 00。纵轴为距迭戈家的距离，单位为千米，标有从 0 到 10 的各整数刻度。迭戈的家、游泳池和哈维尔的家分别标在 0、6、10 千米处。

(b) 迭戈在游泳池一直待到 12 : 20。

(ii) 求他在游泳池停留了多长时间，用小时和分钟表示。

解答　由行程线在游泳池处的终点，读得到达时刻为 10 : 40。

由题意，离开时刻为 12 : 20。

从 10 : 40 到 11 : 00 为 20 分钟，从 11 : 00 到 12 : 20 为 1 小时 20 分钟。

$$20\ \text{min} + 1\ \text{h}\ 20\ \text{min} = 1\ \text{h}\ 40\ \text{min}$$

答：他在游泳池停留了 1 小时 40 分钟。

方法：先看游泳池处终点对应的时刻，再以整点为界分段计时。

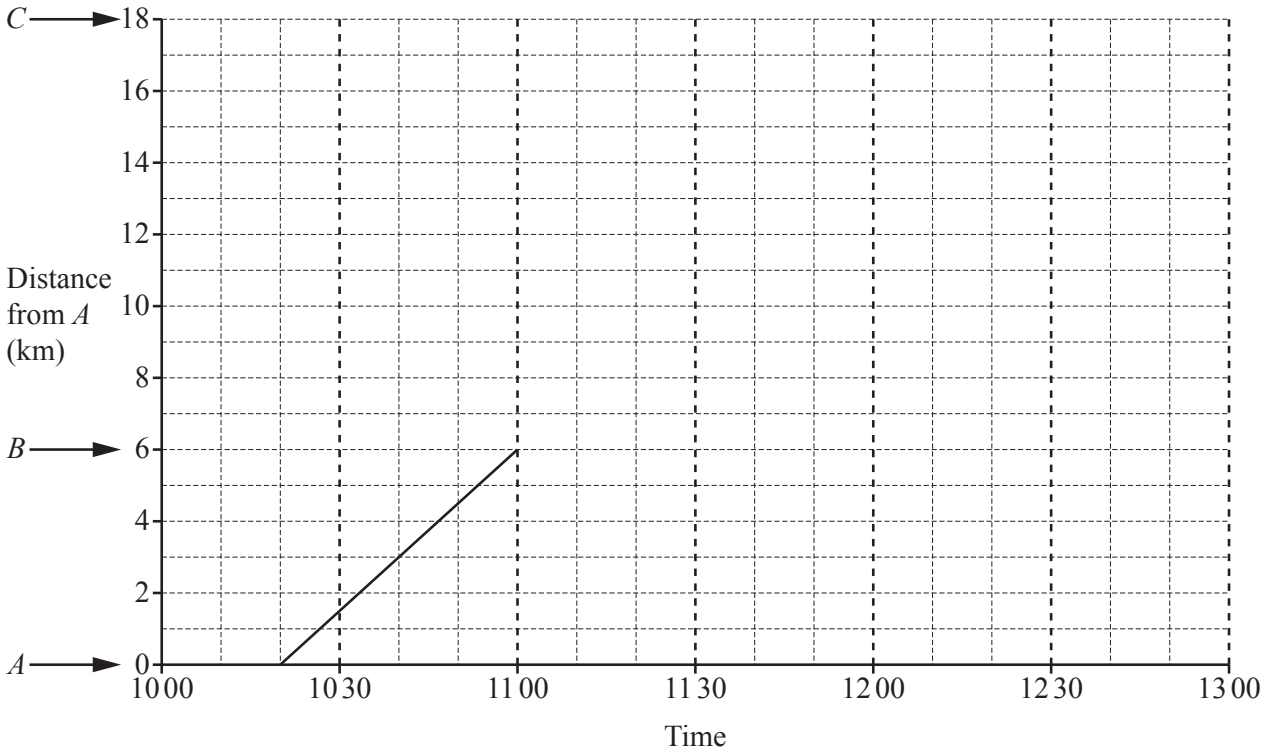
辨析：时刻是时间轴上的读数，时长是起讫时刻之间的间隔。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/33 Q4(a)(ii)]

提示：看船的起讫点对应的时刻，跨整点分段求时间差。

(a) A boat sails from A to B.
The travel graph shows this journey.



(ii) Work out how long, in minutes, it takes the boat to sail from A to B.

(a) 一艘船从 A 航行到 B。行程图表示这次航行。
横轴为时刻，标有 10 : 00、10 : 30、11 : 00、11 : 30、12 : 00、12 : 30、13 : 00。纵轴为距 A 的距离，单位为千米，标有 0、2、4、6、8、10、12、14、16、18。地点 A、B、C 分别标在 0、6、18 千米处。
(ii) 求船从 A 航行到 B 所用的时间，以分钟为单位。

✓ **答案** 40 分钟

解析 由行程线的起点和终点，读得船离开 A 的时刻为 10 : 20，到达 B 的时刻为 11 : 00。

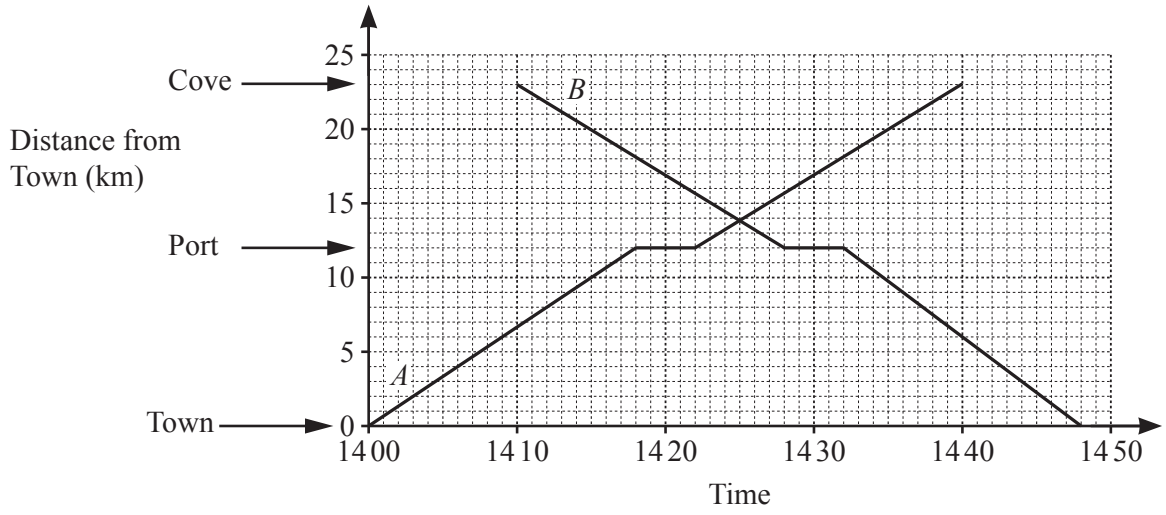
$$11:00-10:20=40\ \text{min}$$

答：船从 A 航行到 B 用了 40 分钟。

2. [2023 · October/November 0580/31 Q5(a)]

提示：看列车 B 在科夫站的起点，对照横轴刻度读时。

A railway line has three stations, Town, Port and Cove.
Train *A* leaves Town for Cove and train *B* leaves Cove for Town.
Both trains stop at Port.



(a) Write down the time that train *B* leaves Cove.

一条铁路沿线有三个车站：汤恩（Town）、波特（Port）和科夫（Cove）。列车 *A* 从汤恩站开往科夫站，列车 *B* 从科夫站开往汤恩站。两列车都在波特站停留。
横轴为时刻，标有 14 : 00、14 : 10、14 : 20、14 : 30、14 : 40、14 : 50。纵轴为距汤恩站的距离，单位为千米，标有 0、5、10、15、20、25。汤恩站、波特站和科夫站分别标在 0、12、23 千米处。两条行程线分别标为 *A* 和 *B*。
（a）写出列车 *B* 离开科夫站的时刻。

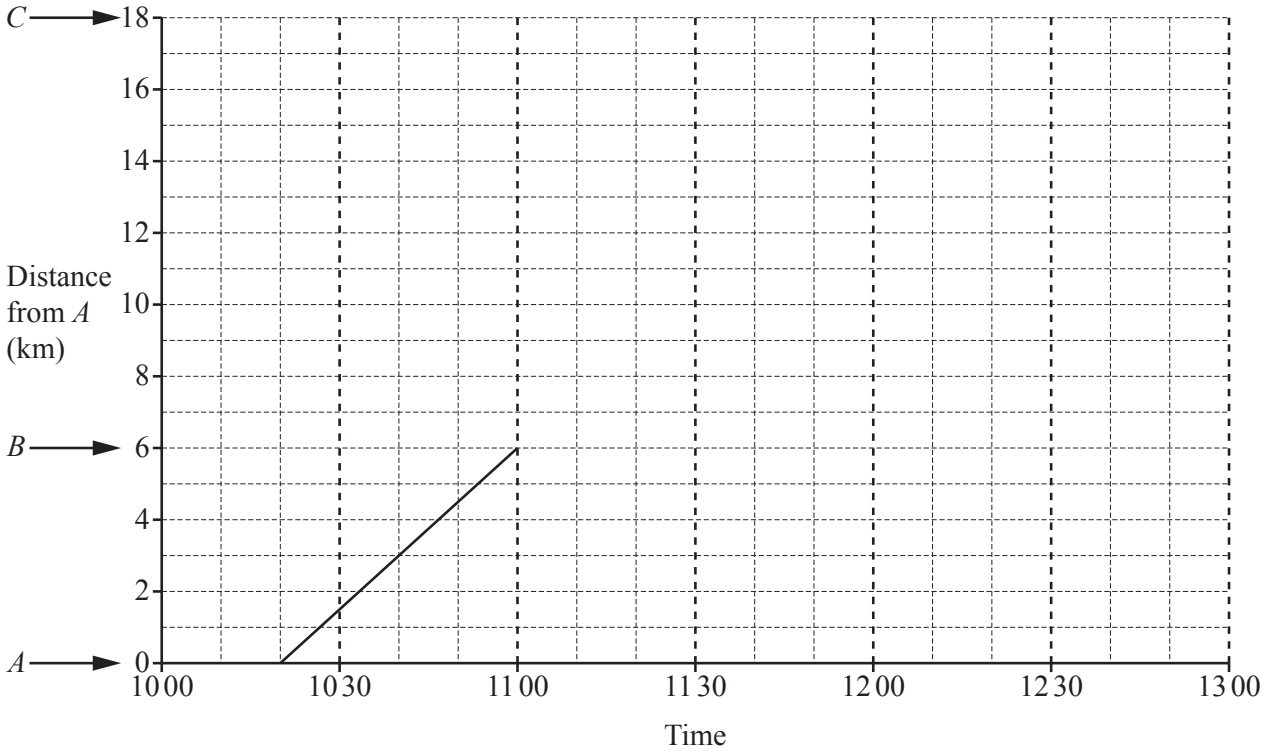
✓ **答案**

14 : 10

解析 列车 *B* 的图线从科夫站开始。
从该起点向时间轴作垂线，读得时刻为 14 : 10。
答：列车 *B* 于 14 : 10 离开科夫站。

3. [2023 · May/June 0580/33 Q4(a)(i)]
提示：找船距 A 为零的出发点，对照时间轴读数。

(a) A boat sails from A to B.
The travel graph shows this journey.



(i) Write down the time that the boat leaves A.

(a) 一艘船从 A 航行到 B。行程图表示这次航行。
横轴为时刻，标有 10 : 00、10 : 30、11 : 00、11 : 30、12 : 00、12 : 30、13 : 00。纵轴为距 A 的距离，单位为千米，标有 0、2、4、6、8、10、12、14、16、18。地点 A、B、C 分别标在 0、6、18 千米处。
(i) 写出船离开 A 的时刻。

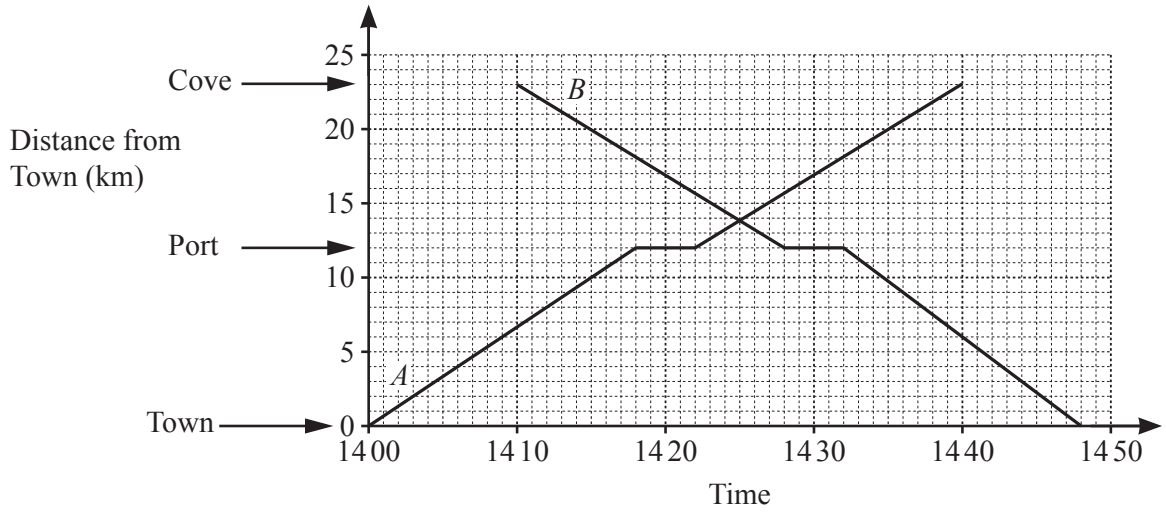
✓ **答案**

10 : 20

解析 船离开 A 时，距 A 的距离为 0。
从行程线在横轴上的起点读得时刻为 10 : 20。
答：船于 10 : 20 离开 A。

4. [2023 · October/November 0580/31 Q5(d)]
提示：找两条行程线的交点，沿竖直方向对照时间轴。

A railway line has three stations, Town, Port and Cove.
Train *A* leaves Town for Cove and train *B* leaves Cove for Town.
Both trains stop at Port.



(d) Write down the time that the two trains pass each other.

一条铁路沿线有三个车站：汤恩（Town）、波特（Port）和科夫（Cove）。列车 *A* 从汤恩站开往科夫站，列车 *B* 从科夫站开往汤恩站。两列车都在波特站停留。
横轴为时刻，标有 14 : 00、14 : 10、14 : 20、14 : 30、14 : 40、14 : 50。纵轴为距汤恩站的距离，单位为千米，标有 0、5、10、15、20、25。汤恩站、波特站和科夫站分别标在 0、12、23 千米处。两条行程线分别标为 *A* 和 *B*。
（d）写出两列车相遇的时刻。

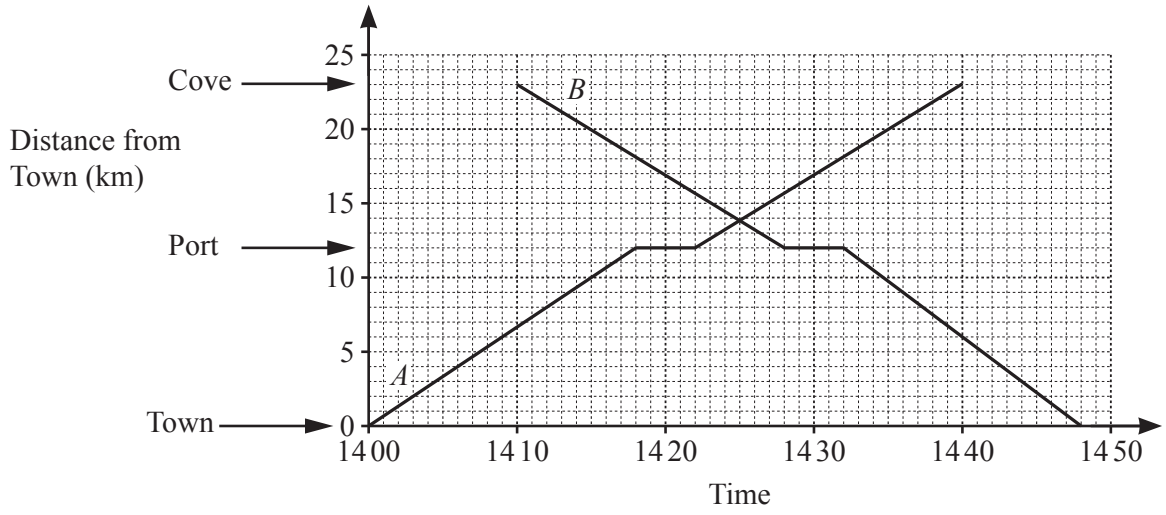
✓ **答案**

14 : 25

解析 两列车经过同一位置时，两条行程线相交。
从交点向时间轴作垂线，读得时刻为 14 : 25。
答：两列车于 14 : 25 相遇。

5. [2023 · October/November 0580/31 Q5(b)]
提示：看波特站水平段的两端，比较对应时刻的间隔。

A railway line has three stations, Town, Port and Cove.
Train *A* leaves Town for Cove and train *B* leaves Cove for Town.
Both trains stop at Port.



(b) Write down how long train *A* stops at Port.

一条铁路沿线有三个车站：汤恩（Town）、波特（Port）和科夫（Cove）。列车 *A* 从汤恩站开往科夫站，列车 *B* 从科夫站开往汤恩站。两列车都在波特站停留。
横轴为时刻，标有 14 : 00、14 : 10、14 : 20、14 : 30、14 : 40、14 : 50。纵轴为距汤恩站的距离，单位为千米，标有 0、5、10、15、20、25。汤恩站、波特站和科夫站分别标在 0、12、23 千米处。两条行程线分别标为 *A* 和 *B*。
（b）写出列车 *A* 在波特站停留了多长时间。

✓ **答案** 4 分钟

解析 列车 *A* 在波特站停留，对应图线在 12 km 处的水平线段。
由水平段两端读得，到站时刻为 14 : 18，离站时刻为 14 : 22。

$$14:22 - 14:18 = 4 \text{ min}$$

答：列车 *A* 在波特站停留了 4 分钟。

6. [2025 · February/March 0580/22 Q2]
提示：以整点为界分段求时间，再合并小时数和分钟数。

Aryan goes on a journey.
He leaves home at 11 40 and arrives at 14 18.

Find how many hours and minutes the journey took.

阿里安（Aryan）外出旅行。他于 11 : 40 离家，于 14 : 18 到达。
求这次行程用了多少小时多少分钟。

✓ **答案** 2 小时 38 分钟

解析 从 11 : 40 到 12 : 00 为 20 分钟，从 12 : 00 到 14 : 00 为 2 小时，从 14 : 00 到 14 : 18 为 18 分钟。

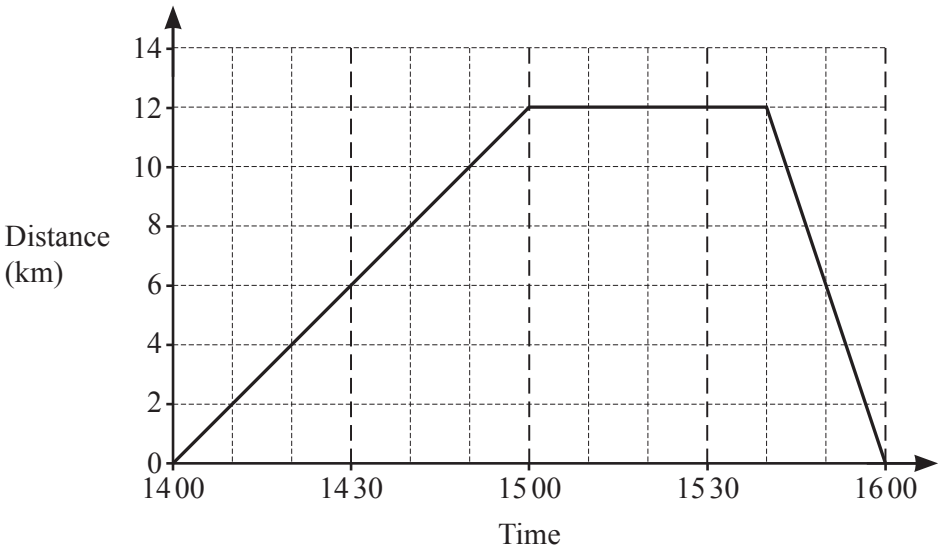
$$20 \text{ min} + 18 \text{ min} = 38 \text{ min}$$

答：这次行程用了 2 小时 38 分钟。

7. [2024 · May/June 0580/11 Q3(b)]

提示：读出水平线段两端的时刻，再求时间差。

The travel graph shows the journey of a bus.



(b) Find how long, in minutes, the bus is stationary.

行程图表示一辆公共汽车的行程。
横轴为时刻，标有 14 : 00、14 : 30、15 : 00、15 : 30、16 : 00。纵轴为距离，单位为千米，标有 0、2、4、6、8、10、12、14。
(b) 求公共汽车停留了多少分钟。

✓ **答案** 40 分钟

解析 图中的水平线段表示公共汽车停留。

横轴上每 30 分钟分为 3 小格，每小格表示

$$30 \div 3 = 10 \text{ min}$$

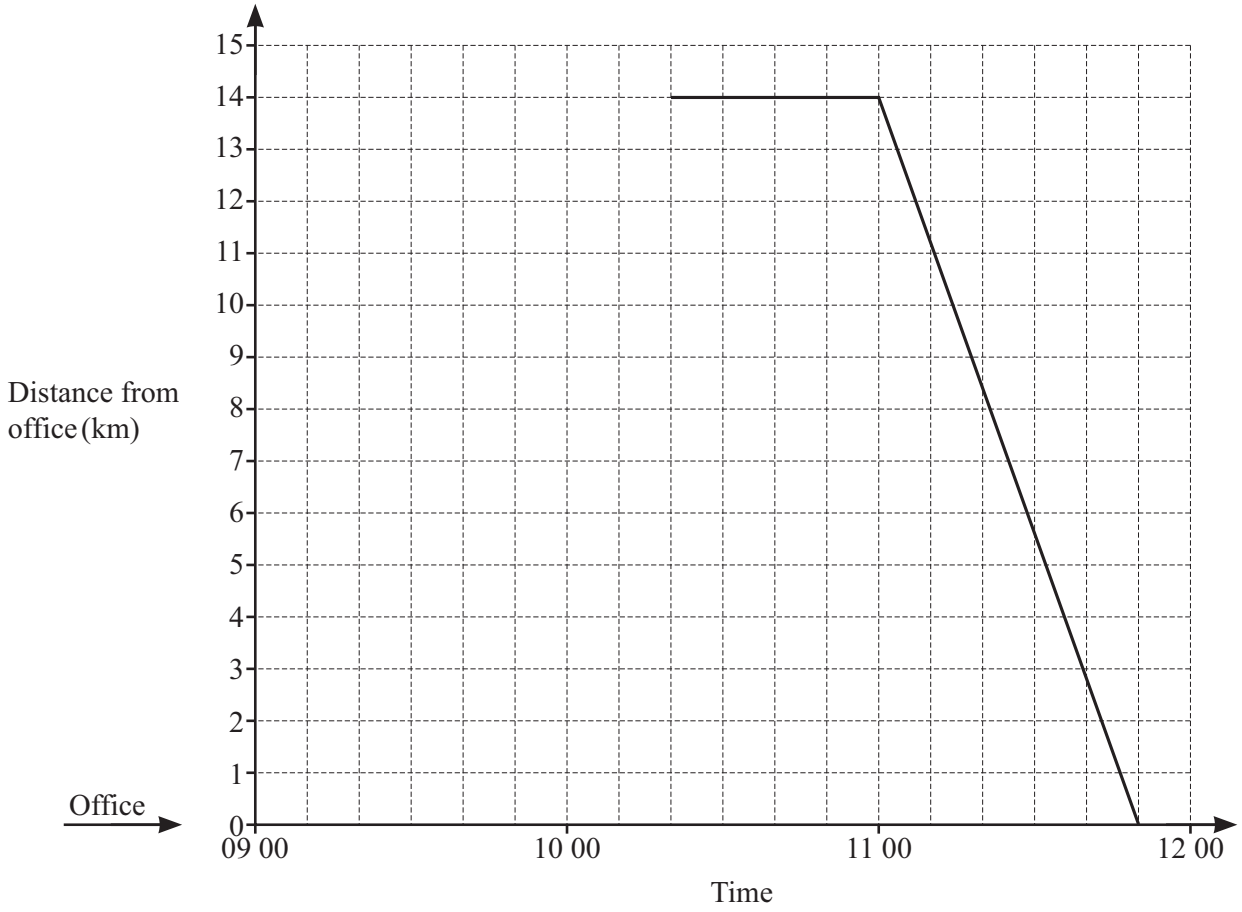
水平线段从 15 : 00 延伸至 15 : 40，共跨过 4 小格。

$$4 \times 10 = 40 \text{ min}$$

答：公共汽车停留了 40 分钟。

8. [2025 · May/June 0580/11 Q10(b)]
提示：读出水平线段两端对应的时刻。

Ky cycles from his office to a meeting and back again.
The travel graph shows his time at the meeting and his journey back.



(b) How long is Ky at the meeting for?

凯（Ky）骑自行车从办公室去参加会议，然后返回。行程图表示他参加会议的时间和返回办公室的行程。
图中横轴为时刻，标有 09:00、10:00、11:00、12:00。纵轴为距办公室的距离，单位为千米，标有 0 至 15 的各整数刻度。办公室位于 0 km 处。
(b) 凯参加会议用了多长时间?

✓ **答案** 40 分钟

解析 图中的水平线段表示凯在参加会议。
从 10:00 到 11:00 有 6 小格，每小格表示

$$60 \div 6 = 10 \text{ min}$$

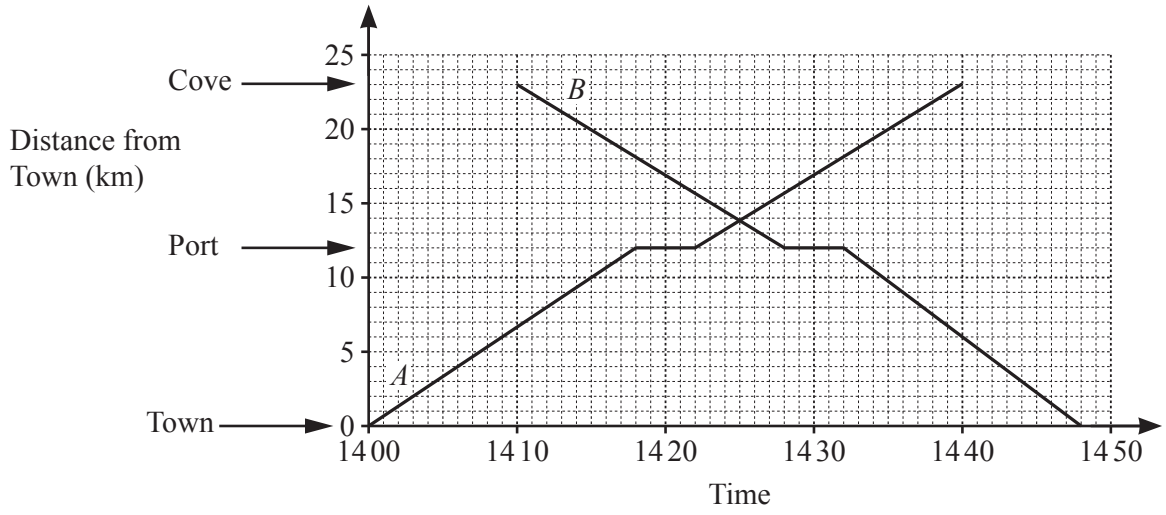
水平线段两端对应的时刻为 10:20 和 11:00。

$$11{:}00 - 10{:}20 = 40 \text{ min}$$

答：凯参加会议用了 40 分钟。

9. [2023 · October/November 0580/31 Q5(c)]
提示：各看两车起讫时刻，计入停留后比较全程时长。

A railway line has three stations, Town, Port and Cove.
Train A leaves Town for Cove and train B leaves Cove for Town.
Both trains stop at Port.



(c) How many more minutes does train A take to complete the whole journey than train B?

一条铁路沿线有三个车站：汤恩（Town）、波特（Port）和科夫（Cove）。列车 A 从汤恩站开往科夫站，列车 B 从科夫站开往汤恩站。两列车都在波特站停留。
横轴为时刻，标有 14 : 00、14 : 10、14 : 20、14 : 30、14 : 40、14 : 50。纵轴为距汤恩站的距离，单位为千米，标有 0、5、10、15、20、25。汤恩站、波特站和科夫站分别标在 0、12、23 千米处。两条行程线分别标为 A 和 B。
(c) 列车 A 完成整个行程所用的时间比列车 B 多多少分钟?

✓ **答案** 2 分钟

解析 由列车 A 图线的起点和终点，读得出发时刻为 14 : 00，到达时刻为 14 : 40。

$$14:40 - 14:00 = 40 \text{ min}$$

由列车 B 图线的起点和终点，读得出发时刻为 14 : 10，到达时刻为 14 : 48。

$$14:48 - 14:10 = 38 \text{ min}$$

两列车的全程用时均包含在波特站的停留时间。

$$40 \text{ min} - 38 \text{ min} = 2 \text{ min}$$

答：列车 A 完成全程比列车 B 多用 2 分钟。

2.37 总路程除以总用时，求平均速度

题型 1 总路程除以总用时，求平均速度（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **读取总路程：**凯从家到办公室，距离由 0 km 增至 65 km。这段行程没有折返，总路程为 _____ km。

② **计算总用时：**凯于 10:00 出发，于 12:00 到达。用 t 表示总用时，到达时刻减去出发时刻。

$$t = 2 \text{ h}$$

③ **计入停留时间：**图中的水平线段表示凯途中_____。计算全程用时，须计入这段时间。

$$t = \frac{15}{60} + \frac{45}{60} + 1 = 2 \text{ h}$$

④ **换算小时单位：**所求单位为 km/h，时间须用小时表示。由 1 h = 60 min，分钟数除以 60。

只有分钟：

$30\ \text{min} = \frac{30}{60}\ \text{h} = 0.5\ \text{h}$

小时与分钟：

$1\ \text{h}\ 30\ \text{min} = \left(1 + \frac{30}{60}\right)\ \text{h} = 1.5\ \text{h}$

⑤ **计算平均速度：**凯全程走了 65 km，共用 2 h。用 s 表示总路程，v 表示平均速度。

$$v = \frac{s}{t}$$

总路程用 km、总用时用 h，所得速度单位为 _____。

⑥ **计算单段速度：**凯在 11:00 至 12:00 的图线为斜直线。用这一段的距离增量除以所用时间。

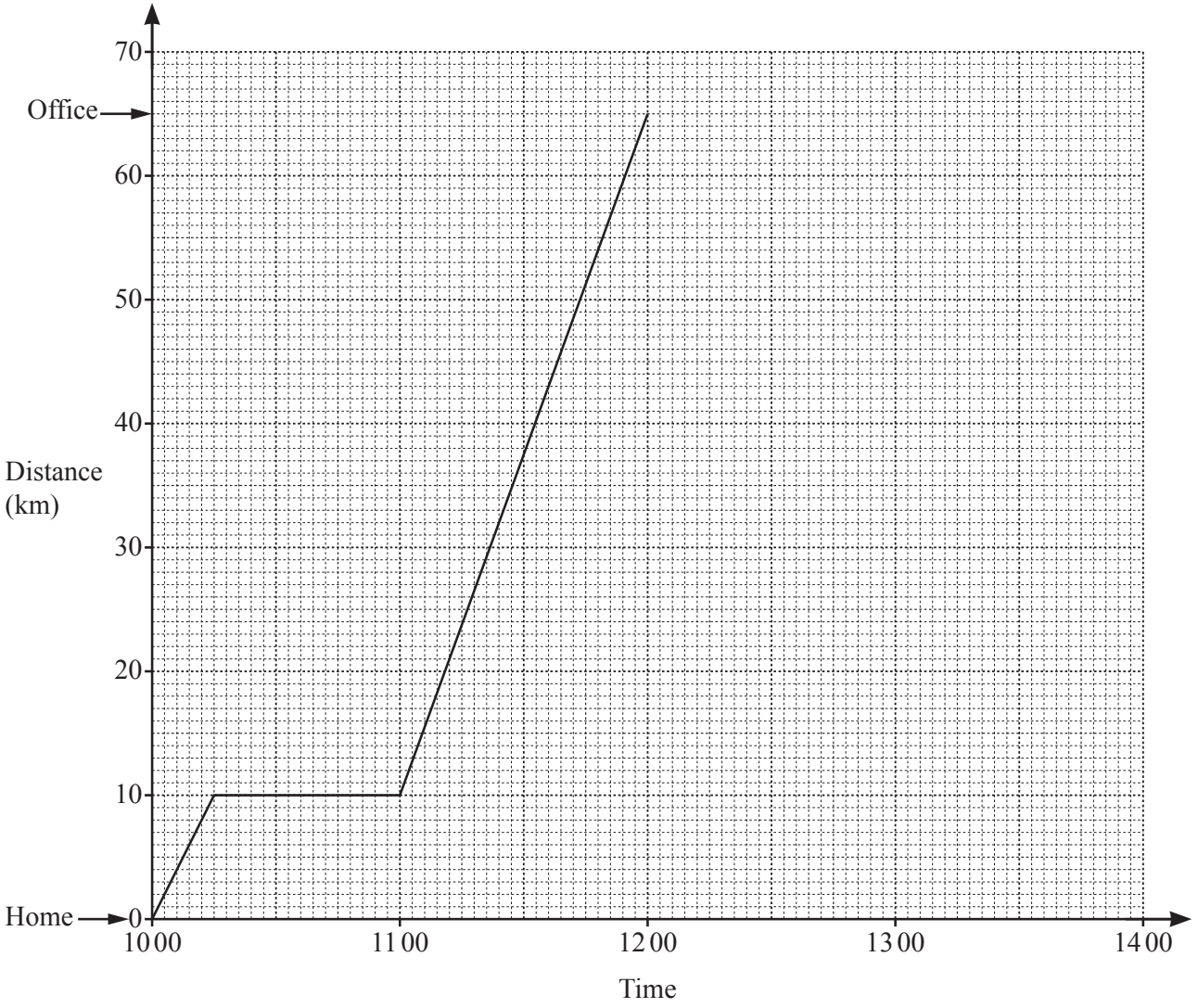
$$v = \frac{65 - 10}{1} = 55\ \text{km/h}$$

填空：①65　②停留　③km/h

点石成金　题目出现路程、行程时间或距离时间图，要求平均速度时，先确定总路程和包含停留的总用时。

例 1　[2023 · May/June 0580/23 Q9(a)]

The distance–time graph shows information about Kai's journey from home to the office.



(a) Calculate the average speed, in km/h, for Kai's journey from home to the office.

距离时间图给出了凯从家到办公室的行程信息。

图中横轴为时间，标有 10:00、11:00、12:00、13:00、14:00；纵轴为距离，单位为 km，标有 0、10、20、30、40、50、60、70。家位于 0 km 处，办公室位于 65 km 处。

(a) 计算凯从家到办公室这段行程的平均速度，单位为 km/h。

解答 由图得，凯从家到办公室的总路程为 65 km。

从 10:00 到 12:00，包含途中停留，共用 2 h。

$$v = \frac{s}{t} = \frac{65}{2} = 32.5 \text{ km/h}$$

答：平均速度为 32.5 km/h。

方法：先读图线起终点的距离与时刻，再算包含停留的总用时。

辨析：总用时是出发至到达的时长，行驶时间是扣除停留后的时长。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/33 Q2(b)(ii)]

提示：先看全程用时，将小时与分钟统一成小时再计算。

(ii) The boat returns directly to Bayside.
It takes 1 hour 20 minutes to travel the 17 km.

Work out the average speed of this journey.

(ii) 船沿直线返回贝赛德。船行驶这段 17 km 的路程用了 1 小时 20 分钟。求这段行程的平均速度。

✓ **答案** 12.75 km/h

解析 将全程用时换算成小时，得

$$t = \left(1 + \frac{20}{60}\right) \text{ h} = \frac{4}{3} \text{ h}$$

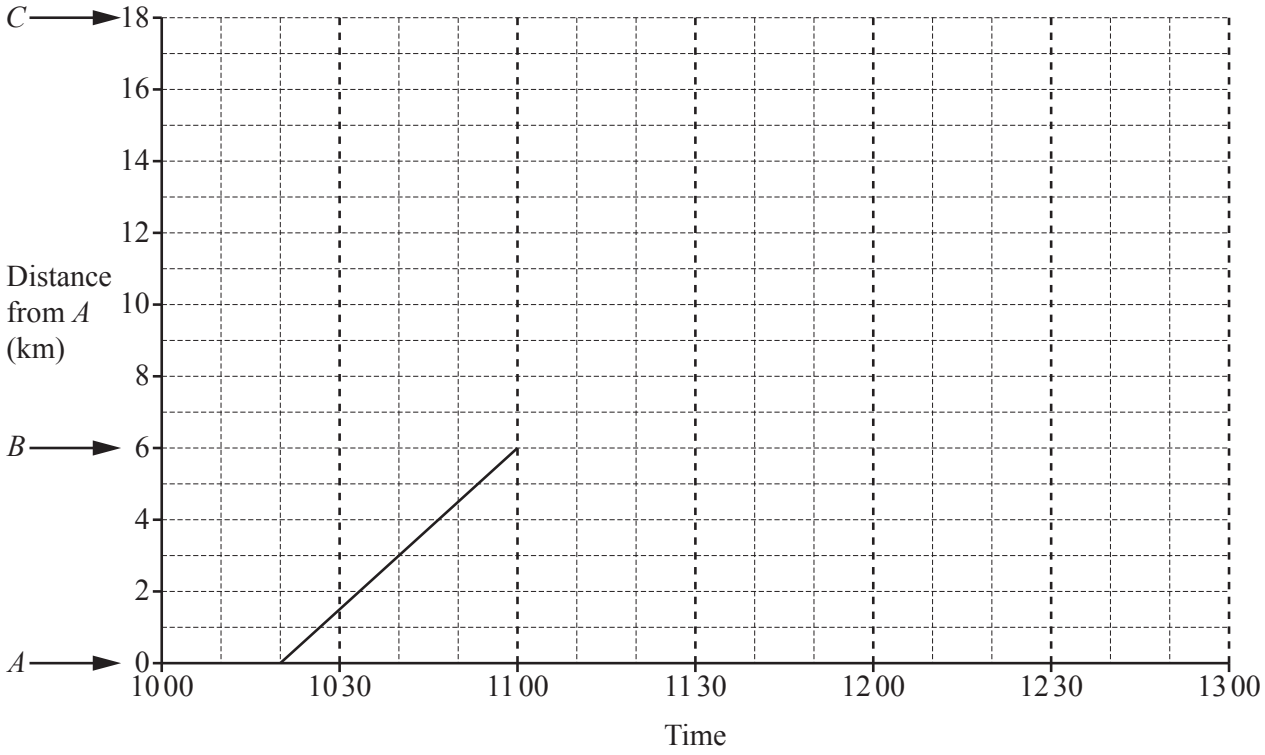
平均速度为

$$v = \frac{s}{t} = \frac{17}{\frac{4}{3}} = 12.75 \text{ km/h}$$

答：平均速度为 12.75 km/h。

2. [2023 · May/June 0580/33 Q4(a)(iv)]
提示：先核对 B 至 C 的行程条件是否足以确定到达时刻。

(a) A boat sails from A to B.
The travel graph shows this journey.



(iii) The boat stays at B for 20 minutes.
The boat then sails to C at a constant speed of 8 km/h.

Complete the travel graph.

(iv) Work out the average speed, in km/h, for the whole journey from A to C.

（a）船从 A 驶向 B，行程图已画出这段行程；纵轴表示离 A 的距离，单位 km，横轴表示时刻。（iii）船在 B 停留 20 分钟，再以 8km/h 的速度前往 C。补全行程图。（iv）求 A 至 C 整段行程的平均速度，单位 km/h。

✓ **答案** 7.2 km/h

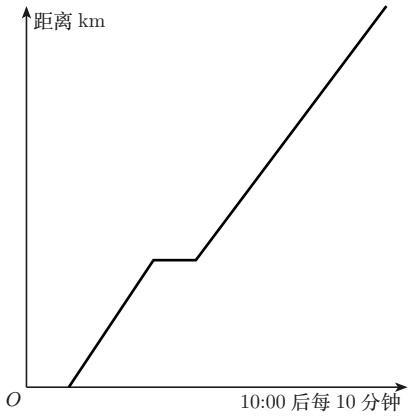
解析 由原图，船 10:20 从 A 出发，11:00 到达离 A 为 6km 的 B。停留 20 分钟后，11:20 离开 B。$BC = 18 - 6 = 12$ km

$t_{BC} = \frac{12}{8} = 1.5$ h

船于 12:50 到达 C。全程含停留的时间为 $2 + \frac{30}{60} = 2.5$ h

$v = \frac{18}{2.5} = 7.2$ km/h

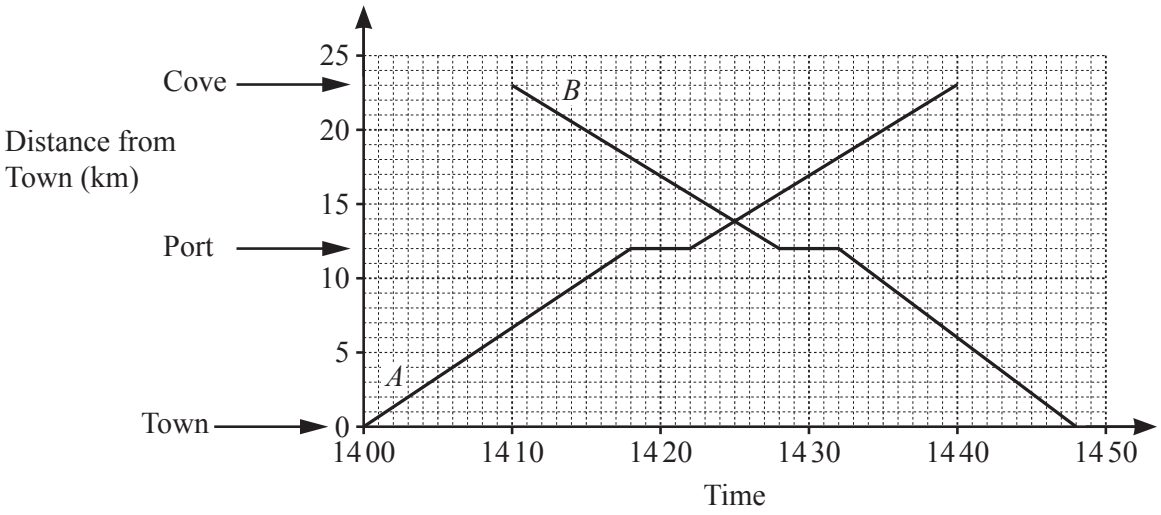
答：7.2km/h。



3. [2023 · October/November 0580/31 Q5(e)]

提示：对照列车出发与到达时刻，停站时间也计入全程。

A railway line has three stations, Town, Port and Cove.
Train A leaves Town for Cove and train B leaves Cove for Town.
Both trains stop at Port.



(e) Work out the average speed of train A between Town and Cove in kilometres per hour.

一条铁路线有 Town、Port 和 Cove 三座车站。列车 A 从 Town 开往 Cove，列车 B 从 Cove 开往 Town。两列车都在 Port 停站。图中横轴为时间，标有 14:00、14:10、14:20、14:30、14:40、14:50；纵轴为距 Town 的距离，单位为 km，标有 0、5、10、15、20、25。Town、Port 和 Cove 分别位于距 Town 为 0 km、12 km 和 23 km 处。两条图线分别标为 A 和 B。
(e) 求列车 A 从 Town 到 Cove 的平均速度，单位为千米每小时。

✓ **答案** 34.5 km/h

解析 由图得，列车 A 从 Town 到 Cove 的总路程为 23 km。
列车于 14:00 出发，于 14:40 到达，包含在 Port 的停站时间，共用 40 分钟。

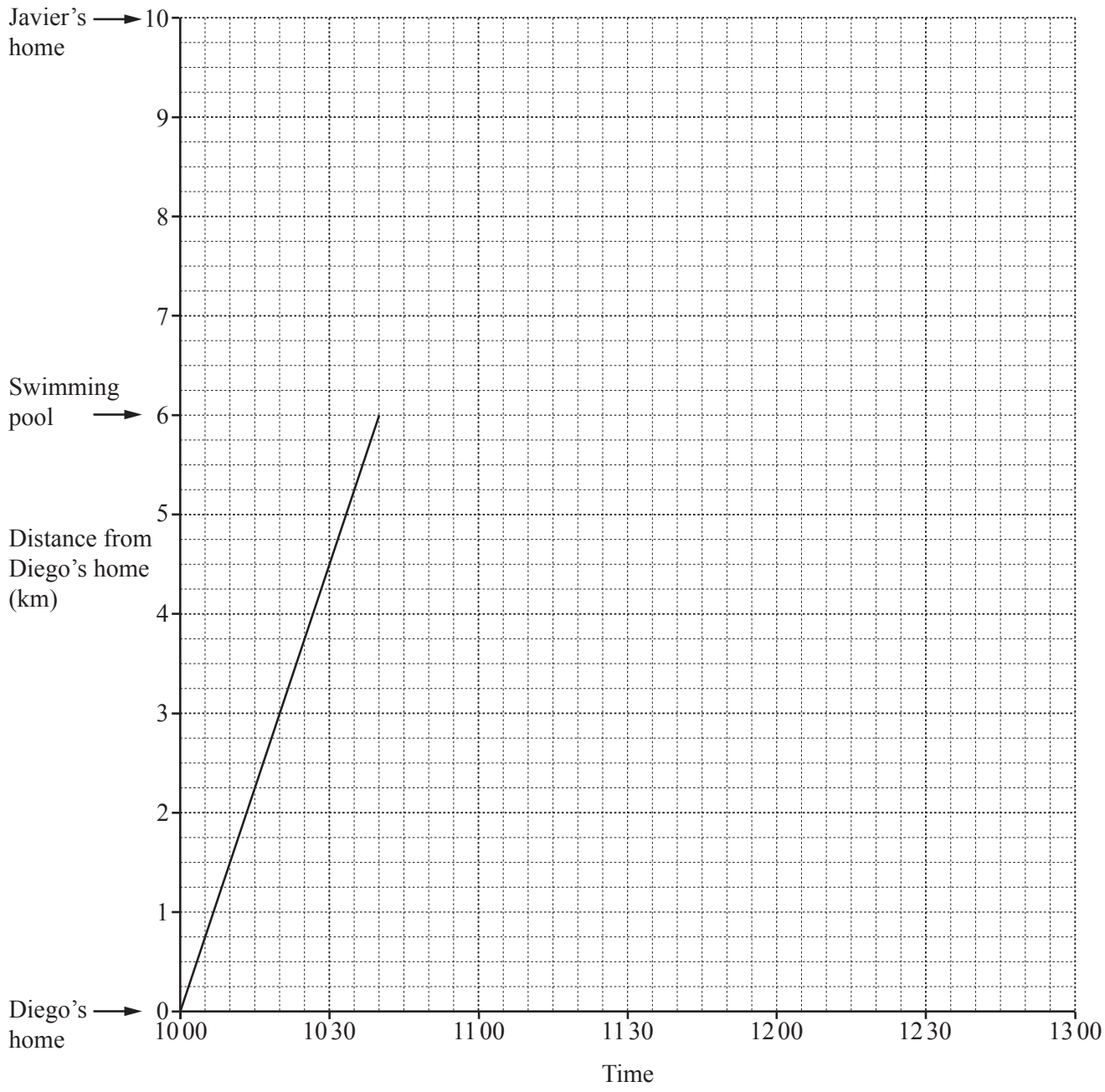
$$t = \frac{40}{60}\ \text{h} = \frac{2}{3}\ \text{h}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{23}{\frac{2}{3}} = 34.5\ \text{km/h}$$

答：平均速度为 34.5 km/h。

4. [2023 · May/June 0580/31 Q8(a)]
提示：先读家到泳池的路程，再将两时刻之差换算成小时。

Two friends, Diego and Javier, meet at a swimming pool.
The travel graph shows Diego's journey by bicycle from his home to the swimming pool.



(a) Calculate Diego's speed for his journey from his home to the swimming pool.
Give your answer in kilometres per hour.

迭戈和哈维尔两位朋友在一个游泳池见面。行程图表示迭戈从家骑自行车到游泳池的行程。
图中横轴为时间，标有 10:00、10:30、11:00、11:30、12:00、12:30、13:00；纵轴为距迭戈家的距离，单位为 km，标有从 0 到 10 的各个整数。迭戈的家位于 0 km 处，游泳池位于 6 km 处，哈维尔的家位于 10 km 处。
(a) 计算迭戈从家到游泳池这段行程的速度。答案以千米每小时为单位。

✓ **答案** 9 km/h

解析 由图得，迭戈从家到游泳池的路程为 6 km。
他于 10:00 出发，于 10:40 到达，共用 40 分钟。

$$t = \frac{40}{60}\ \text{h} = \frac{2}{3}\ \text{h}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{6}{\frac{2}{3}} = 9\ \text{km/h}$$

答：迭戈的速度为 9 km/h。

5. [2024 · October/November 0580/42 Q5(b)]
提示：先把一圈的用时换算成小时。

(b) The distance around a racing track is 5.104 km.
The time taken by a car to complete one lap of the track is 1 min 18 s.

Calculate the average speed of the car.
Give your answer in km/h.

(b) 一条赛车跑道一圈的长度为 5.104 km。
一辆汽车完成一圈所用的时间为 1 min 18 s。
计算汽车的平均速度。
答案以 km/h 为单位。

✓ **答案** 236 km/h

解析 一圈的总路程为 5.104 km。
由 1 min = 60 s，一圈的用时为

$$t = (1 \times 60 + 18)\ \text{s} = 78\ \text{s}$$

由 1 h = 3600 s，得

$$t = \frac{78}{3600}\ \text{h} = \frac{13}{600}\ \text{h}$$

平均速度为

$$v = \frac{s}{t} = \frac{5.104}{\frac{13}{600}} = 235.569230...\ \text{km/h}$$

保留三位有效数字，得

$$v \approx 236\ \text{km/h}$$

答：汽车的平均速度约为 236 km/h。

2.38 用结束时刻和路程确定行程图的线段

题型 1 用结束时刻和路程确定行程图的线段（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **纵轴参照：** 本图纵轴表示到迭戈家的距离，单位为千米。用“时刻，纵轴距离”记录图上的点。迭戈到达泳池时，对应点为
$(10{:}40, 6)$。

② **停留线段：** 迭戈在泳池停留，到家的距离始终为 6 km。把到达时刻与离开时刻对应的两点连成_____线段。
$(10{:}40, 6) \xrightarrow{\text{停留}} (12{:}20, 6)$。

③ **两地路程：**哈维尔家与泳池分别在纵轴的 10 km、6 km 处。两地间的路程记为 s，用较大的距离减去较小的距离。

$s = 10 - 6 = 4$ km。

④ **行程时长：**记时长为 t，速度为 v。以骑行 6 km、速度为 9 km/h 演示。用路程除以_____，再按每小时_____分钟换算。

$t = \frac{s}{v} = \frac{6}{9}$ h $= \frac{6}{9} \times 60$ min $= 40$ min。

⑤ **返程端点：**回到各自家时，迭戈的终点高度为 0，哈维尔的为 10。以 12 : 00 离池、12 : 30 到各自家为演示。匀速行进，用直尺连接相应两点。

回迭戈家	回哈维尔家
$(12{:}00, 6), (12{:}30, 0)$	$(12{:}00, 6), (12{:}30, 10)$

⑥ **停后续行：**有停留时，先画水平段，再接行进线段。续用迭戈到池的时刻，演示停留 20 min 后匀速骑行 40 min 回家。先算离池时刻，再算到家时刻。

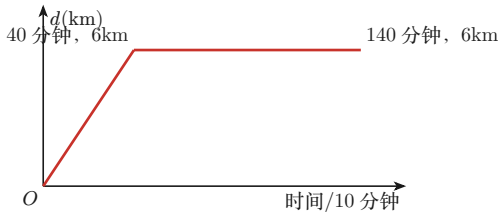
$$10{:}40 + 20 \text{ min} = 11{:}00$$

$$11{:}00 + 40 \text{ min} = 11{:}40$$

$(10{:}40, 6) \xrightarrow{\text{停留}} (11{:}00, 6) \xrightarrow{\text{返程}} (11{:}40, 0)$。

填空：①水平　②速度　③60

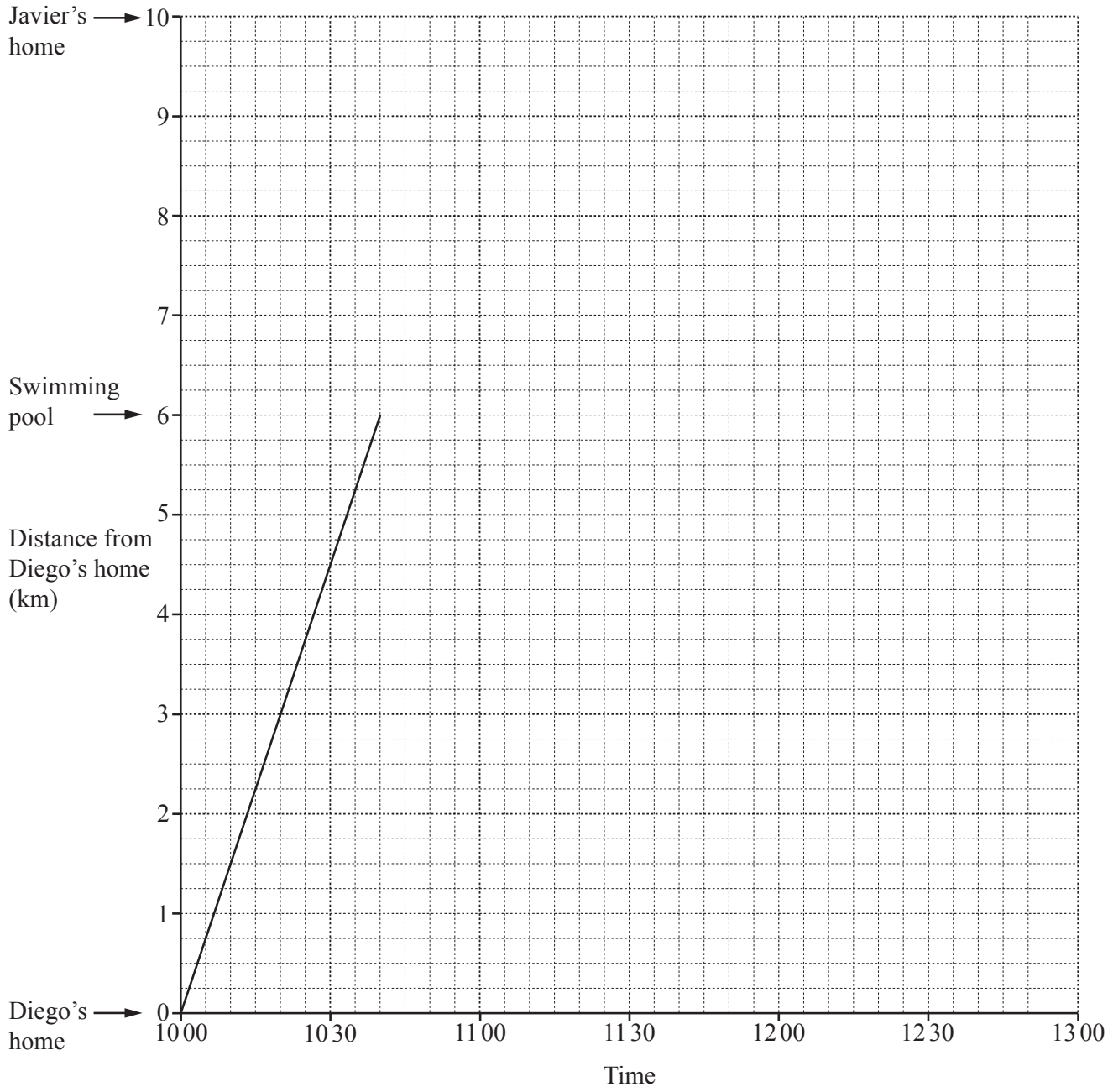
水平线段表示位置不变

	图像	数量关系
同一关系		$140 - 40 = 100$ 分钟，即 1 小时 40 分钟。

点石成金　题目出现停留、匀速行进或补全行程图时，先确定起止时刻及其对应的纵轴距离。

例 1　[2023 · May/June 0580/31 Q8(b)(i)]

Two friends, Diego and Javier, meet at a swimming pool.
The travel graph shows Diego's journey by bicycle from his home to the swimming pool.



(b) Diego stays at the swimming pool until 12 20.

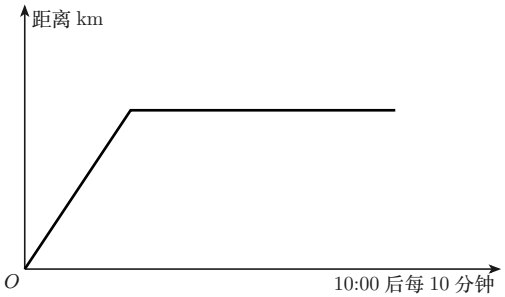
(i) On the grid, draw the line representing the time he stays at the swimming pool.

8 两个朋友迭戈和哈维尔在一个游泳池见面。行程图表示迭戈从家骑自行车到游泳池的行程。
图中横轴为时间，标有 10 : 00、10 : 30、11 : 00、11 : 30、12 : 00、12 : 30、13 : 00。纵轴为到迭戈家的距离，单位为千米，标有 0 至 10 的各整数刻度。迭戈家、游泳池和哈维尔家分别位于 0 km、6 km 和 10 km 处。已画线段从 (10:00, 0) 延伸至 (10:40, 6)。
(b) 迭戈在游泳池一直待到 12 : 20。
(i) 在方格图上画出表示他在游泳池停留这段时间的线段。

解答 由图知，迭戈于 10 : 40 到达泳池，泳池距他家 6 km。
停留期间位置不变，至 12 : 20 时纵轴距离仍为 6 km。
答：画连接 (10:40, 6) 与 (12:20, 6) 的水平线段。

方法：先看纵轴表示什么，再找停留起止时刻对应的点。

! 辨析：时刻是横轴上某一点的读数，时长是两个时刻的差。

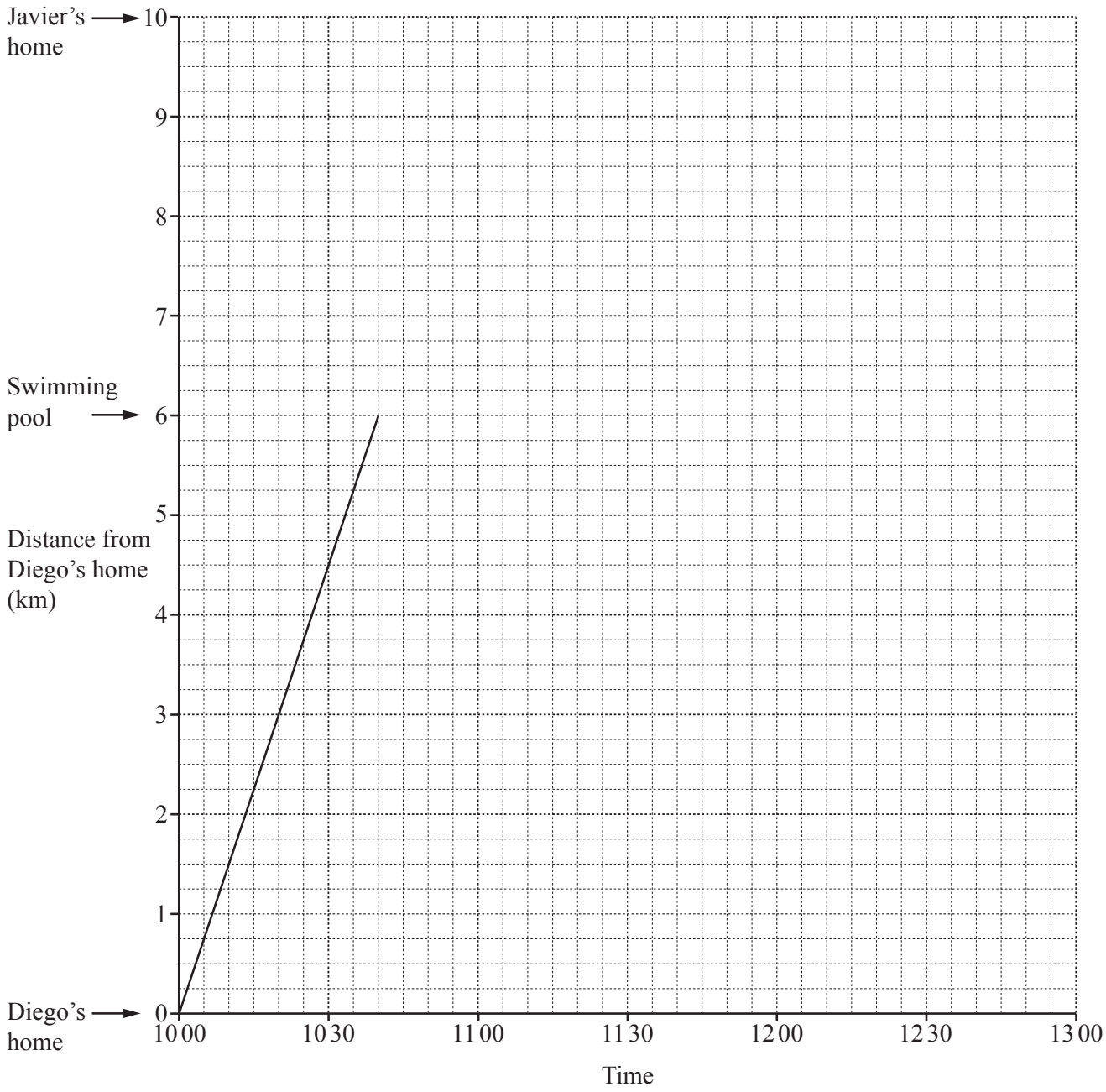


针对练习

1. [2023 · May/June 0580/31 Q8(c)]

提示：先找延后出发的时刻，再用两处纵轴读数之差算路程。

Two friends, Diego and Javier, meet at a swimming pool.
The travel graph shows Diego's journey by bicycle from his home to the swimming pool.



(c) Javier leaves his home 15 minutes later than Diego.
He walks to the swimming pool at a constant speed of 6 km/h.

On the grid, show Javier's journey from his home to the swimming pool.

两个朋友迭戈和哈维尔在一个游泳池见面。行程图表示迭戈从家骑自行车到游泳池的行程。
图中横轴为时间，标有 10 : 00、10 : 30、11 : 00、11 : 30、12 : 00、12 : 30、13 : 00。纵轴为到迭戈家的距离，单位为千米，标有 0 至 10 的各整数刻度。迭戈家、游泳池和哈维尔家分别位于 0 km、6 km 和 10 km 处。已画线段从 (10:00, 0) 延伸至 (10:40, 6)。
(c) 哈维尔比迭戈晚 15 分钟离家。他以 6 km/h 的恒定速度步行到游泳池。在方格图上画出哈维尔从家到游泳池的行程。

✓ **答案** 画连接 (10:15, 10) 与 (10:55, 6) 的直线段。

解析 由图知，迭戈于 10 : 00 出发，哈维尔家与泳池对应的纵轴距离分别为 10 km、6 km。

哈维尔的出发时刻为

$10{:}00 + 15\ \text{min} = 10{:}15$。

他步行的路程为

$s = 10 - 6 = 4\ \text{km}$。

所用时长为

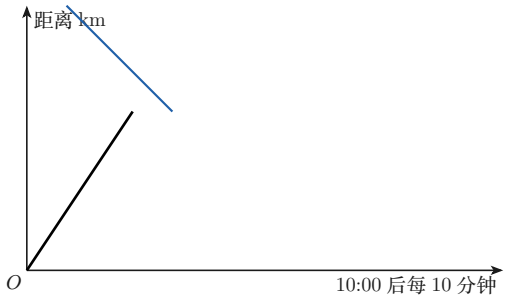
$t = \frac{4}{6}\ \text{h} = \frac{4}{6} \times 60\ \text{min} = 40\ \text{min}$。

到达泳池的时刻为

$10{:}15 + 40\ \text{min} = 10{:}55$。

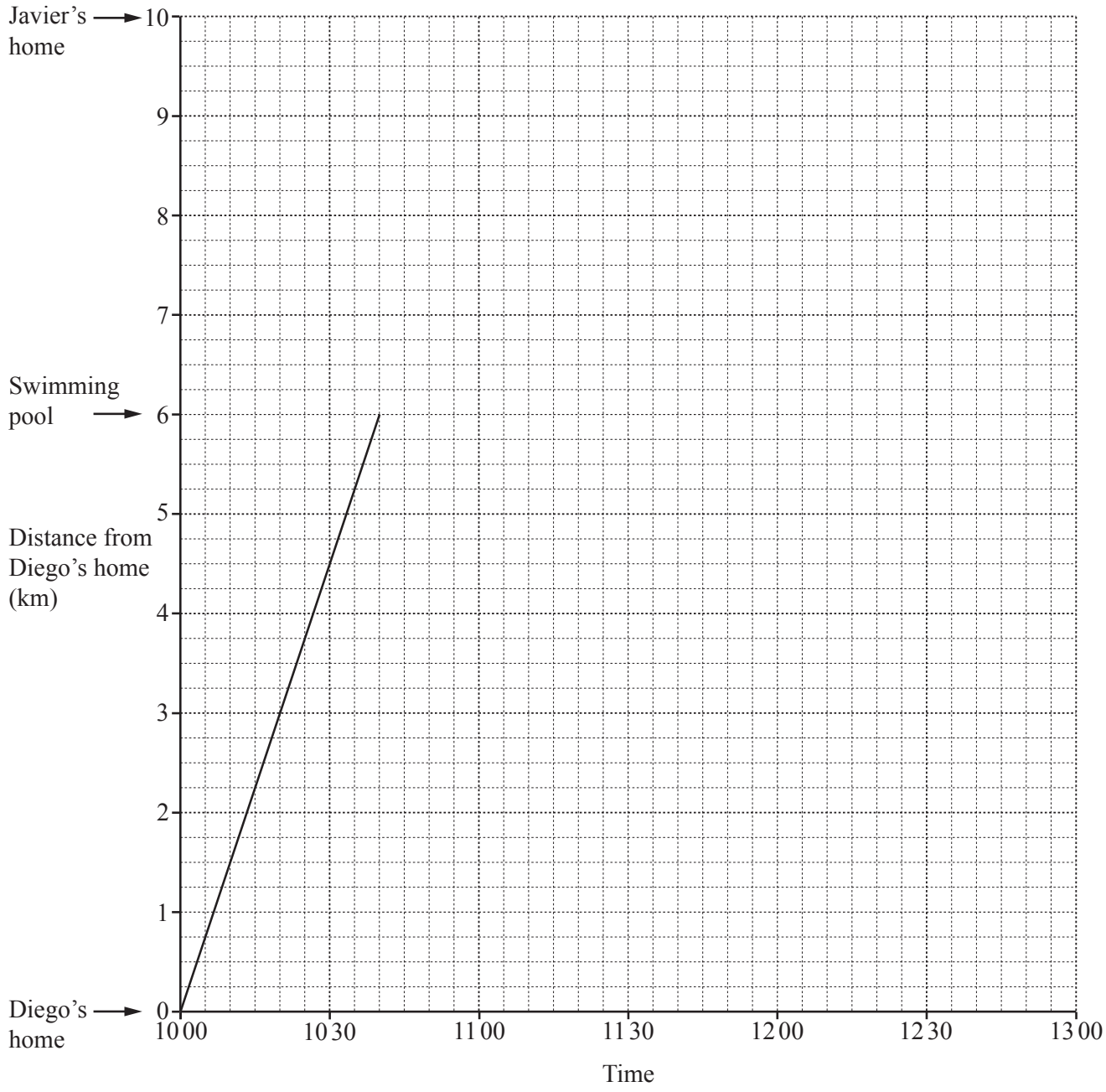
因步行速度不变，行程用直线段表示。

答：画连接 (10:15, 10) 与 (10:55, 6) 的直线段。



2. [2023 · May/June 0580/31 Q8(d)]
提示：分别看两人到家时刻，再核对各自家对应的纵轴高度。

Two friends, Diego and Javier, meet at a swimming pool.
The travel graph shows Diego's journey by bicycle from his home to the swimming pool.



(d) They both leave the swimming pool at 12 20 and return to their own homes, each at a constant speed.
Diego arrives home at 12 45.
Javier arrives home 5 minutes later than Diego.

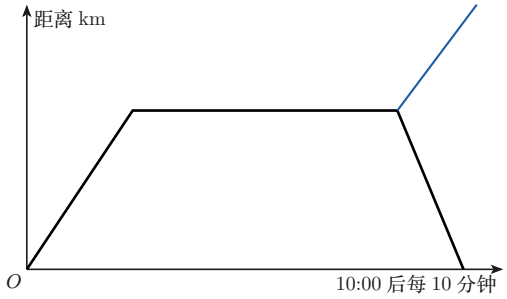
Complete the travel graph.

两个朋友迭戈和哈维尔在一个游泳池见面。行程图表示迭戈从家骑自行车到游泳池的行程。
图中横轴为时间，标有 10 : 00、10 : 30、11 : 00、11 : 30、12 : 00、12 : 30、13 : 00。纵轴为到迭戈家的距离，单位为千米，标有 0 至 10 的各整数刻度。迭戈家、游泳池和哈维尔家分别位于 0 km、6 km 和 10 km 处。已画线段从 (10:00, 0) 延伸至 (10:40, 6)。
(d) 两人都于 12 : 20 离开游泳池，各自以恒定速度返回自己的家。迭戈于 12 : 45 到家。哈维尔比迭戈晚 5 分钟到家。补全行程图。

✓ **答案** 画两条直线段：迭戈从 (12:20, 6) 至 (12:45, 0)；哈维尔从 (12:20, 6) 至 (12:50, 10)。

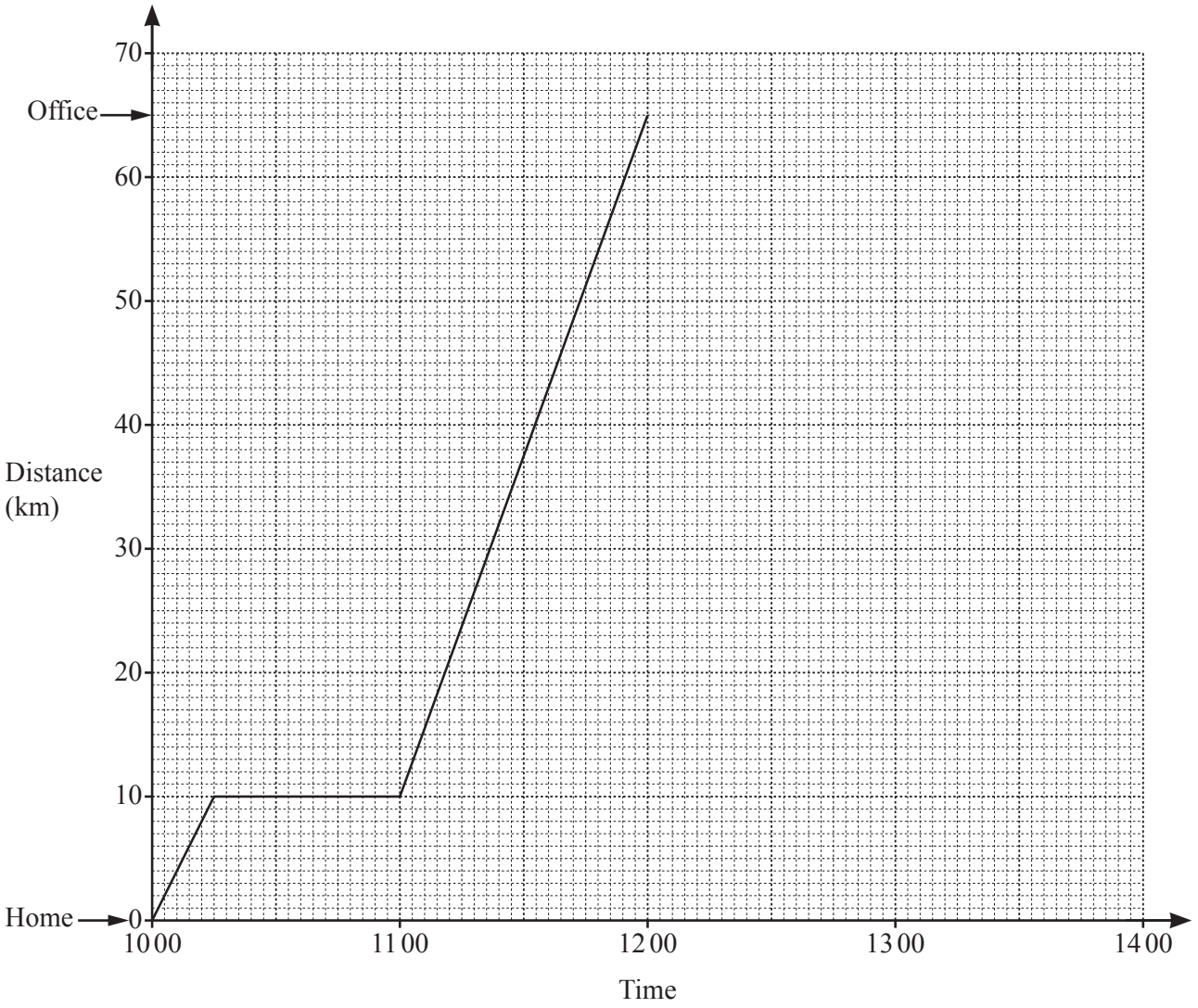
解析 两人均于 12 : 20 离开泳池，返程起点均为 (12:20, 6)。
迭戈于 12 : 45 到家，他家对应的纵轴距离为 0 km，故终点为 (12:45, 0)。
哈维尔到家的时刻为
$12{:}45 + 5 \text{ min} = 12{:}50$。

哈维尔家对应的纵轴距离为 10 km，故终点为 (12:50, 10)。
两人各自的速度不变，分别用直线段连接起点与终点。
答：迭戈的返程线段连接 (12:20, 6) 与 (12:45, 0)；哈维尔的返程线段连接 (12:20, 6) 与 (12:50, 10)。



3. [2023 · May/June 0580/23 Q9(b)]
提示：从到办公室的点起算，用路程除以返程速度求时长。

The distance–time graph shows information about Kai's journey from home to the office.



(b) When Kai arrives at the office, he finds his meeting is cancelled. He immediately returns home at a constant speed of 50 km/h.

Complete the distance–time graph to show his journey home.

距离与时间图表示凯从家到办公室的行程信息。
图中横轴为时间，标有 10 : 00、11 : 00、12 : 00、13 : 00、14 : 00。纵轴为距离，单位为千米，标有 0、10、20、30、40、50、60、70。

家位于 0 km 处，办公室位于 65 km 处。已画折线依次经过 (10:00, 0)、(10:15, 10)、(11:00, 10)、(12:00, 65)。
(b) 凯到达办公室时，发现会议取消了。他立即以 50 km/h 的恒定速度返回家中。补全距离与时间图，表示他回家的行程。

✓ **答案** 画连接 (12:00, 65) 与 (13:18, 0) 的直线段。

解析 由图知，凯于 12 : 00 到达办公室，办公室距家 65 km。

返程所用时长为

$t = \frac{65}{50}$ h $= 1.3$ h $= 1.3 \times 60$ min $= 78$ min。

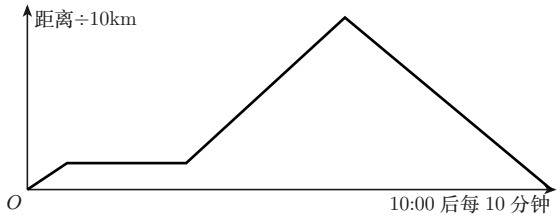
78 min $= 1$ h $+ 18$ min。

到家的时刻为

12:00 + 1 h + 18 min = 13:18。

他立即以恒定速度返家，故从到达办公室的点画直线段至到家的点。

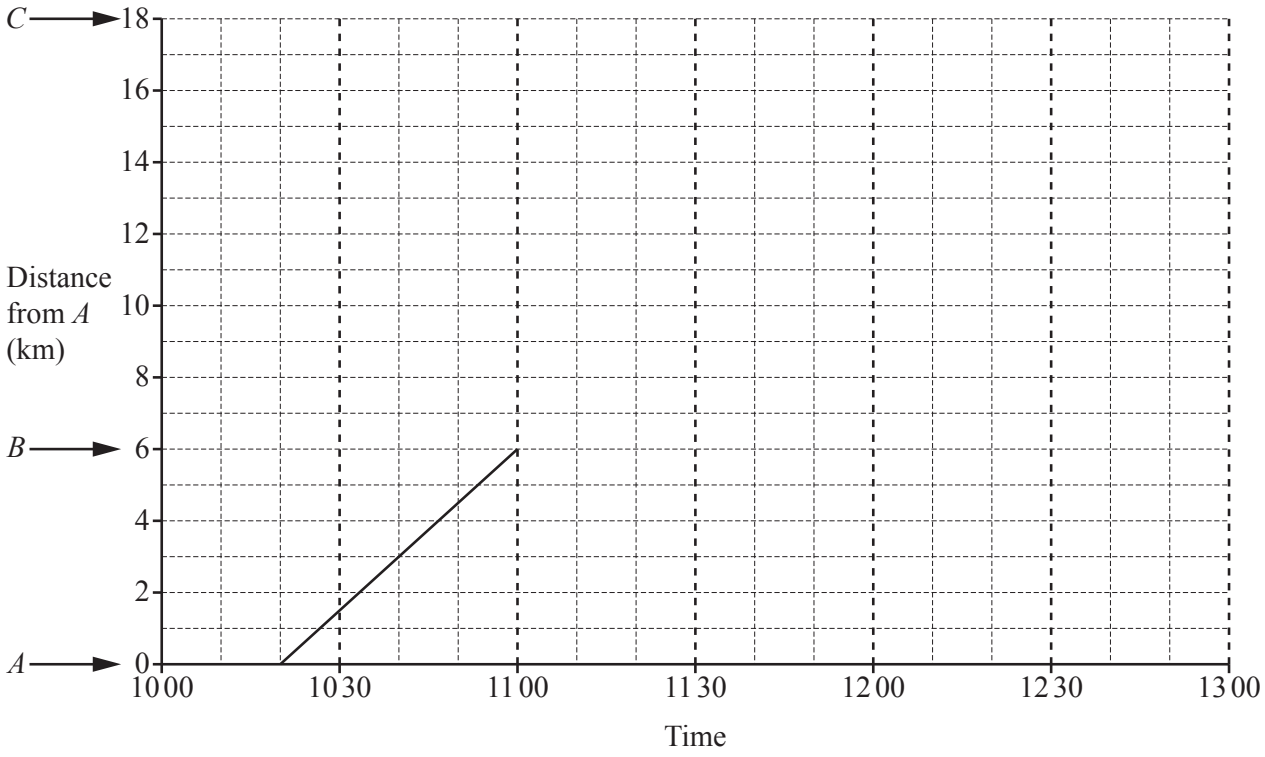
答：画连接 (12:00, 65) 与 (13:18, 0) 的直线段。



4. [2023 · May/June 0580/33 Q4(a)(iii)]

提示：先找停留结束时刻，再用两地距离之差算续航路程。

(a) A boat sails from A to B.
The travel graph shows this journey.



(iii) The boat stays at B for 20 minutes.
The boat then sails to C at a constant speed of 8 km/h.

Complete the travel graph.

(a) 一艘船从 A 航行到 B。行程图表示这段行程。
图中横轴为时间，标有 10 : 00、10 : 30、11 : 00、11 : 30、12 : 00、12 : 30、13 : 00。纵轴为到 A 的距离，单位为千米，标有 0、2、4、6、8、10、12、14、16、18。A、B、C 分别位于 0 km、6 km、18 km 处。已画航行线段从 (10:20, 0) 延伸至 (11:00, 6)。
(iii) 船在 B 停留 20 分钟，然后以 8 km/h 的恒定速度航行到 C。补全行程图。

✓ **答案** 先画从 $(11{:}00, 6)$ 至 $(11{:}20, 6)$ 的水平线段，再画从 $(11{:}20, 6)$ 至 $(12{:}50, 18)$ 的直线段。

解析 由图知，船于 $11:00$ 到达 B，此时距 A 为 6 km。

停留 20 min 后，离开 B 的时刻为

$11{:}00 + 20 \text{ min} = 11{:}20$。

停留期间位置不变，画连接 $(11{:}00, 6)$ 与 $(11{:}20, 6)$ 的水平线段。

C 距 A 为 18 km，故从 B 到 C 的路程为

$s = 18 - 6 = 12$ km。

这段航行所用时长为

$t = \frac{12}{8}$ h $= 1.5$ h $= 1.5 \times 60$ min $= 90$ min。

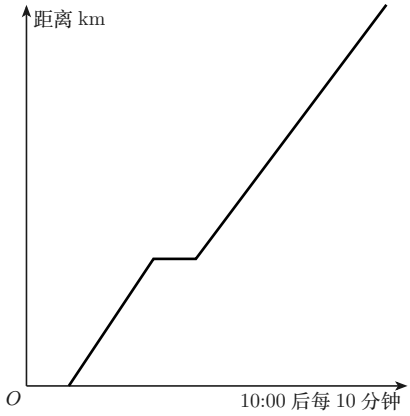
90 min $= 1$ h $+ 30$ min。

到达 C 的时刻为

$11{:}20 + 1$ h $+ 30$ min $= 12{:}50$。

船以恒定速度航行，画连接 $(11{:}20, 6)$ 与 $(12{:}50, 18)$ 的直线段。

答：先画从 $(11{:}00, 6)$ 至 $(11{:}20, 6)$ 的水平线段，再画从 $(11{:}20, 6)$ 至 $(12{:}50, 18)$ 的直线段。

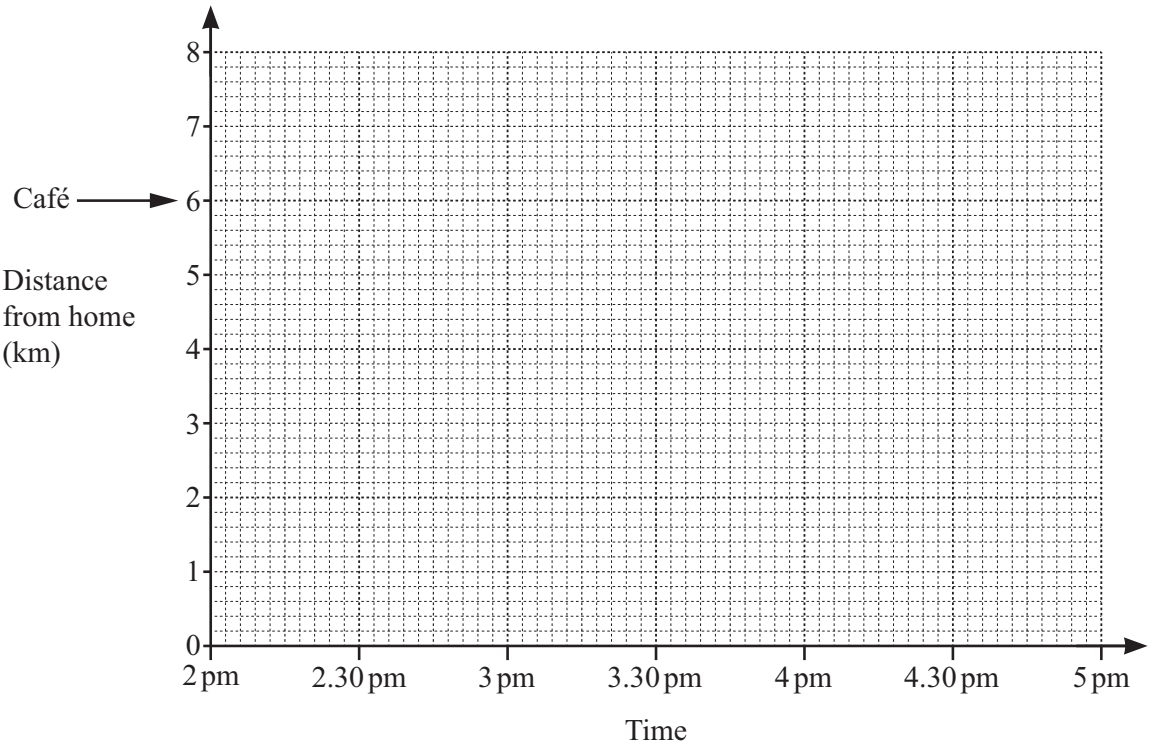


5. [2024 · October/November 0580/31 Q9(a)]

提示：先用慢跑的路程除以速度，求到达咖啡馆的时刻。

Samir leaves home at 2 pm.
He jogs 6 km to a café at a constant speed of 8 km per hour.
He stops to rest for 1 hour.
He then walks back home at a constant speed and arrives at 4.36 pm.

(a) On the grid, draw a travel graph to show Samir's whole journey.



萨米尔（Samir）下午 2 时离家。
他以每小时 8 km 的恒定速度慢跑 6 km，到达一家咖啡馆。
他停下来休息 1 小时。
然后，他以恒定速度步行回家，于下午 4 时 36 分到家。
(a) 在方格图上画出表示萨米尔整个行程的行程图。
图中横轴为时刻，标有下午 2 时、2 时 30 分、3 时、3 时 30 分、4 时、4 时 30 分、5 时。纵轴为距家的距离，单位为千米，标有 0 至 8 的各整数刻度。咖啡馆位于 6 km 处。

✓ **答案** 依次用直线段连接 $(14{:}00, 0)$、$(14{:}45, 6)$、$(15{:}45, 6)$、$(16{:}36, 0)$。

解析 慢跑到咖啡馆所用的时间为

$$t = \frac{s}{v} = \frac{6}{8}\ \text{h} = \frac{6}{8} \times 60\ \text{min} = 45\ \text{min}$$

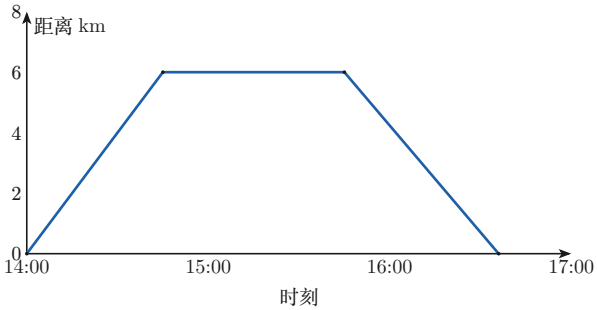
到达咖啡馆的时刻为

$$14{:}00 + 45\ \text{min} = 14{:}45$$

休息 1 小时后，离开咖啡馆的时刻为

$$14{:}45 + 1\ \text{h} = 15{:}45$$

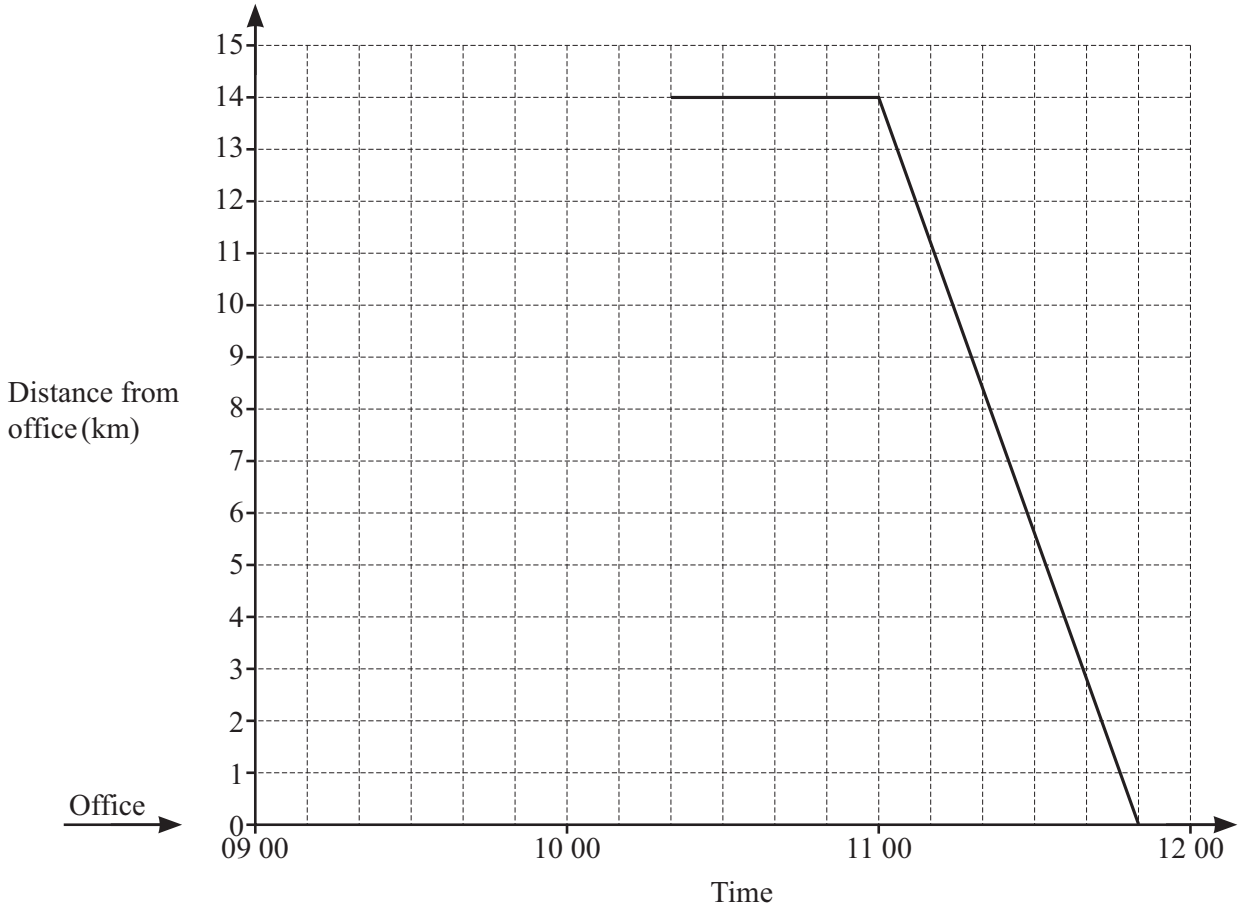
休息期间距家的距离保持为 6 km，画水平线段。
去程和返程均为匀速行进，分别画直线段。
答：依次用直线段连接 $(14{:}00, 0)$、$(14{:}45, 6)$、$(15{:}45, 6)$、$(16{:}36, 0)$。



6. [2025 · May/June 0580/11 Q10(d)]

提示：先求去程用时，再由到达时刻向前推算。

Ky cycles from his office to a meeting and back again.
The travel graph shows his time at the meeting and his journey back.



(d) Ky cycles from his office to the meeting at a constant speed of 21 km/h.

Complete the travel graph.

凯（Ky）骑自行车从办公室去参加会议，然后返回。 行程图表示他参加会议的时间和返回办公室的行程。
图中横轴为时刻，标有 09:00、10:00、11:00、12:00。纵轴为距办公室的距离，单位为千米，标有 0 至 15 的各整数刻度。办公室位于 0 km 处。
(d) 凯以 21 km/h 的恒定速度从办公室骑车到会议地点。
补全行程图。

✓ **答案** 用直尺画连接 (09:40, 0) 与 (10:20, 14) 的直线段。

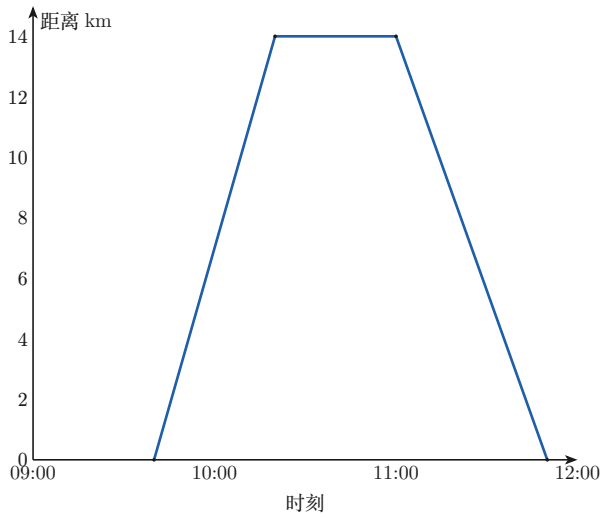
解析 由图中水平线段的高度，得会议地点距办公室 14 km。
水平线段的左端对应 10:20，这是到达会议地点的时刻。
去程所用的时间为

$$t = \frac{s}{v} = \frac{14}{21}\ \text{h} = \frac{2}{3} \times 60\ \text{min} = 40\ \text{min}$$

出发时刻为

$$10{:}20 - 40\ \text{min} = 09{:}40$$

去程速度恒定，行程图为直线段。
答：用直尺画连接 (09:40, 0) 与 (10:20, 14) 的直线段。



7. [2021・February/March 0580/32 Q4(c)(i)(a,b),(ii)]

提示：先把步行时间化为小时，求出第一段路程。

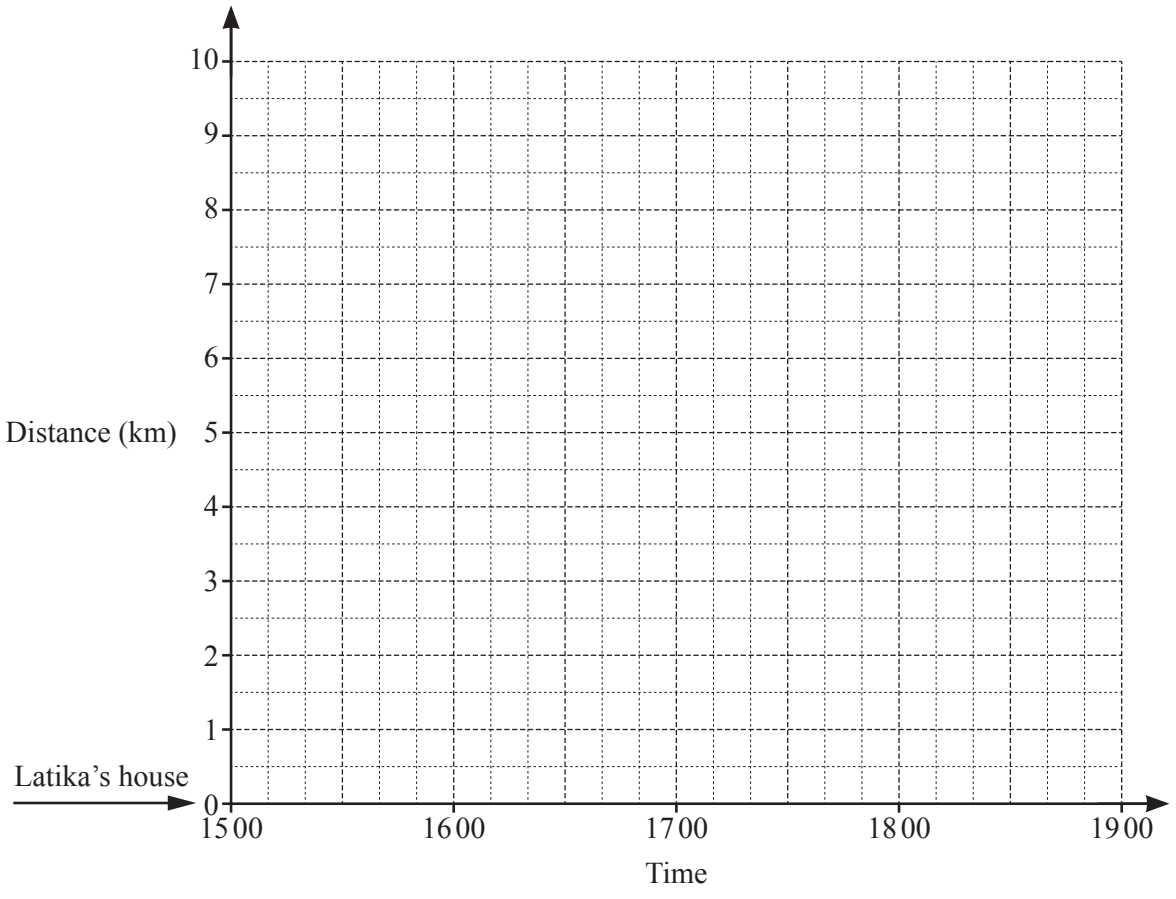
(c) (i) Kendra and Latika leave Latika's house at 1500 to go to the cinema.

(a) They walk for 20 minutes at a constant speed of 4.5 km/h.

Work out the distance they walk.

(b) After walking for 20 minutes, they then run a distance of 6 km at a constant speed for 40 minutes.

Draw their journey to the cinema on the travel graph.



(ii) Kendra and Latika leave the cinema at 18 05.
They travel back to Latika's house in a taxi at a constant speed of 30 km/h.

Complete the travel graph.

(c)(i) 肯德拉和拉蒂卡于 15:00 离开拉蒂卡家，前往电影院。
(a) 她们以 4.5 km/h 的恒定速度步行 20 分钟。求她们步行的路程。
(b) 步行 20 分钟后，她们又以恒定速度跑了 6 km，用时 40 分钟。在行程图上画出她们前往电影院的行程。
图中横轴为时间，标有 15:00、16:00、17:00、18:00、19:00。纵轴为距离，单位为千米，标有 0 至 10 的各整数刻度。拉蒂卡家位于距离为 0 km 处。
(ii) 肯德拉和拉蒂卡于 18:05 离开电影院。她们乘出租车以 30 km/h 的恒定速度返回拉蒂卡家。补全行程图。

✓ **答案** (i)(a) 1.5 km。
(i)(b) 依次连接 $(15{:}00, 0)$、$(15{:}20, 1.5)$、$(16{:}00, 7.5)$。
(ii) 续接至 $(18{:}05, 7.5)$，再连接至 $(18{:}20, 0)$。

解析 步行时间化为小时，得

$$20\ \text{min} = \frac{20}{60}\ \text{h} = \frac{1}{3}\ \text{h}$$

由路程等于速度乘时间，得步行路程为

$$4.5\ \text{km/h} \times \frac{1}{3}\ \text{h} = 1.5\ \text{km}$$

步行结束的时刻为

$$15{:}00 + 20\ \text{min} = 15{:}20$$

跑步结束的时刻为

$$15{:}20 + 40\ \text{min} = 16{:}00$$

电影院到拉蒂卡家的距离为

$$1.5 + 6 = 7.5\ \text{km}$$

两段均匀速行进，分别画直线段连接

$$(15{:}00, 0), (15{:}20, 1.5)$$

$$(15{:}20, 1.5), (16{:}00, 7.5)$$

她们在电影院停留至 18:05，画水平线段连接

$$(16{:}00, 7.5), (18{:}05, 7.5)$$

由路程除以速度，得返程时间为

$$\frac{7.5}{30}\ \text{h} = 0.25\ \text{h} = 15\ \text{min}$$

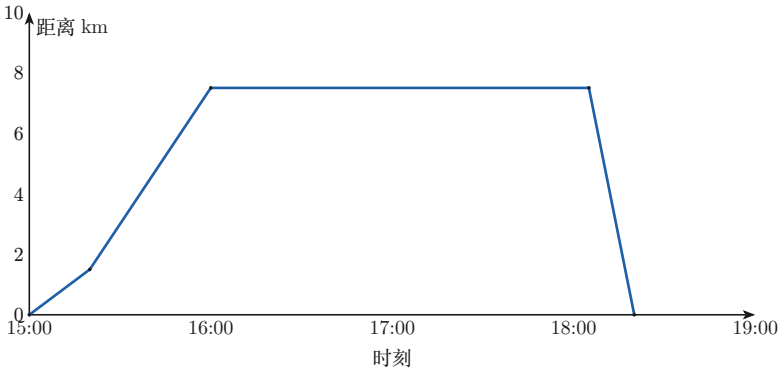
到家的时刻为

$$18{:}05 + 15\ \text{min} = 18{:}20$$

返程匀速，画直线段连接

$$(18{:}05, 7.5), (18{:}20, 0)$$

答：步行路程为 1.5 km；行程图依次用直线段连接上述五个端点。



第三章 坐标几何

Chapter 3

3.1 用斜率和一个点求直线方程

题型 1 用斜率和一个点求直线方程（Core / Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **读取图上坐标：**本例直线 L 经过 $(0,7)$ 和 $(1,9)$。点的坐标先写横坐标，再写纵坐标。图形未按比例绘制时，使用标注的坐标。

② **计算直线斜率：**从 $(0,7)$ 到 $(1,9)$，横坐标增加 1，纵坐标增加 2。

$$\frac{9-7}{1-0}=2$$

纵坐标差与横坐标差之比叫做_____，用 m 表示。两点记为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，横坐标不相等时，有

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\quad x_1\neq x_2$$

③ **负数分数斜率：**计算坐标差时，分子、分母按同一顺序相减。

经过 $(0,4)$、$(2,2)$：

$m=\frac{2-4}{2-0}=\frac{-2}{2}=-1$

经过 $(0,1)$、$(2,2)$：

$m=\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$

④ **读取纵轴截距：**直线与 y 轴交点的纵坐标是纵截距，用 c 表示。

本例交点为 $(0,7)$：

纵截距为_____。

交点为 $(0,-1)$ 时：

$c=-1$

⑤ **写出直线方程：**把斜率和纵截距写入方程。

本例：

$$m=2,\quad c=7$$

$y=2x+7$

纵截距为负数的一例：

$$m=2,\quad c=-1$$

$y=2x-1$

用字母表示，得到斜截式：

$$y=mx+c$$

⑥ **由点求出截距：**本例已求得斜率，把点 $(1,9)$ 的坐标代入方程。

$$9=2\times 1+c$$

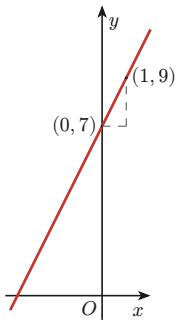
$$c=9-2=7$$

把求得的纵截距写回，得

$$y=2x+7$$

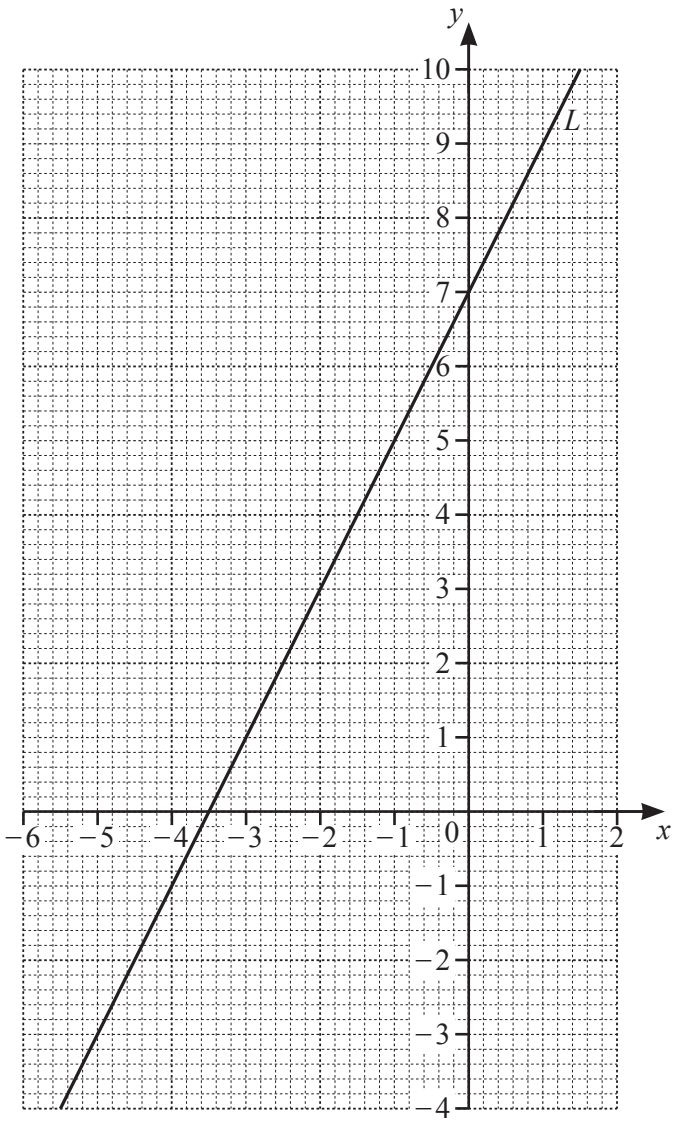
填空：①斜率 ②7

从两个点读取斜率和截距

	图像	数量关系
同一关系		$m=\frac{9-7}{1-0}=2$，$c=7$，所以 $y=2x+7$。

点石成金　题目出现直线图象或直线上两个点，要求直线方程时，先用两点坐标求斜率，再读取或代点求纵截距。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q6(a)]



(a) Find the equation of line L in the form $y=mx+c$.

图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，直线标为 L。
(a) 求直线 L 的方程，形式为
$y=mx+c$。

解答 由图可读出直线经过 $(0,7)$ 和 $(1,9)$，得

$$m=\frac{9-7}{1-0}=2$$

由直线与 y 轴交于 $(0,7)$，得

$$c=7$$

答：

$y=2x+7$。

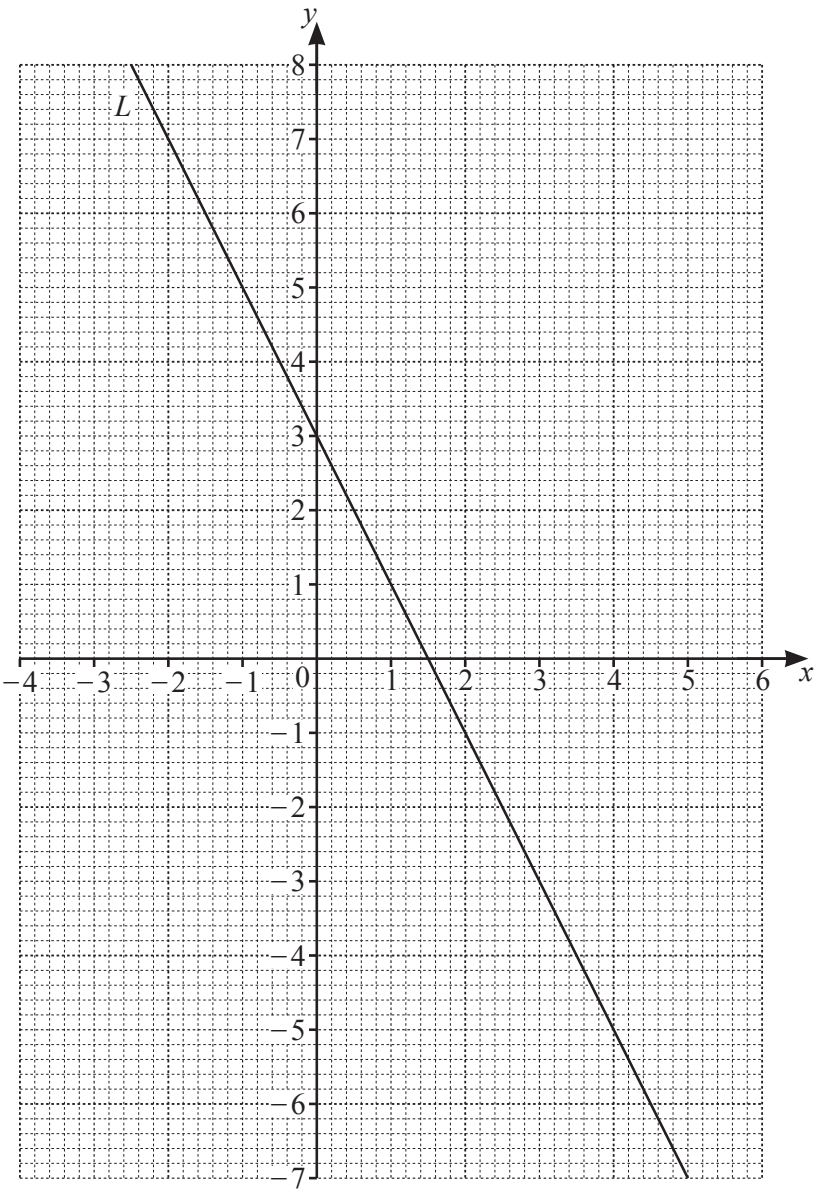
方法：先找图中标明坐标的两点，算纵坐标差与横坐标差的比。

辨析：斜率是纵坐标差与横坐标差的比，纵截距是纵轴交点的纵坐标。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/33 Q6(a)]

提示：从左向右比较两点的升降，再读纵轴交点。



(a) Write down the equation of line L in the form $y=mx+c$.

图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，直线标为 L。

(a) 写出直线 L 的方程，形式为

$y=mx+c$。

✓ **答案**

$$y = -2x + 3$$

解析 由图可读出直线经过 $(0, 3)$ 和 $(1, 1)$，得

$$m = \frac{1-3}{1-0} = -2$$

由直线与 y 轴交于 $(0, 3)$，得

$$c = 3$$

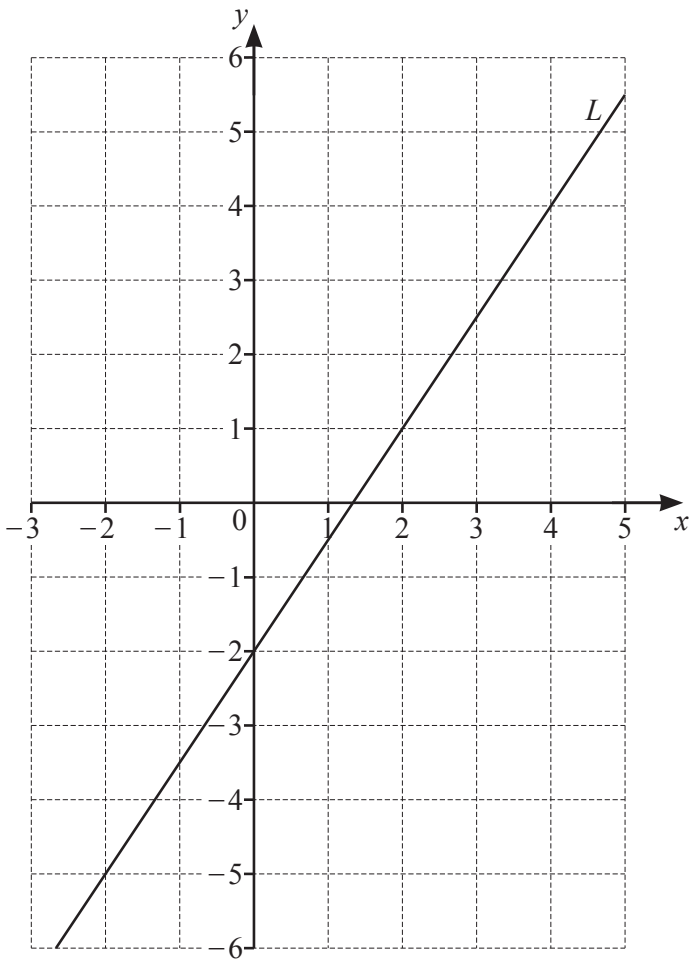
答：

$y = -2x + 3$。

2. [2023 · May/June 0580/32 Q7(a)(i)]

提示：比较两点的纵横坐标差，减去负数时先处理符号。

(a)



(i) Find the equation of line L.
Give your answer in the form $y = mx + c$.

(a) 图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，直线标为 L。

(i) 求直线 L 的方程。答案写成以下形式：

$y = mx + c$。

✓ **答案**

$$y = 1.5x - 2$$

解析 由图可读出直线经过 $(0, -2)$ 和 $(2, 1)$，得

$$m=\frac{1-(-2)}{2-0}=\frac{3}{2}=1.5$$

由直线与 y 轴交于 $(0,-2)$，得

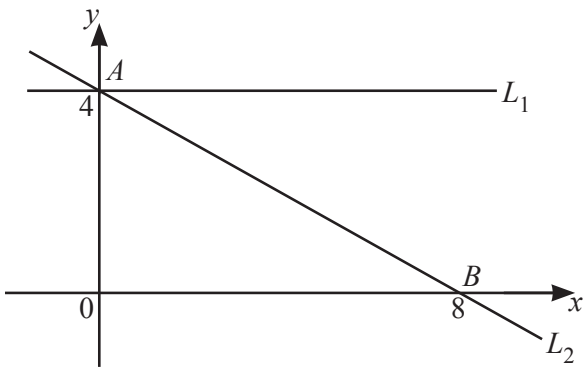
$$c=-2$$

答：

$y=1.5x-2$。

3. [2023 · February/March 0580/42 Q6(b)]

提示：看两轴交点的坐标，纵横坐标差须按同一顺序相减。



NOT TO SCALE

A is the point (0, 4) and B is the point (8, 0).
The line L_1 is parallel to the x-axis.
The line L_2 passes through A and B.

(b) Find the equation of L_2.
Give your answer in the form $y=mx+c$.

图形未按比例绘制。图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。
点 A 的坐标为 $(0,4)$，点 B 的坐标为 $(8,0)$。
直线 L_1 平行于 x 轴。
直线 L_2 经过 A、B 两点。
(b) 求直线 L_2 的方程。答案写成以下形式：
$y=mx+c$。

✓ **答案**

$$y=-\frac{x}{2}+4$$

解析 由直线 L_2 经过 $A(0,4)$ 和 $B(8,0)$，得

$$m=\frac{0-4}{8-0}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

把点 A 的坐标代入，得

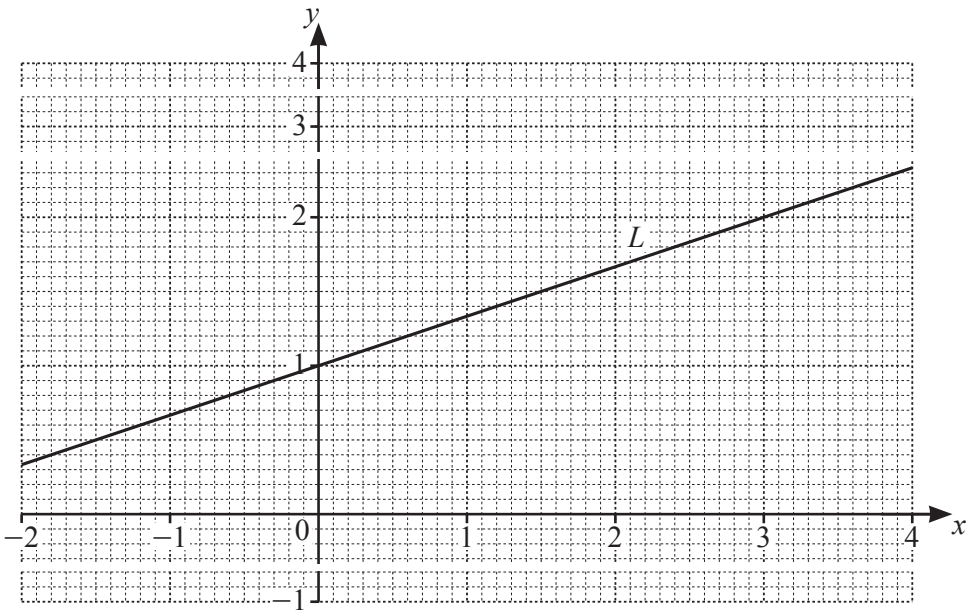
$$4=\left(-\frac{1}{2}\right)\times 0+c$$

$$c=4$$

答：

$y=-\frac{x}{2}+4$。

4. [2023 · October/November 0580/13 Q17(a)]
提示：比较纵向增加量与横向增加量，分清比值的上下位置。



(a) Find the equation of line L in the form $y = mx + c$.

图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，直线标为 L。
(a) 求直线 L 的方程，形式为
$y = mx + c$。

✓ **答案**

$$y = \frac{x}{3} + 1$$

解析 由图可读出直线经过 $(0,1)$ 和 $(3,2)$，得

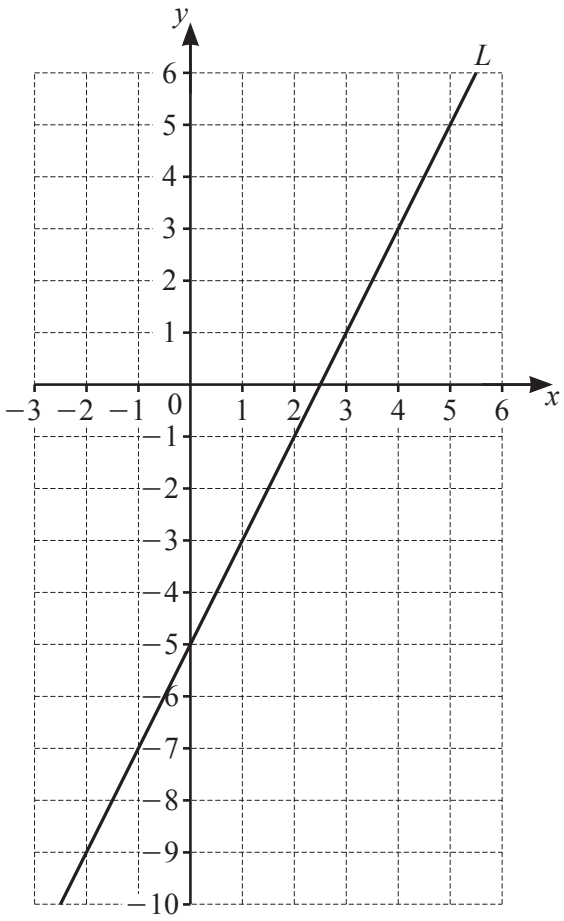
$$m = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$$

由直线与 y 轴交于 $(0,1)$，得

$$c = 1$$

答：
$y = \frac{x}{3} + 1$。

5. [2023 · October/November 0580/31 Q8(a)]
提示：看两点是否跨过横轴，纵坐标差要计入轴下的距离。



(a) Find the equation of line L in the form $y = mx + c$.

图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，直线标为 L。
(a) 求直线 L 的方程，形式为
$y = mx + c$。

✓ **答案**

$$y = 2x - 5$$

解析 由图可读出直线经过 $(0, -5)$ 和 $(3, 1)$，得

$$m = \frac{1 - (-5)}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2$$

由直线与 y 轴交于 $(0, -5)$，得

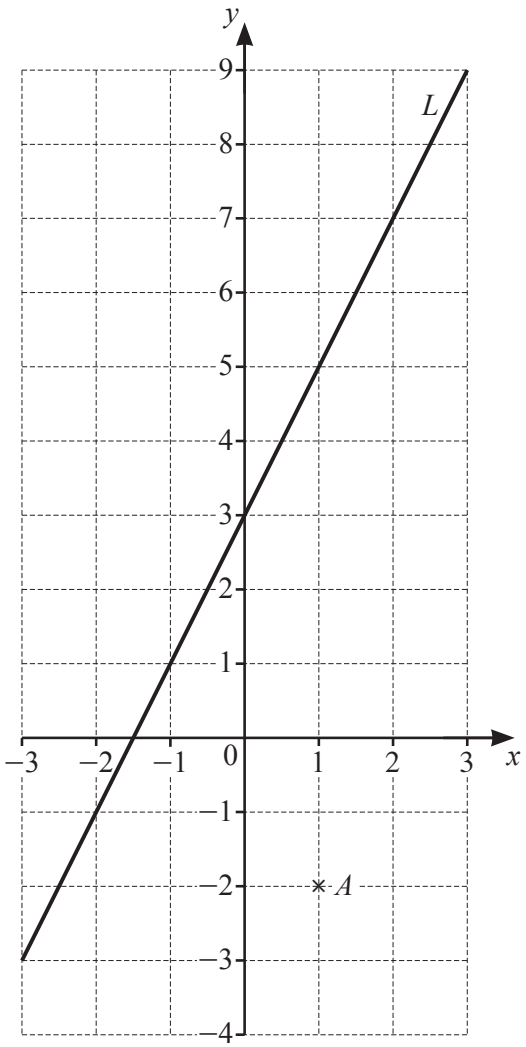
$$c = -5$$

答：
$y = 2x - 5$。

6. [2023 · October/November 0580/12 Q22(c)]

提示：比较两点间的纵横增量，再看纵轴交点的位置。

Point A and line L are shown on the grid.



(c) Find the equation of line L.

点 A 和直线 L 如方格图所示。图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，点 A 用叉号标出。

(c) 求直线 L 的方程。

✓ **答案**

$$y = 2x + 3$$

解析 由图可读出直线 L 经过 $(0, 3)$ 和 $(1, 5)$，得

$$m = \frac{5-3}{1-0} = 2$$

由直线与 y 轴交于 $(0, 3)$，得

$$c = 3$$

答：

$y = 2x + 3$。

3.2 先取负倒数斜率，再确定垂线的位置

题型 1　先取负倒数斜率，再确定垂线的位置（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **两点求斜率：**从 $A(0,4)$ 到 $B(8,0)$，横坐标增加 8，纵坐标减少 4。用 m 表示 L_2 的斜率，以纵坐标改变量除以横坐标改变量。

$$m=\frac{0-4}{8-0}$$

因此，L_2 的斜率为_____。

② **负倒数斜率：**L_3 与 L_2 垂直，设其斜率为 n。将原斜率取负倒数，得垂线斜率。

$$n=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2$$

两条斜线垂直时，斜率的乘积为_____。

$$mn=-1$$

③ **过点确定位置：**L_3 的斜率为 2，设方程中的常数项为 c。

$$y=2x+c$$

将经过的点 $C(2,3)$ 代入，求出常数项。

$$3=2\times 2+c$$

$$c=3-4=-1$$

于是得到直线方程。

$$y=2x-1$$

④ **平分转为中点：**线段的垂直平分线经过该线段的_____。以 U 表示 AB 的中点，横、纵坐标分别取平均数。

$$U=\left(\frac{0+8}{2},\frac{4+0}{2}\right)=(4,2)$$

⑤ **中点确定位置：**AB 的垂直平分线斜率为 2，且经过 $U(4,2)$。设方程为

$$y=2x+c$$

代入中点坐标，求出常数项。

$$c=2-2\times 4=-6$$

$$y=2x-6$$

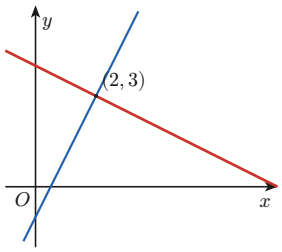
⑥ **选点画出垂线：**若画一条与 L_3 垂直的直线，先求斜率。

$$-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}$$

自选 $O(0,0)$，向右移 2、向下移 1，得到 $P(2,-1)$。用直尺连接两点，并在网格内延长。

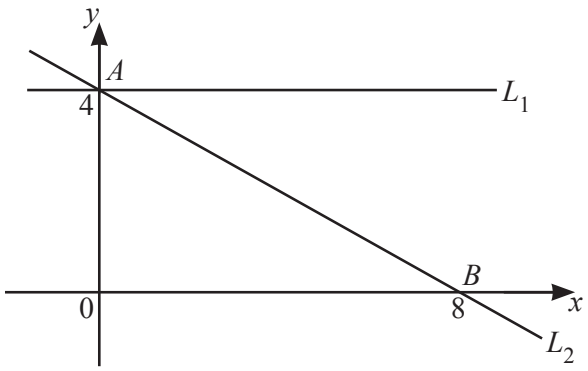
填空：①$-\frac{1}{2}$　②-1　③中点

垂直直线的斜率互为负倒数

	图像	数量关系
同一关系		$\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2=-1$；两直线为 $y=-\frac{x}{2}+4$ 和 $y=2x-1$。

点石成金　题目出现垂直、垂直平分线或画垂线时，先求原直线的斜率，再取负倒数。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q6(c)(i)]



NOT TO SCALE

A is the point (0, 4) and B is the point (8, 0).
The line L_1 is parallel to the x-axis.
The line L_2 passes through A and B.

(c) C is the point (2, 3).
The line L_3 passes through C and is perpendicular to L_2.

(i) Show that the equation of L_3 is $y=2x-1$.

图示不按比例绘制。图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，原点标为 0；横轴上标有 8，纵轴上标有 4；两条直线分别标为 L_1、L_2。
A 点的坐标为 $(0,4)$，B 点的坐标为 $(8,0)$。直线 L_1 平行于 x 轴。直线 L_2 经过 A、B 两点。
(c) C 点的坐标为 $(2,3)$。直线 L_3 经过 C 点，且垂直于 L_2。
(i) 证明直线 L_3 的方程为 $y=2x-1$。

解答　由 $A(0,4)$、$B(8,0)$ 得 L_2 的斜率

$$m=\frac{0-4}{8-0}=-\frac{1}{2}$$

设 L_3 的斜率为 n。由两直线垂直得

$$n=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2$$

设 L_3 的方程为

$$y=2x+c$$

代入 $C(2,3)$ 得

方法：先看原直线的两点坐标，求斜率后取负倒数，再代入所过点。

辨析：垂线是与原线成直角的直线，垂直平分线是还经过线段中点的垂线。

$$3 = 2 \times 2 + c$$

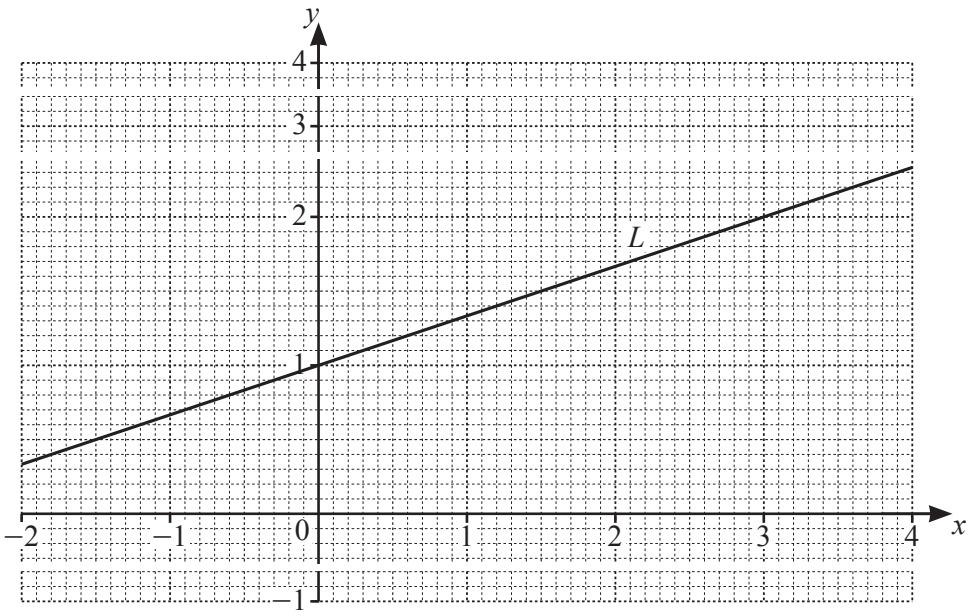
$$c = 3 - 4 = -1$$

答：L_3 的方程为 $y = 2x - 1$。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/13 Q17(b)]

提示：看图上原线的两个格点，比横纵改变量，再确定垂线的走向。



(b) On the grid, draw a line that is perpendicular to line L.

图中给出了直线 L，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。横轴标有 -2、-1、0、1、2、3、4；纵轴标有 -1、1、2、3、4。
(b) 在网格上画一条与直线 L 垂直的直线。

✓ **答案** 答案不唯一，如经过 $(0,3)$ 和 $(1,0)$ 的直线。

$$y = -3x + 3$$

解析 由图可知，直线 L 经过 $(0,1)$ 和 $(3,2)$，其斜率为

$$m = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$$

所画垂线的斜率为

$$n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3$$

选取点 $(0,3)$，向右移 1、向下移 3，得到点 $(1,0)$。

$$\frac{0-3}{1-0} = -3$$

答：用直尺画出经过 $(0,3)$ 和 $(1,0)$ 的直线，并在网格内延长。

2. [2023 · May/June 0580/22 Q15(c)]

提示：看两端点坐标，分别求中点与原线斜率，再确定垂线位置。

C is the point $(5, -1)$ and D is the point $(13, 15)$.

(c) Find the equation of the perpendicular bisector of CD.
Give your answer in the form $y = mx + c$.

C 点的坐标为 $(5, -1)$，D 点的坐标为 $(13, 15)$。
(c) 求线段 CD 的垂直平分线的方程。将答案写成以下形式，其中 m、c 为常数。

$$y = mx + c$$

✓ **答案**

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{23}{2}$$

解析 设 CD 的中点为 U，则

$$U = \left(\frac{5+13}{2}, \frac{-1+15}{2}\right) = (9, 7)$$

CD 所在直线的斜率为

$$m = \frac{15-(-1)}{13-5} = \frac{16}{8} = 2$$

垂直平分线的斜率为

$$n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$$

设所求方程为

$$y = -\frac{1}{2}x + c$$

垂直平分线经过中点 $U(9, 7)$，代入得

$$7 = -\frac{1}{2} \times 9 + c$$

$$c = 7 + \frac{9}{2} = \frac{23}{2}$$

答：所求垂直平分线的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{23}{2}$。

3. [2025 · October/November 0580/23 Q22]
提示：先从已知方程中读出直线的斜率。

The equation of line L is $y = -\frac{1}{2}x + 7$.

Find an equation of the line perpendicular to line L that passes through the point (3, 5).
Give your answer in the form $y = mx + c$.

直线 L 的方程为

$$y = -\frac{1}{2}x + 7$$

求经过点 $(3, 5)$ 且与直线 L 垂直的直线方程。
将答案写成以下形式：

$$y = mx + c$$

✓ **答案**

$$y = 2x - 1$$

解析 由直线 L 的方程，得其斜率为 $-\frac{1}{2}$。
两直线垂直，所求直线的斜率为

$$-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2$$

设所求直线的方程为

$$y=2x+c$$

代入点 $(3,5)$，得

$$5=2\times 3+c$$

$$c=5-6=-1$$

答：所求直线的方程为
$y=2x-1$。

4. [2024 · May/June 0580/42 Q10(b)(iii)]
提示：先把已知方程整理为 y = m x + c 的形式。

(b) The equation of line l is $4x+3y-12=0$.

(i) Find the gradient of l.

(iii) Line p is perpendicular to l and passes through (6, 5).

Find the equation of p in the form $y=mx+c$.

(b) 直线 l 的方程为

$$4x+3y-12=0$$

(i) 求直线 l 的斜率。
(iii) 直线 p 与 l 垂直，且经过点 $(6,5)$。
求直线 p 的方程，将答案写成以下形式：

$$y=mx+c$$

✓ **答案**

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$$

解析 将直线 l 的方程移项，得

$$3y=-4x+12$$

两边同除以 3，得

$$y=-\frac{4}{3}x+4$$

直线 l 的斜率为 $-\frac{4}{3}$。
由直线 p 与 l 垂直，得 p 的斜率为

$$-\frac{1}{-\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

设直线 p 的方程为

$$y=\frac{3}{4}x+c$$

代入点 $(6,5)$，得

$$5=\frac{3}{4}\times 6+c$$

$$c=5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$$

答：直线 p 的方程为
$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$。

5. [2023 · May/June 0580/43 Q11(c)]
提示：看两端点的负坐标，横纵作差顺序保持一致，再找中点。

M has coordinates (4, 1) and N has coordinates ($-2, -7$).

(c) Find the equation of the perpendicular bisector of MN.

M 点的坐标为 $(4,1)$，N 点的坐标为 $(-2,-7)$。
(c) 求线段 MN 的垂直平分线的方程。

✓ **答案**

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}$$

解析 设 MN 的中点为 U，则

$$U=\left(\frac{4+(-2)}{2},\frac{1+(-7)}{2}\right)=(1,-3)$$

MN 所在直线的斜率为

$$m=\frac{-7-1}{-2-4}=\frac{-8}{-6}=\frac{4}{3}$$

垂直平分线的斜率为

$$n=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}$$

设所求方程为

$$y=-\frac{3}{4}x+c$$

垂直平分线经过中点 $U(1,-3)$，代入得

$$-3=-\frac{3}{4}\times 1+c$$

$$c=-3+\frac{3}{4}=-\frac{9}{4}$$

答：所求垂直平分线的方程为 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}$。

第四章 几何

Chapter 4

4.1 用角度范围判断角的名称

题型 1 用角度范围判断角的名称（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **读取所标角：**图中弧线标出了所研究的角。$\angle ACB$ 表示以 C 为顶点的角，大小为 108°。

② **对照角度范围：**用 θ 表示角的大小，单位为度，记作 °。角度所在的范围决定角的名称。

角度范围	角的名称
$0° < \theta < 90°$	锐角（acute angle）
$\theta = 90°$	直角（right angle）
$90° < \theta < 180°$	钝角（obtuse angle）
$\theta = 180°$	平角（straight angle）

③ **已知角度判断：**将例题中的角度与直角、平角比较。

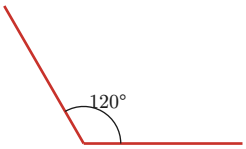
$$90° < 108° < 180°$$

所以 $\angle ACB$ 是_____。

④ **无标数图形：**例题中，沿标有 108° 的弧线，从射线 CB 转到射线 CA。转动超过直角，未到平角，故为钝角。图中没有度数时，也比较弧线所标开口与直角、平角的大小。

填空：①钝角

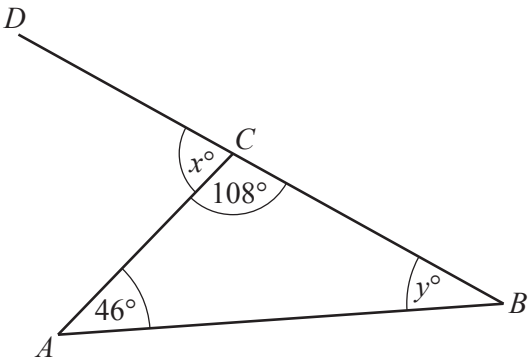
角的大小按转过的范围判断

	图像	数量关系
同一关系		$90° < 120° < 180°$，所以是钝角。

点石成金　题目出现角的度数或用弧线标出的角，要求写出角的名称时，先比较该角与直角、平角的大小。

例 1　[2023 · May/June 0580/33 Q7(a)(i)]

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a triangle ABC and a straight line BCD.

(i) Angle $ACB = 108°$.

Write down the mathematical name for this type of angle.

(a) 图示为三角形 ABC 和直线 BCD。
图中，$\angle CAB = 46°$，$\angle ACB = 108°$，$\angle ACD = x°$，$\angle ABC = y°$。图形未按比例绘制。
(i) $\angle ACB = 108°$。
写出这类角的数学名称。

解答　由题意，
$\angle ACB = 108°$。
$\because 90° < 108° < 180°$，
$\therefore$ 该角大于直角且小于平角。
答：钝角（obtuse angle）。

方法：先找弧线标出的角，再把所标度数与 90°、180°比较。

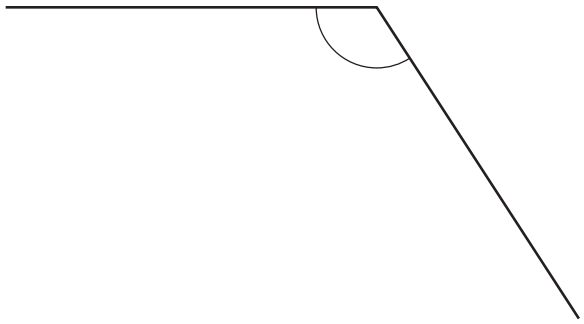
辨析：直角是恰好 90°的角，钝角是大于 90°且小于 180°的角。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/32 Q2(a)(iii)(a)]

提示：看弧线两端对应的射线，比较开口与直角、平角的大小。

(iii)



(a) Write down the mathematical name for this type of angle.

(iii) 图中两条射线组成一个角，弧线标出了所问的角。
(a) 写出这类角的数学名称。

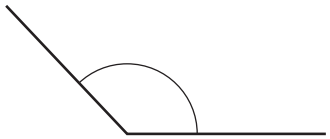
✓ **答案** 钝角（obtuse angle）

解析 图中弧线所标的角大于直角且小于平角，故为钝角。

答：钝角（obtuse angle）。

2. [2023 · October/November 0580/11 Q1]

提示：以弧线确定所问的角，再与直角、平角比较。



Write down the mathematical name for this type of angle.

图中两条射线组成一个角，弧线标出了所问的角。
写出这类角的数学名称。

✓ **答案** 钝角（obtuse angle）

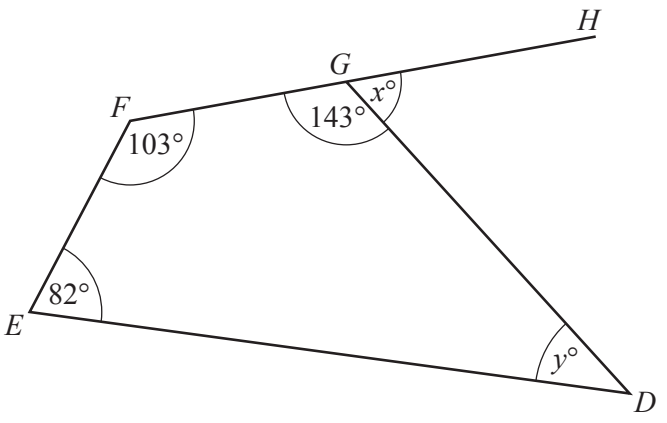
解析 图中弧线所标的角大于直角且小于平角，故为钝角。

答：钝角（obtuse angle）。

3. [2024 · February/March 0580/32 Q1(d)(i)]

提示：将所求角的度数与锐角的角度范围比较。

(d)



NOT TO SCALE

The diagram shows a quadrilateral *DEFG* and a straight line *FGH*.

(i) Angle $DEF = 82°$.

Write down the mathematical name for this type of angle.

(d) 图示为四边形 $DEFG$ 和直线 FGH。
图中，$\angle DEF = 82°$，$\angle EFG = 103°$，$\angle FGD = 143°$，$\angle DGH = x°$，$\angle EDG = y°$。图形未按比例绘制。
(i) $\angle DEF = 82°$。
写出这类角的数学名称。

✓ **答案** 锐角（acute angle）
解析 由题意，
$\angle DEF = 82°$。
由锐角的角度范围，
$0° < 82° < 90°$，
∴ 该角为锐角。
答：锐角（acute angle）。

4. [2025 · May/June 0580/13 Q2(a)]
提示：将题目给出的角度范围与角的分类表对照。

(a) Write down the mathematical name for an angle between 90° and 180°.

(a) 写出大于 90° 且小于 180° 的角的数学名称。

✓ **答案** 钝角（obtuse angle）
解析 所求角大于直角且小于平角，符合钝角的定义。
答：钝角（obtuse angle）。

5. [2025 · May/June 0580/31 Q2]
提示：将所给度数分别与直角、平角的度数比较。

An angle measures 157°.

Write down the mathematical name for this type of angle.

一个角的大小为 157°。
写出这类角的数学名称。

✓ **答案** 钝角（obtuse angle）
解析 将所给角度与直角、平角比较，
$90° < 157° < 180°$，
∴ 该角大于直角且小于平角，为钝角。
答：钝角（obtuse angle）。

4.2 按边、平行关系和对称性辨认图形

题型 1 按边、平行关系和对称性辨认图形（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **数边定名：**图中的两个多边形分别有五条边和四条边。沿边界数边，再按边数确定名称。
五条边的多边形称为_____（pentagon）。
四条边的多边形统称为_____（quadrilateral）。

② **平行辨形：**图中四边形的上、下两边平行，另两边不平行。有且仅有一组对边_____的四边形称为梯形（trapezium）。

③ **三角形命名：**图中三角形 ABC 有两个内角分别为 112° 和 44°，由三角形内角和得：
$$\angle BAC = 180° - 112° - 44° = 24°$$

三个内角互不相等，所对的三条边也互不相等。三条边长度_____的三角形称为不等边三角形（scalene triangle）。

④ **正多边形：**五边形的五条边等长、五个内角相等时，称为正五边形。正多边形须同时满足下面两个条件。各条边的长度_____。　　各个内角的大小_____。

⑤ **对称辨形：**例题给出旋转对称阶数为 2，表示旋转一周内与原图重合两次，最小旋转角为：

$$\frac{360^\circ}{2} = \text{_____}$$

对称轴是将图形对折后两侧重合的直线。同时满足阶数为 2 且没有对称轴的四边形，是一般的平行四边形。

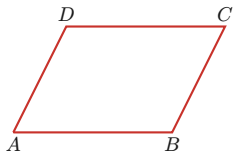
⑥ **半周旋转：**图中 M 是 AC 的中点，绕 M 旋转 180°，A 与 C 互换，B 转到 D。对应点到旋转中心的距离相等，得：

$$MA = MC,\quad MB = MD$$

两条对角线互相平分，故四边形 $ABCD$ 是_____。

填空：①五边形　②四边形　③平行　④互不相等　⑤相等　⑥相等　⑦180°　⑧平行四边形

平行四边形的两组对边平行

	图像	数量关系
同一关系		$AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$。

点石成金　题目出现图形命名、平行边或对称性条件时，先数边，再核对边长、平行关系和对称性。

例 1　[2023 · May/June 0580/11 Q4]

Write down the mathematical name of a 4-sided shape that has rotational symmetry of order 2 and no lines of symmetry.

写出一个有四条边、旋转对称阶数为 2 且没有对称轴的图形的数学名称。

解答　一般平行四边形绕两条对角线的交点旋转 180° 后与原图重合。

$$\frac{360^\circ}{180^\circ} = 2$$

取既不是矩形也不是菱形的平行四边形，它没有对称轴，符合题意。

答：平行四边形（parallelogram）。

方法：先看旋转阶数与对称轴条件，从半周旋转能否重合起手。

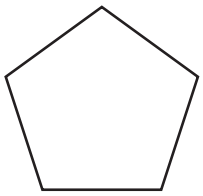
辨析：旋转对称是转动后重合，轴对称是沿直线对折后重合。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/32 Q2(a)(i)]

提示：沿边界从一个顶点数起，回到起点时停止计数。

(a) (i)



Write down the mathematical name for this polygon.

(a)(i) 写出图中这个多边形的数学名称。

✓ **答案** 五边形（pentagon）

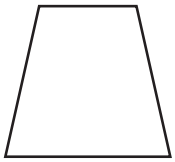
解析 沿图形边界数得共有五条边，五条边的多边形称为五边形。

答：五边形（pentagon）。

2. [2023 · October/November 0580/32 Q2(a)(ii)]

提示：分别看两组对边，核对各组是否平行。

(ii)



Write down the mathematical name for this quadrilateral.

(ii) 写出图中这个四边形的数学名称。

✓ **答案** 梯形（trapezium）

解析 图中四边形的上、下两边平行，另两边不平行，故它有且仅有一组对边平行。

答：梯形（trapezium）。

3. [2023 · October/November 0580/13 Q7(b)]

提示：比较三条边的长度，逐对核对是否相等。

In triangle LMN, $LN = 7.5$ cm and $MN = 8$ cm.

(a) **Using a ruler and compasses only**, construct triangle *LMN*.
Leave in your construction arcs.
The line *LM* has been drawn for you.

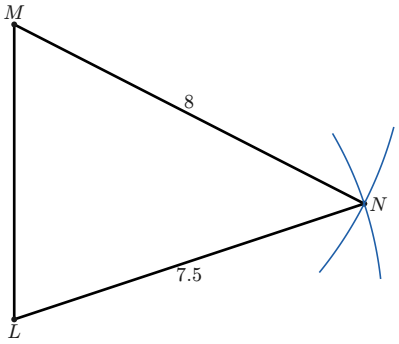


(b) Write down the mathematical name for this type of triangle.

三角形 LMN 中，LN=7.5cm，MN=8cm，线段 LM 已给出。(a) 只用直尺和圆规作出三角形 LMN，保留作图圆弧。(b) 写出这种三角形的数学名称。

✓ **答案** 不等边三角形（scalene triangle）

解析 作图后，三边分别为 7.5cm、8cm 及给出的 LM。量得 LM 约 6cm，三条边长度互不相同。答：不等边三角形（scalene triangle）。



4. [2023 · May/June 0580/31 Q7(b)]
提示：分别从边长和内角两方面检查正多边形的条件。

(b) Write down two geometrical properties that show that a polygon is regular.

(b) 写出表明一个多边形是正多边形的两条几何性质。

✓ **答案** 所有边的长度相等；所有内角的大小相等。

解析 正多边形同时满足等边和等角两个条件。
答：所有边的长度相等，所有内角的大小相等。

5. [2023 · May/June 0580/31 Q2(a)]
提示：沿封闭边界逐段计数，再按边数确定类别。

(a) Complete this statement.

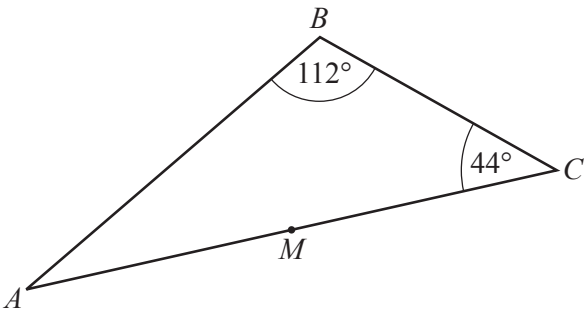
The mathematical name of any polygon with 4 sides is a .....

（a）补全陈述：任意一个有 4 条边的多边形的数学名称为_____。

✓ **答案** 四边形（quadrilateral）

解析 有 4 条边的多边形称为四边形。答：四边形（quadrilateral）。

6. [2023 · October/November 0580/13 Q14(a)]
提示：看半周旋转的对应点，比较两条对角线各自的两段。



NOT TO SCALE

The diagram shows triangle ABC.
M is the midpoint of AC.

Triangle ABC is rotated 180° about centre M.
The image and the original triangle together form a quadrilateral $ABCD$.

(a) Write down the mathematical name of the quadrilateral $ABCD$.

图中为三角形 ABC，顶点为 A、B、C，$\angle ABC = 112°$，$\angle BCA = 44°$。点 M 位于边 AC 上。图形不按比例绘制。
M 是 AC 的中点。
将三角形 ABC 绕中心 M 旋转 180°。旋转后的像与原三角形共同组成四边形 $ABCD$。
（a）写出四边形 $ABCD$ 的数学名称。

✓ **答案** 平行四边形（parallelogram）

解析 由 M 是 AC 的中点，得：

$$MA = MC$$

绕 M 旋转 180° 后，A 与 C 互换，B 转到 D，故：

$$MB = MD$$

且 B、M、D 在同一直线上。四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC、BD 互相平分，故它是平行四边形。
答：平行四边形（parallelogram）。

4.3 按圆心、端点和相交关系辨认圆中的线

题型 1 按圆心、端点和相交关系辨认圆中的线（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **端点与圆心：**图中线段 AC 的两端都在圆周上。线段 AB 的两端也在圆周上，且经过圆心 O。

② **圆中线名：**根据端点、圆心和接触情况辨认名称。

名称	判定条件
_____（chord）	线段的两端都在圆周上。

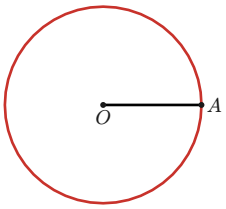
_____（diameter）	线段的两端在圆周上，且经过圆心。
_____（tangent）	直线与圆只有一个公共点。

③ **三点标记：**本例的 A、O、B 在同一直线上。线段 AOB 与线段 AB 表示同一条线段。它经过圆心，两端在圆周上，名称为直径。

④ **切线示范：**过本例的 A 点补画直线 l，使它与圆只有一个公共点 A。l 表示所画的直线，它是圆在 A 点处的切线。

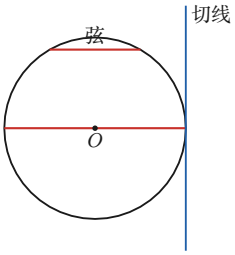
⑤ **按定义作弦：**在本例圆周上另取两个不同的点 P、Q，连接成线段 PQ。PQ 的两端都在圆周上，因此它是圆的一条弦。

⑥ **半径：**连接圆心与圆周上一点的线段称为半径。图中O是圆心、A在圆周上，线段OA是一条半径。同一个圆的半径长度都相等。



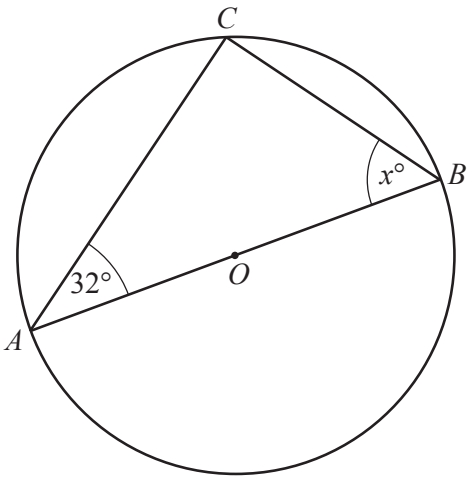
填空：①弦　②直径　③切线

直径经过圆心，切线只接触一点

	图像	数量关系
同一关系		直径穿过圆心；弦的两个端点在圆周上；直线 $x=2$ 为切线。

点石成金　题目出现圆中的线并要求写出名称时，先看端点、是否经过圆心及与圆的公共点个数。

例 1　[2023 · May/June 0580/13 Q20(a)]



NOT TO SCALE

The diagram shows a circle, centre O, diameter AB.
A, B and C lie on the circumference of the circle.

(a) Write down the mathematical name of the line AC.

图中有一个圆，圆心为 O，直径为 AB。A、B、C 均在圆周上。图中标有 $\angle CAB = 32°$、$\angle ABC = x°$。图示不按比例绘制。
(a) 写出线段 AC 的数学名称。

解答　由题意，A、C 都在圆周上，∴ 连接这两点的线段 AC 是圆的一条弦。
答：弦（chord）。

方法：先看线段两端是否在圆周上，再查是否经过圆心。

辨析：弦是两端在圆周上的线段，直径是经过圆心的弦。

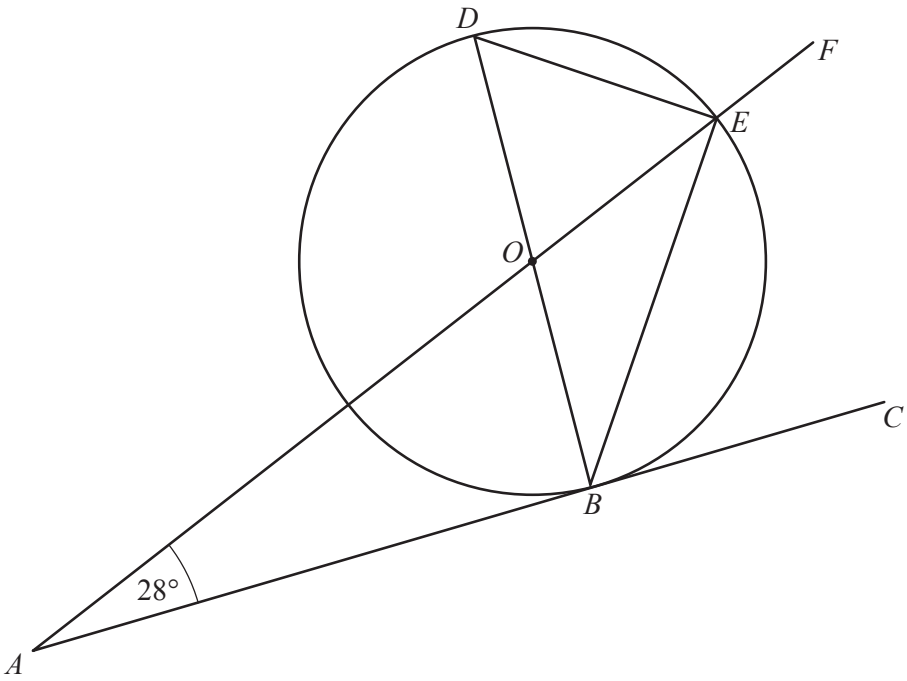
术语：chord（弦）：连接圆周上两个不同点的线段。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/31 Q7(a)(i)(a)]

提示：看 B、D 的位置，再查圆心 O 是否在线段上。

(a)



The diagram shows a circle, centre O, with points B, D and E on the circumference.
$AOEF$ is a straight line.
The straight line AC touches the circle at B.

(i) Write down the mathematical name for

(a) line BOD

7（a）图中有一个圆，圆心为 O，点 B、D、E 在圆周上。A、O、E、F 在同一直线上。直线 AC 在 B 点处与圆相切。图中标有 $\angle BAE = 28°$，并画有线段 DB、DE、EB。图示不按比例绘制。

（i）写出下列线的数学名称：

（a）线段 BOD。

✓ **答案** 直径（diameter）

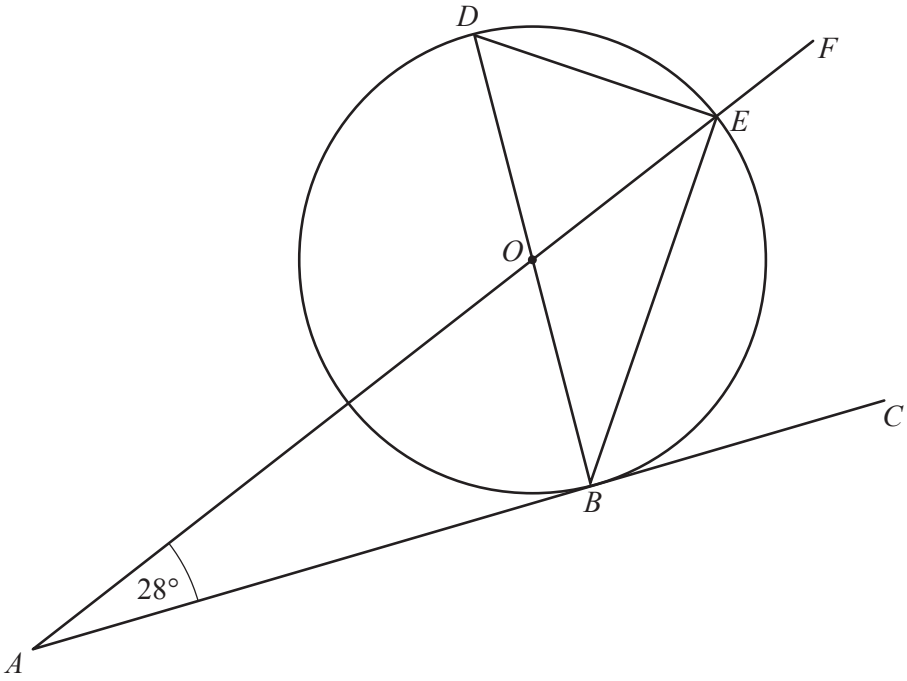
解析 由图可知，B、O、D 在同一直线上。

$\because$ O 是圆心，B、D 在圆周上，$\therefore$ 线段 BOD 经过圆心且两端在圆周上，是圆的一条直径。

答：直径（diameter）。

2. [2023 · May/June 0580/31 Q7(a)(i)(b)]
提示：看直线 AC 与圆的接触位置，数一数公共点。

(a)



The diagram shows a circle, centre O, with points B, D and E on the circumference.
$AOEF$ is a straight line.
The straight line AC touches the circle at B.

(b) line ABC.

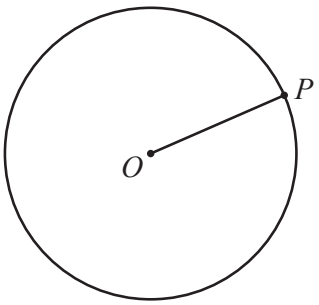
7（a）图中有一个圆，圆心为 O，点 B、D、E 在圆周上。A、O、E、F 在同一直线上。直线 AC 在 B 点处与圆相切。图中标有 $\angle BAE = 28°$，并画有线段 DB、DE、EB。图示不按比例绘制。
（i）写出下列线的数学名称：
（b）直线 ABC。

✓ **答案** 切线（tangent）

解析 由题意，直线 AC 在 B 点处与圆相切。
由图可知，A、B、C 在同一直线上，∴ 直线 ABC 是圆的一条切线。
答：切线（tangent）。

3. [2024 · May/June 0580/11 Q17(a)]
提示：观察线段的两个端点分别位于何处。

The diagram shows a circle, centre O.
P lies on the circle.



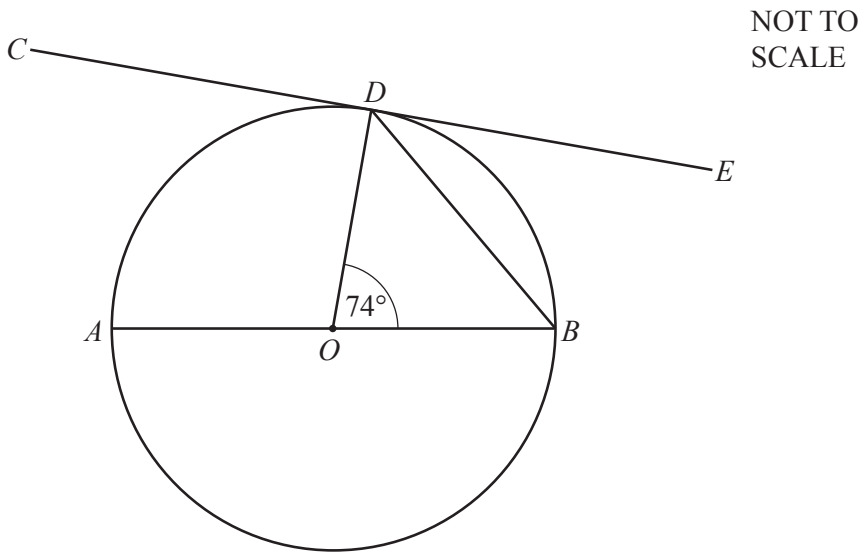
(a) Write down the mathematical name of the line OP.

图中有一个圆，圆心为 O。点 P 在圆周上，图中画有线段 OP。
(a) 写出线段 OP 的数学名称。

✓ **答案** 半径（radius）
解析 O 为圆心，P 在圆周上，线段 OP 连接圆心与圆周上一点，符合半径的定义。
答：半径（radius）。

4. [2024 · May/June 0580/32 Q5(c)(i)]
提示：观察所问直线与圆的接触情况。

(c)



The diagram shows a circle, centre O, with diameter AOB.
The line CDE touches the circle at D and angle $DOB = 74°$.

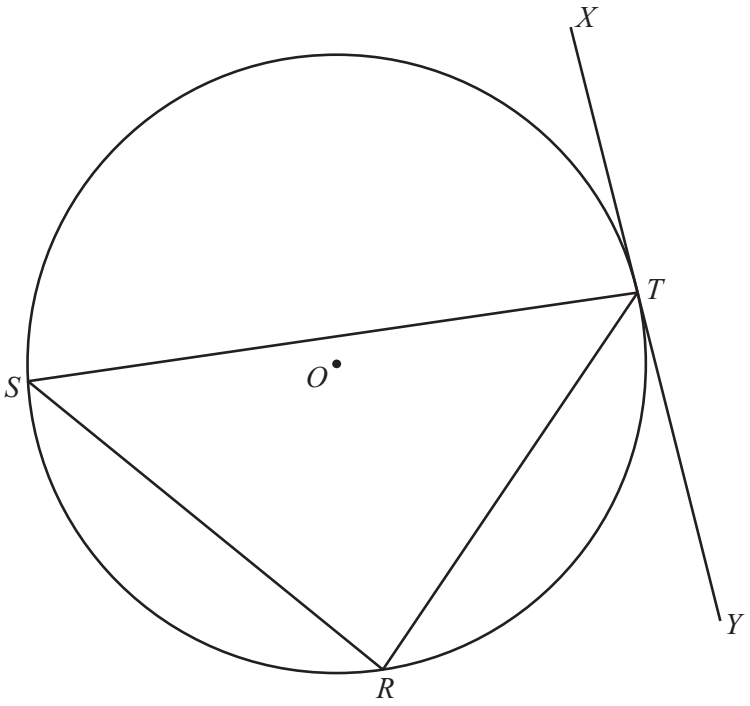
(i) Write down the mathematical name of the line CDE.

(c) 图中有一个圆，圆心为 O，直径为 AOB。
直线 CDE 在点 D 处与圆相切，$\angle DOB = 74°$。图中画有线段 OD 和 DB。图形未按比例绘制。
(i) 写出直线 CDE 的数学名称。

✓ **答案** 切线（tangent）
解析 由题意，直线 CDE 在点 D 处与圆相切，与圆只有一个公共点 D，符合切线的定义。
答：切线（tangent）。

5. [2024 · October/November 0580/31 Q2(b)(i)]
提示：根据直线与圆的公共点情况判断名称。

(b)



NOT TO SCALE

R, *S* and *T* are points on a circle, centre *O*.
Line *XY* touches the circle at *T*.

(i) Write down the mathematical name for the line *XY*.

(b) R、S、T 是圆上的点，圆心为 O。
直线 XY 在点 T 处与圆相切。图中画有线段 RS、ST 和 RT。图形未按比例绘制。
(i) 写出直线 XY 的数学名称。

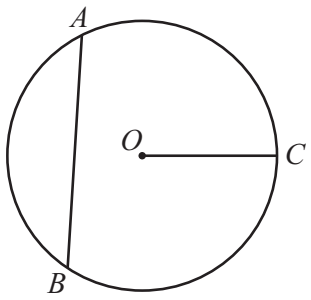
✓ **答案** 切线（tangent）

解析 由题意，直线 XY 在点 T 处与圆相切，与圆只有一个公共点 T，符合切线的定义。
答：切线（tangent）。

6. [2025 · October/November 0580/32 Q1(a)]

提示：看线段两端分别位于圆心还是圆周。

A, B and C are points on a circle, centre O.



(a) Write down the mathematical name for line OC.

A、B、C 是圆上的点，圆心为 O。图中画有线段 AB 和 OC。
(a) 写出线段 OC 的数学名称。

✓ **答案** 半径（radius）。

解析 线段 OC 的一端 O 是圆心，另一端 C 在圆周上。
连接圆心与圆周上一点的线段称为半径。
答：半径（radius）。

4.4 寻找能使图形折叠重合的对称轴

题型 1 寻找能使图形折叠重合的对称轴（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **折叠重合判定：** 沿例图的竖直中线对折，左右边框与灰带均重合。能使图形两侧完全重合的直线，称为_____。这条直线就是折痕所在的直线。

② **中线折叠示范：** 例图可沿两条中线分别对折。

沿竖直中线对折
左、右边框及灰带重合

沿水平中线对折
上、下边框及灰带重合

这两条中线都是对称轴，共_____条。

③ **颜色重合检验：** 连接例图的左上、右下顶点，沿这条对角线对折。正方形外框重合，但灰带的一部分落在白区。颜色也须重合，故这条对角线不是对称轴。

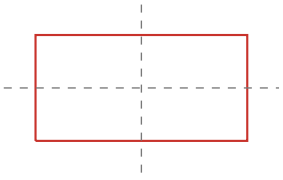
④ **长方形的折痕：** 题中长方形的长边与短边不等。沿对角线对折，长边不能与短边重合。沿水平、竖直中线分别对折，对应边均重合。

⑤ **菱形的折痕：** 题中斜四边形的四条边相等，称为_____。连接左上、右下顶点对折，另两顶点与对应边重合。沿另一条对角线对折，两侧也完全重合。

⑥ **风筝形的折痕：** 题中上下尖的四边形有两对相邻等边，两对长度不同，称为_____。连接上、下顶点对折，左、右顶点与对应边重合。沿左、右顶点连线对折，上、下顶点不重合。

填空：①对称轴 ②2 ③菱形 ④风筝形

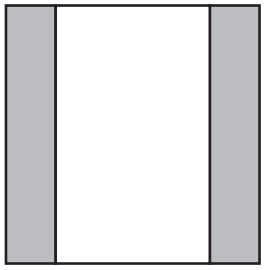
折叠后两侧对应点重合

	图像	数量关系
同一关系		这个非正方形矩形有水平、竖直两条对称轴。

点石成金　题目出现画出所有对称轴的要求时，先沿候选直线对折，检验边框与颜色是否同时重合。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q8(a)(ii)]

(a)

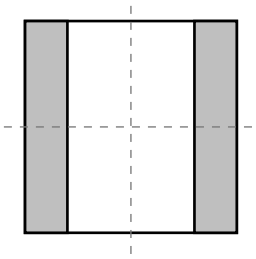


(ii) On the diagram, draw all the lines of symmetry.

(a)(ii) 在图中画出所有对称轴。

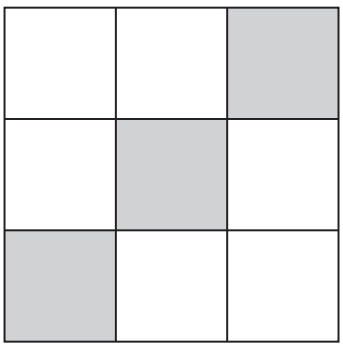
解答　沿竖直中线对折，左右边框与两条灰带完全重合。
沿水平中线对折，上下两半也完全重合。
沿任一对角线对折，均有灰色部分落在白色部分上。
故两条中线是对称轴，两条对角线均不是对称轴。
答：过图形中心画一条水平直线和一条竖直直线，共 2 条对称轴。

方法：先看边框与灰带的位置，从过中心的候选折痕起手逐条检验。
! 辨析：外框重合是轮廓吻合，整体重合是轮廓与颜色都吻合。



针对练习

1. [2023 · May/June 0580/13 Q5(b)]
提示：逐条检验候选折痕，比较灰格与白格折后的位置。

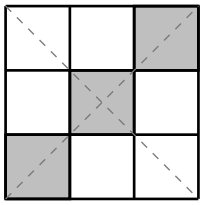


(b) On the diagram, draw all the lines of symmetry.

(b) 在图中画出所有对称轴。

✓ **答案** 正方形的两条对角线，共 2 条对称轴。

解析 沿左下至右上的对角线对折，两端灰格各自重合，中间灰格也重合。
沿左上至右下的对角线对折，两端灰格互相重合，中间灰格与自身重合。
两次对折中，其余白格也均与白格重合。
沿水平或竖直中线对折，均有灰格落在白格上。
答：画出正方形的两条对角线，共 2 条对称轴。



2. [2023 · October/November 0580/32 Q2(b)]
提示：先比较长短边，再看折后相配的边能否重合。

(b)

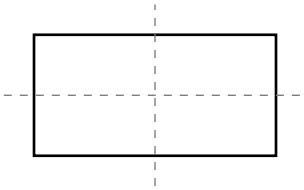


Draw the lines of symmetry on this rectangle.

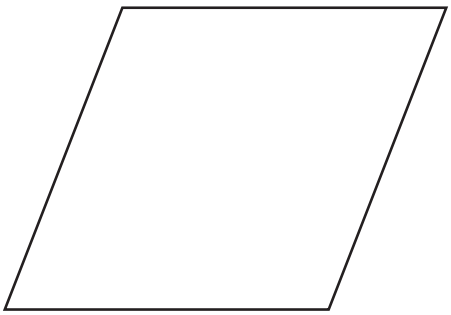
(b) 在这个长方形上画出对称轴。

✓ **答案** 过长方形中心的水平直线和竖直直线，共 2 条对称轴。

解析 沿过中心的水平直线对折，上、下两边重合，左、右两边各自重合。
沿过中心的竖直直线对折，左、右两边重合，上、下两边各自重合。
长方形的长边与短边不等，沿对角线对折不能重合。
答：过长方形中心画一条水平直线和一条竖直直线，共 2 条对称轴。



3. [2023 · October/November 0580/13 Q3]
提示：比较候选折痕两侧的顶点与边能否成对重合。

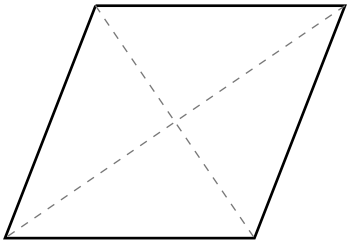


Draw the lines of symmetry on this rhombus.

在给出的菱形上画出全部对称轴。

✓ **答案** 菱形的两条对角线，共 2 条对称轴。

解析 菱形的每条对角线都把图形分成可折叠重合的两部分。用直尺画出两条对角线。



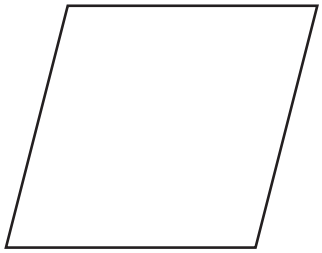
答：两条对角线，即两条对称轴。

4. [2023 · May/June 0580/32 Q6(a)(i)]

提示：比较两组对边的方向，再检验对折能否完全重合。

(a) For each quadrilateral, draw any lines of symmetry and write down its mathematical name.

(i)

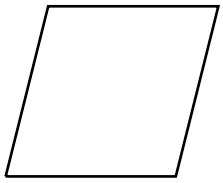


6（a）对于每个四边形，画出其对称轴（如有），并写出其数学名称。

(i)

✓ **答案** 平行四边形；没有对称轴。

解析 图形两组对边分别平行，是平行四边形。它不是矩形或菱形，沿对角线或对边中点连线对折，两侧不能完全重合。 答：平行四边形，没有对称轴。



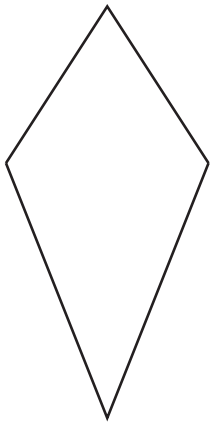
无对称轴

5. [2023 · May/June 0580/32 Q6(a)(ii)]

提示：按相邻边的等长关系辨形，再比较折痕两侧顶点。

(a) For each quadrilateral, draw any lines of symmetry and write down its mathematical name.

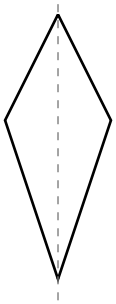
(ii)



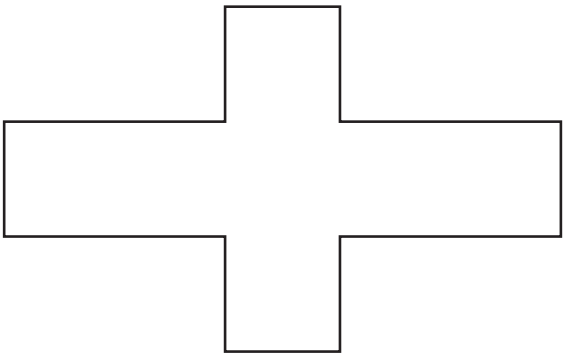
6（a）对于每个四边形，画出其对称轴（如有），并写出其数学名称。
(ii)

✓ **答案** 风筝形；对称轴为连接上、下顶点的直线，共 1 条。

解析 上方两条相邻边相等，下方两条相邻边相等，且两对长度不同，故为风筝形。
连接上、下顶点，沿这条直线对折，左、右顶点与对应边完全重合。
沿左、右顶点的连线对折，上、下顶点不能重合。
答：该四边形为风筝形，画出连接上、下顶点的直线，共 1 条对称轴。



6. [2024 · May/June 0580/11 Q8]
提示：先沿过图形中心的水平、竖直直线分别检验折叠重合。

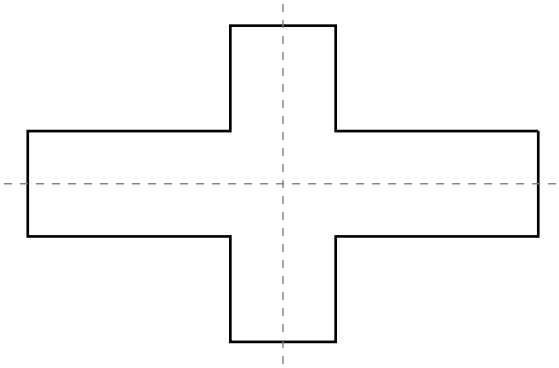


Draw all the lines of symmetry on this shape.

在图示十字形上画出所有对称轴。

✓ **答案** 过图形中心的水平直线和竖直直线，共 2 条对称轴。

解析 沿过图形中心的水平直线对折，上、下两部分完全重合。
沿过图形中心的竖直直线对折，左、右两部分完全重合。
横臂与竖臂长度不同，沿斜线对折不能使两部分完全重合。
答：过图形中心画一条水平直线和一条竖直直线，共 2 条对称轴。



4.5 用两段给定距离的圆弧交点确定位置

题型 1　用两段给定距离的圆弧交点确定位置（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **图上距离换算：**比例尺为 1 cm 表示 8 km。船 B 距港口 X 为 52 km，距港口 Y 为 80 km。将实际距离除以 8，得图上距离。

$XB = 52 \div 8 =$ _____ cm

$YB = 80 \div 8 =$ _____ cm

② **圆心半径对应：**以 X 为圆心，圆规两脚间距取 6.5 cm。画出的圆弧上，各点到 X 的距离均为 6.5 cm。圆规两脚间距就是圆弧的_____。

③ **分别作出交弧：**船的位置同时满足两个距离条件，因此在两弧交点处。分别按两段图上距离画弧。
以 X 为圆心取 6.5 cm 为半径画弧　　以 Y 为圆心取 10 cm 为半径画弧

④ **依照位置取点：**两弧有两个交点，船应在_____。取海上的交点，标为 B。

⑤ **连接构成三角形：**若以 XY 为底边作三角形，任取一个交点并标为 P。连接 PX、PY，得三角形 XYP。图上两边长为

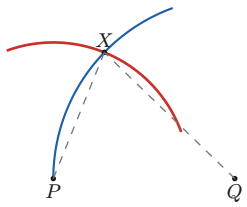
$$XP = 6.5 \text{ cm}$$

$$YP = 10 \text{ cm}$$

⑥ **保留作图圆弧：**三角形 XYP 画成后，保留交点附近的两段作图圆弧。两弧表明点 P 同时满足两段距离。

填空：①6.5　②10　③半径　④海上

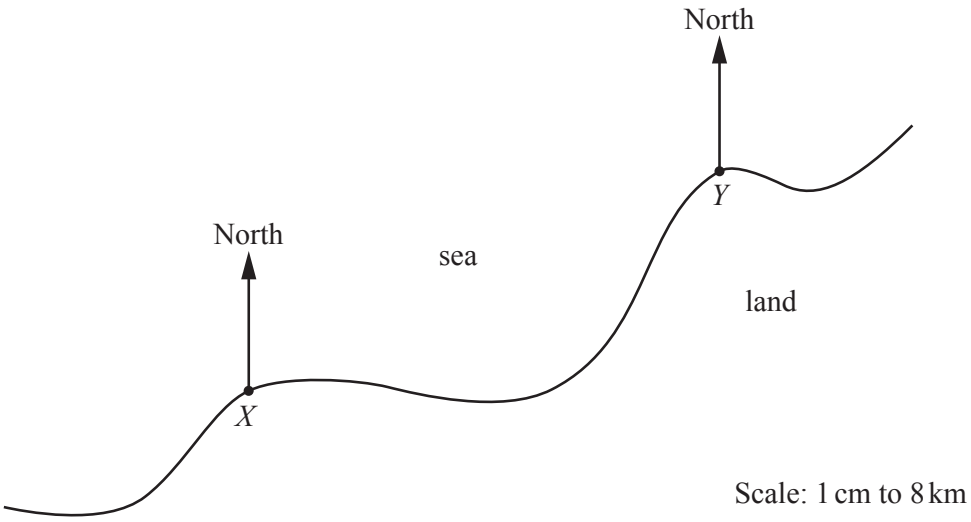
两段距离同时满足时，点在两圆弧交点处

	图像	数量关系
同一关系		$PX = 3$，$QX = 4$。

点石成金　题目出现到两个定点的距离，要求确定位置或构造三角形时，先以两个定点为圆心、相应图上距离为半径画弧。

例 1　[2023 · May/June 0580/33 Q4(b)(ii)]

(b) The scale drawing shows the positions of two ports, X and Y.
The scale is 1 cm represents 8 km.



(ii) A boat, B, is 52 km from X and 80 km from Y.

On the scale drawing, mark the position of B.

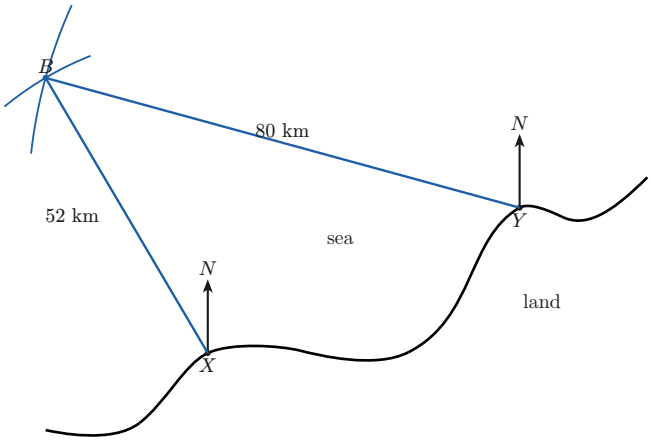
(b) 比例图表示两个港口 X 和 Y 的位置。
比例尺为图上 1 cm 表示实际 8 km。
图中两个方向箭头均标有北；海域标有海，陆地区域标有陆地；两个港口分别标为 X、Y。图下比例尺标注为 1 cm 表示 8 km。
(ii) 一艘船 B 距离 X 为 52 km，距离 Y 为 80 km。
在比例图上标出 B 的位置。

解答 由图上 1 cm 表示实际 8 km，得

$$XB = 52 \div 8 = 6.5 \text{ cm}$$

$$YB = 80 \div 8 = 10 \text{ cm}$$

以 X 为圆心、6.5 cm 为半径画弧，再以 Y 为圆心、10 cm 为半径画弧。
两弧的交点同时满足这两个距离条件。由船在海上，取海上的交点，标为 B。
答：B 为两弧在海上的交点。



方法：先看比例尺，把两段实际距离换成图上长度，再定圆心画弧。

辨析：弧上点是满足一个距离条件的点，两弧交点是同时满足两个距离条件的点。

拓展：两圆的两个交点关于圆心连线对称，取点还需符合位置条件。

针对练习

1. [2024 · February/March 0580/32 Q3(a)]

提示：把点 D 到 E、F 的两段距离分别作为画弧半径。

(a) In triangle DEF, $DE = 6\,\text{cm}$ and $DF = 4.8\,\text{cm}$.

Using a ruler and compasses only, construct triangle DEF.
Leave in your construction arcs.
The line EF has been drawn for you.

E F

(a) 在三角形 DEF 中，$DE = 6$ cm，$DF = 4.8$ cm。
仅用直尺和圆规，作三角形 DEF。
保留作图圆弧。
线段 EF 已画出，两端分别标为 E、F。

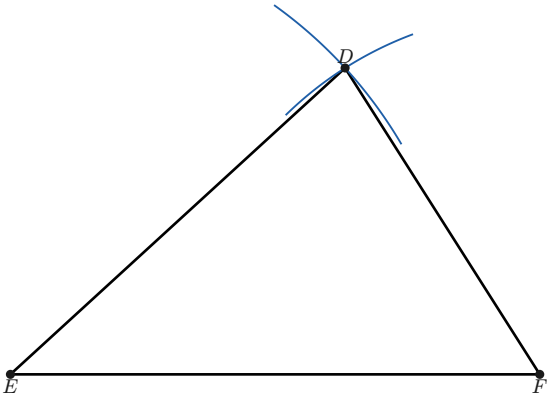
✓ **答案** 以 E、F 为圆心，分别以 6 cm、4.8 cm 为半径画弧，取交点为 D，连接 DE、DF，保留作图圆弧。

解析 以 E 为圆心、6 cm 为半径画弧。
以 F 为圆心、4.8 cm 为半径画弧。
取两弧的一个交点为 D，用直尺连接 DE、DF。
由圆弧上各点到圆心的距离等于半径，得

$$DE = 6\text{ cm}$$

$$DF = 4.8\text{ cm}$$

答：所作三角形为 DEF，保留交点附近的两段作图圆弧。



2. [2025 · May/June 0580/31 Q6]
提示：先分别画出到 A、B 的距离满足条件的圆弧。

In triangle ABC, $AC = 6.4\,\text{cm}$ and $BC = 5.3\,\text{cm}$.

Using a ruler and compasses only, construct triangle ABC.
Leave in your construction arcs.
The line AB has been drawn for you.

A ——————————— B

在三角形 ABC 中，$AC = 6.4$ cm，$BC = 5.3$ cm。
仅用直尺和圆规，作三角形 ABC。
保留作图圆弧。
线段 AB 已画出，两端分别标为 A、B。

✓ **答案** 以 A、B 为圆心，分别以 6.4 cm、5.3 cm 为半径画弧，取交点为 C，连接 AC、BC，保留作图圆弧。

解析 以 A 为圆心、6.4 cm 为半径画弧。
以 B 为圆心、5.3 cm 为半径画弧。
取两弧的一个交点为 C，用直尺连接 AC、BC。
由圆弧上各点到圆心的距离等于半径，得

$$AC = 6.4\ \text{cm}$$

$$BC = 5.3\ \text{cm}$$

答：所作三角形为 ABC，保留交点附近的两段作图圆弧。

3. [2023 · October/November 0580/32 Q8(a)(i)]
提示：对照 RT、ST 的长度，核对各自对应的圆心。

(a) In triangle RST, $RT = 7\,\text{cm}$ and $ST = 4\,\text{cm}$.

(i) **Using a ruler and compasses only**, construct triangle RST.
Leave in your construction arcs.
The line RS has been drawn for you.

R ——————————— S

(a) 在三角形 RST 中，$RT = 7$ cm，$ST = 4$ cm。
(i) 仅用直尺和圆规，作三角形 RST。
保留作图圆弧。
线段 RS 已画出，图中两端点分别标为 R、S。

✓ **答案** 以 R、S 为圆心，分别以 7 cm、4 cm 为半径画弧，取交点为 T，连接 RT、ST，保留作图圆弧。

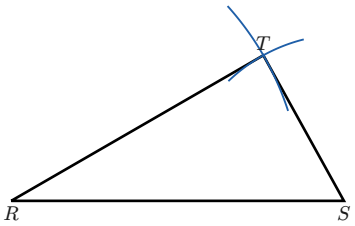
解析 由

$$RT = 7\ \text{cm}$$

以 R 为圆心、7 cm 为半径画弧。
由

$$ST = 4\ \text{cm}$$

以 S 为圆心、4 cm 为半径画弧。
取两弧的一个交点为 T，连接 RT、ST。两弧保证点 T 到 R、S 的距离分别为 7 cm、4 cm。
答：所作三角形 RST 满足条件，保留两段作图圆弧。



4. [2023 · October/November 0580/13 Q7(a)]
提示：看 L N 、M N 各从哪个端点量起，再按对圆规开口。

In triangle LMN, $LN = 7.5$ cm and $MN = 8$ cm.

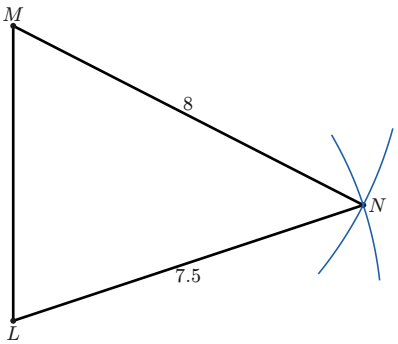
(a) **Using a ruler and compasses only**, construct triangle LMN.
Leave in your construction arcs.
The line LM has been drawn for you.



三角形 LMN 中，LN=7.5cm，MN=8cm。(a) 只用直尺和圆规作出三角形 LMN，保留作图圆弧。线段 LM 已给出。

✓ **答案** 以 L、M 为圆心，分别以 7.5 cm、8 cm 为半径画弧，取交点为 N，连接 LN、MN，保留作图圆弧。

解析 以 L 为圆心、7.5cm 为半径画弧，以 M 为圆心、8cm 为半径画弧。两弧交点取为 N，用直尺连接 LN、MN 并保留两弧。



5. [2024 · October/November 0580/12 Q6]
提示：先将 AC、BC 的长度分别对应到圆心 A、B。

Triangle ABC has sides $AC = 4.2\,\text{cm}$ and $BC = 5.6\,\text{cm}$.

Using a ruler and compasses only, construct triangle ABC.
Leave in your construction arcs.
The side AB has been drawn for you.



三角形 ABC 的边长为 $AC = 4.2$ cm，$BC = 5.6$ cm。
仅用直尺和圆规，作三角形 ABC。
保留作图圆弧。
边 AB 已画出，图中标有 A、B。

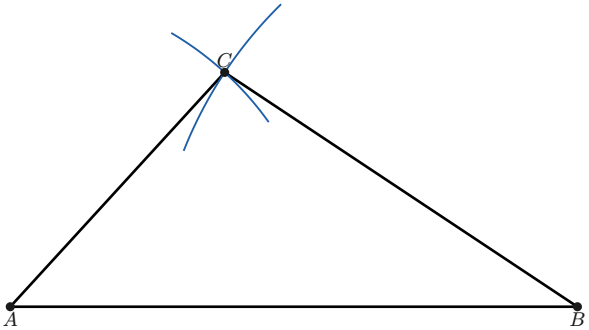
✓ **答案** 以 A、B 为圆心，分别以 4.2 cm、5.6 cm 为半径画弧，取交点为 C，连接 AC、BC，保留作图圆弧。

解析 以 A 为圆心、4.2 cm 为半径画弧。
以 B 为圆心、5.6 cm 为半径画弧。
取两弧的一个交点为 C，用直尺连接 AC、BC。
由圆弧上各点到圆心的距离等于半径，得

$$AC = 4.2\ \text{cm}$$

$$BC = 5.6\ \text{cm}$$

答：所作三角形为 ABC，保留交点附近的两段作图圆弧。



4.6 配对立体的面，补全棱柱或长方体展开图

题型 1　配对立体的面，补全棱柱或长方体展开图（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **方格读取边长：**每个小方格的面积为 1cm^2，边长为 1 cm。例题中已画出的面横跨四格、竖跨三格。这个面的长为 _____ 厘米，宽为 _____ 厘米。

② **由体积求棱：**用 S 表示已知面的面积，h 表示第三条棱长，V 表示体积。长方体的体积等于底面积乘垂直于底面的棱长。

$$V = Sh$$

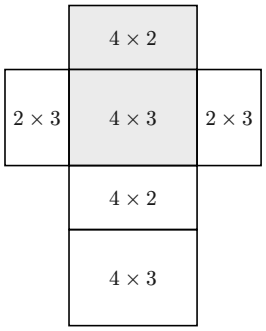
$$S = 4 \times 3 = 12\text{cm}^2$$

$$h = \frac{V}{S} = \frac{24}{12} = _____ \text{ cm}$$

③ **对应矩形配齐：**三条棱长分别为 4 cm、3 cm、2 cm，相对的两个面全等。各组尺寸及张数如下，尺寸单位均为厘米。长方体共需 _____ 张矩形。

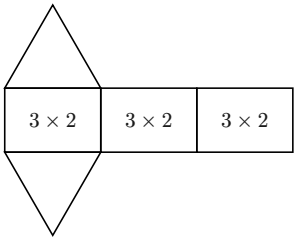
4×3	4×2	3×2
两张	两张	两张

④ **沿边补全六面：**本例上方补出 4×2 面后，保留相邻的两张灰色面。下方续接两张矩形，左右各接一张矩形，尺寸如下图。四周折起后，末端矩形封口，六面无重叠。

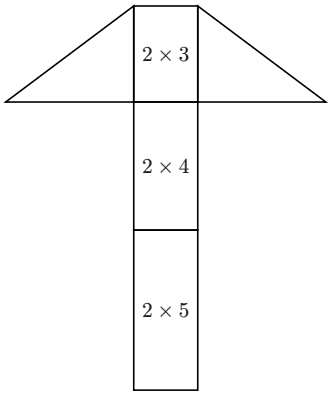


⑤ **三棱柱面配对：**三棱柱有两个全等的三角形和三个矩形，共 _____ 个面。矩形的一边等于柱长，另一边对应三角形的一条边。下列两图中，矩形内的尺寸单位均为厘米。

底面三边均为 3 cm，柱长为 2 cm



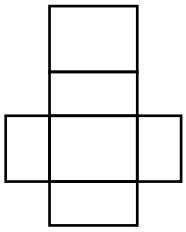
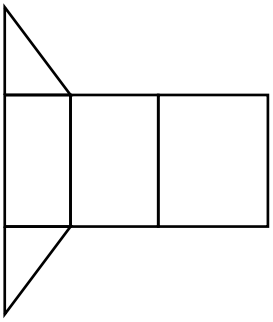
底面三边为 3 cm、4 cm、5 cm，柱长为 2 cm



⑥ **三角形接两端：**等边三角形底边为 3 cm 时，两端各作半径 3 cm 的弧，外侧交点为顶点。直角三角形沿方格画出长 3 cm、4 cm 的两条垂直边，再连端点。两张三角形分接同一矩形的两条相对边，折起后各封住一个端口。

填空：①4　②3　③2　④6　⑤5

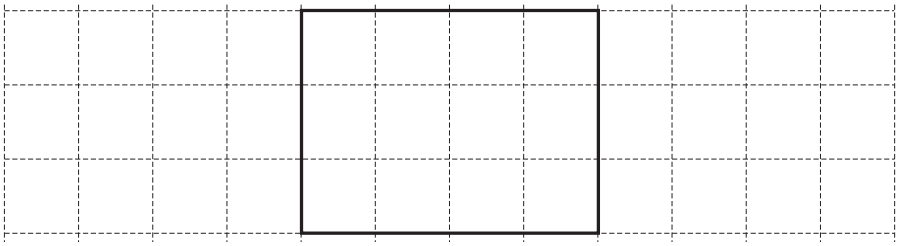
展开图按相邻面连接，配对面大小相同

	长方体 $4\times3\times2$	三棱柱：底边 $3,4,5$，长 6
可折叠的展开图		
面的配对	2 个 4×3，2 个 4×2，2 个 3×2。	2 个全等直角三角形，3 个侧面矩形。

点石成金　题目出现方格纸上的长方体或三棱柱，并要求补全展开图时，先确定各个面的形状和尺寸。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q10]

The diagram shows one face of a cuboid on a $1\,\text{cm}^2$ grid.



The cuboid has a volume of $24\,\text{cm}^3$.

Complete a net of this cuboid.

图中所示的是一个长方体的一个面，画在每个小方格面积为 1cm^2 的方格纸上。
这个长方体的体积为 24cm^3。
补全这个长方体的一个展开图。

解答　由方格得，已画出的面长 4 cm、宽 3 cm。设第三条棱长为 h，由长方体的体积得

$$4\times3\times h=24$$

$$h=\frac{24}{4\times3}=2\text{ cm}$$

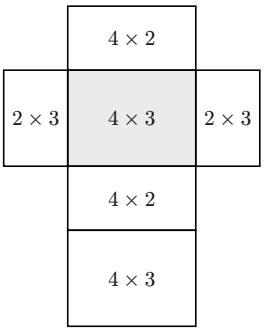
故需两张 4 cm × 3 cm、两张 4 cm × 2 cm、两张 3 cm × 2 cm 的矩形。
在已画面的上、下各接一张 4 cm × 2 cm 矩形，下方再接另一张 4 cm × 3 cm 矩形。
左、右各接一张 2 cm × 3 cm 矩形。
沿已画面的四边折起，末端矩形封住剩余开口，六面无重叠。

方法：先数已画面横竖各占几格，再用体积除以面面积求第三条棱。

辨析：相邻面是共用一条棱的两个面，相对面是互不相交的两个面。

拓展：展开图中相隔的面，折起后可能共用一条棱。

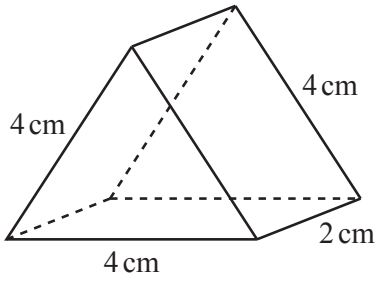
答：一种展开图如下，灰色面为已画出的面，面内尺寸的单位均为厘米。



针对练习

1. [2023 · May/June 0580/13 Q9]

提示：比三角形各边与矩形边长，再查两端能否分别封口。



NOT TO SCALE

The diagram shows a triangular prism.

On the 1 cm^2 grid, draw a net of the prism.

图中所示的是一个三棱柱。三角形底面的三条边长均为 4 cm，柱长为 2 cm。图形未按比例绘制。
在每个小方格面积为 1cm^2 的方格纸上，画出这个三棱柱的一个展开图。

✓ **答案** 将三张 4 cm × 2 cm 矩形排成横带，在最左矩形的上、下两条长 4 cm 的边外侧，各接一个边长为 4 cm 的等边三角形。

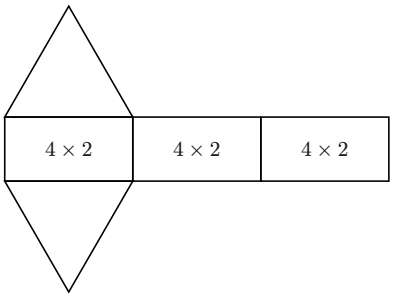
解析 三角形底面的三条边长均为 4 cm，柱长为 2 cm，故三个侧面均为 4 cm × 2 cm 的矩形。

将三个矩形沿长 2 cm 的边依次相接。在最左矩形上、下两条长 4 cm 的边外侧，各画一个边长为 4 cm 的等边三角形。

作三角形时，以所接边的两端为圆心、4 cm 为半径作弧，取矩形带外侧的交点为顶点。

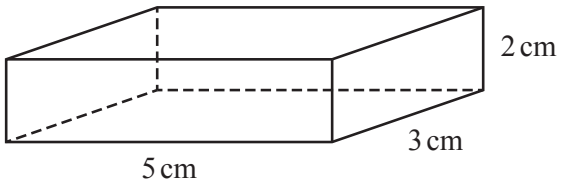
折起后三个矩形围成侧面，两个全等三角形分别封住两端，各面无重叠。

答：一种展开图如下，矩形内尺寸的单位均为厘米，两个三角形的各边均长 4 cm。



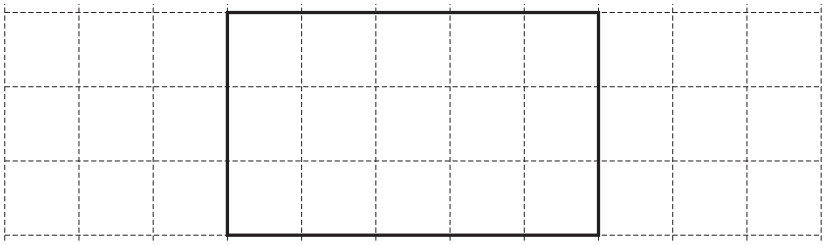
2. [2023 · October/November 0580/31 Q4(a)(i)]
提示：从已给面的四条边起，比待接矩形的共边长度。

(a) The diagram shows a cuboid.



NOT TO SCALE

(i) On the 1cm^2 grid, complete the net of the cuboid.
One face has been drawn for you.



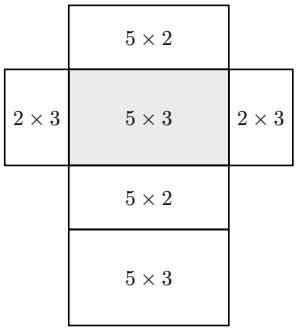
(a) 图中所示的是一个长方体，长、宽、高分别为 5 cm、3 cm、2 cm。图形未按比例绘制。
(i) 在每个小方格面积为 1cm^2 的方格纸上，补全这个长方体的展开图。已经画出了其中的一个面。

✓ **答案** 在已给的 5 cm × 3 cm 面上、下各接一张 5 cm × 2 cm 矩形，下方再接一张 5 cm × 3 cm 矩形；左、右各接一张 2 cm × 3 cm 矩形。

解析 长方体的三条棱长分别为 5 cm、3 cm、2 cm，故需两张 5 cm × 3 cm、两张 5 cm × 2 cm、两张 3 cm × 2 cm 的矩形。

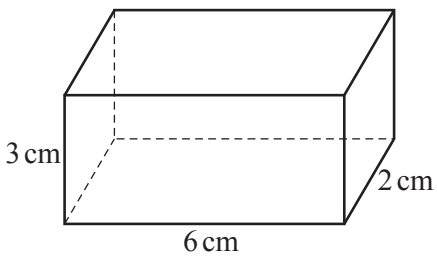
已画出的面为 5 cm × 3 cm。在它的上、下各接一张 5 cm × 2 cm 矩形，下方再接另一张 5 cm × 3 cm 矩形。在已画面的左、右各接一张 2 cm × 3 cm 矩形。折起后四个相邻面围住四周，末端矩形封口，六面无重叠。

答：一种展开图如下，灰色面为已画出的面，面内尺寸的单位均为厘米。



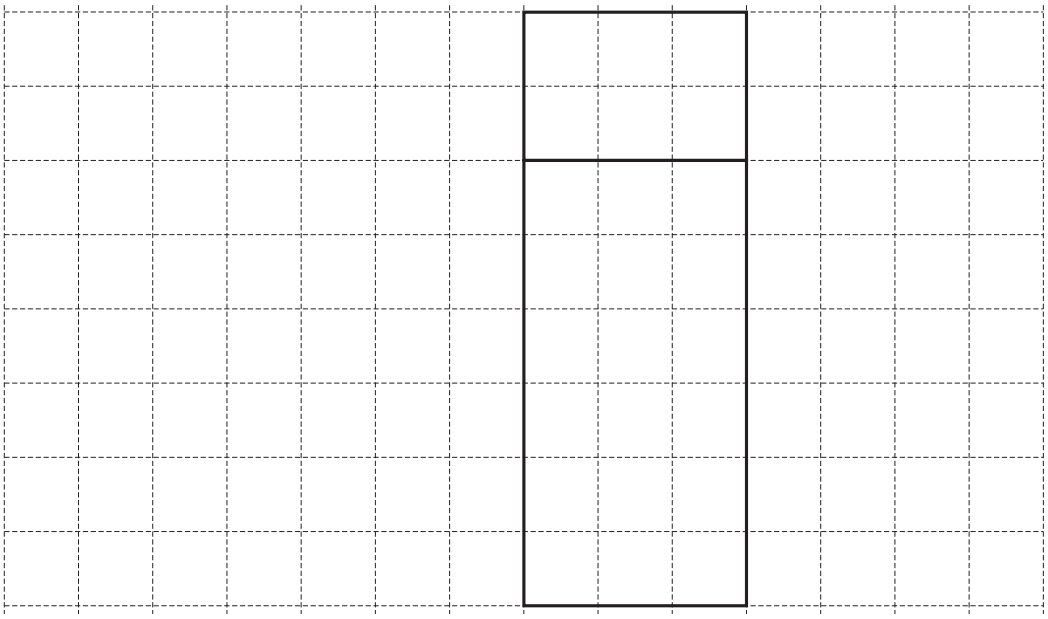
3. [2023 · October/November 0580/33 Q5(e)(i)]
提示：先看已有两面的共边，再按尺寸清点还缺哪些面。

(e) The diagram shows a parcel in the shape of a cuboid.



NOT TO SCALE

(i) Complete the net of the parcel on the 1 cm^2 grid.
Two faces have been drawn for you.



(e) 图中所示的是一个长方体形状的包裹，长、宽、高分别为 6 cm、2 cm、3 cm。图形未按比例绘制。

(i) 在每个小方格面积为 1cm^2 的方格纸上，补全这个包裹的展开图。已经画出了其中的两个面。

✓ **答案** 保留已给的两个面，在较大的面下方依次接一张 3 cm × 2 cm 和一张 3 cm × 6 cm 矩形；在较大的面左、右各接一张 2 cm × 6 cm 矩形。

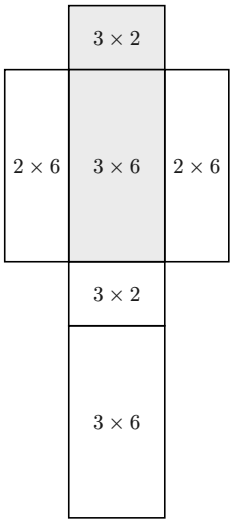
解析 包裹的三条棱长分别为 6 cm、3 cm、2 cm，故需两张 6 cm × 3 cm、两张 6 cm × 2 cm、两张 3 cm × 2 cm 的矩形。

已画出的上方面为 3 cm × 2 cm，下方面为 3 cm × 6 cm，两面共用一条长 3 cm 的边。

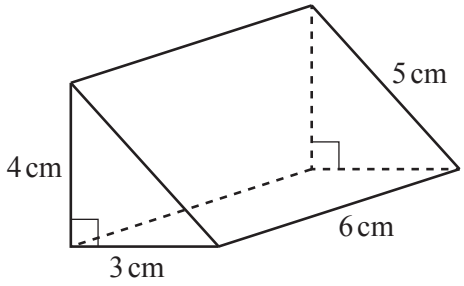
保留这两个面，在较大面的下方续接一张 3 cm × 2 cm 矩形，再向下接一张 3 cm × 6 cm 矩形。

在较大面的左、右各接一张 2 cm × 6 cm 矩形。折起后末端矩形与较大的灰色面相对，其余四面围住四周，六面无重叠。

答：一种展开图如下，灰色面为已画出的两个面，面内尺寸的单位均为厘米。



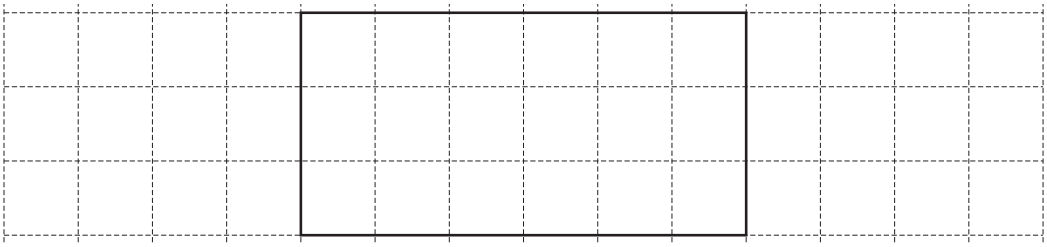
4. [2023 · May/June 0580/12 Q10]
提示：比柱长与各矩形边长，再查三角形直角边的接合位置。



NOT TO SCALE

The diagram shows a right-angled triangular prism.

On the 1 cm^2 grid, complete the net of this prism.
One face has been drawn for you.



图中所示的是一个底面为直角三角形的三棱柱。三角形底面的两条直角边分别长 3 cm、4 cm，斜边长 5 cm，柱长为 6 cm。图形未按比例绘制。
在每个小方格面积为 $1cm^2$ 的方格纸上，补全这个三棱柱的展开图。已经画出了其中的一个面。

✓ **答案** 在已给面的下方依次接一张 6 cm × 4 cm 和一张 6 cm × 5 cm 矩形；左、右各接一个三边长为 3 cm、4 cm、5 cm 的直角三角形，直角顶点分别与已给面的左下、右下顶点重合。

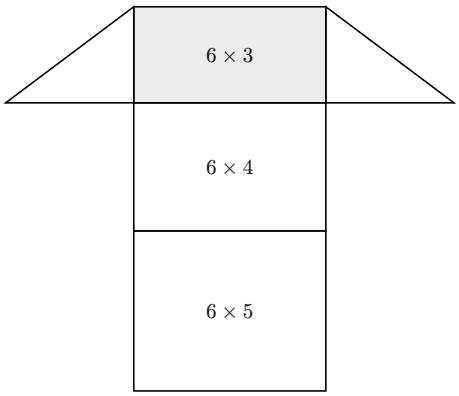
解析 三角形底面的三边长分别为 3 cm、4 cm、5 cm，柱长为 6 cm，故三个侧面分别为 6 cm × 3 cm、6 cm × 4 cm、6 cm × 5 cm 的矩形。

已画出的面为 6 cm × 3 cm。在它的下方依次接一张 6 cm × 4 cm 和一张 6 cm × 5 cm 矩形。

以已画面的左、右两条长 3 cm 的边为三角形的一条直角边。从左下顶点向左、右下顶点向右，各画一条长 4 cm 的水平线段，再分别连接线段的外端与已画面的左上、右上顶点。

两个三角形的两条直角边分别长 3 cm、4 cm，斜边均长 5 cm。折起后三个矩形围成侧面，两个三角形分别封住两端，各面无重叠。

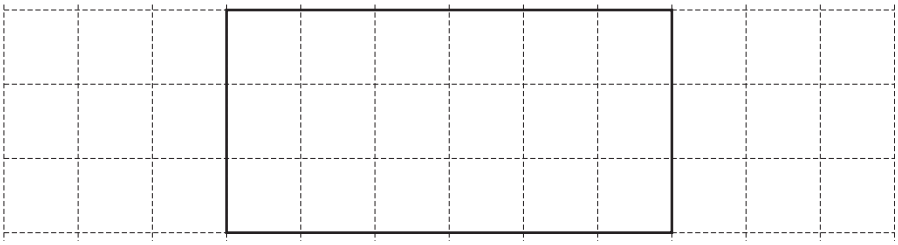
答：一种展开图如下，灰色面为已画出的面，矩形内尺寸的单位均为厘米。



5. [2023 · October/November 0580/32 Q2(c)(ii)]
提示：先数已给面横竖的格数，再比相接两面的边长。

(c) A cuboid measures 6 cm by 3 cm by 2 cm.

(ii) Draw a net of the cuboid on the 1 cm^2 grid.
One face has been drawn for you.



(c) 一个长方体的三条棱长分别为 6 cm、3 cm、2 cm。
(ii) 在每个小方格面积为 $1cm^2$ 的方格纸上，画出这个长方体的一个展开图。已经画出了其中的一个面。

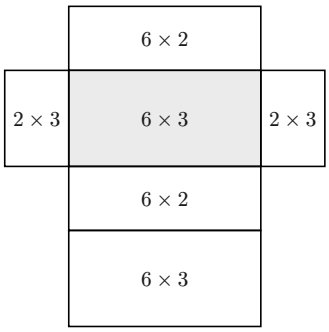
✓ **答案** 在已给的 6 cm × 3 cm 面上、下各接一张 6 cm × 2 cm 矩形，下方再接一张 6 cm × 3 cm 矩形；左、右各接一张 2 cm × 3 cm 矩形。

解析 长方体的三条棱长分别为 6 cm、3 cm、2 cm，故需两张 6 cm × 3 cm、两张 6 cm × 2 cm、两张 3 cm × 2 cm 的矩形。

由方格得，已画出的面为 6 cm × 3 cm。在它的上、下各接一张 6 cm × 2 cm 矩形，下方再接另一张 6 cm × 3 cm 矩形。

在已画面的左、右各接一张 2 cm × 3 cm 矩形。折起后四个相邻面围住四周，末端矩形封住剩余开口，六面无重叠。

答：一种展开图如下，灰色面为已画出的面，面内尺寸的单位均为厘米。



4.7 用平角或周角的总量减去已知角

题型 1 用平角或周角的总量减去已知角（Core / Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **总角的判定：** 例题中三个角围成一周，先确定总角。

外侧两条射线方向相反。
总角为 _____。

各角围满同一点的一周。
总角为 _____。

② **减去已知角：** 例题中三个角分别为 $y°$、38° 和 126°。从周角中减去两个已知角，得到未知角。

$$y = 360 - (38 + 126)$$

③ **对顶角的转移：** 两条直线相交，不相邻的两个角为对顶角。对顶角 _____。将例题中 38° 角的两边反向延长，相对的角也为 38°。

④ **先差后求补：** 把例题的 126° 角分出 38°，余角记为 θ。先求角度差，再从平角中减去余角，得到它的邻补角。

$$\theta = 126° - 38° = 88°$$

$$\text{邻补角} = 180° - 88° = 92°$$

⑤ **周角按比分配：** 以周角按 2 : 3 : 4 分配、所求角占 4 份为例。用周角除以 _____ 得每份角度，再乘所求份数。

$$\text{每份角度} = \frac{360^\circ}{2+3+4} = 40^\circ$$

$$\text{所求角} = 40^\circ \times 4 = 160^\circ$$

⑥ **拼接角的检验：**图中多边形共顶点，该点的内角总和为 360° 时无空隙。正多边形各外角相等且和为 360°，正方形每个内角为 90°。如正六边形，先用平角减去外角，再将顶点处的内角相加。

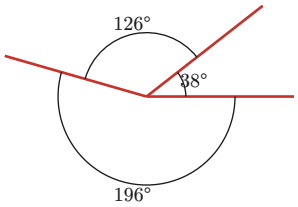
$$\text{正六边形的每个内角} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ$$

$$120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$$

⑦ **圆图中的角（Extended）：**半径在切点处垂直切线；直径所对的圆周角为 90°。如切线与另一边夹 40°，先在直角三角形中求另一锐角。$180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

填空：①180°　②360°　③相等　④总份数

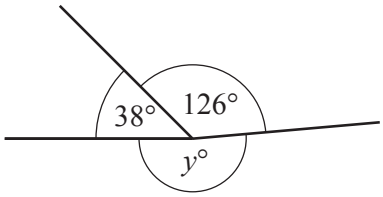
一周的角合计 360°

	图像	数量关系
同一关系		$360^\circ - 38^\circ - 126^\circ = 196^\circ$。

点石成金　题目出现直线上的相邻角、围成一周的角或多边形共顶点时，先确定总角是平角还是周角。

例 1　[2023 · May/June 0580/11 Q12(b)]

(b)



NOT TO SCALE

Find the value of y and write down the geometrical reason for your answer.

（b）如图，同一点周围的三个角分别标为 $y°$、38° 和 126°。图形不按比例绘制。求 y 的值，并写出所用的几何依据。

解答　由同一点周围的角之和为 360°，得

$$y + 38 + 126 = 360$$

$$y = 360 - 38 - 126 = 196$$

答：$y = 196$，几何依据是同一点周围的角之和为 360°。

方法：先看三个角是否围满一周，再用周角减去已知角。

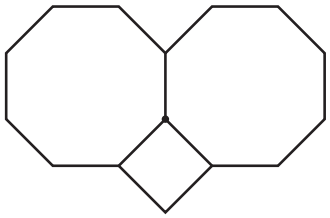
辨析：平角是两边方向相反的角，周角是旋转一整周形成的角。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/31 Q2(c)(ii)]

提示：看共顶点处的三个内角，比较角度和与周角。

(ii)



NOT TO SCALE

Show that two regular octagons and a square meet at a point without any gaps.

(ii) 如图，两个正八边形和一个正方形在同一点相接。图形不按比例绘制。证明它们在该点相接时不留任何空隙。

✓ **答案** $135° + 135° + 90° = 360°$，故无空隙。

解析 正八边形的各外角相等，外角和为 360°，故

$$\text{每个外角} = \frac{360°}{8} = 45°$$

由相邻内角与外角之和为 180°，得

$$\text{每个内角} = 180° - 45° = 135°$$

正方形每个内角为 90°，共顶点处的三个内角之和为

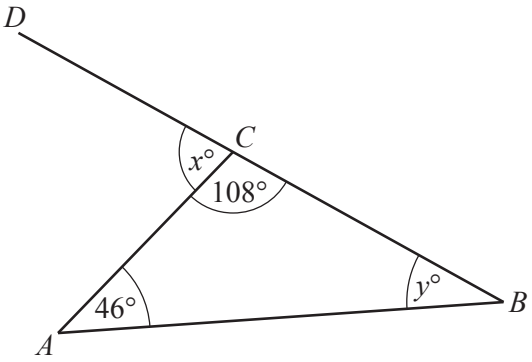
$$135° + 135° + 90° = 360°$$

答：三个内角恰好组成周角，因此两个正八边形和一个正方形在同一点相接，不留任何空隙。

2. [2023 · May/June 0580/33 Q7(a)(ii)]

提示：看共线的三点，比较相邻两角之和与平角。

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a triangle ABC and a straight line BCD.

(ii) Work out the value of x.

(a) 图中有三角形 ABC 和直线 BCD。图中标有 $\angle CAB = 46°$、$\angle ACB = 108°$、$\angle DCA = x°$ 和 $\angle ABC = y°$。图形不按比例绘制。
(ii) 求 x 的值。

✓ **答案**

$$x = 72$$

解析 由 B、C、D 在同一直线上，平角为 180°，得

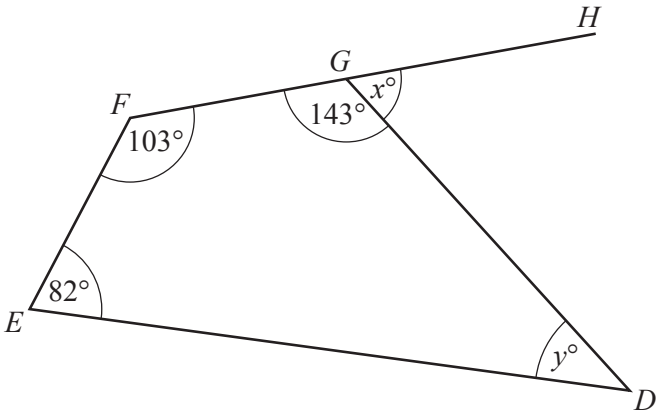
$$x + 108 = 180$$

$$x = 180 - 108 = 72$$

答：$x = 72$。

3. [2024 · February/March 0580/32 Q1(d)(ii)]
提示：由 F、G、H 共线，确定 G 点处两相邻角的总角度。

(d)



NOT TO SCALE

The diagram shows a quadrilateral *DEFG* and a straight line *FGH*.

(ii) Work out the value of x.
Give a geometrical reason for your answer.

(d) 图中有四边形 $DEFG$ 和直线 FGH，点 G 位于 F、H 之间。
图中标有 $\angle DEF = 82°$、$\angle EFG = 103°$、$\angle FGD = 143°$、$\angle DGH = x°$ 和 $\angle EDG = y°$。图示不按比例绘制。
(ii) 求 x 的值，并写出所用的几何依据。

✓ **答案** $x = 37$；同一直线上相邻两角的和为 180°。

解析 ∵ F、G、H 在同一直线上，直线上相邻两角的和为 180°，∴

$$x + 143 = 180$$

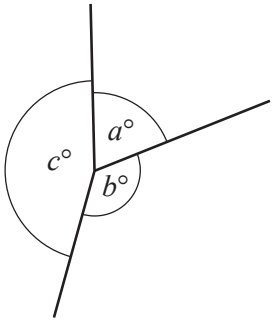
$$x = 180 - 143 = 37$$

答：$x = 37$，几何依据是同一直线上相邻两角的和为 180°。

4. [2023 · May/June 0580/42 Q1(b)]
提示：看三个角的份数比，先合计总份数，再分配周角。

(b) The diagram shows three lines meeting at a point.
The ratio $a : b : c = 3 : 4 : 5$.

Find the value of c.



NOT TO SCALE

(b) 图示三条线在同一点相交，所标的三个角分别为 $a°$、$b°$ 和 $c°$。已知比为 $a : b : c = 3 : 4 : 5$。图形不按比例绘制。求 c 的值。

✓ **答案**

$$c = 150$$

解析 由同一点周围的角之和为 360°，得

$$a+b+c=360$$

由 $a:b:c=3:4:5$，得总份数为

$$3+4+5=12$$

$$\text{每份角度}=\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$$

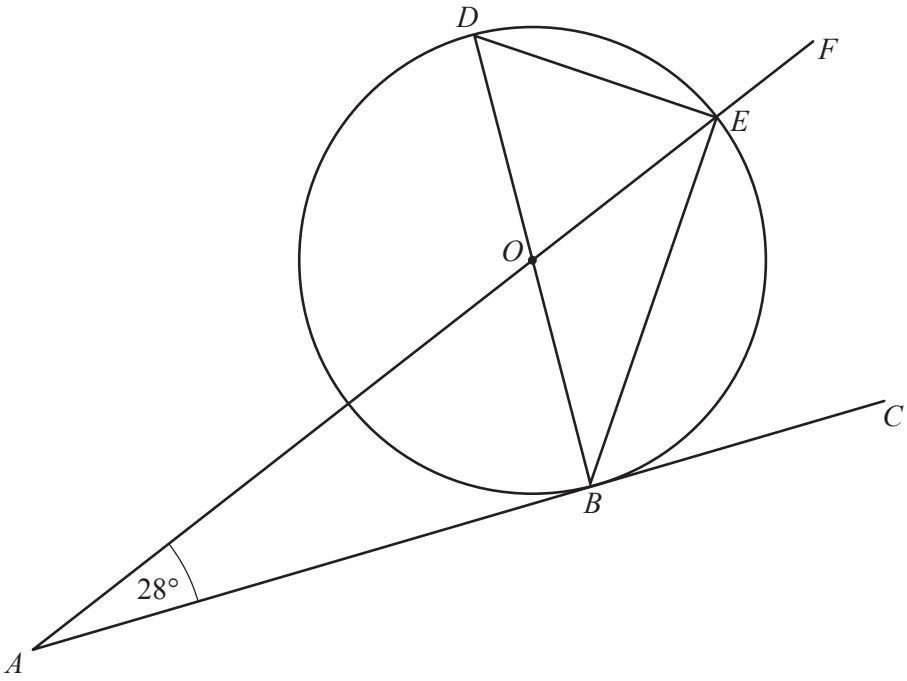
$$c=30\times 5=150$$

答：$c=150$。

5. [2023 · May/June 0580/31 Q7(a)(iv)(c)]

提示：需补全图形与已知角，再看∠BEF 与哪些角组成总角。

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a circle, centre O, with points B, D and E on the circumference.
$AOEF$ is a straight line.
The straight line AC touches the circle at B.

(c) Find angle BEF.

图为圆心 O 的圆，B、D、E 在圆周上，B、O、D 共线。A、O、E、F 在同一直线上，直线 AC 在 B 点与圆相切。图中给出的角 BAO 为 28°。（a）（iv）（c）求角 BEF。

✓ **答案**

149°

解析 半径OB垂直切线AB，故$\angle AOB=180^\circ-90^\circ-28^\circ=62^\circ$对顶角DOE也为62°。OD=OE，故$\angle DEO=\frac{180^\circ-62^\circ}{2}=59^\circ$BD为直径，所对圆周角DEB为90°，因此$\angle OEB=90^\circ-59^\circ=31^\circ$O、E、F共线，故$\angle BEF=180^\circ-31^\circ=149^\circ$答：149°。

4.8 用多边形内角和补出未知角

题型 1　用多边形内角和求未知角或角的平均数（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **三角形内角：** 图中三角形 ABC 的内角为 $73°$、$59°$、$x°$。三角形内角和为 _____，减去两个已知角便得到未知角。

$$x = 180 - 73 - 59 = 48$$

② **直线上的角：** 图中 A、C、D 三点共线。$x°$ 与 $y°$ 合成一个平角，它们的和为 _____。从平角中减去已知角，得到相邻的另一个角。

$$y = 180 - x = 180 - 48 = 132$$

③ **平行线移角：** 两条直线标有同向箭头，表示两线平行。截线两侧、两平行线之间的内错角相等。如一个内错角为 $60°$，另一个记为 α，则

$$\alpha = 60°$$

④ **四边形内角：** 四边形有四个内角，内角和为 _____。从总和中减去三个已知角的和，得到第四个角。如三个内角为 $90°$、$80°$、$70°$，第四个角记为 β，则

$$\beta = 360° - (90° + 80° + 70°) = 120°$$

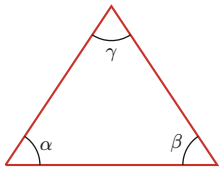
⑤ **内角的平均数：** 平均数是总和除以个数。任意三角形都有 _____ 个内角，内角和均为 $180°$。

$$180\frac{\circ}{3} = 60°$$

因此，内角的平均数与三角形的形状无关。

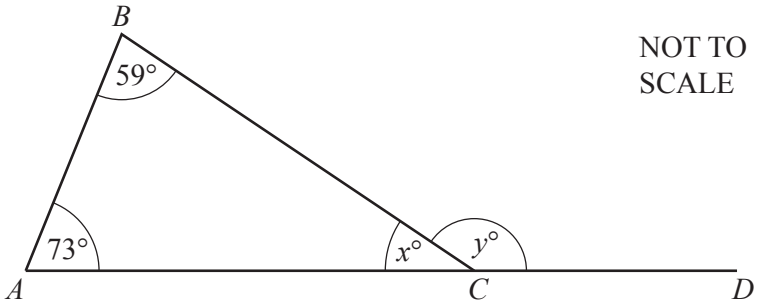
一 填空：①180°　②180°　③360°　④3

三角形内角的总量是 180°

	图像	数量关系
同一关系		$\alpha + \beta + \gamma = 180°$。

点石成金　题目出现三角形或四边形，并给出部分内角求未知角时，先用内角和减去已知角的和。

例 1　[2023 · May/June 0580/12 Q5]



In the diagram, ABC is a triangle and ACD is a straight line.

Find the value of x and the value of y.

图中，ABC 是一个三角形，A、C、D 三点在同一直线上。$\angle BAC = 73°$，$\angle ABC = 59°$，$\angle ACB = x°$，$\angle BCD = y°$。图形未按比例绘制。求 x 和 y 的值。

解答　由三角形内角和为 180°，得

$$x = 180 - 73 - 59 = 48$$

∵ A、C、D 三点共线，∴ $x°$ 与 $y°$ 的和为 180°。

$$y = 180 - 48 = 132$$

答：$x = 48$，$y = 132$。

方法：先看三角形的两个已知角，用内角和求缺角，再看共线处。

辨析：内角和是图形各内角的总和，平角是两条反向射线所成的角。

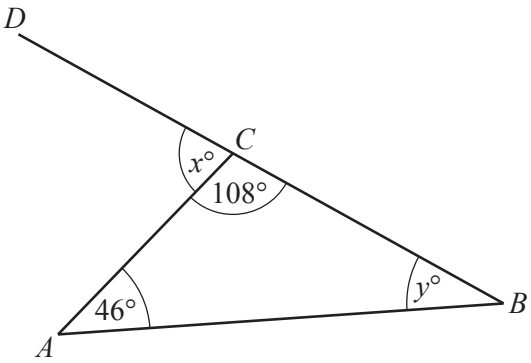
拓展：四边形画一条对角线可分成两个三角形，内角和可据此求出。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/33 Q7(a)(iii)]

提示：看两个已知角，用三角形内角和减去它们的和。

(a)



The diagram shows a triangle ABC and a straight line BCD.

(iii)　Work out the value of y.

(a) 图中，ABC 是一个三角形，B、C、D 三点在同一直线上。$\angle CAB = 46°$，$\angle ACB = 108°$，$\angle ACD = x°$，$\angle ABC = y°$。图形未按比例绘制。

(iii) 求 y 的值。

✓ **答案** $y = 26$

解析 由三角形内角和为 180°，得

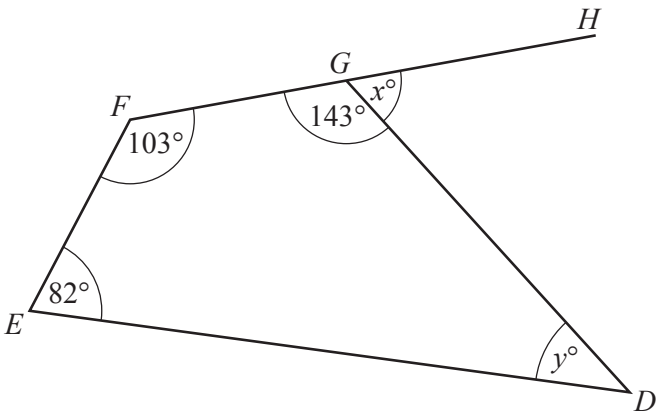
$$y = 180 - 108 - 46 = 26$$

答：$y = 26$。

2. [2024 · February/March 0580/32 Q1(d)(iii)]

提示：从四边形内角和中减去三个已知内角。

(d)



NOT TO SCALE

The diagram shows a quadrilateral $DEFG$ and a straight line FGH.

(iii) Work out the value of y.
Give a geometrical reason for your answer.

(d) 如图，$DEFG$ 是一个四边形，F、G、H 在同一直线上。$\angle FED = 82°$，$\angle EFG = 103°$，$\angle FGD = 143°$，$\angle DGH = x°$，$\angle EDG = y°$。图形未按比例绘制。

(iii) 求 y 的值，并说明答案的几何理由。

✓ **答案** $y = 32$

解析 由四边形内角和为 360°，得

$$y = 360 - 82 - 103 - 143 = 32$$

答：$y = 32$，几何理由是四边形内角和为 360°。

3. [2026 · May/June 0580/12 Q17(a)]

提示：用三角形内角和减去两个已知内角。

(a) Two of the angles in a triangle are 100° and 30°.

Work out the size of the third angle.

(a) 一个三角形的两个内角分别为 100° 和 30°。求第三个内角的大小。

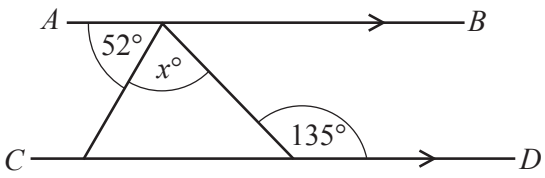
✓ **答案** 50°

解析 由三角形内角和为 180°，得第三个内角为

$$180° - 100° - 30° = 50°$$

答：第三个内角的大小为 50°。

4. [2023 · October/November 0580/11 Q10]
提示：先看平行标记与共线处，补齐三角形底部两角。



NOT TO SCALE

AB and CD are parallel lines.

Find the value of x.

图中，AB 和 CD 是两条平行直线。三角形顶点处，左边与上方直线向左的射线所夹角为 52°；三角形的顶角为 $x°$；右下方的外角为 135°。图形未按比例绘制。求 x 的值。

✓ **答案** $x = 83$

解析 设三角形左下角为 α，右下角为 β。

$\because$ AB 与 CD 平行，$\therefore$ 内错角相等。

$$\alpha = 52°$$

由直线上的邻角和为 180°，得

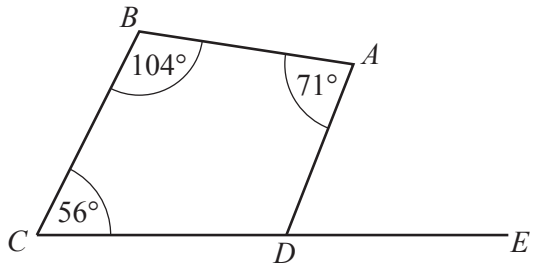
$$\beta = 180° - 135° = 45°$$

由三角形内角和为 180°，得

$$x = 180 - 52 - 45 = 83$$

答：$x = 83$。

5. [2023 · May/June 0580/21 Q1]
提示：先看四边形中缺的内角，再找与它拼成平角的角。



NOT TO SCALE

CDE is a straight line.

Find angle ADE.

图中，四边形 $ABCD$ 的三个内角分别为 $\angle ABC = 104°$、$\angle BCD = 56°$、$\angle BAD = 71°$。C、D、E 三点在同一直线上。图形未按比例绘制。求 $\angle ADE$。

✓ **答案** $\angle ADE = 51°$

解析 由四边形内角和为 360°，得

$$\angle CDA = 360° - (104° + 71° + 56°) = 129°$$

$\because$ C、D、E 三点共线，$\therefore$ $\angle CDA$ 与 $\angle ADE$ 的和为 180°。

$$\angle ADE = 180° - 129° = 51°$$

答：$\angle ADE = 51°$。

6. [2023 · May/June 0580/33 Q7(b)]

提示：看内角总和与内角个数，比较不同形状时是否改变。

(b) Show that the mean of the angles in any triangle is 60°.

(b) 说明任意三角形内角的平均数都是 60°。

✓ **答案** 60°

解析 任意三角形的三个内角之和均为 180°，故内角的平均数为

$$180^\circ \div 3 = 60^\circ$$

答：任意三角形内角的平均数都是 60°。

4.9 多边形的角

题型 1 用一周外角求正多边形的一个内角（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **相邻内外角：**在正九边形的一个顶点延长一条边。延长线与另一边所夹的角称为外角。它与相邻内角合成平角，和为_____。

② **一周外角和：**在正九边形每个顶点各取一个同向外角。这些外角的和为_____。

③ **等分求外角：**正九边形的各外角相等。用外角和除以边数，求一个外角。

$$\text{一个外角} = 360^\circ \div 9 = 40^\circ$$

④ **相减求内角：**内角与相邻外角合成平角。用平角减去一个外角，求相邻内角。

$$\text{一个内角} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

填空：①180°　②360°

点石成金　题目出现正多边形的边数并求一个内角时，先用 360° 除以边数求一个外角。

例 1 [2023 · February/March 0580/12 Q12]

Work out the size of one interior angle of a regular 9-sided polygon.

求正九边形的一个内角的大小。

解答 正九边形的各外角相等，且外角和为 360°，得一个外角为

$$360^\circ \div 9 = 40^\circ$$

由内角与相邻外角的和为 180°，得一个内角为

$$180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

答：一个内角的大小为 140°。

方法：先看正多边形的边数，从等分一周外角起手。

辨析：内角是相邻两边在形内的夹角，外角是一边与邻边延长线的夹角。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/12 Q17]
提示：看十五个相等外角如何分一周，再比较内外角与平角。

Find the size of an interior angle of a regular 15-sided polygon.

求正十五边形的一个内角的大小。

✓ **答案** 156°

解析 正十五边形的各外角相等，且外角和为 360°，得一个外角为

$$360° \div 15 = 24°$$

由内角与相邻外角的和为 180°，得一个内角为

$$180° - 24° = 156°$$

答：一个内角的大小为 156°。

2. [2023 · May/June 0580/31 Q7(c)]
提示：看十个同向外角的等分关系，再找相邻内角距平角的差。

(c) Work out the interior angle of a regular 10-sided polygon.

(c) 求正十边形的一个内角的大小。

✓ **答案** 144°

解析 正十边形的各外角相等，且外角和为 360°，得一个外角为

$$360° \div 10 = 36°$$

由内角与相邻外角的和为 180°，得一个内角为

$$180° - 36° = 144°$$

答：一个内角的大小为 144°。

3. [2025 · October/November 0580/21 Q3]
提示：先用一周外角和除以边数，求一个外角。

Find the interior angle of a regular 20-sided polygon.

(a) 求正二十边形的一个内角的大小。

✓ **答案** 162°

解析 正二十边形的各外角相等，且外角和为 360°，得一个外角为

$$360° \div 20 = 18°$$

由内角与相邻外角的和为 180°，得一个内角为

$$180° - 18° = 162°$$

答：一个内角的大小为 162°。

4. [2026 · May/June 0580/12 Q17(b)]
提示：先求一个外角，再利用相邻内外角的和。

(b) Work out the size of an interior angle of a regular 10-sided polygon.

(b) 求正十边形的一个内角的大小。

✓ **答案** 144°

解析 正十边形的各外角相等，且外角和为 360°，得一个外角为

$$360° \div 10 = 36°$$

由内角与相邻外角的和为 180°，得一个内角为

$$180° - 36° = 144°$$

答：一个内角的大小为 144°。

4.10 由等边求等角，再用角和求未知角

题型 1 由等边求等角，再用角和求未知角（Core / Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **等腰角的识别：** 本例两腰带有相同的短线标记，表示两腰相等。两腰所对的两个角称为底角，它们_____。图中的 $x°$ 表示底角的大小。

$AB = AC \xrightarrow{\text{等边对等角}} \angle ABC = \angle BCA = x°$

② **三角形的角和：** 三角形三个内角的和为_____。本例顶角为 38°，可先求两个底角；反过来，也可由底角求顶角。

由顶角求底角：

$x = \frac{180-38}{2} = 71$

由底角求顶角：

$\angle BAC = 180° - 2 \times 71° = 38°$

③ **底角转为外角：** 将本例底边 BC 延长至点 F。内底角与相邻的外角组成平角，两角的和为_____。先求底角，再用平角减去底角。

$$\angle ACF = 180° - 71° = 109°$$

④ **外角还原底角：** 若已知上述外角为 109°，先求与它相邻的内底角。再由两底角相等，求顶角。

$$\angle BCA = 180° - 109° = 71°$$

$$\angle BAC = 180° - 2 \times 71° = 38°$$

⑤ **等边角与周角：** 三边带有相同标记，等边三角形的三个内角相等。

$$180° \div 3 = 60°$$

在本例顶点 A 处补画射线，均分三角形外的周角余量。设所得两角均为 $t°$，一个周角为_____。

$$t = \frac{360 - 38}{2} = 161$$

⑥ **半径构成等腰：** 圆心 O 到圆上两点 D、E 的线段都是半径，长度相等。

$OD = OE \xrightarrow{\text{等边对等角}} \angle ODE = \angle OED$

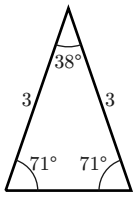
本例若以 A 为圆心作过 B 的圆，点 C 也在圆上，两底角仍可由角和求出。

$$\angle ABC = \angle BCA = \frac{180° - 38°}{2} = 71°$$

⑦ **圆图中的角（Extended）：** 半径在切点处垂直切线；直径所对的圆周角为 $90°$。如切线与另一边夹 $40°$，先在直角三角形中求另一锐角。$180° - 90° - 40° = 50°$

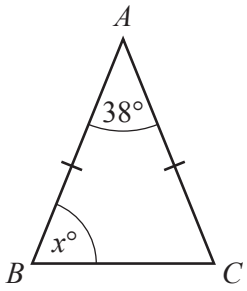
填空：①相等　②180°　③180°　④360°

等边对等角，再用三角形角和

	图像	数量关系
同一关系		两个底角均为 $\frac{180°-38°}{2}=71°$。

点石成金　题目出现相等边标记、等腰或等边三角形、同圆半径时，先确定相等的内角，再用角和求未知角。

例 1　[2023 · May/June 0580/13 Q12]



NOT TO SCALE

Triangle ABC is isosceles.
Angle $BAC = 38°$ and $AB = AC$.

Find the value of x.

三角形 ABC 是等腰三角形。已知 $\angle BAC = 38°$，且 $AB = AC$。图中两腰带有相同的短线标记，底角 ABC 标为 $x°$。图形未按比例绘制。求 x 的值。

解答　由 $AB = AC$，得两底角相等。

$$\angle ABC = \angle BCA = x°$$

由三角形内角和，得

$$x + x + 38 = 180$$

$$x = \frac{180 - 38}{2} = 71$$

答：$x = 71$。

方法：先看相同短线标记，找出等角，再从内角和中扣去顶角并平分。

辨析：底角是两腰各自所对的角，顶角是两腰的夹角。

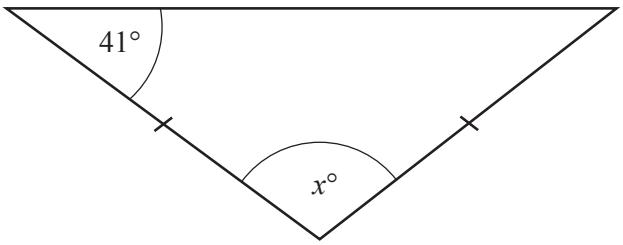
拓展：三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/11 Q8]

提示：看相同边标记所对的角，比较已知角与未知角的位置。

The diagram shows an isosceles triangle.



NOT TO SCALE

Find the value of x.

图示为一个等腰三角形，两条带相同短线标记的边相等。一个底角为 41°，两条相等边的夹角为 x°。图形未按比例绘制。求 x 的值。

✓ **答案**

98

解析 两条带相同标记的边相等，故两底角均为 41°。由三角形内角和，得

$$x + 41 + 41 = 180$$

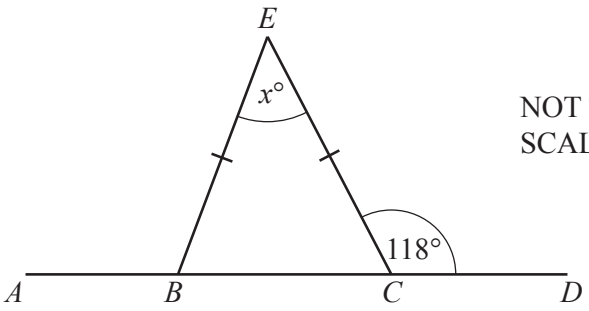
$$x = 180 - 82 = 98$$

答：$x = 98$。

2. [2023 · October/November 0580/32 Q8(c)]

提示：先看共线三点处的邻角，再找相等边所对的角。

(c)



NOT TO SCALE

The diagram shows triangle BCE and a straight line $ABCD$.
$BE = CE$ and angle $DCE = 118°$.

Find the value of x.

(c) 图中有三角形 BCE 和直线 $ABCD$，点 A、B、C、D 依次在这条直线上。已知 $BE = CE$，$\angle DCE = 118°$，顶角 BEC 标为 x°。图形未按比例绘制。求 x 的值。

✓ **答案**

56

解析 由 B、C、D 在同一直线上，得

$$\angle BCE = 180° - 118° = 62°$$

由 $BE = CE$，得

$$\angle CBE = \angle BCE = 62°$$

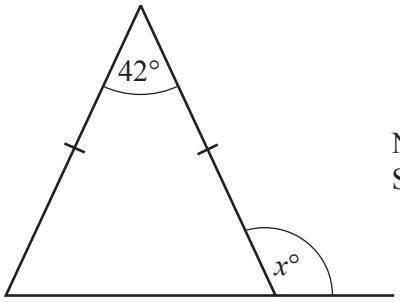
由三角形内角和，得

$$x = 180 - 62 - 62 = 56$$

答：$x = 56$。

3. [2023 · May/June 0580/42 Q1(a)]
提示：先由顶角求底角，再看未知角与底角是否组成平角。

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows an isosceles triangle with the base extended.

Find the value of x.

(a) 图示为一个底边已延长的等腰三角形，两腰带有相同的短线标记。顶角为 42°，右侧底边延长线与右腰之间的外角为 $x°$。图形未按比例绘制。求 x 的值。

✓ **答案**

111

解析 等腰三角形的两底角相等，由三角形内角和，得

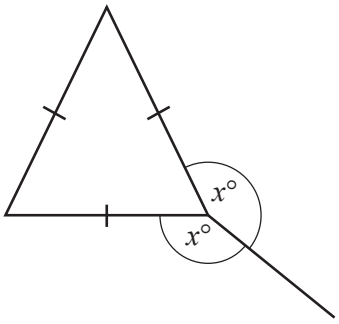
$$\text{每个底角} = \frac{180° - 42°}{2} = 69°$$

底边延长所得的外角与内底角组成平角，故

$$x = 180 - 69 = 111$$

答：$x = 111$。

4. [2023 · October/November 0580/13 Q9]
提示：先看等边三角形的内角，再看同一顶点周围的角。



NOT TO SCALE

The diagram shows an equilateral triangle.

Find the value of x.

图示为一个等边三角形，三边带有相同的短线标记。从右下顶点另画一条射线，三角形外的两个角均标为 $x°$。图形未按比例绘制。求 x 的值。

✓ **答案**

150

解析 等边三角形的三个内角相等，故

$$\text{每个内角} = 180\overset{\circ}{}\frac{}{3} = 60°$$

标有未知角的顶点处，三个角组成周角，故

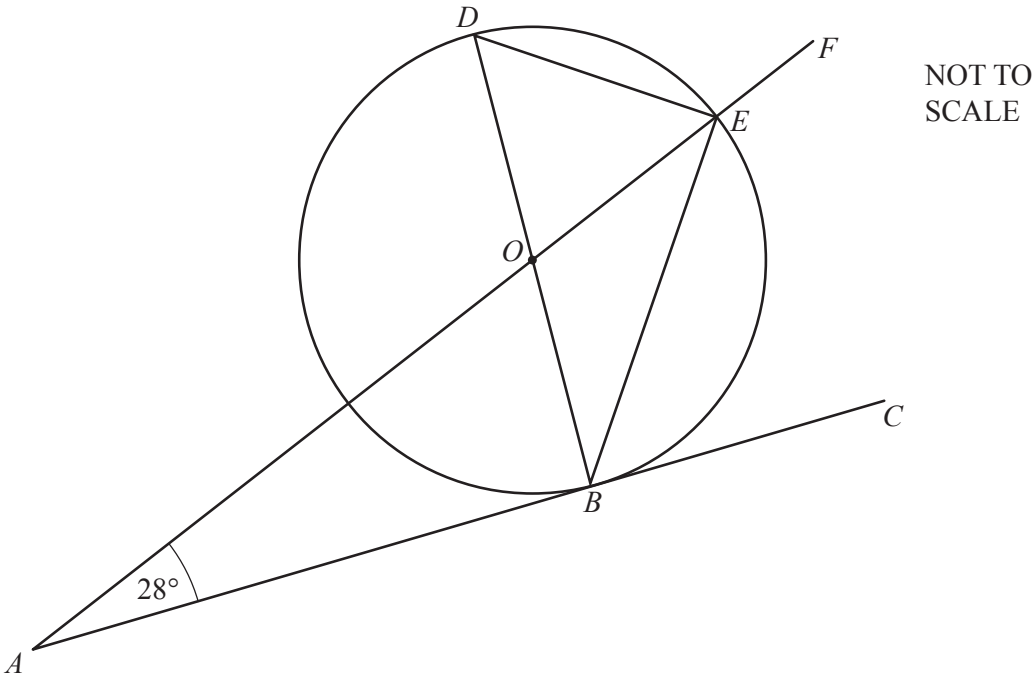
$$x + x + 60 = 360$$

$$x = \frac{360 - 60}{2} = 150$$

答：$x = 150$。

5. [2023 · May/June 0580/31 Q7(a)(iv)(b)]
⟵ 提示：先查共用图与已知条件，再判断边角关系。

(a)



The diagram shows a circle, centre O, with points B, D and E on the circumference.
$AOEF$ is a straight line.
The straight line AC touches the circle at B.

(b) Find angle ODE.

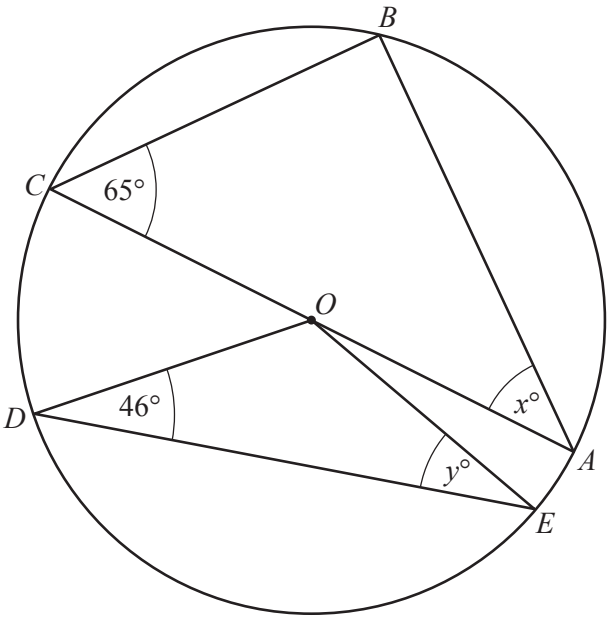
图为圆心 O 的圆，B、D、E 在圆周上，B、O、D 共线。A、O、E、F 在同一直线上，直线 AC 在 B 点与圆相切。图中给出的角 BAO 为 28°。（a）（iv）（b）求角 ODE。

✓ **答案**

59°

解析 半径 OB 垂直于切线 AB，因此三角形 AOB 在 B 处为直角。$\angle AOB = 180° - 90° - 28° = 62°$ 由对顶角，$\angle DOE = 62°$。又 OD=OE，故两个底角相等。$\angle ODE = \frac{180° - 62°}{2} = 59°$ 答：59°。

6. [2023 · February/March 0580/12 Q15(b)]
提示：看圆心连向圆上两点的线段，比较它们所对的角。



NOT TO SCALE

The diagram shows a circle, centre O, with diameter AC.
A, B, C, D and E lie on the circumference of the circle.

(b) Find the value of y.
Give a reason for your answer.

图示为一个圆，圆心为 O，AC 为直径。点 A、B、C、D、E 都在圆周上。图中连有 BC、BA、AC、OD、OE 和 DE；$\angle BCA = 65°$，$\angle ODE = 46°$，$\angle BAC = x°$，$\angle DEO = y°$。图形未按比例绘制。
(b) 求 y 的值，并说明理由。

✓ **答案**

46

解析 OD、OE 是同一圆的半径，故

$$OD = OE$$

由等腰三角形两底角相等，得

$$\angle OED = \angle ODE = 46°$$

$$y = 46$$

答：$y = 46$，理由是等腰三角形的两底角相等。

4.11 沿平行线转移角，再利用角和

题型 1 沿平行线转移角，再利用角和（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **沿截线转移角：** 两条平行斜线被竖线所截。图中两个标角位于两线之间，分居截线两侧。

_____相等

$x = 52$

同位角相等

两角在截线同侧，位置相同

② **由等角判平行：** 直线 l、m 被同一条直线所截。认出下列位置关系，且两角相等，可判定两直线_____。

一对同位角均为 $70°$

$l \parallel m$

一对内错角均为 $70°$

$l \parallel m$

③ **结合角和求角：**由例图得一个角为 $52°$，其邻补角为 $128°$。转移角度后，按交点或三角形的位置使用下列关系。

角的关系	角度演算
平角为 $180°$	$180° - 52° = 128°$
对顶角相等	与 $52°$ 角对顶的角也为 $52°$
三角形内角和为 $180°$	已知两个内角为 $52°$、$68°$ $180° - 52° - 68° = 60°$
三角形外角等于两个不相邻内角之和	外角为 $120°$，一个不相邻内角为 $50°$ $120° - 50° = 70°$

④ **同旁内角求值：**平行线的同旁内角之和为_____。以 t 表示角度数，两角分别为 $(2t)°$、$t°$，列式求值。

$$2t + t = 180$$

$$t = \frac{180}{3} = 60$$

⑤ **圆内角的衔接：**切线与弦所夹的角，等于该弦所对的圆周角。同弧所对的圆周角相等，可接在平行线的等角关系之后。

圆上四点 P、Q、R、S

QU 为切线，$PQ \parallel SR$

已知 $\angle RQU = 30°$

由弦切角关系

$\angle QSR = \angle RQU = 30°$

再由内错角相等

$\angle PQS = \angle QSR = 30°$

圆上四点 A、B、C、D

$AB \parallel DC$

弦 AC、DB 交于 E

已知 $\angle ACD = 25°$

由内错角相等

$\angle CAB = \angle ACD = 25°$

由同弧 AD 所对圆周角相等

$\angle ABD = \angle ACD = 25°$

在三角形 AEB 中

$\angle AEB = 180° - 25° - 25° = 130°$

⑥ **旋转后求内角：**三角形 ABC 绕 AC 中点 M 旋转 $180°$，B 对应 D。此时 A、C 互换，对应边平行。所得四边形为平行四边形，相邻内角互补。

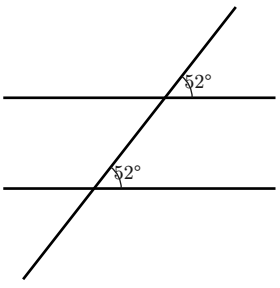
$$AB \parallel CD, \quad BC \parallel AD$$

若 $\angle ABC = 110°$，则

$$\angle BAD = 180° - 110° = 70°$$

填空：①内错角　②平行　③180°

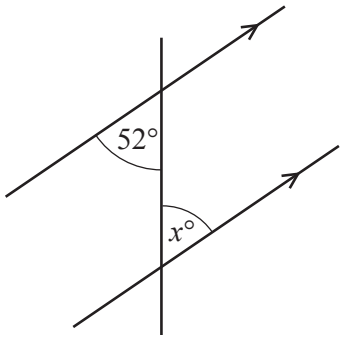
平行线上的对应角保持相等

	图像	数量关系
同一关系		两条水平直线平行，对应角均为 $52°$。

点石成金　题目出现平行标记、相等角或所求夹角时，先沿同一截线确认角的位置关系。

例 1　[2023 · May/June 0580/11 Q12(a)]

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a pair of parallel lines and a straight line.

Write down the geometrical reason why the value of x is 52.

(a) 图中有一对平行直线和一条与它们相交的直线。标出的两个角分别为 52° 和 $x°$，它们位于两条平行线之间、截线的两侧。图形不按比例绘制。
写出 x 的值为 52 的几何理由。

解答　两条平行线被同一条直线所截，标出的两角是内错角。由内错角相等，得

$$x = 52$$

答：内错角相等。

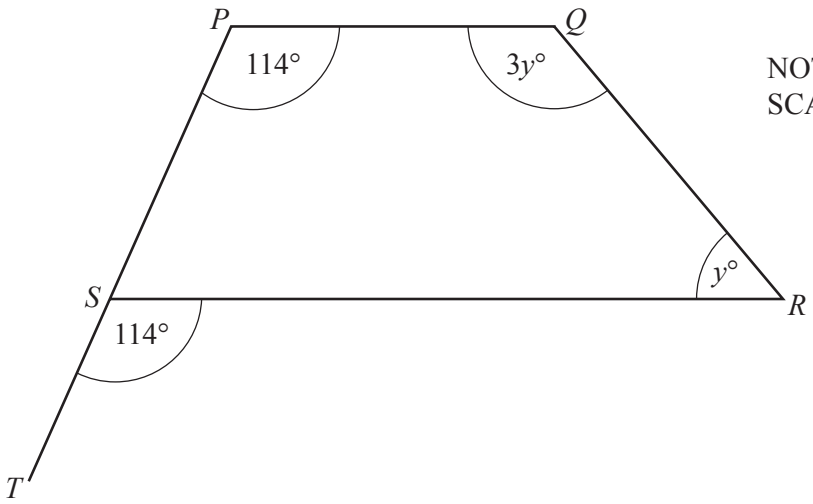
方法：先找两条平行线之间的标角，再看它们分居截线哪一侧。

辨析：内错角是两线之间分居截线两侧的角，同位角是截线同侧位置相同的角。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/33 Q6(a)(i)]
提示：沿 P、S、T 所在直线，比两个等角在交点处的位置。

(a)



NOT TO SCALE

In the diagram, PST is a straight line.

(i) Give the geometrical reason why the lines PQ and SR are parallel.

(a) 图中 P、S、T 在同一直线上，另有点 Q、R。标出的角为 $\angle SPQ = 114°$、$\angle TSR = 114°$、$\angle PQR = (3y)°$、$\angle QRS = y°$。图形不按比例绘制。
(i) 说明直线 PQ 与 SR 平行的几何理由。

✓ **答案** 同位角相等。

解析 P、S、T 在同一直线上，$\angle TSR$ 与 $\angle SPQ$ 是同位角。

$$\angle TSR = \angle SPQ = 114°$$

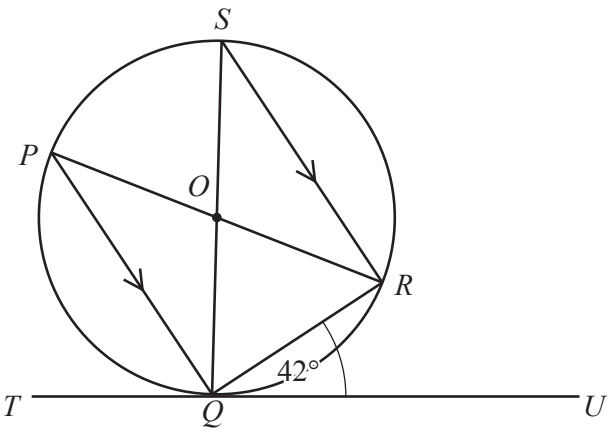
由同位角相等，得

$$PQ \parallel SR$$

答：同位角相等。

2. [2023 · May/June 0580/21 Q12(b)(ii)]
提示：先找切线所夹的弦，再沿 Q S 比较平行线间的角。

(b)



NOT TO SCALE

P, Q, R and S are points on the circle and TQU is a tangent to the circle at Q.
PR and SQ intersect at the centre of the circle, O, and PQ is parallel to SR.
Angle $RQU = 42°$.

Calculate

(ii) angle PQS

(b) P、Q、R、S 是圆上的点，直线 TQU 是圆在 Q 处的切线。PR 与 SQ 相交于圆心 O，且 PQ 与 SR 平行。$\angle RQU = 42°$。图形不按比例绘制。
计算：
(ii) $\angle PQS$。

✓ **答案** $42°$

解析 QU 是圆在 Q 处的切线，由弦切角关系，得

$$\angle QSR = \angle RQU = 42°$$

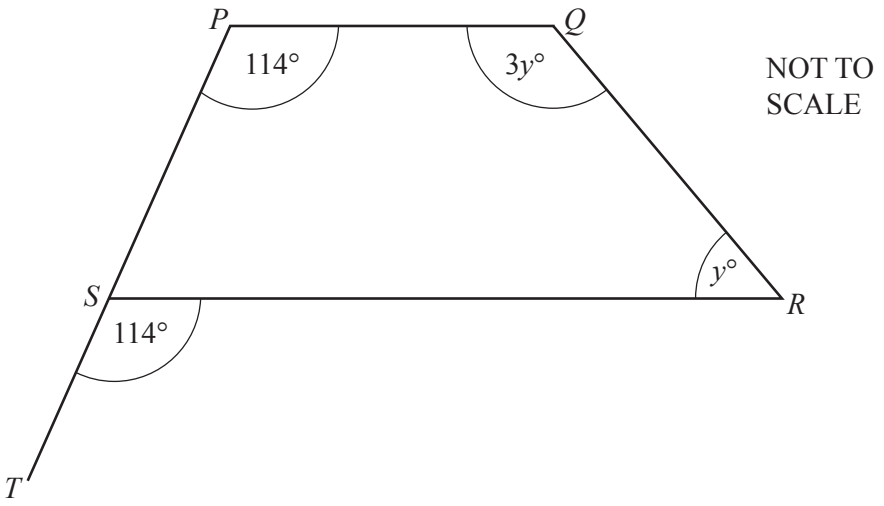
又 $PQ \parallel SR$，由内错角相等，得

$$\angle PQS = \angle QSR = 42°$$

答：$\angle PQS = 42°$。

3. [2023 · October/November 0580/33 Q6(a)(iii)]
提示：先比较两个已知角的位置，再看 QR 同侧的两个内角。

(a)



In the diagram, *PST* is a straight line.

(iii) Find the value of y.

(a) 图中 P、S、T 在同一直线上，另有点 Q、R。标出的角为 $\angle SPQ = 114°$、$\angle TSR = 114°$、$\angle PQR = (3y)°$、$\angle QRS = y°$。图形不按比例绘制。
(iii) 求 y 的值。

✓ **答案** 45

解析 P、S、T 在同一直线上，且

$$\angle TSR = \angle SPQ = 114°$$

由同位角相等，得

$$PQ \parallel SR$$

以 QR 为截线，同旁内角互补，得

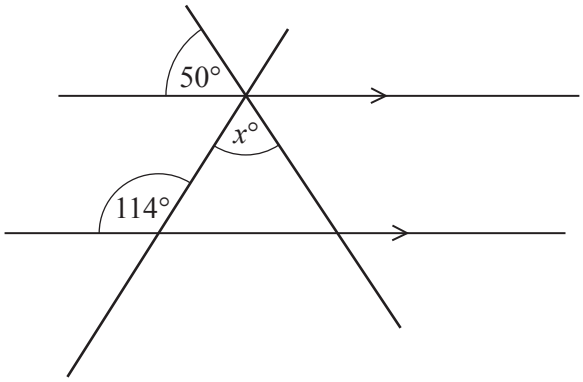
$$3y + y = 180$$

$$4y = 180$$

$$y = 45$$

答：$y = 45$。

4. [2023 · October/November 0580/12 Q11]
提示：先看左下交点的平角，再找能转移到右下内角的已知角。



NOT TO SCALE

The diagram shows two straight lines crossing two parallel lines.

Find the value of x.

图中两条相交直线分别穿过两条平行直线。上方交点左上侧标出的角为 50°，下方左侧交点左上侧标出的角为 114°，上方交点处两条斜线向下所夹的角为 $x°$。图形不按比例绘制。
求 x 的值。

✓ **答案** 64

解析 设上方交点为 O，下方左、右交点分别为 A、B。由平角为 180°，得

$$\angle OAB = 180° - 114° = 66°$$

由两条平行线的同位角相等，得

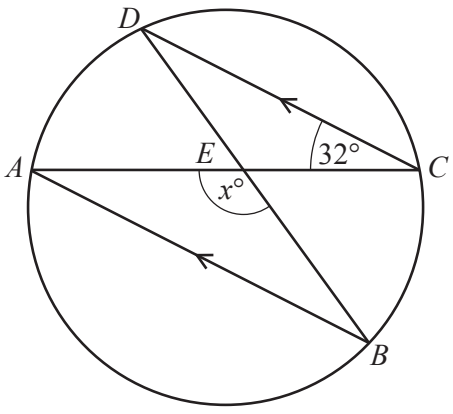
$$\angle OBA = 50°$$

在三角形 OAB 中，

$$x = 180 - 66 - 50 = 64$$

答：$x = 64$。

5. [2023 · May/June 0580/22 Q13]
提示：看 AD 所对的圆周角，再沿 AC 找三角形中的等角。



NOT TO SCALE

A, B, C and D are points on a circle.
AB is parallel to DC and angle $ACD = 32°$.
Chords AC and DB intersect at E.

Find the value of x.

A、B、C、D 是圆上的点。AB 与 DC 平行，且 $\angle ACD = 32°$。弦 AC 与 DB 相交于 E，图中 $\angle AEB = x°$。图形不按比例绘制。
求 x 的值。

✓ **答案** 116

解析 $AB \parallel DC$，由内错角相等，得

$$\angle CAB = \angle ACD = 32°$$

由同弧 AD 所对的圆周角相等，得

$$\angle ABD = \angle ACD = 32°$$

E 在 AC 和 DB 上，故

$$\angle EAB = 32°$$

$$\angle ABE = 32°$$

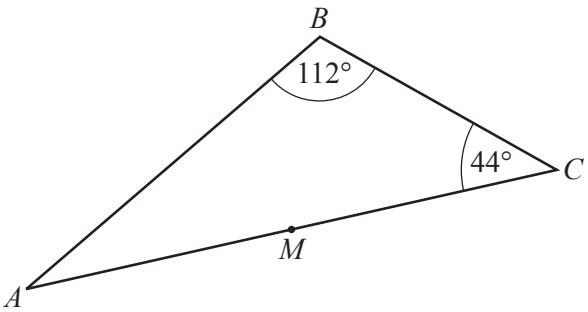
由三角形 AEB 的内角和，得

$$x = 180 - 32 - 32 = 116$$

答：$x = 116$。

6. [2023 · October/November 0580/13 Q14(b)]

提示：先看旋转后哪两组对应边平行，再比较相邻内角。



NOT TO SCALE

The diagram shows triangle ABC.
M is the midpoint of AC.

Triangle ABC is rotated 180° about centre M.
The image and the original triangle together form a quadrilateral $ABCD$.

(b) Find angle BAD.

图中为三角形 ABC，M 是 AC 的中点，$\angle ABC = 112°$，$\angle BCA = 44°$。图形不按比例绘制。将三角形 ABC 绕中心 M 旋转 180°。旋转后的三角形与原三角形共同组成四边形 $ABCD$。

(b) 求 $\angle BAD$。

✓ **答案** 68°

解析 绕 M 旋转 180° 后，A 与 C 互换，B 对应 D，对应边平行，故

$$AB \parallel CD$$

$$BC \parallel AD$$

四边形 $ABCD$ 是平行四边形，相邻内角互补。

$$\angle BAD + \angle ABC = 180°$$

$$\angle BAD = 180° - 112° = 68°$$

答：$\angle BAD = 68°$。

4.12 先用直径所对的圆周角为直角，再求角

题型 1 先用直径所对的圆周角为直角，再求角（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **识别圆的直径：**连接圆上两点的线段称为弦。图中 DB 经过圆心 O，因此 DB 是_____。

② **确定所对的弦：**$\angle DEB$ 表示射线 ED 与 EB 的夹角。顶点是 E，两边经过 D、B，所对的弦是 DB。

③ **求直径所对角：**DB 是直径，E 在圆周上。直径所对的圆周角等于_____。几何理由可写为：半圆内的圆周角为直角。

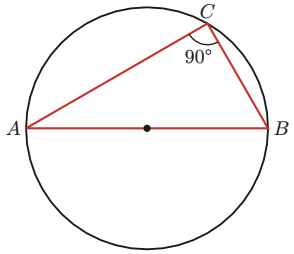
④ **利用内角和：**三角形内角和为_____。直角三角形中，若两个锐角为 $40°$ 和 $x°$，则

$$x + 90 + 40 = 180$$

$$x = 180 - 90 - 40 = 50$$

填空：①直径　②90°　③180°

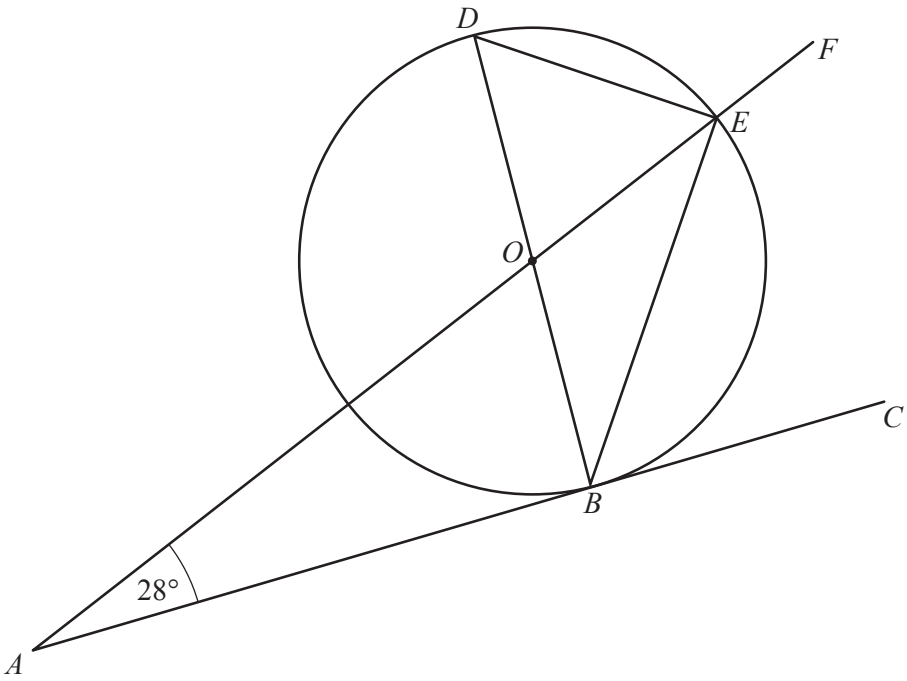
直径所对的圆周角是直角

	图像	数量关系
同一关系		$\angle ACB = 90°$。

点石成金　题目出现经过圆心的弦和圆周角时，先确认这条弦是直径，写出它所对的圆周角为直角。

例 1　[2023 · May/June 0580/31 Q7(a)(iv)(a)]

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a circle, centre O, with points B, D and E on the circumference.
$AOEF$ is a straight line.
The straight line AC touches the circle at B.

(iv)　(a)　Find angle DEB.

7（a）如图，一个圆的圆心为 O，点 B、D、E 在圆周上。A、O、E、F 在同一直线上。直线 AC 与圆相切于点 B。图中 D、O、B 共线，$\angle BAO = 28°$。图形未按比例绘制。
（iv）（a）求 $\angle DEB$。

解答　由图可知，D、O、B 共线，且 D、B 在圆周上，故 DB 是直径。
由直径所对的圆周角为直角，得
$\angle DEB = 90°$。
答：$\angle DEB$ 为 $90°$。

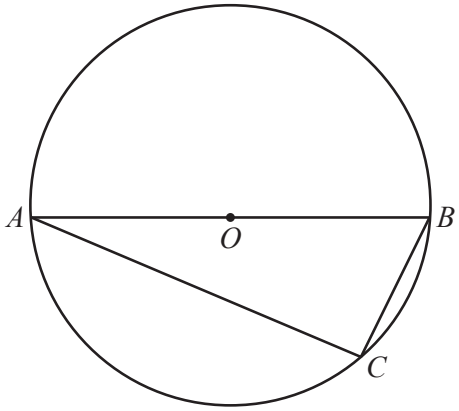
方法：先看 DB 与圆心 O 的位置，再找以 DB 为弦的圆周角。

辨析：弦是连接圆上两点的线段，直径是经过圆心的弦。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/12 Q17(c)]

提示：看 AB 是否经过圆心，再找对角 BCA 所对的弦。



NOT TO SCALE

A, *B* and *C* are points on a circle, centre *O*.

(c) Give a geometrical reason why angle *BCA* is 90°.

如图，A、B、C 是圆上的点，圆心为 O。A、O、B 在同一直线上。图形未按比例绘制。
(c) 说明 $\angle BCA$ 为 90° 的几何理由。

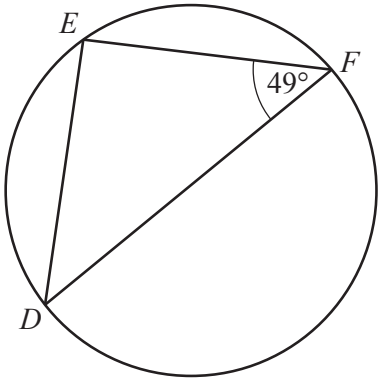
✓ **答案** 半圆内的圆周角为直角。

解析 由图可知，AB 经过圆心 O，故 AB 是直径。
$\angle BCA$ 是直径 AB 所对的圆周角，故
$\angle BCA = 90°$。
答：半圆内的圆周角为直角。

2. [2023 · October/November 0580/31 Q2(d)]

提示：先找 DF 所对的角，再用内角和联系其余两角。

(d)



NOT TO SCALE

The diagram shows points *D*, *E* and *F* on the circumference of a circle.
DF is a diameter of the circle.

Find angle *EDF*.

(d) 如图，点 D、E、F 在一个圆的圆周上。DF 是圆的直径，$\angle EFD = 49°$。图形未按比例绘制。
求 $\angle EDF$。

✓ **答案** 41°

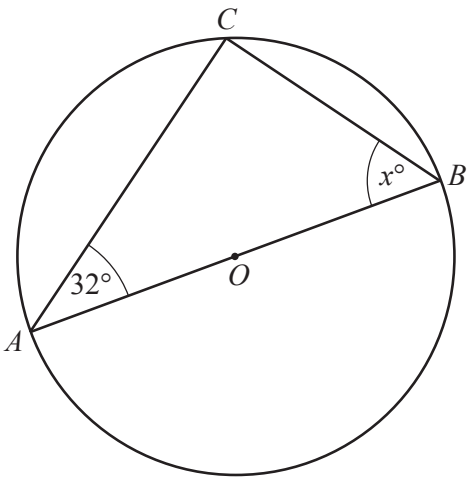
解析 ∵ DF 是直径，∴ 直径所对的圆周角为直角，
$\angle DEF = 90°$。
由三角形内角和，得

$\angle EDF = 180° - 90° - 49° = 41°$。

答：$\angle EDF$ 为 $41°$。

3. [2023 · May/June 0580/13 Q20(b)]

提示：先找 AB 所对的角，再看它与已知角怎样凑成内角和。



NOT TO SCALE

The diagram shows a circle, centre O, diameter AB.
A, B and C lie on the circumference of the circle.

(b) Find the value of x.
Give a geometrical reason for your answer.

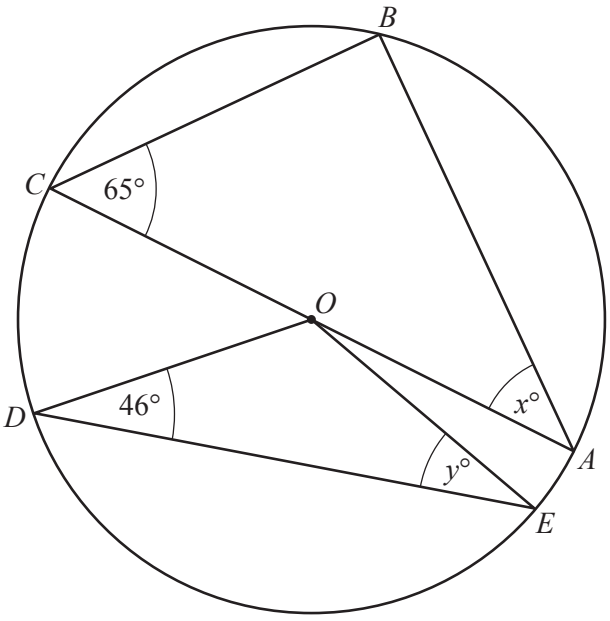
如图，一个圆的圆心为 O，直径为 AB。A、B、C 在圆周上，$\angle CAB = 32°$，$\angle ABC = x°$。图形未按比例绘制。
(b) 求 x 的值，并说明答案的几何理由。

✓ **答案** 58

解析 ∵ AB 是直径，∴ 半圆内的圆周角为直角，
$\angle ACB = 90°$。
由三角形内角和，得
$x = 180 - 90 - 32 = 58$。
答：$x = 58$，几何理由是半圆内的圆周角为直角。

4. [2023 · February/March 0580/12 Q15(a)]

提示：先看 AC 所对的角，再用三角形内角和列式。



NOT TO SCALE

The diagram shows a circle, centre O, with diameter AC.
A, B, C, D and E lie on the circumference of the circle.

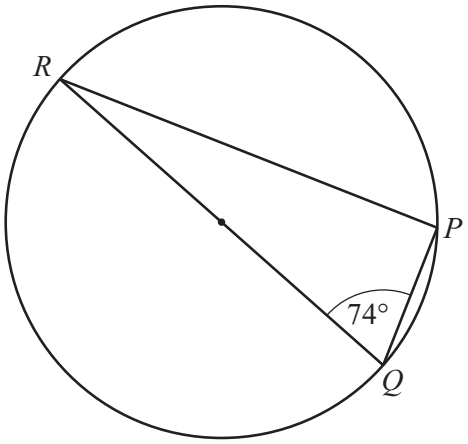
(a) Find the value of x.
Give a reason for your answer.

如图，一个圆的圆心为 O，直径为 AC。A、B、C、D、E 在圆周上。图中 $\angle BCA = 65°$，$\angle ODE = 46°$，$\angle BAC = x°$，$\angle DEO = y°$。图形未按比例绘制。
(a) 求 x 的值，并说明理由。

✓ **答案** 25

解析 ∵ AC 是直径，∴ 半圆内的圆周角为直角，
$\angle ABC = 90°$。
在三角形 ABC 中，由内角和，得
$x = 180 - 90 - 65 = 25$。
答：$x = 25$，理由是半圆内的圆周角为直角。

5. [2025 · May/June 0580/22 Q12]
← 提示：先找出直径所对的圆周角。



NOT TO SCALE

P, Q and R lie on a circle.
QR is a diameter.

Find angle PRQ.
Give geometrical reasons for your answer.

如图，P、Q、R 在同一个圆上，QR 是直径，$\angle PQR = 74°$。图形未按比例绘制。求 $\angle PRQ$，并说明答案的几何理由。

✓ **答案** 16°

解析 ∵ QR 是直径，半圆内的圆周角为直角，∴

$$\angle QPR = 90°$$

由三角形内角和为 180°，得

$$\angle PRQ = 180° - 90° - 74° = 16°$$

答：$\angle PRQ = 16°$。

4.13 识别同弧，比较圆心角与圆周角

题型 1　识别同弧，比较圆心角与圆周角（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **同弧圆周角：**$\angle CAD$ 与 $\angle CBD$ 的两边都经过 C、D。两顶点在弦 CD 同侧，所对的是同弧。同弧所对的圆周角_____。

$$\angle CBD = \angle CAD = 42^\circ$$

② **同弧圆心角：**将圆心记为 O，连接 OC、OD。同弧 CD 所对的圆心角是圆周角的_____倍。

$$\angle COD = 2\angle CAD = 2 \times 42^\circ = 84^\circ$$

③ **切线垂直半径：**AQ 是切线，OA 是经过切点的半径。半径与切线在切点处_____，再减去已知角。

$$\angle OAQ = 90^\circ$$

$$\angle OAB = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$$

④ **半径等腰求角：**$OA = OB$，等腰三角形 AOB 的两底角_____。先用三角形内角和求圆心角，再求同弧圆周角。

$$\angle OBA = \angle OAB = 35^\circ$$

$$\angle AOB = 180^\circ - 2 \times 35^\circ = 110^\circ$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 110^\circ = 55^\circ$$

⑤ **弦切角转移：**切线 AQ 与弦 AB 夹成 55°。弦切角等于弦所对的异侧圆周角。

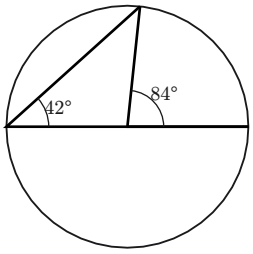
$$\angle ACB = \angle BAQ = 55^\circ$$

⑥ **平行线转角：**两条平行线被一条直线所截，内错角相等。若一个内错角为 36°，另一个记为 θ。

$$\theta = 36^\circ$$

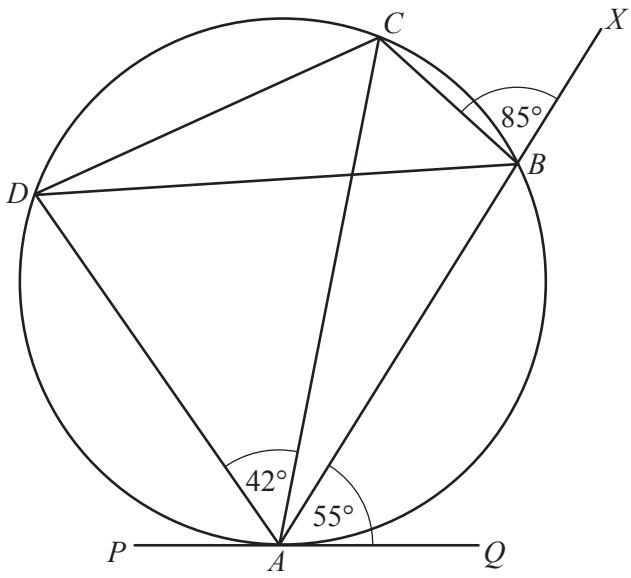
填空：①相等　②2　③垂直　④相等

同弧对应的圆心角是圆周角的两倍

	图像	数量关系
同一关系		$84^\circ = 2 \times 42^\circ$。

点石成金　题目出现同一圆中的圆心角或圆周角时，先确认角的两边经过哪两个圆上点，再辨认所对的弧。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q17(a)]



NOT TO SCALE

ABCD is a cyclic quadrilateral, *ABX* is a straight line and *PQ* is a tangent to the circle at *A*.
Angle *CBX* = 85°, angle *BAQ* = 55° and angle *CAD* = 42°.

Find

(a) angle *CBD*

ABCD 是圆内接四边形，*A*、*B*、*X* 在同一直线上，直线 *PQ* 在点 *A* 处与圆相切。已知 $\angle CBX = 85°$，$\angle BAQ = 55°$，$\angle CAD = 42°$。图形不按比例绘制。求（a）$\angle CBD$。

解答　$\angle CAD$ 与 $\angle CBD$ 所对的是同弧 CD，由同弧所对的圆周角相等，得 $\angle CBD = \angle CAD = 42°$。
答：42°。

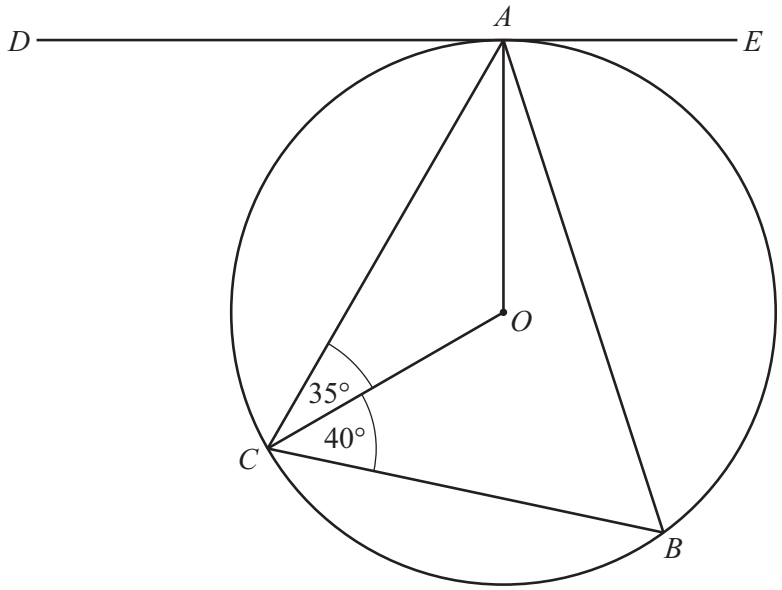
方法：先看两角的边经过哪两个圆上点，再核对顶点在弦的哪侧。

辨析：圆周角是顶点在圆上的角，圆心角是顶点在圆心的角。

针对练习

1. [2025 · May/June 0580/21 Q10(b)]

提示：先看三角形 A O C 中的两条半径。



NOT TO SCALE

A, B and C are three points on a circle, centre O.
DE is a tangent to the circle at A.
Angle $ACO = 35°$ and angle $BCO = 40°$.

Find

(a) angle AOC

(b) angle ABC

如图，A、B、C 是圆上的三个点，圆心为 O。直线 DE 在点 A 处与圆相切。$\angle ACO = 35°$，$\angle BCO = 40°$。图形未按比例绘制。求

(a) $\angle AOC$；

(b) $\angle ABC$。

✓ **答案** 55°

解析 ∵ OA、OC 是同圆的半径，∴

$$OA = OC$$

由等腰三角形的两底角相等，得

$$\angle OAC = \angle ACO = 35°$$

由三角形内角和为 180°，得

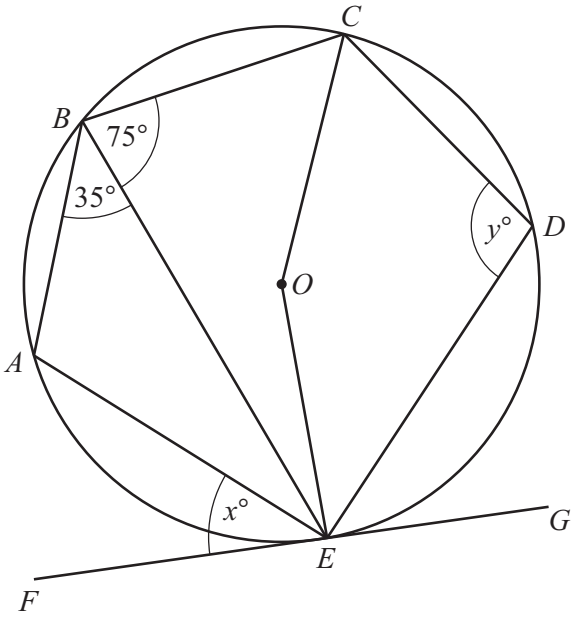
$$\angle AOC = 180° - 2 \times 35° = 110°$$

同弧 AC 所对的圆心角是圆周角的两倍，故

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \times 110° = 55°$$

答：$\angle ABC = 55°$。

2. [2026 · February/March 0580/22 Q16(b)]
提示：看圆心角与哪个已知圆周角所对的弧相同。



NOT TO SCALE

A, B, C, D and E lie on a circle, centre O.
FG is a tangent to the circle at E.
Angle $ABE = 35°$ and angle $CBE = 75°$.

(b) Complete this statement with the geometrical reason.

Obtuse angle $EOC = 150°$ because .....

A、B、C、D、E 在同一个圆上，圆心为 O。直线 FG 在点 E 处与圆相切。已知 $\angle ABE = 35°$，$\angle CBE = 75°$。图中 $\angle FEA = x°$，$\angle CDE = y°$。图形不按比例绘制。
(b) 用几何依据补全下列陈述。
钝角 $EOC = 150°$，因为 _____。

✓ **答案** 同弧所对的圆心角是圆周角的两倍。

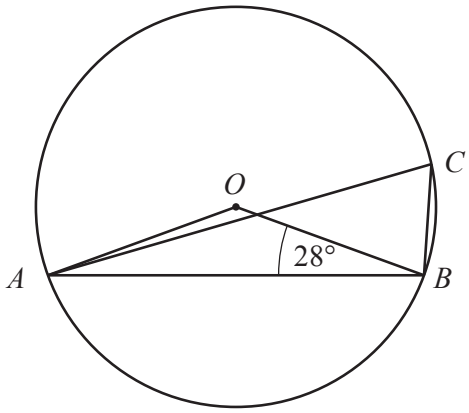
解析 钝角 EOC 与圆周角 EBC 所对的是同弧 EC。
由同弧所对的圆心角是圆周角的两倍，得

$$\angle EOC = 2\angle EBC = 2 \times 75° = 150°$$

答：同弧所对的圆心角是圆周角的两倍。

3. [2023 · October/November 0580/22 Q17(a)]
提示：先找两条半径构成的等腰三角形，再比两角所对的弧。

(a)



NOT TO SCALE

A, B and C are points on a circle, centre O.
Angle $OBA = 28°$.

Find angle ACB.

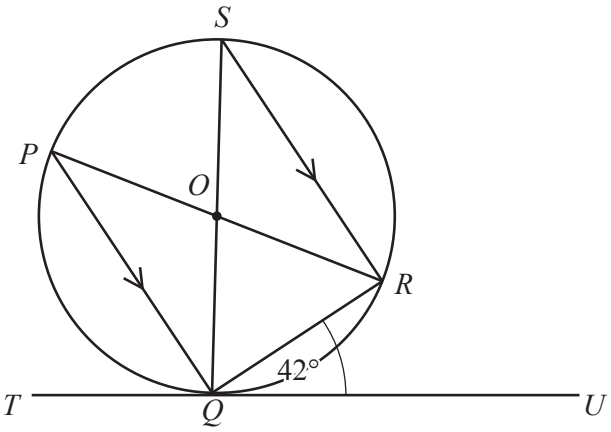
(a) A、B、C 是圆上的点，圆心为 O。已知 $\angle OBA = 28°$。图形不按比例绘制。求 $\angle ACB$。

✓ **答案** 62°

解析 OA 与 OB 是同一圆的半径，故
$OA = OB$。
由等腰三角形两底角相等，得
$\angle OAB = \angle OBA = 28°$。
由三角形内角和，得
$\angle AOB = 180° - 2 \times 28° = 124°$。
$\angle AOB$ 与 $\angle ACB$ 所对的是同弧 AB，故
$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 124° = 62°$。
答：62°。

4. [2023 · May/June 0580/21 Q12(b)(iii)]
提示：从切线与弦的夹角起，借平行线找同弧圆周角。

(b)



NOT TO SCALE

P, Q, R and S are points on the circle and TQU is a tangent to the circle at Q.
PR and SQ intersect at the centre of the circle, O, and PQ is parallel to SR.
Angle $RQU = 42°$.

Calculate

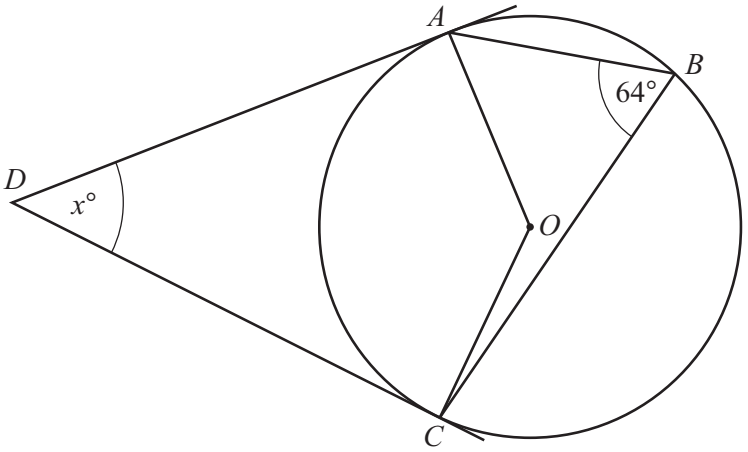
(iii) angle POS.

(b) P、Q、R、S 是圆上的点，直线 TQU 在点 Q 处与圆相切。PR 与 SQ 相交于圆心 O，且 PQ 平行于 SR。已知 $\angle RQU = 42°$。图形不按比例绘制。求（iii）$\angle POS$。

✓ **答案** 84°

解析 QU 是圆在点 Q 处的切线，由弦切角等于弦所对的异侧圆周角，得
$\angle QSR = \angle RQU = 42°$。
由 $PQ \parallel SR$，内错角相等，得
$\angle PQS = \angle QSR = 42°$。
$\angle POS$ 与 $\angle PQS$ 所对的是同弧 PS，圆心角是圆周角的两倍，故
$\angle POS = 2\angle PQS = 2 \times 42° = 84°$。
答：84°。

5. [2024 · October/November 0580/22 Q17]
提示：先求弧 A C 所对的圆心角，再看两处切点。



NOT TO SCALE

A, B and C are points on the circumference of a circle with centre O.
DA and DC are tangents to the circle.
Angle $ABC = 64°$.

Work out the value of x.

A、B、C 是圆周上的点，圆心为 O。DA 和 DC 是圆的切线。已知 $\angle ABC = 64°$，图中 $\angle ADC = x°$。图形未按比例绘制。求 x 的值。

✓ **答案**

52

解析 连接 OC。由同弧所对的圆心角等于圆周角的两倍，得

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2 \times 64° = 128°$$

半径垂直于经过切点的切线，故

$$\angle DAO = \angle DCO = 90°$$

由四边形 $DAOC$ 的内角和，得

$$x° = 360° - 90° - 128° - 90° = 52°$$

答：$x = 52$。

4.14 把切线与弦的夹角转成对弧的圆周角

题型 1 把切线与弦的夹角转成对弧的圆周角（Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **切线弦定理：**例图中，PQ 在 A 处与圆相切，AB 是弦。记号 $\angle BAQ$ 的中间字母表示顶点。由切线弦定理，切线弦夹角等于所夹弧所对的_____。

已知切线弦夹角	已知对应圆周角
$\angle BAQ = 55°$	$\angle ACB = 55°$
$\angle ACB = 55°$	$\angle BAQ = 55°$

② **直线上的角：**例图中，A、B、X 共线，射线 BA 与 BX 反向。平角为_____，相邻两角的和等于平角。

$$\angle ABC = 180° - 85° = 95°$$

③ **三角形内角：**例图中，三角形 ABC 的内角和为_____。已知两个内角，用内角和减去这两个角。

$$\angle BAC = 180° - 95° - 55° = 30°$$

④ **角的拆分：**同一角内的一条射线把它分成两部分。总角等于两部分的_____；求其中一部分，用总角减去另一部分。

求总角	求其中一部分
$25° + 45° = 70°$	$70° - 25° = 45°$

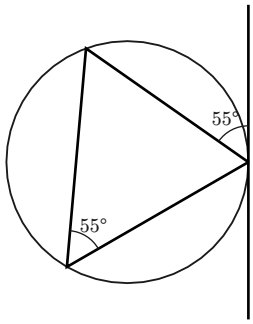
⑤ **半径与等腰：**连接圆心 O 与圆上两点 U、V，再连接 UV。两条半径组成等腰三角形，底角_____。如一个底角为 24°，另一个底角也为 24°。

$$OU = OV$$

$$\angle OVU = \angle OUV = 24°$$

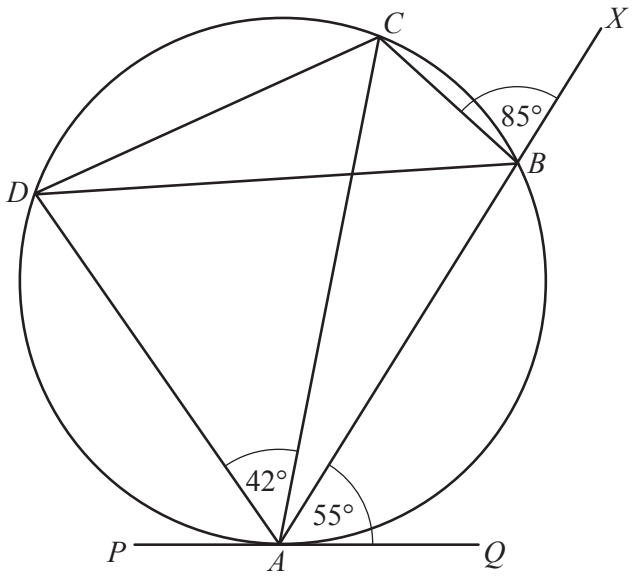
填空：①圆周角　②180°　③180°　④和　⑤相等

切线弦角等于对弧的圆周角

	图像	数量关系
同一关系		$55° = 55°$。

点石成金　题目出现切线、过切点的弦及所求角时，先用切线弦定理联系夹角与对应圆周角。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q17(b)]



NOT TO SCALE

ABCD is a cyclic quadrilateral, *ABX* is a straight line and *PQ* is a tangent to the circle at *A*.
Angle *CBX* = 85°, angle *BAQ* = 55° and angle *CAD* = 42°.

Find

(b) angle *ACB*

ABCD 是圆内接四边形，*A*、*B*、*X* 在同一直线上，直线 *PQ* 是圆在 *A* 处的切线。已知 $\angle CBX = 85°$，$\angle BAQ = 55°$，$\angle CAD = 42°$。示意图未按比例绘制。
(b) 求 $\angle ACB$。

解答　*PQ* 是圆在 *A* 处的切线，由切线弦定理，得
$\angle ACB = \angle BAQ = 55°$。
答：$\angle ACB = 55°$。

方法：先看 A 处切线与弦 AB，再沿弦找对应的圆周角。

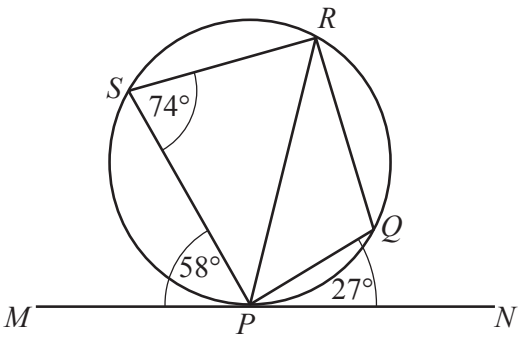
辨析：切线弦角是切线与弦的夹角，圆周角是两弦在圆上相交的角。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/43 Q4(b)(i)]

提示：看切点 P 处夹角所夹的弦，再找对应圆周角。

(b)



NOT TO SCALE

P, Q, R and S lie on a circle.
MPN is a tangent to the circle at P.
Angle $MPS = 58°$, angle $PSR = 74°$ and angle $QPN = 27°$.

(i) Find angle PRS.

(b) P、Q、R、S 四点在同一个圆上。直线 MPN 是圆在 P 处的切线。已知 $\angle MPS = 58°$，$\angle PSR = 74°$，$\angle QPN = 27°$。示意图未按比例绘制。
(i) 求 $\angle PRS$。

✓ **答案**

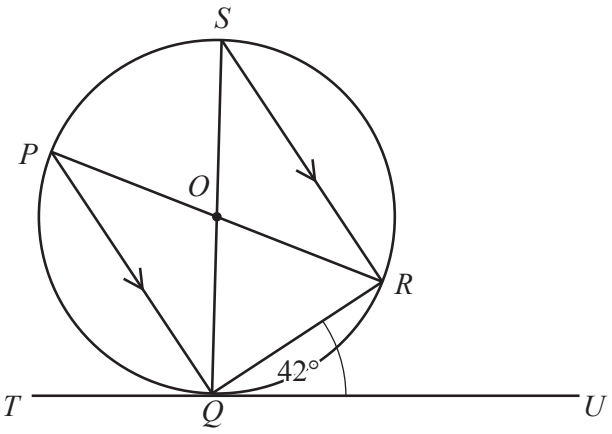
58°

解析 MPN 是圆在 P 处的切线，由切线弦定理，得
$\angle PRS = \angle MPS = 58°$。
答：$\angle PRS = 58°$。

2. [2023 · May/June 0580/21 Q12(b)(i)]

提示：沿弦 QR 找 S 处圆周角，与 Q 处切线弦角比较。

(b)



NOT TO SCALE

P, Q, R and S are points on the circle and TQU is a tangent to the circle at Q.
PR and SQ intersect at the centre of the circle, O, and PQ is parallel to SR.
Angle $RQU = 42°$.

Calculate

(i) angle QSR

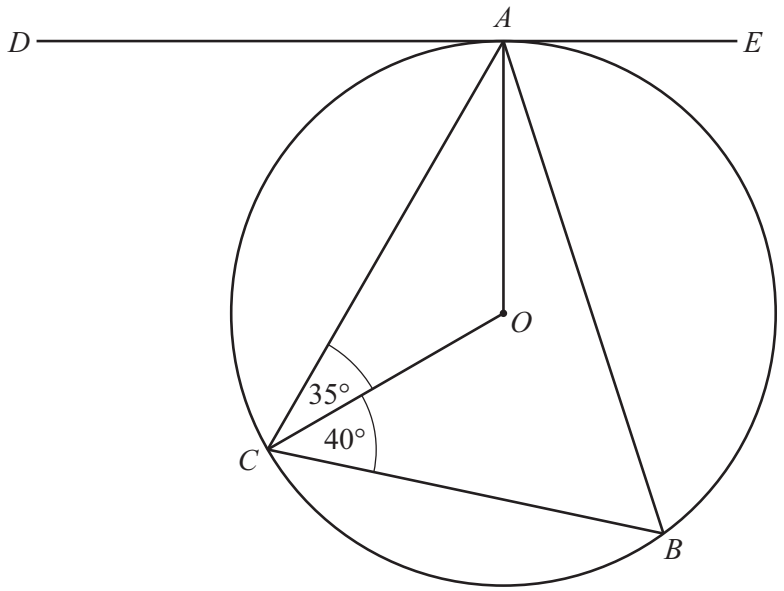
(b) P、Q、R、S 是圆上的点，直线 TQU 是圆在 Q 处的切线。PR 与 SQ 相交于圆心 O，且 PQ 与 SR 平行。已知 $\angle RQU = 42°$。示意图未按比例绘制。
(i) 计算 $\angle QSR$。

✓ **答案**

42°

解析 TQU 是圆在 Q 处的切线，由切线弦定理，得
$\angle QSR = \angle RQU = 42°$。
答：$\angle QSR = 42°$。

3. [2025 · May/June 0580/21 Q10(c)]
提示：先利用两条半径相等求出弧 A C 所对的圆心角。



NOT TO SCALE

A, B and C are three points on a circle, centre O.
DE is a tangent to the circle at A.
Angle $ACO = 35°$ and angle $BCO = 40°$.

Find

(b) angle ABC

(c) angle DAC

A、B、C 是圆上的三个点，圆心为 O。直线 DE 在点 A 处与圆相切。已知 $\angle ACO = 35°$，$\angle BCO = 40°$。图形未按比例绘制。求：
(b) $\angle ABC$；
(c) $\angle DAC$。

✓ **答案**

55°

解析 由两条半径相等，得

$$OA = OC$$

$$\angle OAC = \angle ACO = 35°$$

由三角形内角和，得

$$\angle AOC = 180° - 35° - 35° = 110°$$

由同弧所对的圆周角等于圆心角的一半，得

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \times 110° = 55°$$

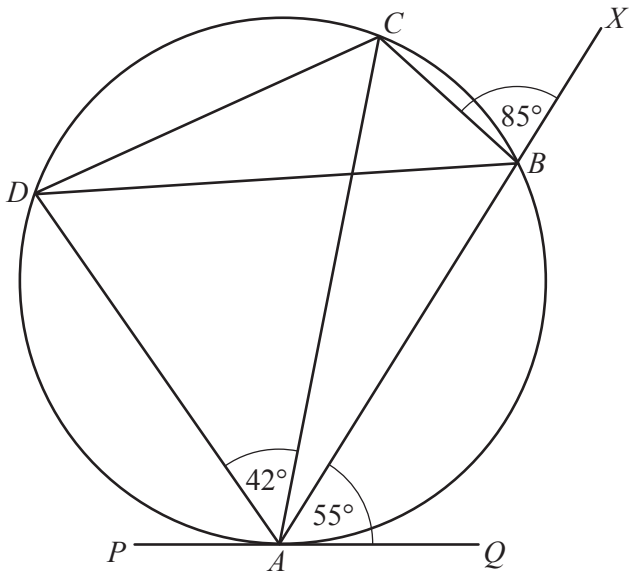
由切线弦定理，得

$$\angle DAC = \angle ABC = 55°$$

答：$\angle DAC = 55°$。

4. [2023 · February/March 0580/22 Q17(e)]

提示：先补三角形 ABC 的内角，再看 A 处平角怎样拆分。



NOT TO SCALE

ABCD is a cyclic quadrilateral, *ABX* is a straight line and *PQ* is a tangent to the circle at *A*.
Angle *CBX* = 85°, angle *BAQ* = 55° and angle *CAD* = 42°.

Find

(e) angle *PAD*.

ABCD 是圆内接四边形，*A*、*B*、*X* 在同一直线上，直线 *PQ* 是圆在 *A* 处的切线。已知 $\angle CBX = 85°$，$\angle BAQ = 55°$，$\angle CAD = 42°$。示意图未按比例绘制。

(e) 求 $\angle PAD$。

✓ **答案**

53°

解析 由切线弦定理，得

$\angle ACB = \angle BAQ = 55°$。

$\because$ *A*、*B*、*X* 共线，$\therefore$

$\angle ABC = 180° - 85° = 95°$。

在三角形 *ABC* 中，

$\angle BAC = 180° - 95° - 55° = 30°$。

由图中各射线的位置，得

$\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC = 42° + 30° = 72°$。

$\because$ *P*、*A*、*Q* 共线，$\therefore$

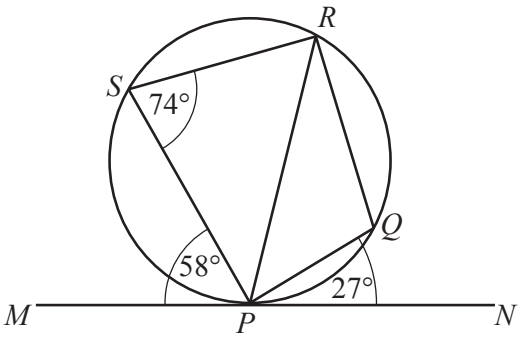
$\angle PAD = 180° - \angle DAB - \angle BAQ = 180° - 72° - 55° = 53°$。

答：$\angle PAD = 53°$。

5. [2023 · May/June 0580/43 Q4(b)(iii)]

提示：先补三角形 PRS 的内角，再看 P 处各射线的顺序。

(b)



NOT TO SCALE

P, Q, R and S lie on a circle.
MPN is a tangent to the circle at P.
Angle $MPS = 58°$, angle $PSR = 74°$ and angle $QPN = 27°$.

(iii) Find angle RPQ.

(b) P、Q、R、S 四点在同一个圆上。直线 MPN 是圆在 P 处的切线。已知 $\angle MPS = 58°$，$\angle PSR = 74°$，$\angle QPN = 27°$。示意图未按比例绘制。

(iii) 求 $\angle RPQ$。

✓ **答案**

47°

解析 由切线弦定理，得

$\angle PRS = \angle MPS = 58°$。

在三角形 PRS 中，

$\angle SPR = 180° - 74° - 58° = 48°$。

$\because$ M、P、N 共线，$\therefore$

$\angle SPN = 180° - 58° = 122°$。

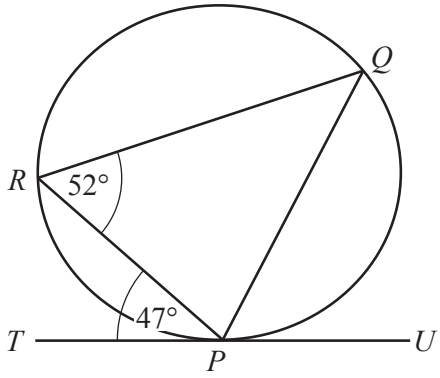
由图中各射线的位置，得

$\angle RPQ = \angle SPN - \angle SPR - \angle QPN = 122° - 48° - 27° = 47°$。

答：$\angle RPQ = 47°$。

6. [2023 · October/November 0580/22 Q17(b)]
提示：先沿弦 PR 找对应圆周角，再看三角形的另一个已知角。

(b)



NOT TO SCALE

P, Q and R are points on a circle.
TU is a tangent to the circle at P.
Angle $TPR = 47°$ and angle $PRQ = 52°$.

Find angle RPQ.

Angle RPQ

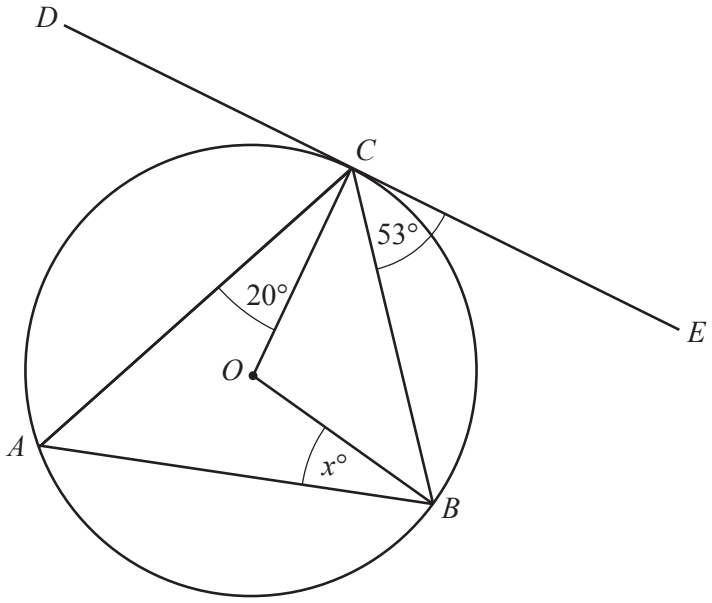
(b) P、Q、R 是圆上的点。直线 TU 是圆在 P 处的切线。已知 $\angle TPR = 47°$，$\angle PRQ = 52°$。示意图未按比例绘制。
求 $\angle RPQ$。

✓ **答案**

81°

解析 TU 是圆在 P 处的切线，由切线弦定理，得
$\angle PQR = \angle TPR = 47°$。
在三角形 PQR 中，
$\angle RPQ = 180° - 47° - 52° = 81°$。
答：$\angle RPQ = 81°$。

7. [2023 · October/November 0580/21 Q17]
提示：连接 OA，比较两组半径，再看 A 处角的拆分。



NOT TO SCALE

A, B and C are points on the circumference of a circle, centre O.
Tangent DE touches the circle at C.
Angle $BCE = 53°$ and angle $ACO = 20°$.

Find the value of x.

A、B、C 是圆周上的点，圆心为 O。切线 DE 在 C 处与圆相切。已知 $\angle BCE = 53°$，$\angle ACO = 20°$。图中 $\angle ABO = x°$。示意图未按比例绘制。
求 x 的值。

✓ **答案**

33

解析 连接 OA。由切线弦定理，得
$\angle BAC = \angle BCE = 53°$。
$\because OA$、OC 是同一圆的半径，$\therefore$
$OA = OC$，
$\angle OAC = \angle ACO = 20°$。
由图中各射线的位置，得
$\angle BAO = \angle BAC - \angle OAC = 53° - 20° = 33°$。
$\because OA$、OB 是同一圆的半径，$\therefore$
$OA = OB$，
$\angle ABO = \angle BAO = 33°$。
故 $x = 33$。
答：$x = 33$。

4.15 用对角互补求圆内接四边形的角

题型 1 用对角互补求圆内接四边形的角（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **内对角互补：**例图中，$ABCD$ 的四个顶点在同一圆上，构成圆内接四边形。以 B 为顶点的角记为 $\angle ABC$。它与 $\angle ADC$ 是一组内对角。

$$\angle ABC+\angle ADC=\underline{\qquad}$$

② **外角转内对角：**例图中，A,B,X 共线，$\angle CBX=85°$。先用平角求内角，再用对角互补。圆内接四边形的外角等于内对角。

$$\angle ABC=180°-85°=95°$$

$$\angle ADC=180°-95°=\underline{\qquad}$$

$$\angle ADC=\angle CBX$$

③ **切弦夹角相等：**例图中，PQ 是圆在 A 处的切线。由弦切角定理，切弦夹角等于该弦在另一弓形内所对的圆周角。

$$\angle ACB=\angle BAQ=55°$$

④ **三角形中求角：**例图的三角形 ABC 中，已有两个内角。由三角形内角和，用 $180°$ 减去这两个角。

$$\angle BAC=180°-\angle ABC-\angle ACB=180°-95°-55°=\underline{\qquad}$$

⑤ **分角拼成对角：**例图中，AC 把 $\angle BAD$ 分成两个角。先相加求出整个内角，再求内对角。

$$\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD$$

例如，一个内角分为 $20°$ 与 $40°$，则

$$\text{该内角}=20°+40°=60°$$

$$\text{内对角}=180°-60°=120°$$

⑥ **由角判定共圆：**尚未说明四点共圆时，先用四边形内角和求未知数。一组内对角的和为 $180°$，则四点共圆。例如，四个内角依次为 $x°$、$(x+20)°$、$100°$、$80°$，有

$$x+(x+20)+100+80=360$$

$$2x=160$$

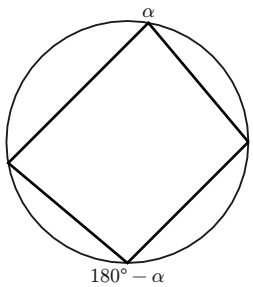
$$x=80$$

$$80°+100°=180°$$

故该四边形是圆内接四边形。

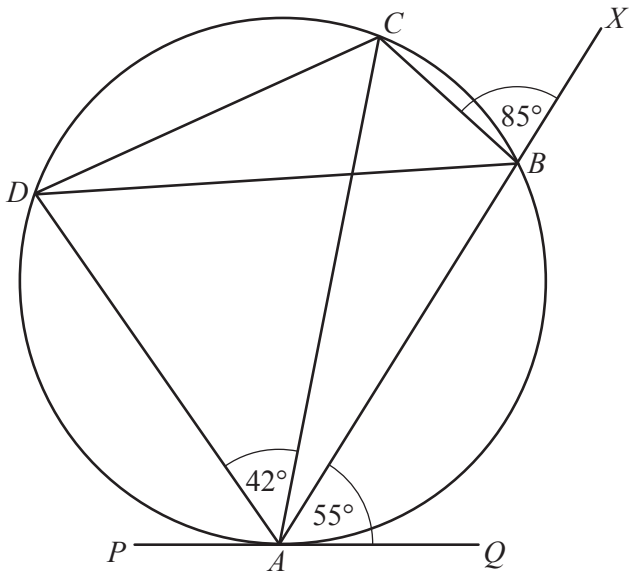
填空：①180°　②85°　③30°

圆内接四边形的一组对角互补

	图像	数量关系
同一关系		$\alpha+(180°-\alpha)=180°$。

点石成金　题目出现圆内接四边形，要求内角或给出外角时，先确定所求角的内对角。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q17(c)]



NOT TO SCALE

$ABCD$ is a cyclic quadrilateral, ABX is a straight line and PQ is a tangent to the circle at A.
Angle $CBX = 85°$, angle $BAQ = 55°$ and angle $CAD = 42°$.

Find

(c) angle ADC

$ABCD$ 是圆内接四边形，A, B, X 在同一条直线上，PQ 是圆在 A 处的切线。$\angle CBX = 85°$，$\angle BAQ = 55°$，$\angle CAD = 42°$。图形未按比例绘制。
(c) 求 $\angle ADC$。

解答　由 A, B, X 共线，得
$\angle ABC = 180° - \angle CBX = 180° - 85° = 95°$。
$\because$ $ABCD$ 是圆内接四边形，内对角互补，
$\therefore \angle ADC = 180° - \angle ABC = 180° - 95° = 85°$。
答：$\angle ADC = 85°$。

方法：先看 B 处外角与共线关系，从平角求内角，再找内对角。

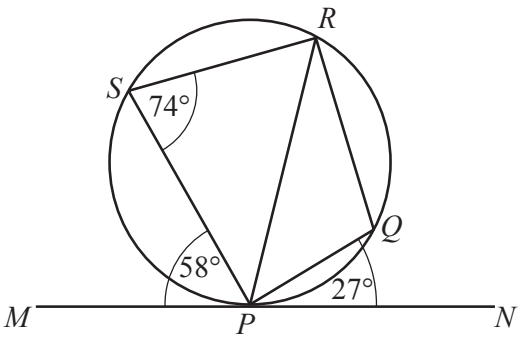
辨析：邻补角是共线处拼成平角的两角，内对角是四边形相对顶点的两角。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/43 Q4(b)(ii)]

提示：看 Q 与 S 这两个相对顶点，配出互补的两角。

(b)



NOT TO SCALE

P, Q, R and S lie on a circle.
MPN is a tangent to the circle at P.
Angle $MPS = 58°$, angle $PSR = 74°$ and angle $QPN = 27°$.

(ii) Find angle PQR.

(b) P, Q, R, S 四点在同一个圆上。直线 MPN 是圆在 P 处的切线。$\angle MPS = 58°$，$\angle PSR = 74°$，$\angle QPN = 27°$。图形未按比例绘制。

(ii) 求 $\angle PQR$。

✓ **答案**

106°

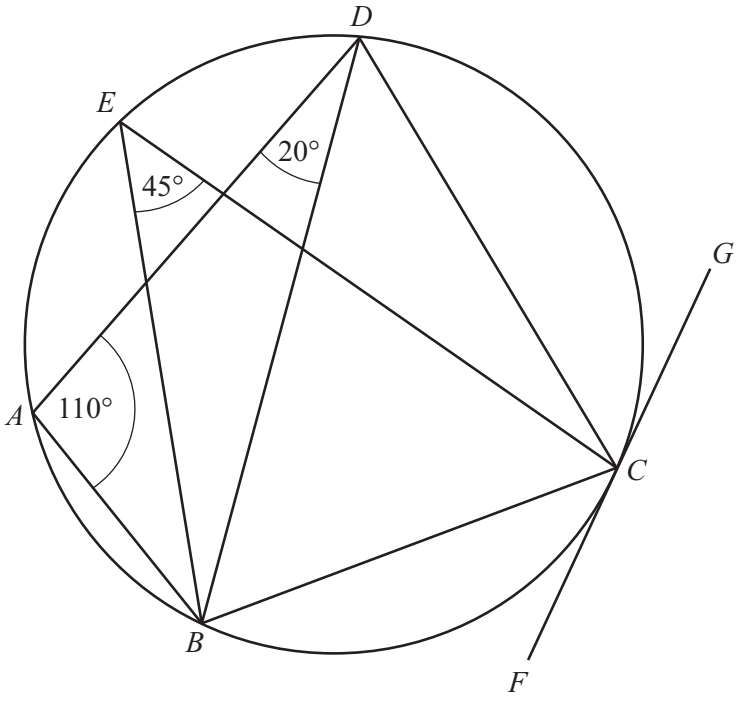
解析 ∵ P, Q, R, S 在同一个圆上，内对角互补，

∴ $\angle PQR + \angle PSR = 180°$。

$\angle PQR = 180° - 74° = 106°$。

答：$\angle PQR = 106°$。

2. [2025 · February/March 0580/22 Q14(a)]
提示：在圆内接四边形中找出与 angle B C D 相对的内角。



NOT TO SCALE

A, B, C, D and E lie on a circle.
FG is a tangent to the circle at C.
Angle $BAD = 110°$, angle $ADB = 20°$ and angle $BEC = 45°$.

(a) Find angle BCD.
Give a geometrical reason for your answer.

A、B、C、D、E 在同一个圆上。直线 FG 在点 C 处与圆相切。已知 $\angle BAD = 110°$，$\angle ADB = 20°$，$\angle BEC = 45°$。图形未按比例绘制。
(a) 求 $\angle BCD$，并给出几何理由。

✓ **答案**

$70°$

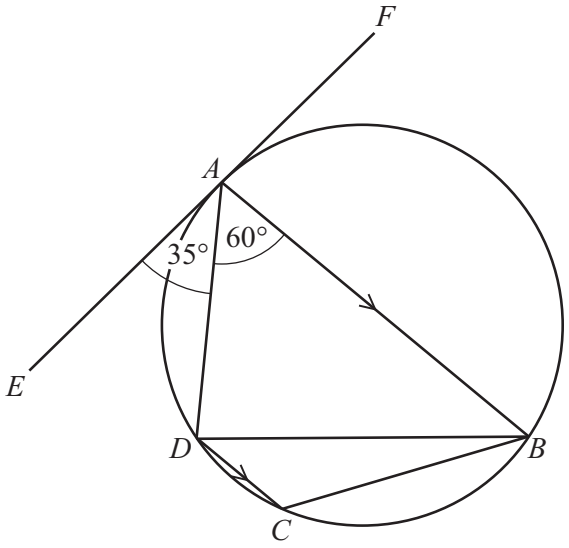
解析 $ABCD$ 是圆内接四边形，其内对角之和为 $180°$，故

$$\angle BCD + \angle BAD = 180°$$

$$\angle BCD = 180° - 110° = 70°$$

答：$\angle BCD = 70°$，理由是圆内接四边形的内对角互补。

3. [2025 · May/June 0580/23 Q13(a)]
提示：先找出 angle D C B 的内对角。



NOT TO SCALE

A, B, C and D are points on a circle.
EF is a tangent to the circle at A.
AB is parallel to DC.

(a) Find angle DCB, giving a geometrical reason.

A、B、C、D 是圆上的点。直线 EF 在点 A 处与圆相切，AB 与 DC 平行。图中 $\angle EAD = 35°$，$\angle DAB = 60°$。图形未按比例绘制。

(a) 求 $\angle DCB$，并给出几何理由。

✓ **答案**

$120°$

解析 $ABCD$ 是圆内接四边形，其内对角之和为 $180°$，故

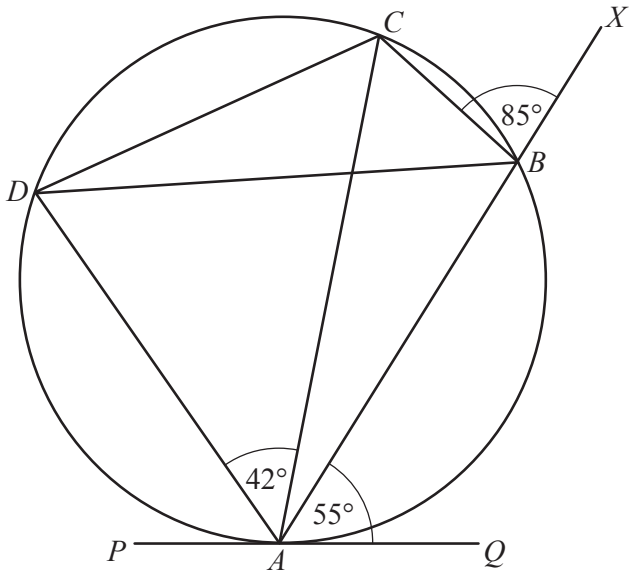
$$\angle DCB + \angle DAB = 180°$$

$$\angle DCB = 180° - 60° = 120°$$

答：$\angle DCB = 120°$，理由是圆内接四边形的内对角互补。

4. [2023 · February/March 0580/22 Q17(d)]

提示：看 B 处外角和 A 处切弦角，逐步求出并拼合 A 处内角。



NOT TO SCALE

$ABCD$ is a cyclic quadrilateral, ABX is a straight line and PQ is a tangent to the circle at A.
Angle $CBX = 85°$, angle $BAQ = 55°$ and angle $CAD = 42°$.

Find

(d) angle BCD

$ABCD$ 是圆内接四边形，A, B, X 在同一条直线上，PQ 是圆在 A 处的切线。$\angle CBX = 85°$，$\angle BAQ = 55°$，$\angle CAD = 42°$。图形未按比例绘制。

(d) 求 $\angle BCD$。

✓ **答案**

108°

解析 由 A, B, X 共线，得

$\angle ABC = 180° - 85° = 95°$。

由弦切角定理，得

$\angle ACB = \angle BAQ = 55°$。

由三角形内角和，得

$\angle BAC = 180° - 95° - 55° = 30°$。

$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 30° + 42° = 72°$。

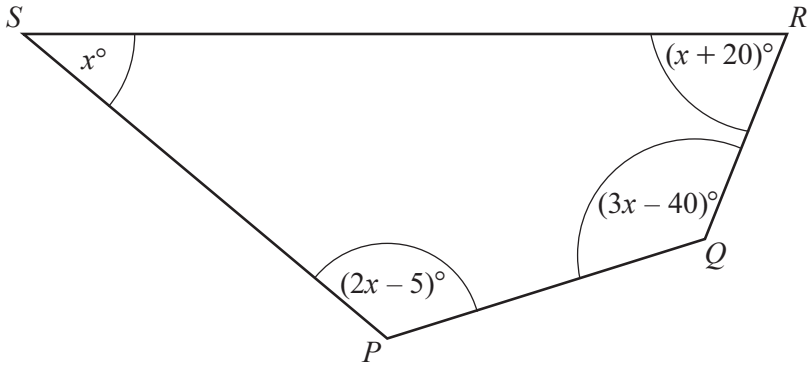
$\because$ $ABCD$ 是圆内接四边形，内对角互补，

$\therefore \angle BCD = 180° - \angle BAD = 180° - 72° = 108°$。

答：$\angle BCD = 108°$。

5. [2023 · May/June 0580/42 Q1(d)]
提示：先看四个内角列总和，再检验相对顶点的两角之和。

(d)



NOT TO SCALE

Show that $PQRS$ is a cyclic quadrilateral.

(d) 图中，四边形 $PQRS$ 的内角为 $\angle PSR = x°$，$\angle SRQ = (x + 20)°$，$\angle PQR = (3x - 40)°$，$\angle SPQ = (2x - 5)°$。图形未按比例绘制。证明 $PQRS$ 是圆内接四边形。

✓ **答案** $x = 55$，一组内对角之和为 180°，故 $PQRS$ 是圆内接四边形。

解析 由四边形内角和为 360°，得

$x + (x + 20) + (3x - 40) + (2x - 5) = 360$。

$7x - 25 = 360$。

$7x = 385$。

$x = 55$。

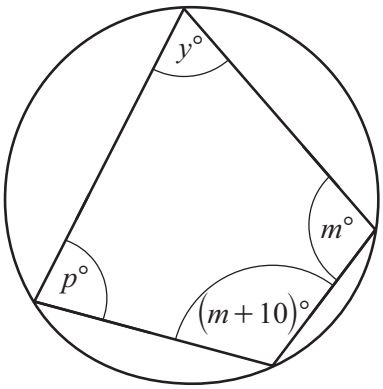
$\therefore \angle PSR = 55°$，

$\angle PQR = (3 \times 55 - 40)° = 125°$。

$\angle PSR + \angle PQR = 55° + 125° = 180°$。

一组内对角互补，故 $PQRS$ 是圆内接四边形。

6. [2025 · October/November 0580/23 Q21]
提示：先用对角互补求出 p 与 m 的和，再结合它们的比。



NOT TO SCALE

The diagram shows a cyclic quadrilateral.
The ratio $p : m = 2 : 3$.

Find the value of y.

图中是一个圆内接四边形，四个内角沿圆周依次为 $y°$、$m°$、$(m + 10)°$、$p°$。已知比 $p : m = 2 : 3$。图形未按比例绘制。求 y 的值。

✓ **答案**

解析 圆内接四边形的内对角互补，故

$$p+m=180$$

由 $p:m=2:3$，得

$$m=180\times\frac{3}{2+3}=108$$

$$m+10=108+10=118$$

另一组内对角也互补，故

$$y+(m+10)=180$$

$$y=180-118=62$$

答：$y=62$。

4.16 相似图形的长度

题型 1 相似三角形：对应边写成同一个比（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **相似图形关系：**例图中，三角形 ABC 与 DEF 相似。对应角相等，对应边按同一倍数改变。

② **按名称顺序配边：**相似名称中，同一位置的字母表示对应顶点。对应顶点连成的边叫对应边。

三角形 ABC	三角形 DEF
顶点：A,B,C	顶点：D,E,F
底边：BC	底边：EF
竖边：AC	竖边：_____

③ **同向列出比例：**例图边长统一用厘米，大图边长除以对应的小图边长。所得的比叫_____，各组的比相等。

$$\frac{DF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

$$\frac{h}{5.6}=\frac{8.1}{7.2}=1.125$$

④ **同乘求出未知数：**上式两边同乘 5.6，得到未知数的值。

$$h=5.6\times1.125=6.3$$

图中竖边长为 h cm，h 表示厘米数。

⑤ **交叉图判相似：**交叉图中，$AB\parallel CD$，AD 与 BC 相交于 X。平行线的内错角相等，交点处的对顶角相等。

$$\angle ABX=\angle DCX$$

$$\angle AXB=\angle DXC$$

两组对应角分别相等，故三角形 ABX 与 DCX 相似。

⑥ **整段长度相加：**点 X 在线段 BC 内，整段长等于两段长的_____。

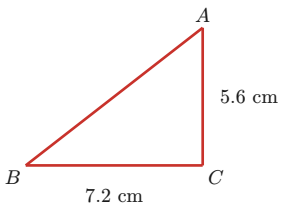
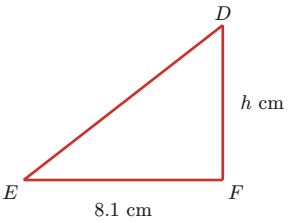
$$BC=BX+XC$$

如两段分别长 2 cm 和 3 cm，则

$$BC=2+3=5\text{ cm}$$

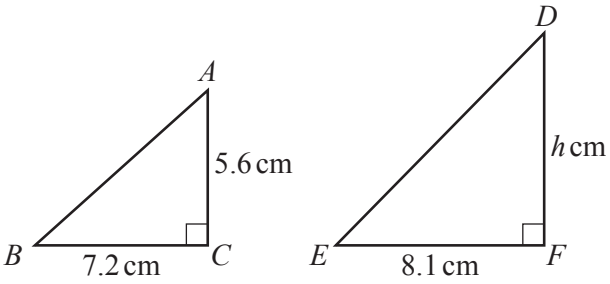
填空：①DF　②放大倍率　③和

对应边：两个三角形相似

	三角形 ABC	三角形 DEF
对应图形		
底边	$BC = 7.2$ cm	$EF = 8.1$ cm
竖边	$AC = 5.6$ cm	$DF = h$ cm
同一倍率	$\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{DF}{AC}$	

点石成金　题目出现相似三角形或两底边平行的交叉图，并求边长时，先确定对应顶点，再把对应边写成同一个比。

例 1　[2023 · May/June 0580/11 Q23]



NOT TO SCALE

Triangle ABC is similar to triangle DEF.

Calculate the value of h.

三角形 ABC 与三角形 DEF 相似。图中，$\angle ACB = \angle DFE = 90°$，$BC = 7.2$ cm，$AC = 5.6$ cm，$EF = 8.1$ cm，$DF = h$ cm。图形未按比例绘制。求 h 的值。

解答　由三角形 ABC 与 DEF 相似，得

$$\frac{h}{5.6} = \frac{8.1}{7.2}$$

$$h = \frac{5.6 \times 8.1}{7.2} = 6.3$$

答：$h = 6.3$。

方法：先看相似名称的字母顺序，配好对应边，再统一比值方向。

辨析：相似是形状相同，全等是形状与大小都相同。

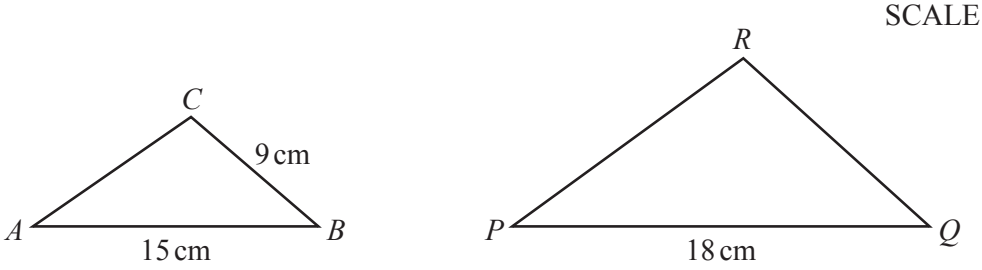
拓展：相似三角形的周长比等于对应边长比。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/12 Q21]

提示：按名称顺序配边，比较各组比例的分子是否属于同一三角形。

NOT TO SCALE



Triangle ABC is similar to triangle PQR.

Calculate QR.

三角形 ABC 与三角形 PQR 相似。图中，$AB = 15$ cm，$BC = 9$ cm，$PQ = 18$ cm。图形未按比例绘制。求 QR 的长度。

✓ **答案**

10.8 cm

解析 由三角形 ABC 与 PQR 相似，知 AB 对应 PQ，BC 对应 QR，得

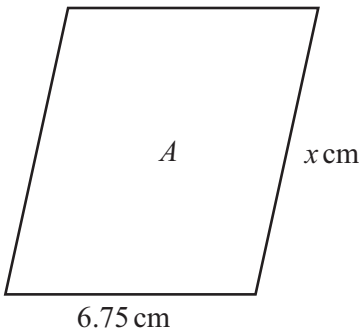
$$\frac{QR}{9} = \frac{18}{15}$$

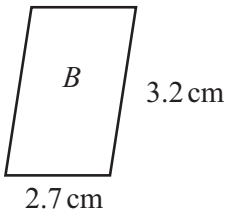
$$QR = \frac{9 \times 18}{15} = 10.8 \text{ cm}$$

答：$QR = 10.8$ cm。

2. [2024 · October/November 0580/13 Q24]

提示：将两条下边配成一组，两条右侧边配成一组。





NOT TO SCALE

Shape A is mathematically similar to shape B.

Calculate the value of x.

图形 A 与图形 B 相似。图形 A 的下边长为 6.75 cm，右侧边长为 x cm；图形 B 的对应下边长为 2.7 cm，对应右侧边长为 3.2 cm。图形未按比例绘制。求 x 的值。

✓ **答案**

8

解析 由图形 A 与图形 B 相似，对应边的比相等，得

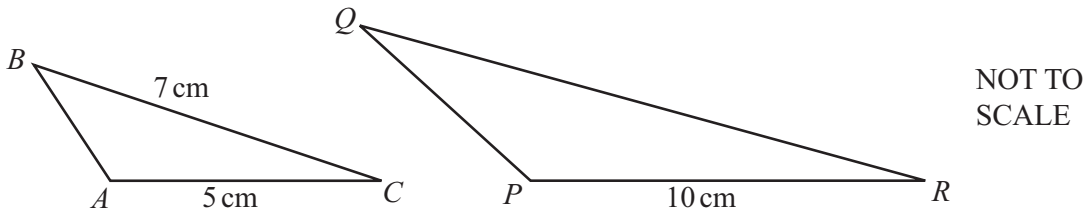
$$\frac{x}{3.2} = \frac{6.75}{2.7}$$

$$x = 3.2 \times \left(\frac{6.75}{2.7}\right) = 3.2 \times 2.5 = 8$$

答：$x = 8$。

3. [2025 · February/March 0580/12 Q25]

提示：按相似名称的字母顺序，确定 Q R 的对应边。



NOT TO SCALE

Triangle ABC is mathematically similar to triangle PQR.

Show that $QR = 14$ cm.

三角形 ABC 与三角形 PQR 相似。图中，$BC = 7$ cm，$AC = 5$ cm，$PR = 10$ cm。图形未按比例绘制。证明 $QR = 14$ cm。

✓ **答案**

14 cm

解析 由三角形 ABC 与三角形 PQR 相似，AC 与 PR、BC 与 QR 分别对应，得

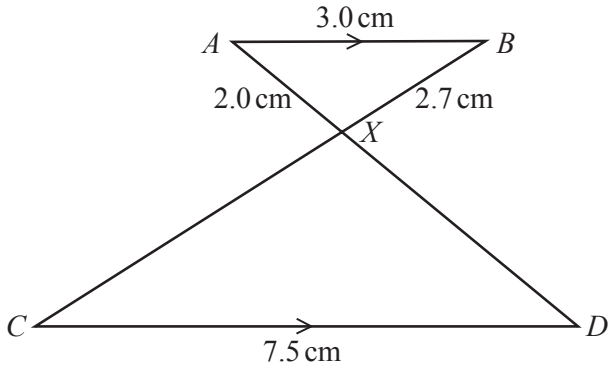
$$\frac{QR}{BC} = \frac{PR}{AC}$$

$$QR = 7 \times \frac{10}{5} = 14 \text{ cm}$$

故 $QR = 14$ cm，得证。

4. [2023 · February/March 0580/22 Q10]

提示：先看平行线与交点处的角，再分清所求的是整段还是分段。



NOT TO SCALE

In the diagram, AB and CD are parallel.
The lines CB and AD intersect at X.
$AB = 3.0$ cm, $AX = 2.0$ cm, $BX = 2.7$ cm and $CD = 7.5$ c

Find the length of BC.

图中，AB 与 CD 平行，直线 CB 与 AD 相交于点 X。已知 $AB = 3.0$ cm，$AX = 2.0$ cm，$BX = 2.7$ cm，$CD = 7.5$ cm。图形未按比例绘制。求 BC 的长度。

✓ **答案**

9.45 cm

解析　由 $AB \parallel CD$，内错角相等，得

$$\angle ABX = \angle DCX$$

又对顶角相等，得

$$\angle AXB = \angle DXC$$

两组对应角分别相等，故三角形 ABX 与 DCX 相似。由对应边成比例，得

$$\frac{XC}{BX} = \frac{CD}{AB}$$

$$\frac{XC}{2.7} = \frac{7.5}{3.0}$$

$$XC = \frac{2.7 \times 7.5}{3.0} = 6.75 \text{ cm}$$

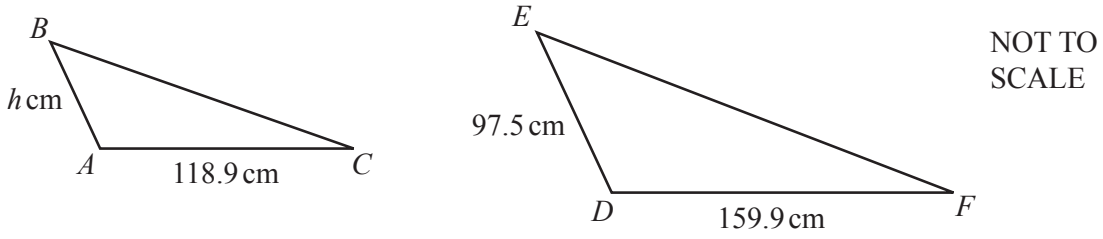
点 X 在线段 BC 内，故

$$BC = BX + XC = 2.7 + 6.75 = 9.45 \text{ cm}$$

答：$BC = 9.45$ cm。

5. [2024 · February/March 0580/12 Q23]

提示：按相似名称的字母顺序，配出 A B 与 A C 的对应边。



Triangle ABC is mathematically similar to triangle DEF.

Calculate the value of h.

三角形 ABC 与三角形 DEF 相似。图中 $AB = h$ cm，$AC = 118.9$ cm，$DE = 97.5$ cm，$DF = 159.9$ cm。图形未按比例绘制。求 h 的值。

✓ **答案**

$$72.5$$

解析　由三角形 ABC 与三角形 DEF 相似，AB 对应 DE，AC 对应 DF，得

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\frac{h}{97.5} = \frac{118.9}{159.9}$$

$$h = \frac{97.5 \times 118.9}{159.9} = 72.5$$

答：$h = 72.5$。

4.17 把相似长度比平方或立方，换算面积与体积比

题型 1 把相似长度比平方或立方，换算面积与体积比（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **体积比求边比：**两个相似立体的体积为 81cm^3 和 24cm^3。设较大与较小立体的对应边长比为 k。体积比为长度比的 _____ 次方。

$$k=\left(\frac{81}{24}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

② **边长比求面积：**本例的对应边长比为 $\frac{3}{2}$。表面积比为长度比的 _____ 次方。

$$\frac{\text{大表面积}}{\text{小表面积}}=k^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

③ **对应边长求比：**相似图形的对应边长分别为 2 cm 和 3 cm。求大图形与小图形的长度比，用大边长除以小边长。

$$k=\frac{3}{2}$$

$$\frac{\text{大面积}}{\text{小面积}}=k^2=\frac{9}{4}$$

④ **面积比求边长：**相似三角形的面积分别为 9cm^2 和 16cm^2。小三角形的最短边为 3 cm，大三角形的最短边记为 l。长度比取面积比的 _____ 平方根。

$$k=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$$

$$l=3\times\frac{4}{3}=4\text{ cm}$$

⑤ **质量密度求体积：**铜像的质量为 16000 kg，密度为 $8000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$。用质量除以密度求体积。以 m 表示质量，ρ 表示密度，V 表示体积。

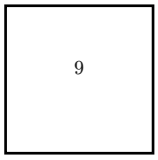
$$V=\frac{m}{\rho}=\frac{16000}{8000}=2\text{m}^3$$

⑥ **体积比求高度：**上述铜像的体积为 2m^3，高度为 4 m。相似模型的体积为 0.25m^3，高度记为 h。模型与铜像的体积比开立方后，乘铜像高度。

$$h=4\times\left(\frac{0.25}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=4\times\frac{1}{2}=2\text{ m}$$

填空：①3　②2　③正

长度倍率与面积、体积倍率

	边长 2	边长 3
相似正方形		
面积比	$\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$	
相似立体的体积比	$\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$	

点石成金　题目出现相似图形或立体，要求面积、体积或对应边长时，先把已知比换成对应边长比。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q18]

Two solids are mathematically similar and have volumes $81\,\text{cm}^3$ and $24\,\text{cm}^3$.
The surface area of the smaller solid is $44\,\text{cm}^2$.

Calculate the surface area of the larger solid.

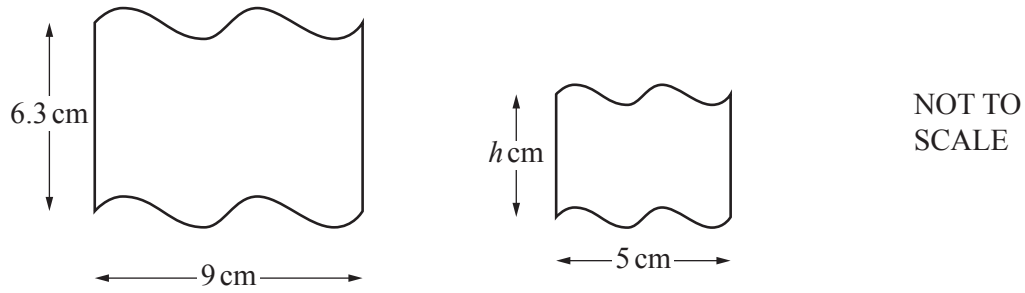
两个立体相似，体积分别为 81cm^3 和 24cm^3。较小立体的表面积为 44cm^2。
求较大立体的表面积。

解答　由相似立体的体积比，得较大与较小立体的对应边长比
$k=\left(\frac{81}{24}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$。
表面积比等于对应边长比的平方，设较大立体的表面积为 S，则
$\frac{S}{44}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$，
$S=44\times\frac{9}{4}=99\text{cm}^2$。
答：较大立体的表面积为 99cm^2。

方法：先看两立体的体积，开立方求边比，再平方求表面积比。
辨析：开平方是由面积比求边比，开立方是由体积比求边比。

针对练习

1.　[2023 · October/November 0580/22 Q11(b)]
提示：先按对应边的大小顺序，再把边长比平方。



The two shapes are mathematically similar.

(b)　The area of the smaller shape is $16\,\text{cm}^2$.

Calculate the area of the larger shape.

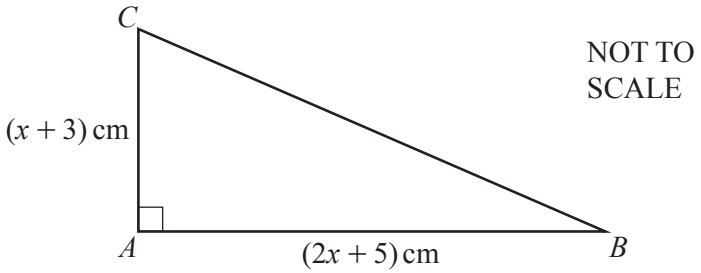
图形不按比例绘制。较大图形的横向长度为 9 cm，竖向长度为 6.3 cm；较小图形的对应横向长度为 5 cm，对应竖向长度为 h cm。两个图形相似。
(b) 较小图形的面积为 16cm^2。求较大图形的面积。

✓ **答案**

51.84cm^2

解析　较大与较小图形的对应边长比为
$k=\frac{9}{5}$。
面积比等于对应边长比的平方，设较大图形的面积为 A，则
$\frac{A}{16}=\left(\frac{9}{5}\right)^2$，
$A=16\times\left(\frac{9}{5}\right)^2=51.84\text{cm}^2$。
答：较大图形的面积为 51.84cm^2。

2. [2023 · May/June 0580/42 Q3(b)(ii)]
提示：先比两条直角边的长度，再将面积比开平方。



The diagram shows a right-angled triangle ABC.

(a) (i) The area of the triangle is $60\,\text{cm}^2$.

Show that $2x^2+11x-105=0$.

(ii) Solve by factorisation.

$$2x^2+11x-105=0$$

(b) Triangle ABC is similar to triangle DEF.
Triangle DEF has an area of $93.75\,\text{cm}^2$.

(ii) Find the length of the shortest side of triangle DEF.

直角三角形 ABC 的两条直角边为$(x+3)$cm、$(2x+5)$cm。（a）（i）面积为 60cm²。证明$2x^2+11x-105=0$。（ii）用因式分解解此方程。（b）ABC 与 DEF 相似，DEF 面积为 93.75cm²。（ii）求 DEF 最短边的长度。

✓ **答案**

10 cm

解析 先解前问方程，确定 ABC 的边长。$(2x+21)(x-5)=0 \Longrightarrow x=-10.5$ 或 $x=5$ x=−10.5 会使边长为负，舍去。因此 x=5，两条直角边为 8cm、15cm，最短边为 8cm。 面积比等于对应边长比的平方。 $k=\sqrt{\frac{93.75}{60}}=\sqrt{1.5625}=1.25$ DEF 最短边 $=8\times1.25=10$ cm 答：10cm。

3. [2024 · May/June 0580/41 Q2(b)]
提示：先由图形 P 的面积求图形 Q 的面积。

(b) A shape P is enlarged by scale factor 3 to give shape Q.
Shape Q is then enlarged by scale factor $\frac{2}{5}$ to give shape R.

The area of shape P is $10\,\text{cm}^2$.

Calculate the area of shape R.

（b）图形 P 按比例因子 3 放缩，得到图形 Q。再将图形 Q 按比例因子 $\frac{2}{5}$ 放缩，得到图形 R。图形 P 的面积为 10cm^2。求图形 R 的面积。

✓ **答案**

14.4cm^2

解析 面积比等于对应边长比的平方，图形 Q 的面积为

$$10\times3^2=90\text{cm}^2$$

图形 R 的面积为

$$90 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 90 \times \frac{4}{25} = 14.4\text{cm}^2$$

答：图形 R 的面积为 14.4cm^2。

4. [2024 · October/November 0580/23 Q18]

提示：先将较大与较小立体的体积比开立方，求对应边长比。

Two mathematically similar solids have volumes $81\,\text{cm}^3$ and $24\,\text{cm}^3$.
The height of the smaller solid is $4.8\,\text{cm}$.

Calculate the height of the larger solid.

..... cm [3]

两个相似立体的体积分别为 81cm^3 和 24cm^3。较小立体的高度为 4.8 cm。求较大立体的高度。

✓ **答案**

7.2 cm

解析 设较大立体与较小立体的对应边长比为 k。由体积比等于对应边长比的立方，得

$$k^3 = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}$$

$$k = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

较大立体的高度为

$$4.8 \times \frac{3}{2} = 7.2 \text{ cm}$$

答：较大立体的高度为 7.2 cm。

5. [2023 · May/June 0580/43 Q3(b)]

提示：先由质量和密度求体积，再把同序体积比开立方。

(b) A bronze statue is $4.5\,\text{m}$ high and has a mass of $195\,200\,\text{kg}$.
The density of bronze is $8000\,\text{kg/m}^3$.
The volume of a mathematically similar model of the statue is $0.385\,\text{m}^3$.

Calculate the height of the model.
[Density = Mass ÷ Volume]

(b) 一座青铜雕像高 4.5 m，质量为 195200 kg。青铜的密度为 $8000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$。一个与该雕像相似的模型，其体积为 0.385m^3。求模型的高度。
[密度 = 质量 ÷ 体积]

✓ **答案**

1.13 m

解析 由体积等于质量除以密度，得铜像的体积
$V = \frac{195200}{8000} = 24.4\text{m}^3$。
模型与铜像相似，对应边长比为体积比的立方根，故
$k = \left(\frac{0.385}{24.4}\right)^{\frac{1}{3}}$。
设模型的高度为 h，则
$h = 4.5 \times \left(\frac{0.385}{24.4}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1.13$ m。
答：模型的高度约为 1.13 m。

4.18 统一单位，再按比例尺换算图距和实距

题型 1 统一单位，再按比例尺换算图距和实距（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **按比例换算：**图中 1 cm 表示实际 8 km。图距每增加 1 cm，实距增加 _____ km。

$$\text{实距（km）} = \text{图距（cm）} \times 8$$

② **量取图距：**图中用圆点标出城镇的位置。用直尺量两点中心之间的线段长度，读数单位为厘米。

③ **统一长度单位：**千米与厘米之间先经过米换算。1 km 等于 _____ cm。

千米换成厘米：

$2\ \text{km} = 2000\ \text{m} = 200000\ \text{cm}$

厘米换成千米：

$300000\ \text{cm} = 3000\ \text{m} = 3\ \text{km}$

④ **写成数值比例：**比例尺按图距比实距的顺序书写。两者先换成 _____ 单位，再将前项化为 1。

例如，图上 2 cm 表示实际 50 m：

$$50\ \text{m} = 5000\ \text{cm}$$

$$2 : 5000 = (2 \div 2) : (5000 \div 2) = 1 : 2500$$

⑤ **由比求实际长度：**比例尺 $1 : n$ 中，n 表示实距是图距的倍数。图距乘 n，所得实距与图距单位相同。

例如，比例尺为 $1 : 2500$，图距为 4 cm：

$$4 \times 2500\ \text{cm} = 10000\ \text{cm} = 0.1\ \text{km}$$

⑥ **按方位角定点：**方位角从出发点的北向顺时针量起。例如，某点在 T 的 060° 方位，距 T 为 12 km。沿用图中比例尺，先求图距。

$$\text{图距} = 12 \div 8 = 1.5\ \text{cm}$$

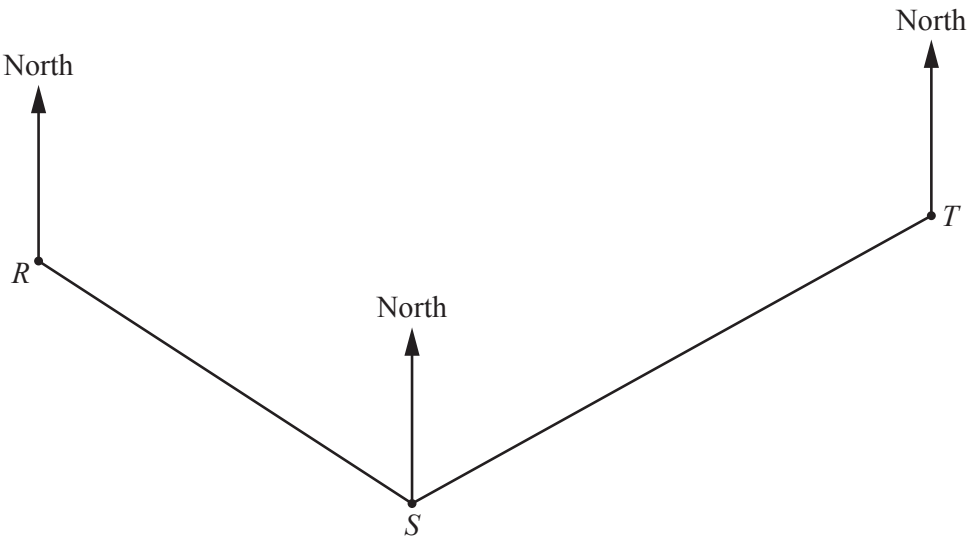
从 T 的北向顺时针转 60°，沿射线量取 1.5 cm 定点。

填空：①8　②100000　③同一

点石成金　题目出现比例尺，并要求实际距离或 $1 : n$ 形式时，先读出或量出图距，并确定两种长度的单位。

例 1 [2023 · February/March 0580/32 Q7(a)]

The scale drawing shows the positions of three towns, *R*, *S* and *T*, on a map.
RS and *ST* are straight roads between the towns.
The scale is 1 centimetre represents 8 kilometres.



Scale: 1 cm to 8 km

(a) Work out the actual distance between R and S.

比例图表示地图上三个城镇 R、S 和 T 的位置。RS 和 ST 是连接城镇的笔直道路。比例尺为图上 1 厘米表示实际 8 千米。图中标有 R、S、T，三处指北箭头均标注北；图示比例尺为 1 cm 表示 8 km。
(a) 求 R 与 S 之间的实际距离。

解答 用直尺量得图上 RS 的长度为 6 cm。
由图上 1 cm 表示实际 8 km，得

$$\text{实际距离} = 6 \times 8 = 48 \text{ km}$$

答：R 与 S 之间的实际距离为 48 km。

方法：先看每厘米代表的实距，再量两圆点中心间的线段。

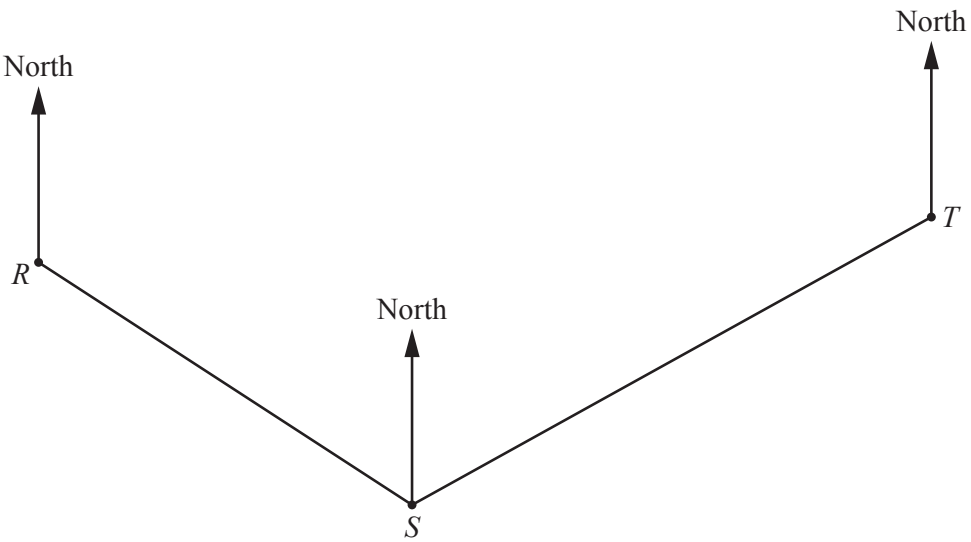
辨析：图距是纸上的长度，实距是对应的地面长度。

拓展：比例尺不变时，图距与实距成正比例。

针对练习

1. [2023 · February/March 0580/32 Q7(e)]
提示：看图距与实距的单位，统一后按图距在前写比。

The scale drawing shows the positions of three towns, R, S and T, on a map.
RS and ST are straight roads between the towns.
The scale is 1 centimetre represents 8 kilometres.



Scale: 1 cm to 8 km

(e) Write the scale 1 cm to 8 km in the form $1 : n$.

比例图表示地图上三个城镇 R、S 和 T 的位置。RS 和 ST 是连接城镇的笔直道路。比例尺为图上 1 厘米表示实际 8 千米。图中标有 R、S、T，三处指北箭头均标注北；图示比例尺为 1 cm 表示 8 km。
(e) 将比例尺 1 cm 表示 8 km 写成 $1 : n$ 的形式。

✓ **答案** $1 : 800000$

解析 将实际距离换成厘米，得

$$8 \text{ km} = 8000 \text{ m} = 800000 \text{ cm}$$

故图距与实距之比为

$$1 : 800000$$

答：比例尺为 $1 : 800000$。

2. [2023 · May/June 0580/43 Q3(a)(iii)]
提示：看厘米与米的差别，统一单位后将比的前项化为一。

(a) The scale drawing shows two sides, AB and BC, of a field.
The scale is 5 centimetres represents 200 metres.



Scale: 5 cm to 200 m

(iii) Find the scale in the form $1 : n$.

(a) 比例图表示一块田地的两条边 AB 和 BC。比例尺为图上 5 厘米表示实际 200 米。图中标有顶点 A、B、C；图示比例尺为 5 cm 表示 200 m。
(iii) 求比例尺，并写成 $1 : n$ 的形式。

✓ **答案** $1 : 4000$

解析 将实际长度换成厘米，得

$$200 \text{ m} = 20000 \text{ cm}$$

将比的前项化为 1，得

$$5 : 20000 = (5 \div 5) : (20000 \div 5) = 1 : 4000$$

答：比例尺为 $1 : 4000$。

3. [2023 · May/June 0580/12 Q11]
提示：看比例尺后项表示的倍数，乘得的长度仍以厘米计。

The distance from town A to town B on a map is 3.5 cm.
The scale on the map is 1 : 250 000.

Find the actual distance, in kilometres, from town A to town B.

地图上城镇 A 到城镇 B 的距离为 3.5 cm。地图的比例尺为 1 : 250000。
求城镇 A 到城镇 B 的实际距离，以千米为单位。

✓ **答案** 8.75 km

解析 由比例尺 1 : 250000，得

$$\text{实际距离} = 3.5 \times 250000 = 875000 \text{ cm}$$

$$875000 \text{ cm} = (875000 \div 100000) \text{ km} = 8.75 \text{ km}$$

答：城镇 A 到城镇 B 的实际距离为 8.75 km。

4. [2023 · October/November 0580/32 Q8(b)]
提示：看图距的厘米单位，按比例放大后再换成千米。

(b) Town A is 8.5 cm from town B on a map.
The scale of the map is 1 : 50 000.

Calculate the actual distance from town A to town B.
Give your answer in kilometres.

(b) 地图上城镇 A 距城镇 B 为 8.5 cm。地图的比例尺为 1 : 50000。
计算城镇 A 到城镇 B 的实际距离。答案以千米为单位。

✓ **答案** 4.25 km

解析 由比例尺 1 : 50000，得

$$\text{实际距离} = 8.5 \times 50000 = 425000 \text{ cm}$$

$$425000 \text{ cm} = (425000 \div 100000) \text{ km} = 4.25 \text{ km}$$

答：城镇 A 到城镇 B 的实际距离为 4.25 km。

5. [2023 · May/June 0580/21 Q7]
提示：看岛长的图上读数，结合比例尺求实距并核对单位。

The scale of a map is 1 : 125 000.
On a map, the length of an island is 9.4 cm.

Calculate the actual length of the island, giving your answer in kilometres.

一幅地图的比例尺为 1 : 125000。地图上一座岛的长度为 9.4 cm。
计算该岛的实际长度，答案以千米为单位。

✓ **答案** 11.75 km

解析 由比例尺 1 : 125000，得

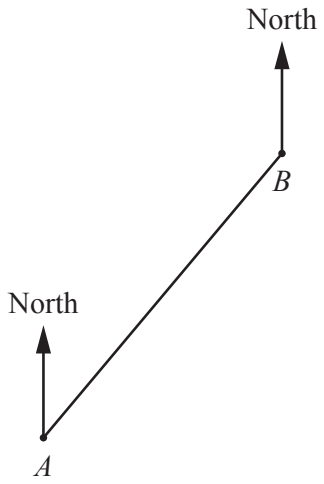
$$\text{实际长度} = 9.4 \times 125000 = 1175000 \text{ cm}$$

$$1175000 \text{ cm} = (1175000 \div 100000) \text{ km} = 11.75 \text{ km}$$

答：该岛的实际长度为 11.75 km。

6. [2023 · October/November 0580/31 Q2(b)(ii)]
提示：看出发点北向，顺时针定射线，按图距定点后量两船间距。

(b) The scale drawing shows the position of ship A and the position of ship B.
The scale is 1 cm represents 6 km.



Scale : 1 cm to 6 km

Another ship, C, is 45 km from ship B on a bearing of 124°.

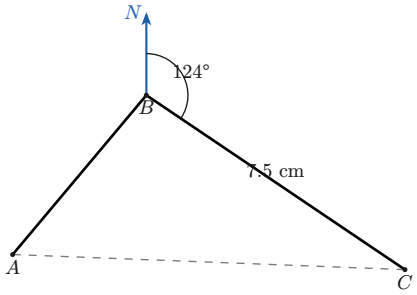
(i) On the scale drawing, mark the position of ship C.

(ii) Find the actual distance of ship C from ship A.

(b) 比例图显示船 A 和船 B 的位置及正北方向，1cm 代表 6km。另一艘船 C 在 B 的 124° 方位上，离 B 为 45km。（i）在比例图上标出 C 的位置。（ii）求 C 到 A 的实际距离。

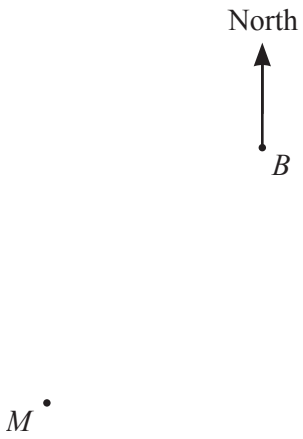
✓ **答案** 57 km

解析 先把 BC 的实距换成图距。$\frac{45}{6} = 7.5$ cm 以 B 为起点，从北向顺时针量 124°，沿这条射线取 BC=7.5cm，标出 C。连接 AC，并按原比例图测量，AC 约 9.4 至 9.5cm。$9.44 \times 6 \approx 56.6$ km 答：约 57km；按准确作图的量度读数取合理近似值。



7. [2023 · October/November 0580/33 Q2(a)(i)]
提示：看两城镇圆点的中心，量线段后对照每厘米代表的实距。

(a) Bayside, Millwater and Westbridge are towns beside a lake.
The scale drawing shows the positions of Bayside (B) and Millwater (M).
The scale is 1 centimetre represents 2 kilometres.



Scale: 1 cm to 2 km

(i) Find the actual distance between Bayside and Millwater.

(a) 贝赛德、米尔沃特和韦斯特布里奇是湖边的三个城镇。比例图表示贝赛德（B）和米尔沃特（M）的位置。比例尺为图上 1 厘米表示实际 2 千米。图中标有 B、M，指北箭头标注北；图示比例尺为 1 cm 表示 2 km。

(i) 求贝赛德与米尔沃特之间的实际距离。

✓ **答案** 9 km

解析 用直尺连接并量取 B、M 两点中心之间的距离，得图距为 4.5 cm。

由图上 1 cm 表示实际 2 km，得

$$\text{实际距离} = 4.5 \times 2 = 9 \text{ km}$$

答：贝赛德与米尔沃特之间的实际距离为 9 km。

4.19 从正北顺时针量角，并换算反向方位

题型 1 从正北顺时针量角，并换算反向方位（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **观测起点确定：**图中从城镇 R 看城镇 S，起点是 R。两点之间未画线时，先连接两点。

② **北向顺时针量：**量角器中心对准起点，零刻度线对准北向。从北向沿_____方向量至目标方向，所得角为方位角。

③ **三位数的写法：**方位角用_____位数表示，单位为度。量得的角不足三位时，在前面补零。

$$7^\circ = 007^\circ$$

④ **东向两侧求角：**北向与东向的夹角为 90°。已知目标方向与东向的夹角，可先求从北向量起的角。

方向在正东以北 20°：

$90^\circ - 20^\circ = 70^\circ = 070^\circ$

方向在正东以南 30°：

$90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$

⑤ **反向方位换算：**从 R 看 H 与从 H 看 R，方向相反。两处北向平行，反向方位角相差_____。

已知方位角小于 180°：

$141° + 180° = 321°$

已知方位角不小于 180°：

$321° - 180° = 141°$

⑥ **周角范围调整：**方位角不小于 0°，且小于 360°。加上 180° 后达到或超过一周，减去 360°。

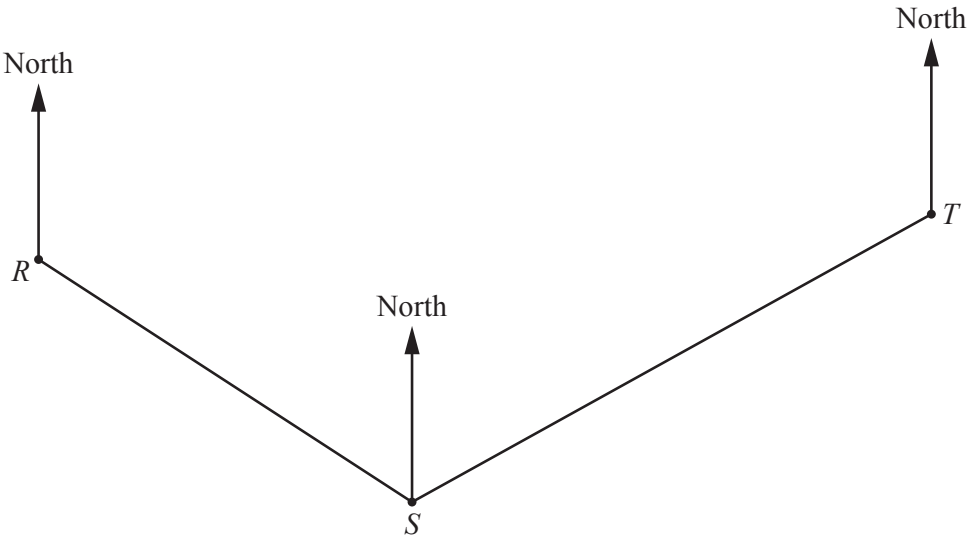
$$321° + 180° - 360° = 501° - 360° = 141°$$

填空：①顺时针　②三　③180°

点石成金　题目出现北向标志或求反向方位角的要求时，先确定观测起点和目标方向。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q7(d)]

The scale drawing shows the positions of three towns, *R*, *S* and *T*, on a map.
RS and *ST* are straight roads between the towns.
The scale is 1 centimetre represents 8 kilometres.



Scale: 1 cm to 8 km

(d) A hotel, *H*, is on a bearing of 321° from *R*.

Work out the bearing of *R* from *H*.

比例图表示地图上三个城镇 *R*、*S* 和 *T* 的位置。*RS* 和 *ST* 是连接城镇的笔直道路。比例尺为图上 1 厘米表示实际 8 千米。图中 *R*、*S*、*T* 处均标有北向。图示比例尺：1 厘米对应 8 千米。（d）一家酒店 *H* 位于从 *R* 看方位角为 321° 的方向上。求从 *H* 看 *R* 的方位角。

解答　从 *R* 看 *H* 与从 *H* 看 *R*，方向相反，方位角相差 180°。

$$321° - 180° = 141°$$

答：从 *H* 看 *R* 的方位角为 141°。

方法：先看观测起点是否由 R 换成 H，再从已知角换算反向方位。

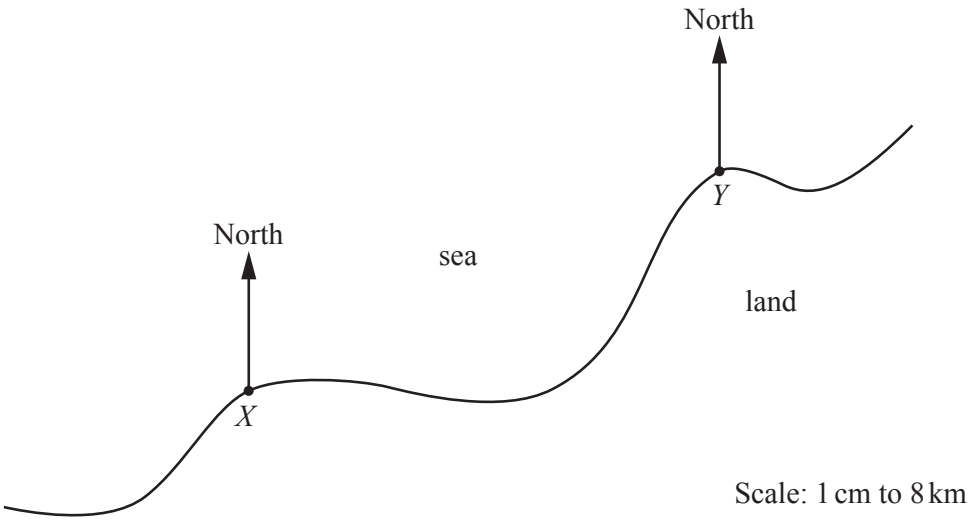
辨析：反向方位是交换起点与目标，逆时针量角是改变量角方向。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/33 Q4(b)(i)]

提示：先连 X、Y，再看 X 处北向与连线的顺时针夹角。

(b) The scale drawing shows the positions of two ports, *X* and *Y*.
The scale is 1 cm represents 8 km.



(i) Measure the bearing of Y from X.

(b) 比例图表示两个港口 X 和 Y 的位置。比例尺为图上 1 厘米表示实际 8 千米。图中 X、Y 处均标有北向，并标有海洋、陆地。图示比例尺：1 厘米对应 8 千米。 (i) 量出从 X 看 Y 的方位角。

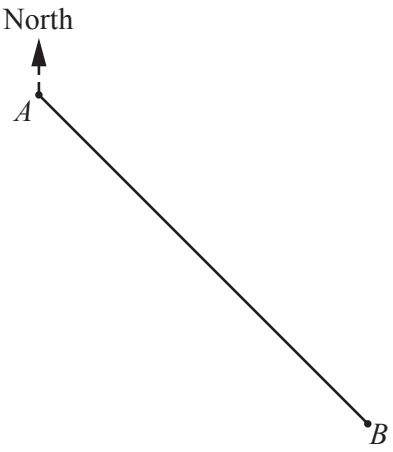
✓ **答案**

065°

解析 连接 X、Y，以 X 为量角起点。量角器中心对准 X，零刻度线对准北向，顺时针量至 XY 方向，得 65°。
答：从 X 看 Y 的方位角为 065°。

2. [2023 · May/June 0580/12 Q9]
提示：看 A 处北向，辨清顺时针转到 AB 所经过的角。

The scale drawing shows the positions of town A and town B.



Measure the bearing of town B from town A.

比例图表示城镇 A 和城镇 B 的位置。图中 A 处标有北向，A、B 两点之间画有线段。 量出从城镇 A 看城镇 B 的方位角。

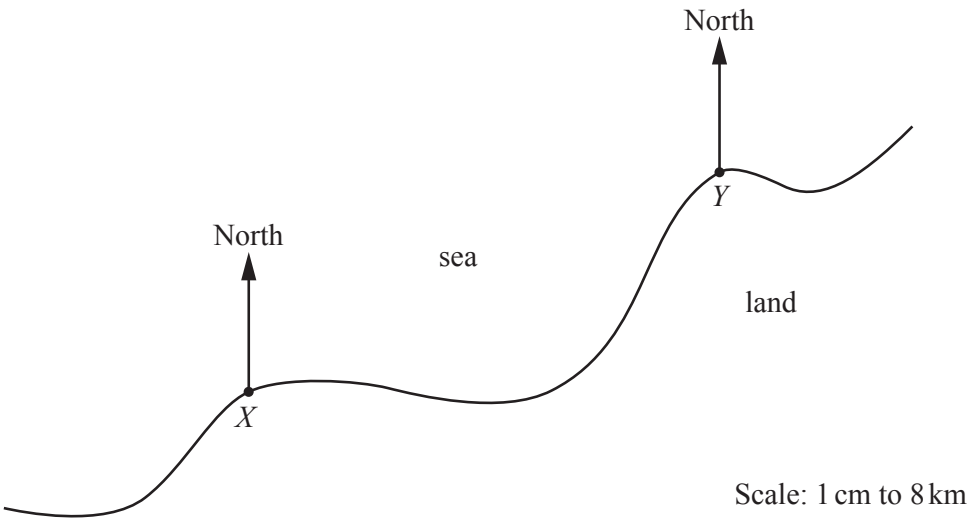
✓ **答案**

135°

解析 以 A 为量角起点，量角器中心对准 A，零刻度线对准北向。顺时针量至 AB 方向，得 135°。
答：从城镇 A 看城镇 B 的方位角为 135°。

3. [2023 · May/June 0580/33 Q4(b)(iii)]
提示：比较两次观测的起点，再比已知角与半周的大小。

(b) The scale drawing shows the positions of two ports, X and Y.
The scale is 1 cm represents 8 km.



(iii) A ship, S, is on a bearing of 284° from X.

Work out the bearing of X from S.

(b) 比例图表示两个港口 X 和 Y 的位置。比例尺为图上 1 厘米表示实际 8 千米。图中 X、Y 处均标有北向，并标有海洋、陆地。图示比例尺：1 厘米对应 8 千米。 (iii) 一艘船 S 位于从 X 看方位角为 284° 的方向上。求从 S 看 X 的方位角。

✓ **答案**

104°

解析 从 X 看 S 与从 S 看 X，方向相反，方位角相差 180°。

$$284° - 180° = 104°$$

答：从 S 看 X 的方位角为 104°。

4. [2024 · February/March 0580/22 Q13]
提示：交换观测起点与目标，按反向方位换算。

The bearing of B from A is 107°.

Calculate the bearing of A from B.

从 A 看 B 的方位角为 107°。求从 B 看 A 的方位角。

✓ **答案**

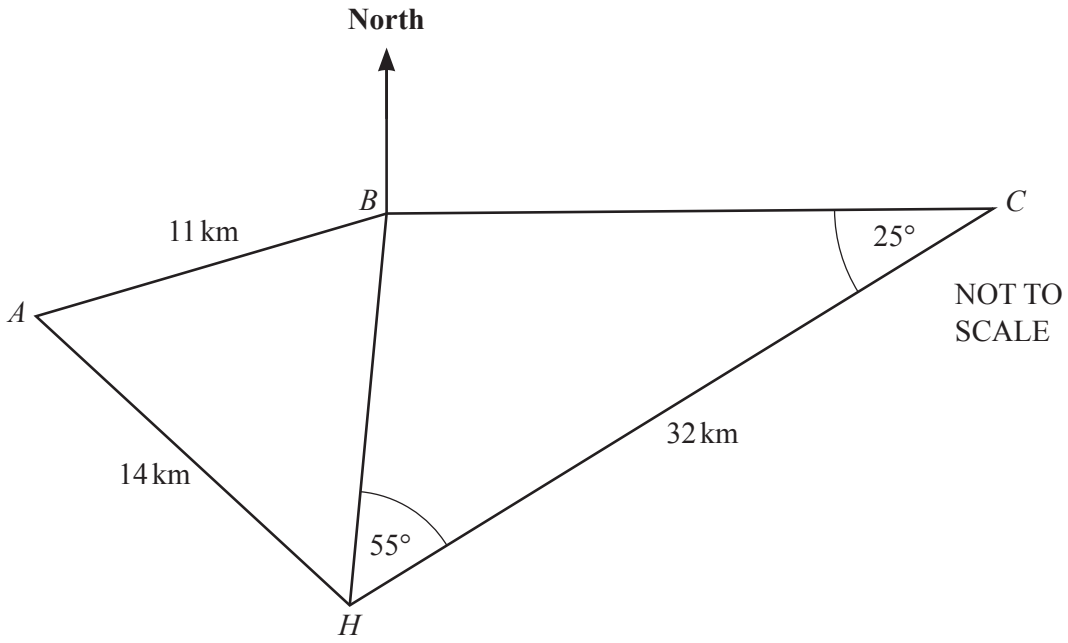
287°

解析 从 A 看 B 与从 B 看 A 的方向相反，方位角相差 180°。由 $107° < 180°$，得所求方位角为

$$107° + 180° = 287°$$

答：从 B 看 A 的方位角为 287°。

5. [2024 · May/June 0580/41 Q6(a)]
提示：以 C 为观测起点，先确定 C B 的方向。



The diagram shows the positions of two lighthouses A and B, a boat C and a harbour H.
C is due east of B.

(a) Find the bearing of the harbour from boat C.

图中表示两座灯塔 A、B，一艘船 C 和一个港口 H 的位置。C 位于 B 的正东方向，B 处标有北向。已知 $AB = 11$ km，$AH = 14$ km，$CH = 32$ km，$\angle BCH = 25°$，$\angle BHC = 55°$。图形未按比例绘制。
(a) 求从船 C 看港口 H 的方位角。

✓ **答案**

$$245°$$

解析 C 位于 B 的正东方向，故从 C 看 B 的方向为正西，其方位角为

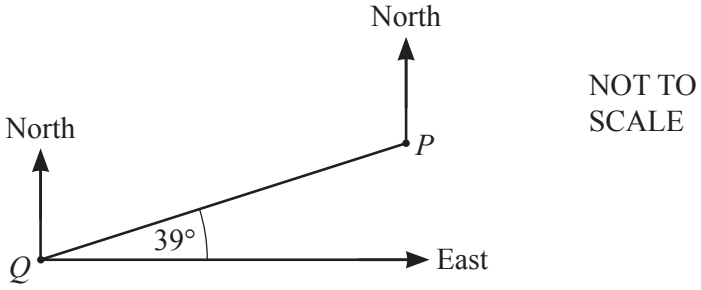
$$90° + 180° = 270°$$

由图知，CH 在正西以南，与 CB 的夹角为 $25°$，故所求方位角为

$$270° - 25° = 245°$$

答：从船 C 看港口 H 的方位角为 $245°$。

6. [2023 · October/November 0580/12 Q13]
提示：先看 Q 处连线在东向哪侧，再核对所求起点。



Find the bearing of Q from P.

图中标有点 P 和点 Q，两点之间画有线段。P、Q 处均标有北向，Q 处还标有东向。由 Q 指向 P 的方向与东向的夹角为 $39°$，P 位于 Q 的东北方向。图形不按比例绘制。 求从 P 看 Q 的方位角。

✓ **答案**

$$231°$$

解析 由北向与东向垂直，得从 Q 看 P 的方位角为

$$90° - 39° = 51°$$

从 P 看 Q 与从 Q 看 P，方向相反，方位角相差 $180°$。

$$51° + 180° = 231°$$

答：从 P 看 Q 的方位角为 $231°$。

4.20 按方位角和距离画点或求交会位置

题型 1 按方位角和距离画点或求交会位置（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **读取方位角：** 从 R 看 V 的方位角为 $163°$。以 R 的北向为起始边，按_____方向量角。方位角超过 $180°$ 时，可从南向继续量取。

$$215° = 180° + 35°$$

② **两线交会定位：** 在 R 处从北向顺时针量 $163°$，画射线。在 T 处从南向向西量 $35°$，画射线。两条射线的_____就是城镇 V 的位置。

③ **实距换算图距：** 图上长度与实际距离按比例尺对应。先求图上每厘米表示的实距，再用实距除以它。

每 $1\ \text{cm}$ 表示 $8\ \text{km}$：

$$(16 \div 8)\ \text{cm} = 2\ \text{cm}$$

每 $5\ \text{cm}$ 表示 $200\ \text{m}$：

$$(200 \div 5)\ \text{m} = 40\ \text{m}$$

$$(80 \div 40)\ \text{cm} = 2\ \text{cm}$$

④ **方位定向量距：** 若点 P 距 R 为 $16\ \text{km}$，方位角为 $163°$。先从 R 的北向顺时针量 $163°$，画射线。再沿射线从 R 量取 $2\ \text{cm}$，标出 P。

⑤ **沿线量距标点：** 若点 Q 在线段 ST 上，距 S 为 $16\ \text{km}$。图距为 $2\ \text{cm}$，从 S 沿线段向 T 量取并标出 Q。

⑥ **速时换距定位：** 若从 S 向 T 以 $16\ \text{km/h}$ 骑行 1 小时 30 分钟。先把时间化为小时，用速度乘_____求实距。

$$1\ \text{h}\ 30\ \text{min} = \left(1 + \frac{30}{60}\right)\ \text{h} = 1.5\ \text{h}$$

$$16\ \text{km/h} \times 1.5\ \text{h} = 24\ \text{km}$$

$$(24 \div 8)\ \text{cm} = 3\ \text{cm}$$

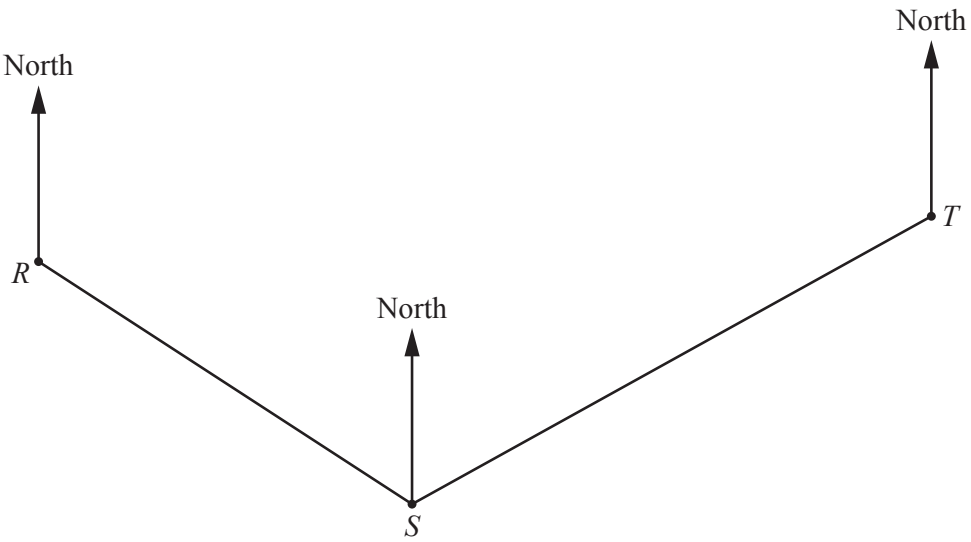
再从 S 沿线段向 T 量取 $3\ \text{cm}$，标出停留位置。

填空：①顺时针　②交点　③时间

点石成金　题目出现比例尺，并要求按方位角、距离或行程标点时，先确定从哪个点出发及所沿方向。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q7(b)]

The scale drawing shows the positions of three towns, R, S and T, on a map.
RS and ST are straight roads between the towns.
The scale is 1 centimetre represents 8 kilometres.



Scale: 1 cm to 8 km

(b) Another town, V, is on a bearing of 163° from R and on a bearing of 215° from T.

Mark the position of V on the map.

比例尺图表示地图上三座城镇 R、S 和 T 的位置。RS 和 ST 是连接城镇的笔直道路。比例尺为图上 1 厘米表示实际 8 千米。图中标有 R、S、T，三处箭头均指向北方；图示比例尺为 1 cm 对应 8 km。
(b) 另一座城镇 V，从 R 看它的方位角为 163°，从 T 看它的方位角为 215°。
在地图上标出 V 的位置。

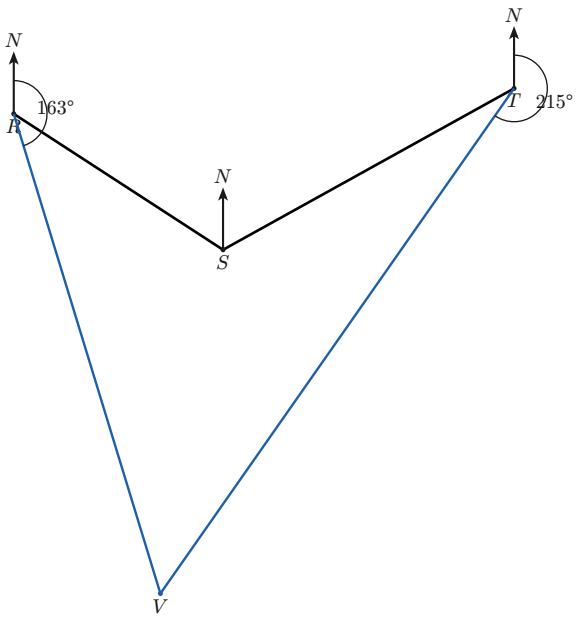
解答　以 R 为起点，从北向顺时针量取 163°，画出射线。
由 T 出发的方位角为 215°，得

$$215° - 180° = 35°$$

以 T 为起点，从南向向西量取 35°，画出射线。
两条射线的交点同时满足两个方位角条件，在交点处标上 V。
答：城镇 V 位于上述两条射线的交点处。

方法：先找 R、T 两点的北向，再按各自方位角画射线。

辨析：215°是从北向顺时针量的角，35°是从南向西量的角。



针对练习

1. [2025 · May/June 0580/31 Q13]

提示：先按比例尺求出两船间的图上距离。

The scale drawing shows the position of ship A.
The scale is 1 centimetre represents 50 kilometres.



Scale: 1 cm to 50 km

Scale: 1 cm to 50 km

Ship B is 300 km from ship A on a bearing of 105°.

On the scale drawing mark the position of ship B.

比例尺图表示船 A 的位置。比例尺为图上 1 厘米表示实际 50 千米。图中标有 A，箭头指向北方；图示比例尺为 1 cm 表示 50 km。
船 B 距船 A 为 300 km，从船 A 看船 B 的方位角为 105°。
在比例尺图上标出船 B 的位置。

✓ **答案**　B 在从 A 出发、方位角为 105° 的射线上，图上距 A 为 6 cm。

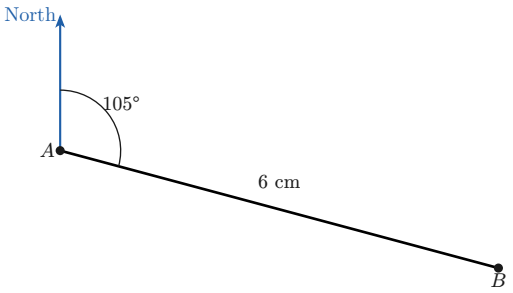
解析　图上每厘米表示实际 50 km，两船间的图上距离为

$$(300 \div 50)\ \text{cm} = 6\ \text{cm}$$

以 A 为起点，从北向顺时针量取 105°，画射线。

沿射线从 A 量取 6 cm，在所得点处标上 B。

答：B 位于上述射线上，图上距 A 为 6 cm。



2. [2025 · May/June 0580/32 Q11]

提示：先将学校到医院的实际距离换算成图上距离。

The scale drawing shows the position of a hospital, H.

The scale is 1 centimetre represents 6 kilometres.



Scale: 1 cm to 6 km

Scale: 1 cm to 6 km

A school, S, is 33 km from H on a bearing of 155°.

Mark the position of S on the scale drawing.

比例尺图表示医院 H 的位置。比例尺为图上 1 厘米表示实际 6 千米。图中 H 处的箭头指向北方，图示比例尺为 1 cm 对应 6 km。

学校 S 距医院 H 为 33 km，从 H 看 S 的方位角为 155°。

在比例尺图上标出 S 的位置。

✓ **答案** S 在从 H 出发、方位角为 155° 的射线上，图上距 H 为 5.5 cm。

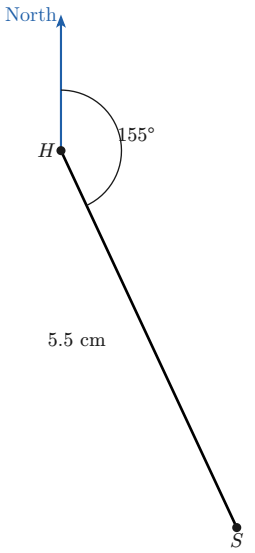
解析 由比例尺，得医院到学校的图上距离为

$$(33 \div 6)\ \text{cm} = 5.5\ \text{cm}$$

以 H 为起点，从北向顺时针量取 155°，画出射线。

沿射线从 H 量取 5.5 cm，在该处标上 S。

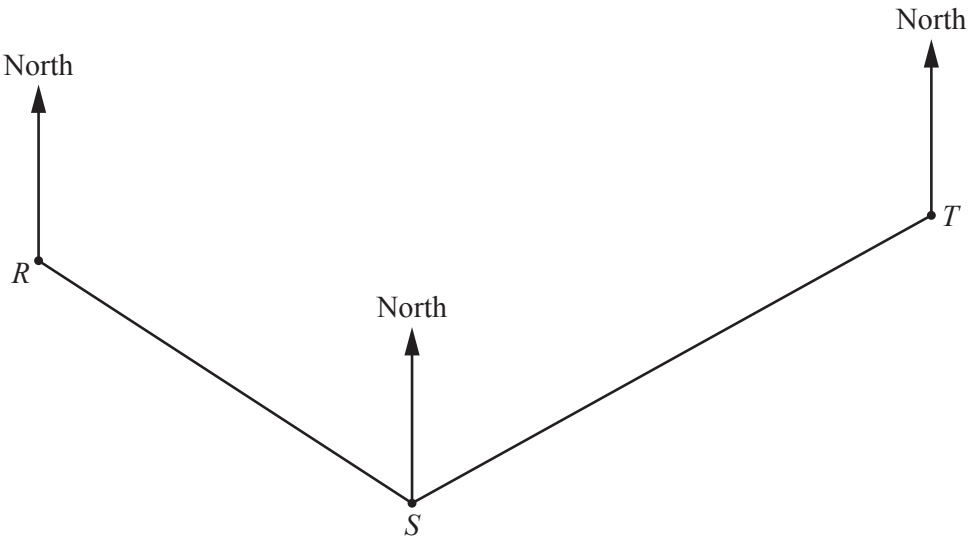
答：S 位于上述射线上，图上距 H 为 5.5 cm。



3. [2023 · February/March 0580/32 Q7(c)]

提示：先把骑行时间统一为小时，再对照比例尺换算路程。

The scale drawing shows the positions of three towns, R, S and T, on a map.
RS and ST are straight roads between the towns.
The scale is 1 centimetre represents 8 kilometres.



Scale: 1 cm to 8 km

(c) A man cycles at a constant speed of 24 km/h along the straight road from S to T.
After 1 hour and 50 minutes he stops at a café, C.

Mark the position of C on the map.
You must show all your working.

比例尺图表示地图上三座城镇 R、S 和 T 的位置。RS 和 ST 是连接城镇的笔直道路。比例尺为图上 1 厘米表示实际 8 千米。图中标有 R、S、T，三处箭头均指向北方；图示比例尺为 1 cm 对应 8 km。

(c) 一名男子沿笔直道路从 S 向 T 以 24 km/h 的恒定速度骑行。经过 1 小时 50 分钟后，他在咖啡馆 C 停下。在地图上标出 C 的位置。必须写出全部计算过程。

✓ **答案**　C 在线段 ST 上，从 S 向 T 量取 5.5 cm 处。

解析　把骑行时间化为小时，得

$$1\text{ h }50\text{ min}=\left(1+\frac{50}{60}\right)\text{ h}=\frac{11}{6}\text{ h}$$

由路程等于速度乘时间，得

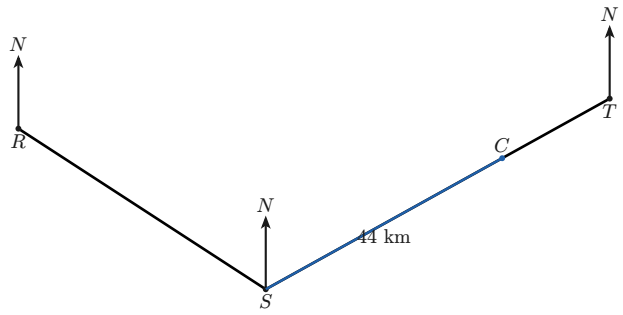
$$24\text{ km/h}\times\frac{11}{6}\text{ h}=44\text{ km}$$

由图上 1 cm 表示实际 8 km，得图上距离为

$$(44\div 8)\text{ cm}=5.5\text{ cm}$$

从 S 沿线段 ST 向 T 量取 5.5 cm，在该处标上 C。

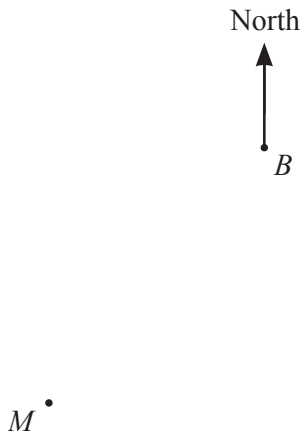
答：咖啡馆 C 在线段 ST 上，图上距 S 为 5.5 cm。



4. [2023 · October/November 0580/33 Q2(a)(ii)]

提示：先找出发点的北向，再用比例尺确定沿射线量多远。

(a) Bayside, Millwater and Westbridge are towns beside a lake.
The scale drawing shows the positions of Bayside (B) and Millwater (M).
The scale is 1 centimetre represents 2 kilometres.



Scale: 1 cm to 2 km

(ii) Westbridge (W) is 17 km from Bayside on a bearing of 155°.

On the scale drawing, mark the position of Westbridge.

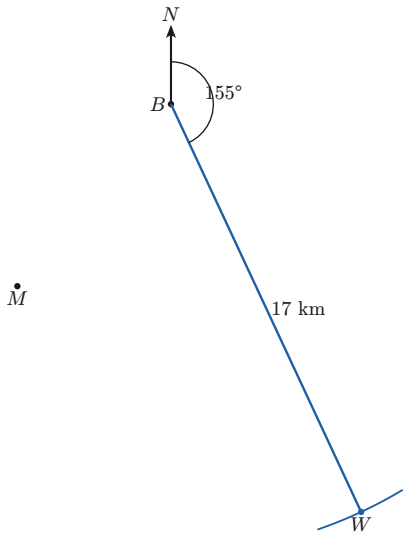
⑷ 贝赛德、米尔沃特和韦斯特布里奇是湖边的三座城镇。比例尺图表示贝赛德（B）和米尔沃特（M）的位置。比例尺为图上 1 厘米表示实际 2 千米。图中标有 B、M，B 处的箭头指向北方；图示比例尺为 1 cm 对应 2 km。
⑵ 韦斯特布里奇（W）距贝赛德 17 km，从贝赛德看它的方位角为 155°。
在比例尺图上标出韦斯特布里奇的位置。

✓ **答案** W 在从 B 出发、方位角为 155° 的射线上，图上距 B 为 8.5 cm。

解析 由图上 1 cm 表示实际 2 km，得图上距离为

$$(17 \div 2)\ \text{cm} = 8.5\ \text{cm}$$

以 B 为起点，从北向顺时针量取 155°，画出射线。
沿射线从 B 量取 8.5 cm，在该处标上 W。
答：W 在从 B 出发、方位角为 155° 的射线上，图上距 B 为 8.5 cm。



5. [2023 · May/June 0580/43 Q3(a)(ii)]

提示：先看比例尺每厘米代表多少米，再从指定端点沿线量距。

(a) The scale drawing shows two sides, AB and BC, of a field.
The scale is 5 centimetres represents 200 metres.



Scale: 5 cm to 200 m

(ii) X is a point on BC.
$BX = 332$ m.

Mark the point X on the diagram.

(a) 比例尺图表示一块田地的两条边 AB 和 BC。比例尺为图上 5 厘米表示实际 200 米。图中标有顶点 A、B、C；图示比例尺为 5 cm 对应 200 m。

(ii) X 是线段 BC 上的一点，$BX = 332$ m。

在图上标出点 X。

✓ **答案** X 在线段 BC 上，从 B 向 C 量取 8.3 cm 处。

解析 由图上 5 cm 表示实际 200 m，得图上每厘米表示的实际距离为

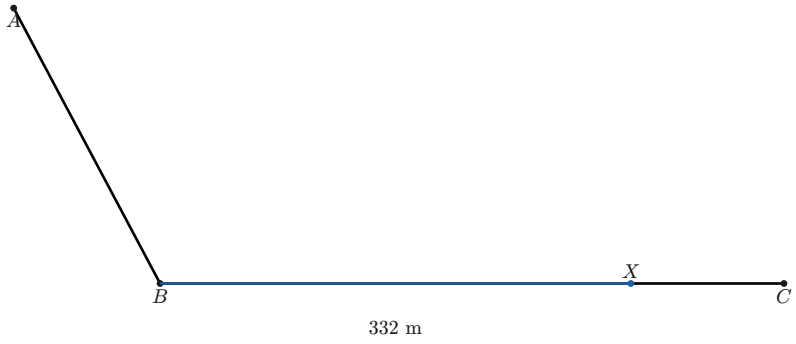
$$(200 \div 5)\ \text{m} = 40\ \text{m}$$

实际距离 BX 为 332 m，所对应的图上距离为

$$(332 \div 40)\ \text{cm} = 8.3\ \text{cm}$$

从 B 沿线段 BC 向 C 量取 8.3 cm，在该处标上 X。

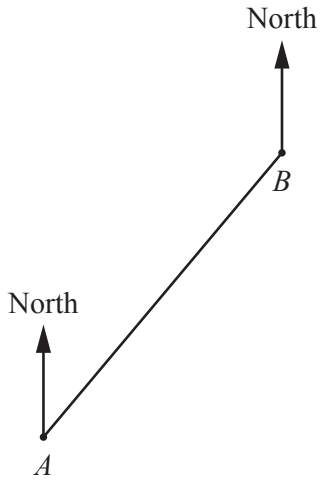
答：X 在线段 BC 上，图上距 B 为 8.3 cm。



6. [2023 · October/November 0580/31 Q2(b)(i)]

提示：量角器中心对准出发点，北向作起始边，图距按比例尺换算。

(b) The scale drawing shows the position of ship A and the position of ship B.
The scale is 1 cm represents 6 km.



Scale : 1 cm to 6 km

Another ship, C, is 45 km from ship B on a bearing of 124°.

(i) On the scale drawing, mark the position of ship C.

(b) 比例尺图表示船 A 和船 B 的位置。比例尺为图上 1 cm 表示实际 6 km。图中标有 A、B，两处箭头均指向北方；图示比例尺为 1 cm 对应 6 km。

另一艘船 C 距船 B 为 45 km，从船 B 看它的方位角为 124°。

(i) 在比例尺图上标出船 C 的位置。

✓ **答案** C 在从 B 出发、方位角为 124° 的射线上，图上距 B 为 7.5 cm。

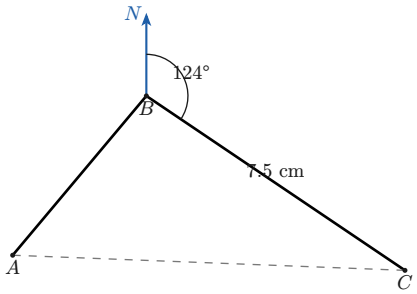
解析 由图上 1 cm 表示实际 6 km，得图上距离为

$$(45 \div 6)\ \text{cm} = 7.5\ \text{cm}$$

以 B 为起点，从北向顺时针量取 124°，画出射线。

沿射线从 B 量取 7.5 cm，在该处标上 C。

答：船 C 在从 B 出发、方位角为 124° 的射线上，图上距 B 为 7.5 cm。



第五章 度量

Chapter 5

5.1 沿外边界把直边和圆弧长度相加

题型 1 沿外边界把直边和圆弧长度相加（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **矩形四边：**例图中，矩形的长为 12 cm，宽为 7 cm。四条边的长度之和是矩形的周长。用 P 表示周长，l、w 分别表示长、宽。

$P = 12 + 7 + 12 + 7 = 2(12 + 7) =$ _____ cm

$$P = 2(l + w)$$

② **由积和求边：**一个矩形的面积为 8cm^2，周长为 12 cm。设长为 l cm、宽为 w cm，且 $l \geq w > 0$。先由周长求长宽和，再用面积求边长。

$$l + w = \frac{12}{2} = 6$$

$$lw = 8$$

$$w = 6 - l$$

$$l(6 - l) = 8$$

$$l^2 - 6l + 8 = (l - 2)(l - 4) = 0$$

$$l = 2 \text{ 或 } l = 4$$

$$l = 4, \quad w = 2$$

③ **拼接面积：**两个长 4 cm、宽 2 cm 的矩形沿短边拼接。没有重叠时，总面积等于各块面积之和。用 A 表示总面积，面积单位用平方厘米。

$A = 2 \times (4 \times 2) =$ _____ cm^2

④ **拼接周长：**上述两个矩形的公共边长为 2 cm。公共边在原周长总和中出现两次，拼合后减去两次。沿外边界相加，可得同一结果。

$P = 2 \times [2(4 + 2)] - 2 \times 2 =$ _____ cm

⑤ **分数圆弧：**半径为 2 cm 的圆，两条垂直半径将圆周分成两段。用 C 表示圆周长，r 表示半径。弧长等于圆周长乘以圆弧所占的份数。

$$C = 2\pi r = 2\pi \times 2 = 4\pi \text{ cm}$$

较短弧：$90°$

弧长为圆周长的 _____。

$\frac{1}{4} \times 4\pi = \pi$ cm

较长弧：$360° - 90° = 270°$

弧长为圆周长的 _____。

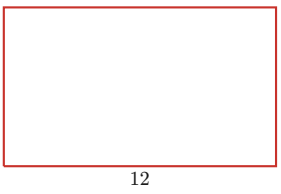
$\frac{3}{4} \times 4\pi = 3\pi$ cm

⑥ **直弧相加：**本例矩形的一角，两边各截去 2 cm。两截点间用半径为 2 cm 的四分之一圆弧连接。剩余直边总长与弧长相加，图内线段不计入周长。

$$P = (38 - 2 \times 2) + \frac{1}{4} \times 2\pi \times 2 = (34 + \pi)\ \text{cm}$$

填空：①38　②16　③20　④$\frac{1}{4}$　⑤$\frac{3}{4}$

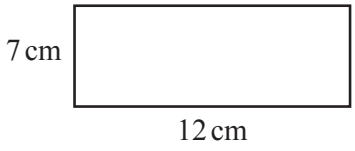
沿图形的外边界计长

	图像	数量关系
同一关系		$P = 2 \times (12 + 7) = 38$。

点石成金　题目出现求矩形或含圆弧图形的周长时，先沿外边界辨认各段直边和圆弧。

例 1　[2023 · May/June 0580/33 Q3(b)]

(b)



NOT TO SCALE

Work out the perimeter of the rectangle.

(b) 图中矩形的长为 12 cm，宽为 7 cm。图形不按比例绘制。求这个矩形的周长。

解答　由矩形的对边相等，得

$$P = 2(12 + 7)$$

$$P = 38\ \text{cm}$$

答：矩形的周长为 38 cm。

方法：先沿矩形外框找长和宽，再把两组对边分别相加。

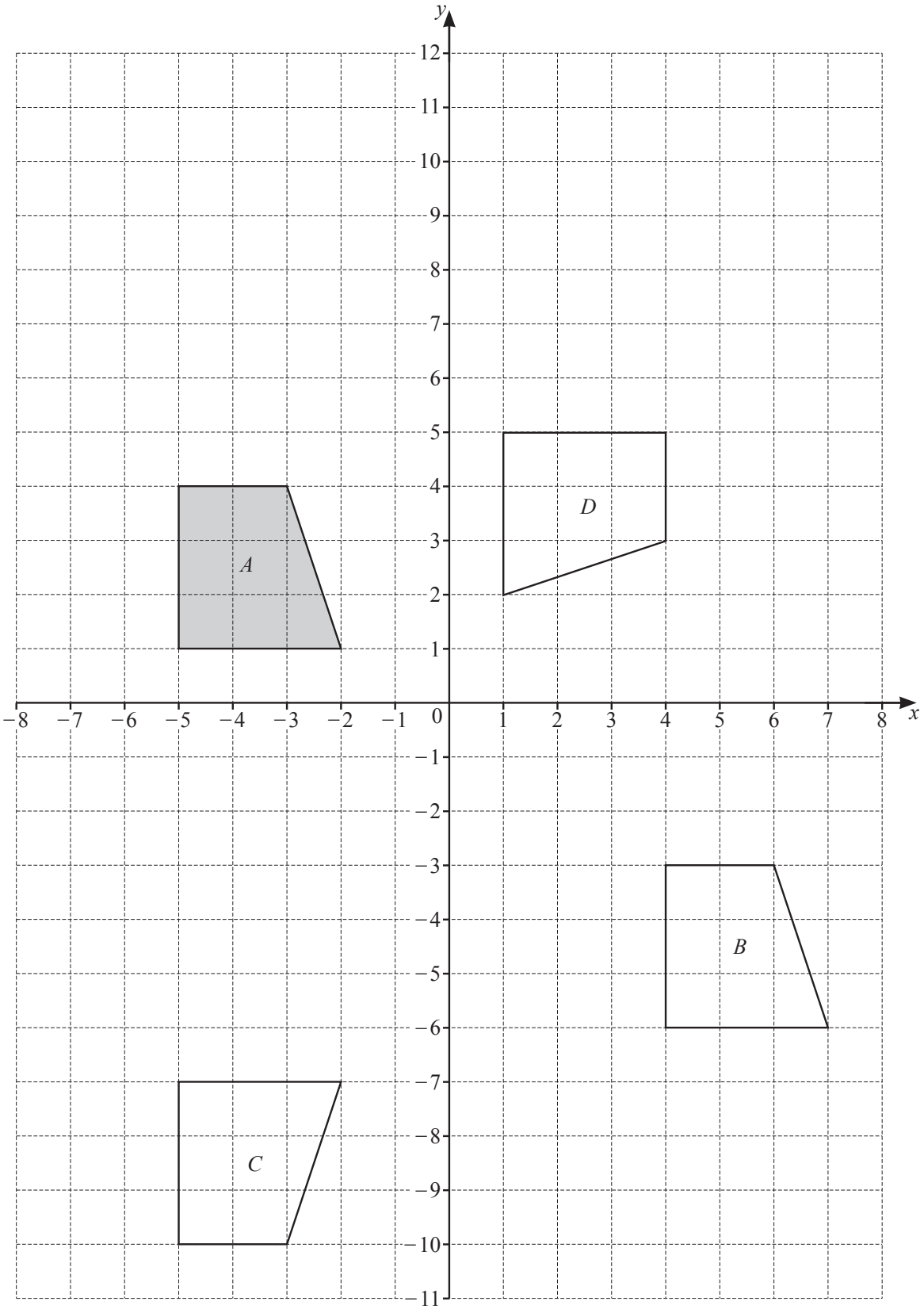
辨析：周长是边界的总长度，面积是图形所占平面的大小。

针对练习

1. [2024 · May/June 0580/32 Q3(b)(ii)]

提示：以方格边长为尺度，分别量出四条边。

The diagram shows four quadrilaterals, A, B, C and D, on a 1 cm^2 grid.



(ii) Measure the perimeter of quadrilateral A.

图中在每个小方格面积为 1cm^2 的网格上画有四个四边形 A、B、C 和 D。横轴标为 x，纵轴标为 y。
(ii) 测量四边形 A 的周长。

✓ **答案** 约 11.2 cm

解析 每个小方格的边长为 1 cm。

由网格可得，四边形 A 的上边长为 2 cm，左边和下边均长 3 cm。

以方格边长为尺度，量得斜边长约为 3.2 cm。设周长为 P，得

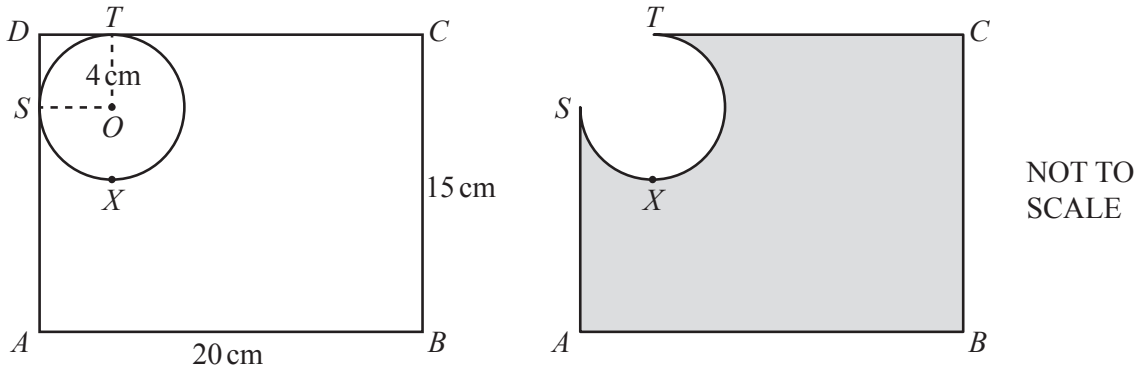
$$P \approx 2 + 3 + 3 + 3.2 = 11.2 \text{ cm}$$

答：四边形 A 的周长约为 11.2 cm。

2. [2023 · May/June 0580/41 Q4(c)(ii)]

提示：沿阴影外缘找直边，再比较所用圆弧与直角对应的短弧。

(c)



(ii) Calculate the perimeter of the shaded shape.

(c) 左图中，矩形 $ABCD$ 的下边 $AB = 20$ cm，右边 $BC = 15$ cm。圆心为 O，半径 $OT = 4$ cm；圆与左边 AD、上边 DC 分别相切于 S、T，X 为圆的最下端点。右图为阴影图形，其外边界依次经过 A、B、C、T，再沿经过 X 的圆弧到达 S，最后回到 A。图形不按比例绘制。
(ii) 计算阴影图形的周长。

✓ **答案** 80.8 cm

解析 圆在 S、T 处分别与矩形的左边、上边相切，半径均为 4 cm，得

$$DS = DT = 4 \text{ cm}$$

$$AS = 15 - 4 = 11 \text{ cm}$$

$$TC = 20 - 4 = 16 \text{ cm}$$

阴影图形的直边总长为

$$11 + 16 + 15 + 20 = 62 \text{ cm}$$

由 OS 与 OT 垂直，圆弧 TXS 的圆心角为

$$360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$$

圆弧 TXS 的长度为

$$\frac{3}{4} \times 2\pi \times 4 = 6\pi \text{ cm}$$

阴影图形的周长为

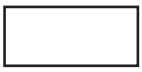
$$P = 62 + 6\pi$$

$$P \approx 80.8 \text{ cm}$$

答：阴影图形的周长约为 80.8 cm。

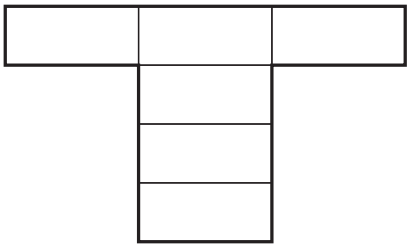
3. [2023 · May/June 0580/32 Q5(a)]
提示：先由面积和周长求小矩形边长，再逐段数公共边。

(a)



NOT TO SCALE

This rectangle has an area of 12 cm^2 and a perimeter of 16 cm.



NOT TO SCALE

This shape is made from six of these rectangles.

Find the area and perimeter of this shape.

(a) 这个矩形的面积为 12cm^2，周长为 16 cm。图形不按比例绘制。
下方图形由六个这样的矩形拼成：上排横向并列三个矩形，正中矩形的下方再竖向接三个矩形，各矩形的长边均水平放置。图形不按比例绘制。
求这个组合图形的面积和周长。

✓ **答案** 面积为 72cm^2，周长为 52 cm。

解析 设小矩形的长为 l cm、宽为 w cm，且 $l \geq w > 0$。由面积和周长，得

$$lw = 12$$

$$2(l + w) = 16$$

$$l + w = 8$$

$$w = 8 - l$$

$$l(8 - l) = 12$$

$$l^2 - 8l + 12 = (l - 2)(l - 6) = 0$$

$$l = 2 \text{ 或 } l = 6$$

由 $l \geq w$，得

$$l = 6, \quad w = 2$$

六个小矩形没有重叠，总面积为

$$A = 6 \times 12 = 72\text{cm}^2$$

上排有两条长为 w 的公共边，中间竖列有三条长为 l 的公共边，公共边总长为

$$2w + 3l = 2 \times 2 + 3 \times 6 = 22 \text{ cm}$$

从六个小矩形的周长总和中减去两次公共边总长，得

$$P = 6 \times 16 - 2 \times 22$$

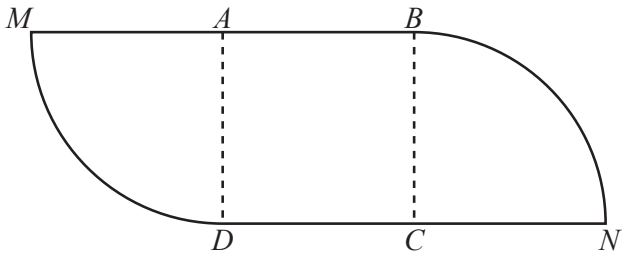
$$P = 52 \text{ cm}$$

答：组合图形的面积为 72cm^2，周长为 52 cm。

4. [2023 · May/June 0580/43 Q9(a)(ii)]

提示：先看共线点间的直边如何拼成，再比较两段弧的半径与圆心角。

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a shape made from a square $ABCD$ and two equal sectors of a circle.
The square has side 11 cm.
MAB and DCN are straight lines.

(ii) Calculate the perimeter of the shape.

(a) 图中所示图形由正方形 $ABCD$ 和两个相等的圆扇形组成。正方形的边长为 11 cm。左侧扇形为 MAD，右侧扇形为 BCN；AD、BC 在图中用虚线表示。M、A、B 在同一直线上，D、C、N 在同一直线上。图形不按比例绘制。

(ii) 计算这个图形的周长。

✓ **答案** 78.6 cm

解析 由正方形的各边相等、各内角为直角，两个扇形的半径均为 11 cm，圆心角均为 90°。

由 M、A、B 共线，D、C、N 共线，得

$$MB = MA + AB = 11 + 11 = 22 \text{ cm}$$

$$DN = DC + CN = 11 + 11 = 22 \text{ cm}$$

两段圆弧的总长为

$$2 \times \frac{1}{4} \times 2\pi \times 11 = 11\pi \text{ cm}$$

图形的周长为

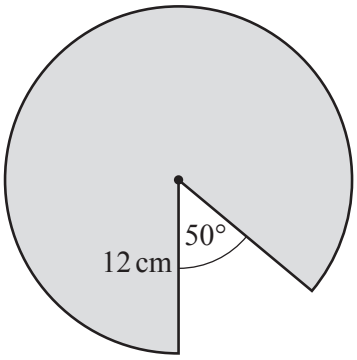
$$P = 22 + 22 + 11\pi$$

$$P \approx 78.6 \text{ cm}$$

答：图形的周长约为 78.6 cm。

5. [2024 · February/March 0580/42 Q12(a)]
提示：先求剩余圆弧所对的圆心角。

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a circle of radius 12 cm, with a sector removed.

Calculate the perimeter of the remaining shaded shape.

（a）图中，一个半径为 12 cm 的圆被移去一个扇形。移去的扇形的圆心角为 50°。图形不按比例绘制。
计算剩余阴影图形的周长。

✓ **答案**

88.9 cm

解析 设剩余圆弧所对的圆心角为 θ，得

$$\theta = 360° - 50° = 310°$$

阴影图形的边界由剩余圆弧和两条半径组成。设周长为 P，得

$$P = \frac{310}{360} \times 2\pi \times 12 + 2 \times 12$$

$$P = \frac{62\pi}{3} + 24$$

$$P \approx 88.9 \text{ cm}$$

答：剩余阴影图形的周长为 88.9 cm。

5.2 由周长或体积反求一次方的尺寸

题型 1 由周长或体积反求一次方的尺寸（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **长方体的体积：** 图中长方体的长为 x cm，宽和高均为 6 cm。体积等于长、宽、高的乘积。

$$6 \times 6 \times x = 540$$

② **反求未知棱长：** 两个已知棱长相乘，得到未知数的系数 _____。等式两边同除以这个数，求出未知棱长。

$$36x = 540$$

$$x = \frac{540}{36} = 15$$

③ **圆的周长关系：** 以周长为 10 cm 的圆为例，半径记为 r cm。圆周率用 π 表示，周长等于半径的 2π 倍。

$$2\pi r = 10$$

④ **反求圆的半径：** 周长记为 C，半径记为 r，两者用相同的长度单位。等式两边同除以 _____。

$$C = 2\pi r$$

$$r = \frac{C}{2\pi}$$

$$r = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi} \approx 1.591549$$

⑤ **长度近似取值：** 计算时保留 π，最后再取近似值。保留三位有效数字，从首个非零数字起取三位，再看第四位。

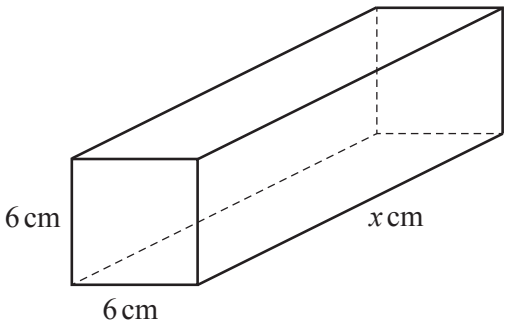
第四位小于 5，末位不变	第四位不小于 5，末位加 1
$1.591549... \approx 1.59$	$1.596 \approx 1.60$

填空：①36　②$2\pi$

点石成金　题目出现长方体的体积和两条棱长，或圆的周长，要求另一长度时，先把所求长度记为未知数，列出等式。

例 1　[2023 · May/June 0580/31 Q4(b)]

(b)



NOT TO SCALE

The diagram shows a cuboid.
The volume of the cuboid is 540 cm^3.

Calculate the value of x.

(b) 图中是一个长方体，长为 x cm，宽和高均为 6 cm。图形不按比例绘制。这个长方体的体积为 $540cm^3$。求 x 的值。

解答　由长方体的体积等于长、宽、高的乘积，得

$$6 \times 6 \times x = 540$$

$$36x = 540$$

$$x = \frac{540}{36} = 15$$

答：$x = 15$。

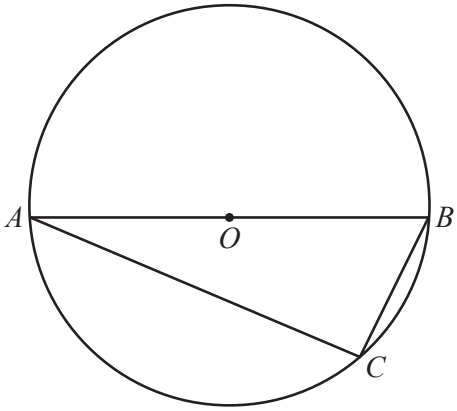
方法：先看体积和两条已知棱长，用两棱乘积作未知棱长的系数。

辨析：体积是三条棱长的乘积，底面积是其中两条棱长的乘积。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/12 Q17(b)]

提示：看已知量是周长还是直径，再确定它与半径的倍数关系。



NOT TO SCALE

A, B and C are points on a circle, centre O.

(b) The circumference of the circle is 22.3 cm.

Calculate the radius of the circle.

A、B 和 C 是圆上的点，圆心为 O。图中线段 AB 经过圆心 O，并连接了 AC 和 BC。图形不按比例绘制。

(b) 圆的周长为 22.3 cm。求圆的半径。

✓ **答案** 3.55 cm

解析 设圆的半径为 r cm，由圆的周长公式，得

$$2\pi r = 22.3$$

$$r = \frac{22.3}{2\pi} \approx 3.55$$

答：圆的半径约为 3.55 cm。

2. [2023 · October/November 0580/11 Q17]

提示：对照周长与半径的关系，计算中保留圆周率。

The circumference of a circle is 59 cm.

Calculate the radius of the circle.

一个圆的周长为 59 cm。求这个圆的半径。

✓ **答案** 9.39 cm

解析 设圆的半径为 r cm，由圆的周长公式，得

$$2\pi r = 59$$

$$r = \frac{59}{2\pi} \approx 9.39$$

答：圆的半径约为 9.39 cm。

3. [2023 · May/June 0580/32 Q5(c)]
提示：看周长与半径的单位是否一致，再列含半径的等式。

(c) A circle has a circumference of 28 cm.

Work out the radius of the circle.

(c) 一个圆的周长为 28 cm。求这个圆的半径。

✓ **答案** 4.46 cm

解析 设圆的半径为 r cm，由圆的周长公式，得

$$2\pi r = 28$$

$$r = \frac{28}{2\pi} \approx 4.46$$

答：圆的半径约为 4.46 cm。

4. [2024 · May/June 0580/13 Q7]
提示：用底面长与宽的乘积作高的系数。

The base of a cuboid measures 10 cm by 7 cm.
The volume of the cuboid is 280 cm^3.

Calculate the height of the cuboid.

一个长方体的底面长为 10 cm，宽为 7 cm。长方体的体积为 280cm^3。
计算这个长方体的高。

✓ **答案**

4 cm

解析 设长方体的高为 h cm。由长方体的体积公式，得

$$10 \times 7 \times h = 280$$

$$70h = 280$$

$$h = \frac{280}{70} = 4$$

答：长方体的高为 4 cm。

5. [2025 · February/March 0580/12 Q24]
提示：分别表示圆和正方形的周长，再列等式。

A circle has radius 7 cm.
A square has side x cm.
The circumference of the circle is the same length as the perimeter of the square.

Find the value of x.
Give your answer in terms of π.

一个圆的半径为 7 cm。一个正方形的边长为 x cm。圆的周长与正方形的周长相等。
求 x 的值，答案用含 π 的式子表示。

✓ **答案**

$$x = \frac{7\pi}{2}$$

解析 圆的周长与正方形的周长相等，得

$$4x = 2\pi \times 7$$

$$4x = 14\pi$$

$$x = \frac{14\pi}{4} = \frac{7\pi}{2}$$

答：$x = \frac{7\pi}{2}$。

5.3 从面积或体积公式中隔离平方项，再开平方

题型 1 从面积或体积公式中隔离平方项，再开平方（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **正方形面积：**正方形面积为 841cm^2，设边长为 a cm。面积等于边长的_____。

$$a^2 = 841$$

② **开平方求长度：**边长大于零，开平方后取_____值。由平方求原来的正数，用正平方根。

$$29^2 = 841$$

$$a = \sqrt{841} = 29$$

③ **正方体表面积：**正方体有六个相同的正方形面。表面积除以_____，得到一个面的面积。例如表面积为 54cm^2，设棱长为 b cm。

$$6b^2 = 54$$

$$b^2 = \frac{54}{6} = 9$$

$$b = \sqrt{9} = 3$$

④ **圆柱体积公式：**圆柱底面是圆，体积等于底面积乘高。设半径为 r cm、高为 h cm，体积为 $V\text{cm}^3$。圆周率记为 π。

$$V = \pi r^2 h$$

⑤ **除去平方系数：**例如圆柱体积为 40cm^3，高为 4 cm。等式两边同除以 4π，得到半径的平方。开平方后再取近似值，保留三位有效数字。

$$4\pi r^2 = 40$$

$$r^2 = \frac{40}{4\pi} = \frac{10}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{10}{\pi}} \approx 1.78$$

填空：①平方　②正　③6

点石成金　题目出现面积或体积，要求边长或半径时，先求长度的平方，再取正平方根。

例 1　[2023 · May/June 0580/33 Q3(c)]

(c) A square has an area of 841 cm^2.

Work out the length of one side of the square.

（c）一个正方形的面积为 $841 cm^2$。求这个正方形一条边的长度。

解答　设正方形的边长为 a cm，由正方形面积公式得

$$a^2 = 841$$

因边长大于零，得

$$a = \sqrt{841} = 29$$

答：正方形一条边的长度为 29 cm。

方法：先看正方形的面积，列出边长的平方等式再开方。

辨析：平方根是平方后得到原数的数，正平方根是其中大于零的数。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/13 Q8]

提示：看表面积包含几个相同的面，先求一个面的面积。

The surface area of a cube is 73.5 cm^2.

Find the length of one side of the cube.

一个正方体的表面积为 $73.5 cm^2$。求这个正方体一条棱的长度。

✓ **答案**

3.5 cm

解析　设正方体的棱长为 a cm。正方体有六个相同的正方形面，得

$$6a^2 = 73.5$$

$$a^2 = \frac{73.5}{6} = 12.25$$

因棱长大于零，得

$$a = \sqrt{12.25} = 3.5$$

答：正方体一条棱的长度为 3.5 cm。

2. [2023 · May/June 0580/23 Q16]

提示：看半径平方乘了哪些因子，先除去这些因子再开方。

The volume of a cylinder is 1970 cm^3.
The height of the cylinder is 12.8 cm.

Calculate the radius of the cylinder.

一个圆柱的体积为 $1970 cm^3$。这个圆柱的高为 12.8 cm。计算这个圆柱的半径。

✓ **答案**

7.00 cm

解析　设圆柱的半径为 r cm，由圆柱体积公式得

$$\pi r^2 \times 12.8 = 1970$$

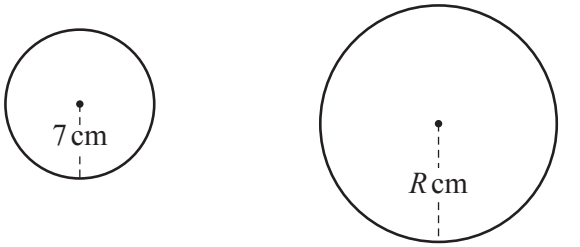
$$r^2 = \frac{1970}{12.8\pi}$$

因半径大于零，得

$$r = \sqrt{\frac{1970}{12.8\pi}} \approx 7.00$$

答：圆柱的半径约为 7.00 cm。

3. [2024 · February/March 0580/12 Q19]
提示：把大圆面积写成小圆面积的倍数。



NOT TO SCALE

The diagram shows a small circle with radius 7 cm and a large circle with radius R cm.
The area of 16 small circles is the same as the area of one large circle.

Calculate the value of R.

图中有一个半径为 7 cm 的小圆和一个半径为 R cm 的大圆。图形不按比例绘制。
16 个小圆的面积之和等于一个大圆的面积。
计算 R 的值。

✓ **答案**

$$R = 28$$

解析 由圆的面积公式及两边面积相等，得

$$\pi R^2 = 16 \times \pi \times 7^2$$

等式两边同除以 π，得

$$R^2 = 16 \times 49 = 784$$

因半径大于零，得

$$R = \sqrt{784} = 28$$

答：$R = 28$。

4. [2024 · October/November 0580/13 Q10]
提示：先求正方体一个面的面积。

The surface area of a cube is $121.5\,\text{cm}^2$.

Calculate the length of one side of the cube.

一个正方体的表面积为 121.5cm^2。
计算这个正方体一条棱的长度。

✓ **答案**

$$4.5\ \text{cm}$$

解析 设正方体的棱长为 a cm。正方体有六个相同的正方形面，得

$$6a^2 = 121.5$$

$$a^2 = \frac{121.5}{6} = 20.25$$

因棱长大于零，得

$$a = \sqrt{20.25} = 4.5$$

答：正方体一条棱的长度为 4.5 cm。

5. [2024 · October/November 0580/33 Q7(d)]
提示：将表面积代入题给公式，先求半径的平方。

(d) The surface area of a sphere is $250\,\text{cm}^2$.

Calculate the radius of the sphere.
[The surface area, A, of a sphere with radius r is $A = 4\pi r^2$.]

(d) 一个球的表面积为 250cm^2。
计算这个球的半径。
[半径为 r 的球的表面积 A 为
$A = 4\pi r^2$]

✓ **答案**

$$4.46\ \text{cm}$$

解析 设球的半径为 r cm，由球的表面积公式得

$$4\pi r^2 = 250$$

等式两边同除以 4π，得

$$r^2 = \frac{250}{4\pi}$$

因半径大于零，得

$$r = \sqrt{\frac{250}{4\pi}} \approx 4.46$$

答：球的半径为 4.46 cm。

5.4 先求公共尺寸，再代入另一个几何公式

题型 1　先求公共尺寸，再代入另一个几何公式（Core / Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **由面积求半径：**圆的面积为 $25\pi\text{cm}^2$，先求_____。用 r 表示半径，π 表示圆周率，且 $r>0$。

$$\pi r^2 = 25\pi\text{cm}^2$$

$$r^2 = 25\text{cm}^2$$

$$r = \sqrt{25}\ \text{cm} = 5\ \text{cm}$$

② **由半径求周长：**圆的面积和周长共用同一个半径。周长用 C 表示，将求出的半径代入。题目要求用 π 表示答案，保留 π。

$$C = 2\pi r = 2\pi \times 5\ \text{cm} = 10\pi\ \text{cm}$$

③ **由体积求棱长：**正方体的体积为 8cm^3，先求棱长。用 a 表示棱长，V 表示体积，且 $a>0$。三个相同的数相乘得体积，求棱长用立方根。

$$V = a^3$$

$$2^3 = 2\times 2\times 2 = 8$$

$$a = \sqrt[3]{8}\ \text{cm} = 2\ \text{cm}$$

④ **由棱长求表面积：**正方体有_____个相同的正方形面。表面积用 S 表示，将一个面的面积乘以面数。沿用棱长为 2 cm 的正方体。

$$S = 6a^2 = 6\times 2^2\text{cm}^2 = 24\text{cm}^2$$

⑤ **由曲面面积求半径：**高为 3 cm、曲面面积为 $12\pi\text{cm}^2$ 的圆柱，先求半径。用 h、r 分别表示高和半径，S 表示曲面面积。曲面面积不含两个底面的面积。

$$S = 2\pi rh$$

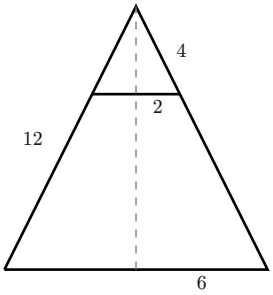
$$r = \frac{S}{2\pi h} = \frac{12\pi}{2\pi\times 3}\ \text{cm} = 2\ \text{cm}$$

⑥ **由半径求圆柱体积：**圆柱的体积用 V 表示，用底面积乘高。沿用上面的圆柱，将半径和高代入。结果用_____单位表示。

$$V = \pi r^2 h = \pi\times 2^2\times 3\text{cm}^3 = 12\pi\text{cm}^3$$

⑦ 相似圆锥与圆台（Extended）：圆锥底面半径为r、垂直高为h时，体积为$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$。沿平行于底面的平面截去顶端小圆锥，剩下的立体叫圆台。过顶点和底面圆心的截面中，两三角形相似，对应半径与高成相同比例。例如大圆锥的底面半径为6 cm、高为12 cm，截去高为4 cm的小圆锥，小圆锥半径记为r。$\frac{r}{6}=\frac{4}{12}$

$r = 2$ cm



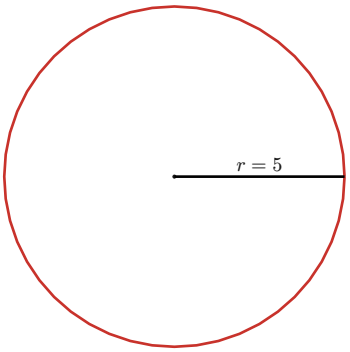
圆台的体积等于大圆锥体积减去小圆锥体积。$V_{大}=\frac{1}{3}\pi\times6^2\times12=144\pi\text{cm}^3$

$V_{小}=\frac{1}{3}\pi\times2^2\times4=\frac{16}{3}\pi\text{cm}^3$

$V_{圆台}=144\pi-\frac{16}{3}\pi=\frac{416}{3}\pi\text{cm}^3$。

填空：①半径　②6　③立方

同一个半径用于面积和周长

	图像	数量关系
同一关系		$\pi r^2=25\pi\Rightarrow r=5$，再求 $2\pi r=10\pi$。

点石成金　题目出现已知面积或体积、求另一个几何量时，先求两者共用的半径或棱长。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q26(a)]

A circle has an area of $25\pi\,\text{cm}^2$.

(a) Work out the circumference of the circle.
Give your answer in terms of π.

一个圆的面积为 $25\pi\text{cm}^2$。
(a) 求这个圆的周长。
答案用 π 表示。

解答　设圆的半径为 r，周长为 C。由圆的面积得

$$\pi r^2=25\pi\text{cm}^2$$

$$r^2=25\text{cm}^2$$

$\because r>0$，$\therefore$

$$r=\sqrt{25}\text{ cm}=5\text{ cm}$$

代入周长公式得

$$C=2\pi r=2\pi\times5\text{ cm}=10\pi\text{ cm}$$

答：圆的周长为 10π cm。

方法：看已知的圆面积，先约去圆周率，再开方求半径。

辨析：面积是圆内区域的大小，周长是圆边界的长度。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/32 Q5(d)]
提示：看体积中棱长的次数，再比一个面与整个表面的关系。

(d) A cube has a volume of $125\,\text{m}^3$.

Work out the surface area of the cube.

(d) 一个正方体的体积为 125m^3。
求这个正方体的表面积。

✓ **答案** 150m^2

解析 设正方体的棱长为 a，表面积为 S。由正方体的体积得

$$a^3 = 125\text{m}^3$$

$\because a > 0$，$\therefore$

$$a = \sqrt[3]{125}\ \text{m} = 5\ \text{m}$$

正方体有六个相同的正方形面，故

$$S = 6a^2 = 6 \times 5^2\text{m}^2 = 150\text{m}^2$$

答：正方体的表面积为 150m^2。

2. [2023 · October/November 0580/23 Q16]
提示：对照曲面面积与体积公式，看半径的次数有何不同。

A cylinder with height 12.5 cm has a curved surface area of 105π cm

Calculate the volume of the cylinder.

一个圆柱的高为 12.5 cm，曲面面积为 $105\pi\text{cm}^2$。
计算这个圆柱的体积。

✓ **答案** 693cm^3

解析 设圆柱的底面半径为 r，体积为 V。由圆柱的曲面面积得

$$2\pi r \times 12.5\ \text{cm} = 105\pi\text{cm}^2$$

$$r = \frac{105\pi}{2\pi \times 12.5}\ \text{cm} = 4.2\ \text{cm}$$

代入圆柱的体积公式得

$$V = \pi r^2 h = \pi \times 4.2^2 \times 12.5\text{cm}^3 = 220.5\pi\text{cm}^3$$

$$V \approx 693\text{cm}^3$$

答：圆柱的体积约为 693cm^3。

3. [2024 · October/November 0580/32 Q4(b)]
提示：由体积开立方求棱长，再求六个面的面积之和。

(b) A cube has a volume of $3375\ \text{cm}^3$.

Calculate the surface area of this cube.

(b) 一个正方体的体积为 3375cm^3。
计算这个正方体的表面积。

✓ **答案**

$$1350\text{cm}^2$$

解析 设正方体的棱长为 a cm，由体积得

$$a^3 = 3375$$

因棱长大于零，得

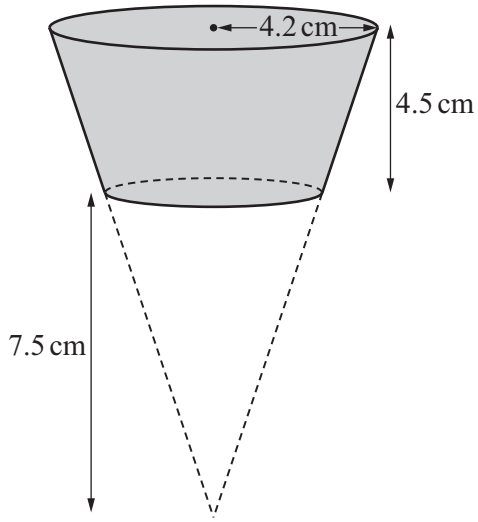
$$a = \sqrt[3]{3375} = 15$$

正方体有六个相同的正方形面，表面积为

$$S = 6a^2 = 6 \times 15^2 = 1350\text{cm}^2$$

答：正方体的表面积为 1350cm^2。

4. [2025 · May/June 0580/43 Q23]
提示：先求大圆锥的高，再用相似比求小圆锥的半径。



NOT TO SCALE

The diagram shows a frustum made by removing a small cone from a large cone.
The height of the small cone is 7.5 cm.
The height of the frustum is 4.5 cm.
The radius of the large cone is 4.2 cm.

Work out the volume of the frustum.

图示为从一个大圆锥中截去一个小圆锥后得到的圆台。图形不按比例绘制。
小圆锥的高为 7.5 cm。
圆台的高为 4.5 cm。
大圆锥的底面半径为 4.2 cm。
求这个圆台的体积。

✓ **答案**

$$168\text{cm}^3$$

解析 设大圆锥的高为 H cm，小圆锥的底面半径为 r cm。
大圆锥的高为

$$H = 7.5 + 4.5 = 12$$

由两个圆锥相似，半径比等于高之比，得

$$\frac{r}{4.2} = \frac{7.5}{12}$$

$$r = 4.2 \times \frac{7.5}{12} = 2.625$$

圆锥体积等于底面积乘高的三分之一。

圆台的体积为大圆锥体积减去小圆锥体积，得

$$V = \frac{1}{3}\pi \times 4.2^2 \times 12 - \frac{1}{3}\pi \times 2.625^2 \times 7.5$$

$$V \approx 168\text{cm}^3$$

答：圆台的体积为 168cm^3。

5.5 用圆心角占一周的比例计算弧长

题型 1 用圆心角占一周的比例计算弧长（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **整圆周长计算：**图中两条半径长均为 9 cm。整圆周长记为 C，由半径求得：

$$C = 2\pi \times 9 = 18\pi \text{ cm}$$

② **平分弦和顶角：**取弦 PQ 的中点 M，连接 OM。两条半径相等，所得两个直角三角形全等。OM 与 PQ _____，且：

$$PM = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$\angle POM = \frac{1}{2}\angle POQ$$

③ **反求扇形圆心角：**直角三角形中，锐角的正弦等于对边除以斜边。设圆心角为 θ，用反正弦求角，计算器采用角度制。

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{PM}{OP} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\theta = 2\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \approx 38.9424^\circ$$

④ **按圆心角求弧长：**图中弧长记为 l，它占整圆周长的比例为 _____。推广到半径为 r 的圆，弧长与半径使用相同单位。

$$\frac{l}{18\pi} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$

⑤ **由弧长反求半径：**已知弧长和圆心角，先列弧长方程，再将半径单独留在等号一边。如圆心角为 60°、弧长为 4π cm，半径为 r cm，则：

$$4\pi = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{3}$$

$$r = \frac{4\pi \times 3}{\pi} = 12$$

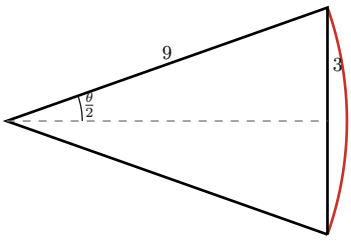
⑥ **求优弧的长度：**移去劣扇形后，余下优弧对应的圆心角用整周角减去。如半径为 9 cm、移去的圆心角为 60°，则：

$$\theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

$$l = \frac{300^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 9 = 15\pi \text{ cm}$$

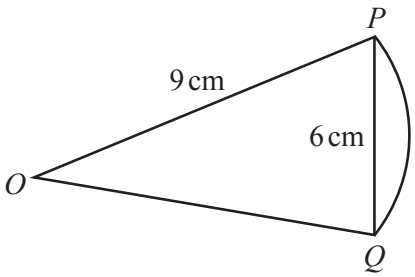
填空：①垂直　②$\frac{\theta}{360^\circ}$

弦的一半与半个圆心角对应

	图像	数量关系
同一关系		$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{9}$，弧长 $= \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi \times 9$。

点石成金　题目出现扇形的圆心角、弧长或弦长时，先确定所求弧对应的圆心角。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q14]



NOT TO SCALE

The diagram shows a sector of a circle with centre O and radius 9 cm.
The length of the chord PQ is 6 cm.

Calculate the length of the arc PQ.

图示为一个圆心为 O、半径为 9 cm 的扇形，弧的两个端点为 P 和 Q。图形不按比例绘制。
弦 PQ 的长度为 6 cm。
计算弧 PQ 的长度。

解答　取弦 PQ 的中点 M，连接 OM，设圆心角为 θ。
由两条半径相等，得 $OM \perp PQ$，且

$$PM = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$\angle POM = \frac{\theta}{2}$$

在直角三角形 OMP 中，

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\theta = 2\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \approx 38.9424^\circ$$

方法：先看弦长与半径，作弦的中垂线，从半角的正弦关系起手。

辨析：弦长是两端点间的线段长度，弧长是两端点间的圆周长度。

由圆心角占整周的比例，得弧长

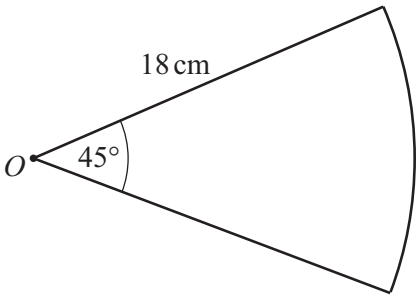
$$l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi \times 9 \approx 6.12 \text{ cm}$$

答：弧 PQ 的长度为 6.12 cm。

针对练习

1. [2025 · May/June 0580/22 Q10]

提示：按圆心角占整周的比例求弧长，保留圆周率。



NOT TO SCALE

The diagram shows a sector of a circle, centre O.
The length of the arc is $n\pi$ cm .

Find the value of n.

图示为一个圆心为 O 的扇形。图形不按比例绘制。
扇形的半径为 18 cm，圆心角为 45°。
弧长为 $n\pi$ cm。
求 n 的值。

✓ **答案**

$$\frac{9}{2}$$

解析 设弧长为 l，由圆心角占整周的比例，得

$$l = \frac{45^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 18 = \frac{9\pi}{2} \text{ cm}$$

由题意得

$$n\pi = \frac{9\pi}{2}$$

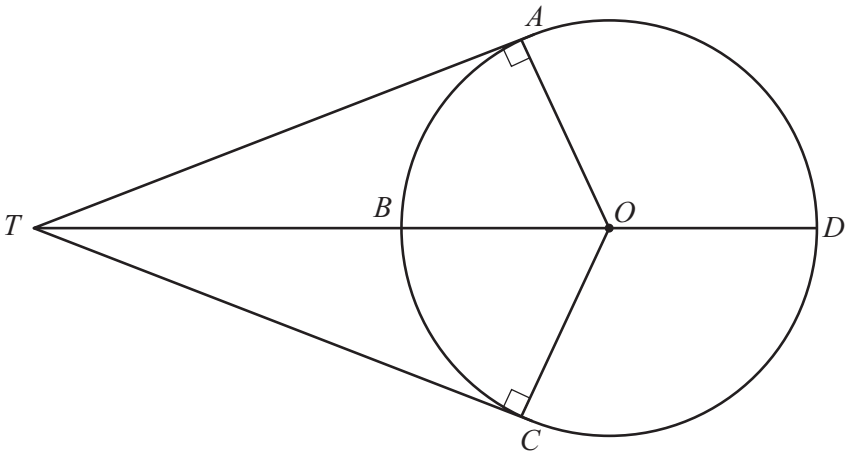
等式两边同除以 π，得

$$n = \frac{9}{2}$$

答：n 的值为 $\frac{9}{2}$。

2. [2024 · October/November 0580/42 Q4(c)(ii)]
提示：用（i）的结论求劣弧占整圆周长的比例。

(c)



NOT TO SCALE

A, B, C and D are points on a circle, centre O.
TA and TC are tangents to the circle.
$OA = 6.75$ cm and $OT = 11.5$ cm.

angle $AOC = 108.12°$, correct to 2 decimal places.

(ii) Calculate the length of the **minor** arc ABC.

(c) 图中，A、B、C、D 是圆心为 O 的圆上的点。点 T、B、O、D 依次位于同一直线上。TA 和 TC 是圆的切线，图中标有 $OA \perp TA$、$OC \perp TC$。$OA = 6.75$ cm，$OT = 11.5$ cm。图形不按比例绘制。
已知 $\angle AOC = 108.12°$，精确到小数点后两位。
(ii) 计算劣弧 ABC 的长度。

✓ **答案**

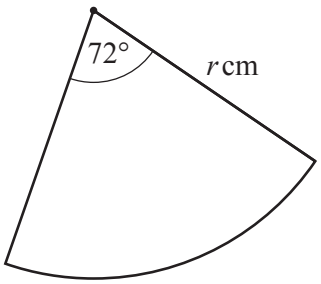
12.7 cm

解析 由（i）的结论，劣弧 ABC 所对的圆心角为 $108.12°$。
设劣弧的长度为 l，由圆心角占整周的比例，得

$$l = \frac{108.12°}{360°} \times 2\pi \times 6.75 \approx 12.7 \text{ cm}$$

答：劣弧 ABC 的长度为 12.7 cm。

3. [2023 · October/November 0580/13 Q20]
提示：看已知弧长与圆心角，比较弧长占整圆周长的比例。



NOT TO SCALE

The diagram shows a sector of a circle with radius r cm and sector angle 72°.
The arc length is 9.35 cm.

Calculate the value of r.

图示为一个半径为 r cm、圆心角为 72° 的扇形。图形不按比例绘制。

弧长为 9.35 cm。
计算 r 的值。

✓ **答案**

$$7.44$$

解析 由圆心角占整周的比例，得

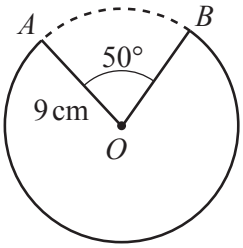
$$9.35 = \frac{72^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$$

$$r = \frac{9.35 \times 360}{72 \times 2\pi} \approx 7.44$$

答：r 的值为 7.44。

4. [2023 · May/June 0580/42 Q1(e)]
提示：看所求的是优弧，用整周角减去劣弧所对的圆心角。

(e)



NOT TO SCALE

The diagram shows a circle of radius 9 cm, centre O.
The minor sector AOB, with sector angle 50°, is removed from the circle.

Calculate the length of the major arc AB.

(e) 图示为一个半径为 9 cm、圆心为 O 的圆。图形不按比例绘制。
从圆中移去圆心角为 50° 的劣扇形 AOB。
计算优弧 AB 的长度。

✓ **答案**

$$48.7 \text{ cm}$$

解析 设优弧 AB 所对的圆心角为 θ。

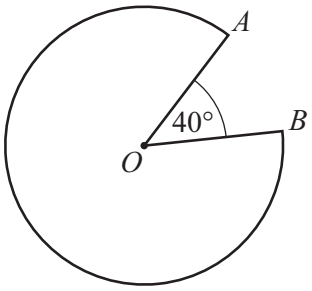
$$\theta = 360^\circ - 50^\circ = 310^\circ$$

由圆心角占整周的比例，得优弧长

$$l = \frac{310^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 9 = 15.5\pi \text{ cm} \approx 48.7 \text{ cm}$$

答：优弧 AB 的长度为 48.7 cm。

5. [2025 · May/June 0580/23 Q20]
提示：用整周角减去图中标出的角，求优弧对应的圆心角。



NOT TO SCALE

The diagram shows a sector of a circle, centre O.
The radius of the circle is 6 cm.

Calculate the length of the major arc AB.
Give your answer in its simplest form in terms of π.

图示为一个圆心为 O 的扇形，弧的端点为 A、B。图形不按比例绘制。
图中标出的圆心角 $\angle AOB$ 为 40°。
圆的半径为 6 cm。
计算优弧 AB 的长度。
答案用含 π 的最简形式表示。

✓ **答案**

$$\frac{32\pi}{3}\ \text{cm}$$

解析 设优弧对应的圆心角为 θ，得

$$\theta = 360° - 40° = 320°$$

由圆心角占整周的比例，得优弧的长度

$$l = \frac{320°}{360°} \times 2\pi \times 6 = \frac{32\pi}{3}\ \text{cm}$$

答：优弧 AB 的长度为 $\frac{32\pi}{3}$ cm。

5.6 用基本图形的面积相加或相减，求组合面积

题型 1 用基本图形的面积相加或相减，求组合面积（Core / Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **内外半径关系：**例题阴影是外扇形扣去内扇形。OC 是内半径，CB 是两条圆弧之间的宽度。外半径 OB 等于二者之和。

$$OB = OC + CB = 3.2 + 2.6 = _____\ \text{cm}$$

② **扇形面积（拓展）：**例题的两个扇形圆心角均为 140°。记圆心角为 θ°、半径为 r。扇形占整圆的 _____，面积按此比例计算。

$$S = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$S_{\text{内扇形}} = \frac{140}{360} \times \pi \times 3.2^2 = \frac{896\pi}{225}\text{cm}^2$$

$$S_{\text{阴影}} = S_{\text{外扇形}} - S_{\text{内扇形}}$$

③ **直径求出半径：**圆的直径是半径的 _____ 倍。记直径为 d、半径为 r、面积为 S。例如，正方形边长与内接圆直径均为 10 cm。

$$r = \frac{d}{2} = \frac{10}{2} = 5\ \text{cm}$$

圆的面积

$S = \pi r^2$

半圆的面积

$S = \frac{1}{2}\pi r^2$

$$S_{\text{正方形内圆外}} = 10^2 - \pi \times 5^2 = (100 - 25\pi)\text{cm}^2$$

④ **直角三角形面积：**直角三角形的两条直角边记为 a、b，斜边记为 c。由勾股定理求出斜边，可求以它为直径的半圆面积。以下取 $a = 6$ cm、$b = 8$ cm。

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ \text{cm}$$

$$S_{\text{三角形}} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24\text{cm}^2$$

半圆内扣去三角形

$S_{\text{阴影}} = \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{10}{2}\right)^2 - 24 = (25\frac{\pi}{2} - 24)\text{cm}^2$

三角形内扣去半径为 2 cm 的半圆

$S_{\text{阴影}} = 24 - \frac{1}{2}\pi \times 2^2 = (24 - 2\pi)\text{cm}^2$

⑤ **相等扇形相加：**正方形的边与相邻边的延长线成 90° 角。正方形外接两个这样的等扇形，三块面积相加。以正方形边长及扇形半径均为 2 cm 为例。

$$S_{\text{一个扇形}} = \frac{90}{360} \times \pi \times 2^2 = \pi\text{cm}^2$$

$$S_{\text{组合图形}} = 2^2 + 2 \times \pi = (4 + 2\pi)\text{cm}^2$$

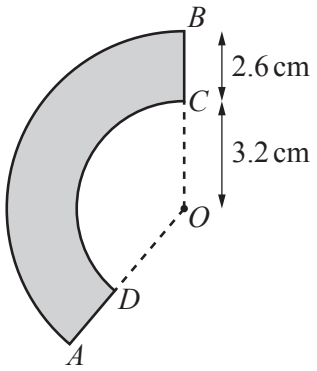
⑥ **多个圆洞相减：**大圆内挖去三个互不重叠的等圆，应减去小圆面积的 _____ 倍。例如，大圆半径为 10 cm，每个小圆半径为 2 cm。要求用含 π 的式子表示时，保留 π。

$$S_{\text{阴影}} = \pi \times 10^2 - 3 \times \pi \times 2^2 = (100 - 12)\pi = 88\pi\text{cm}^2$$

⟵ 填空：①5.8　②$\frac{\theta}{360}$　③2　④3

点石成金　题目出现拼合图形或阴影区域并要求面积时，先判断是几块面积相加，还是外部面积减去内部面积。

例 1　[2023 · May/June 0580/22 Q11]



NOT TO SCALE

The diagram shows a shape, $ABCD$, formed by the sectors of two circles with the same centre O.
Both sector angles are 140°, O = 3.2 cm and CB = 2.6 c
The area of the shape is $k\pi$ cm^2.

Find the value of k.

图中的图形 $ABCD$ 由两个圆心同为 O 的圆的扇形围成。两个扇形的圆心角均为 140°，$OC = 3.2$ cm，$CB = 2.6$ cm。图中 O、C、B 在同一条射线上，O、D、A 在同一条射线上。图形未按比例绘制。
这个图形的面积为 $k\pi$cm^2。
求 k 的值。

解答　外半径等于内半径与圆弧间宽度之和，得

$$OB = OC + CB = 3.2 + 2.6 = 5.8 \text{ cm}$$

两扇形圆心角均为 140°，阴影面积为两扇形面积之差，得

$$S_{\text{阴影}} = \frac{140}{360} \times \pi \times 5.8^2 - \frac{140}{360} \times \pi \times 3.2^2$$

$$S_{\text{阴影}} = \frac{140}{360} \times \pi \times (33.64 - 10.24) = 9.1\pi\text{cm}^2$$

由题意，阴影面积为 $k\pi$cm^2，得

$$k = 9.1$$

答：k 的值为 9.1。

方法：先看圆心到外弧经过的两段长度，相加求外半径，再列面积差。

辨析：内半径是圆心到内弧的距离，弧间宽度是内弧到外弧的距离。

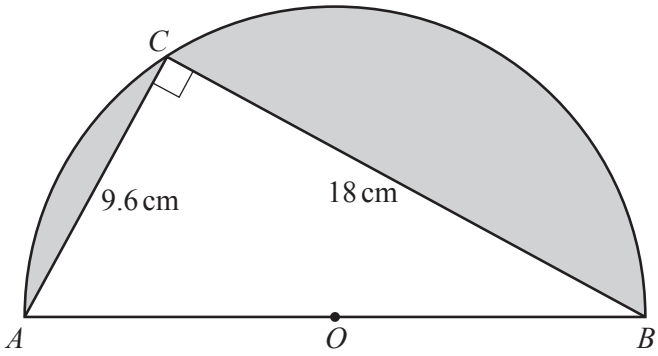
拓展：圆心角相等的两个扇形，面积之比等于半径平方之比。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/33 Q9(a)(iii)]

提示：先看直角所对的边，求出半圆直径，再比较两块面积。

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a semicircle with diameter AB.
O is the midpoint of AB and C is a point on the circumference.

(iii) Calculate the shaded area.

(a) 图中是一个以 AB 为直径的半圆。O 是 AB 的中点，C 是圆周上一点。图中标有 $AC = 9.6$ cm、$BC = 18$ cm，且 $\angle ACB = 90°$。图形未按比例绘制。

(iii) 计算阴影部分的面积。

✓ **答案** 77.0cm^2

解析 由图知 $\angle ACB = 90°$，由勾股定理得

$$AB = \sqrt{9.6^2 + 18^2} = \sqrt{416.16} = 20.4 \text{ cm}$$

半圆半径为

$$OA = \frac{20.4}{2} = 10.2 \text{ cm}$$

三角形的两条直角边互为底和高，得

$$S_{\text{三角形}} = \frac{1}{2} \times 9.6 \times 18 = 86.4\text{cm}^2$$

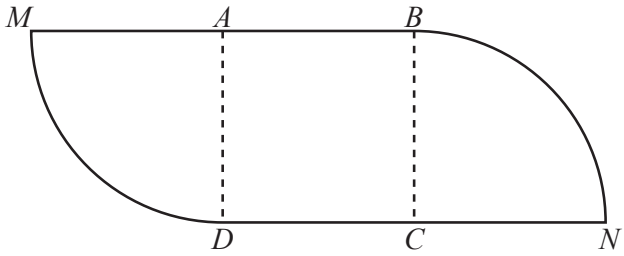
阴影面积为半圆面积减去三角形面积，得

$$S_{\text{阴影}} = \frac{1}{2}\pi \times 10.2^2 - 86.4 = 52.02\pi - 86.4 \approx 77.0\text{cm}^2$$

答：阴影面积约为 77.0cm^2。

2. [2023 · May/June 0580/43 Q9(a)(i)]
提示：看正方形边的延长线，确定扇形圆心角，再数相加的块数。

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a shape made from a square $ABCD$ and two equal sectors of a circle.
The square has side 11 cm.
MAB and DCN are straight lines.

(i) Calculate the area of the shape.

(a) 图中的图形由正方形 $ABCD$ 和一个圆的两个相等扇形组成。正方形的边长为 11 cm。M、A、B 在同一直线上，D、C、N 在同一直线上。左侧扇形由 AM、AD 及圆弧 MD 围成，右侧扇形由 CB、CN 及圆弧 BN 围成。图形未按比例绘制。
(i) 计算这个图形的面积。

✓ **答案** 311cm^2

解析 正方形的内角为 90°，且 MAB、DCN 分别在同一直线上，得

$$\angle MAD = \angle BCN = 90°$$

两个扇形的半径均等于正方形的边长，为 11 cm。图形面积为正方形与两个扇形的面积之和，得

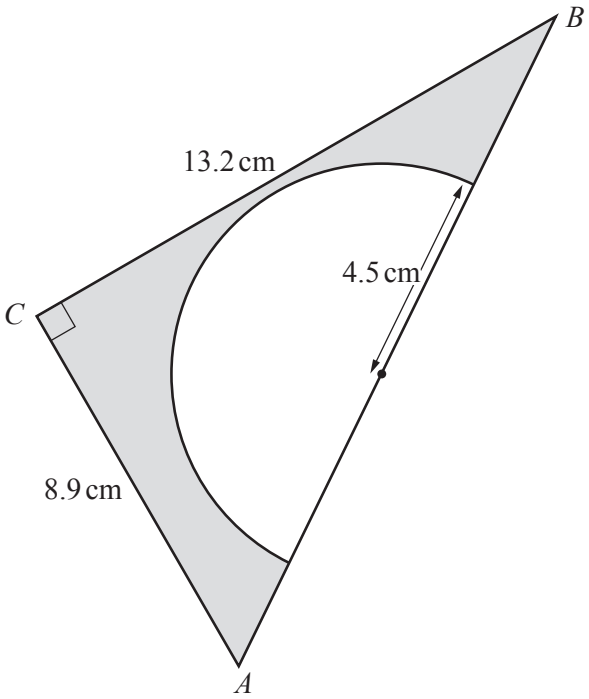
$$S = 11^2 + 2 \times \frac{90}{360} \times \pi \times 11^2$$

$$S = 121 + 60.5\pi \approx 311\text{cm}^2$$

答：图形面积约为 311cm^2。

3. [2023 · May/June 0580/31 Q10(a)]

提示：看直角两旁的边作底和高，再判断半圆面积应加还是减。



NOT TO SCALE

The diagram shows a right-angled triangle, ABC, and a semicircle.
The radius of the semicircle is 4.5 cm.
$AC = 8.9$ cm and $BC = 13.2$ cm.

(a) Calculate the shaded area.
Give the units of your answer.

图中是一个直角三角形 ABC 和一个半圆。三角形在 C 处为直角，半圆位于三角形内部，其直径在边 AB 上。半圆的半径为 4.5 cm，$AC = 8.9$ cm，$BC = 13.2$ cm。图形未按比例绘制。

(a) 计算阴影部分的面积，并写出答案的单位。

✓ **答案** 26.9cm^2

解析 三角形 ABC 在 C 处为直角，得

$$S_{\text{三角形}} = \frac{1}{2} \times 8.9 \times 13.2 = 58.74\text{cm}^2$$

半圆半径为 4.5 cm，得

$$S_{\text{半圆}} = \frac{1}{2}\pi \times 4.5^2 = 10.125\pi\text{cm}^2$$

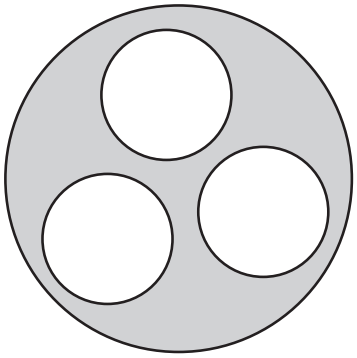
阴影面积为三角形面积减去半圆面积，得

$$S_{\text{阴影}} = 58.74 - 10.125\pi \approx 26.9\text{cm}^2$$

答：阴影面积约为 26.9cm^2。

4. [2023 · May/June 0580/33 Q3(e)]
提示：看大圆内挖去的小圆个数，比较大圆与全部圆洞的面积。

(e)



NOT TO SCALE

The diagram shows three small circles and one large circle.
The large circle has radius 20 cm.
The small circles each have radius 4 cm.

Work out the shaded area.
Give your answer in terms of π.

(e) 图中有三个小圆和一个大圆。三个小圆位于大圆内，彼此不重叠。大圆的半径为 20 cm，每个小圆的半径均为 4 cm。图形未按比例绘制。
求阴影部分的面积，答案用含 π 的式子表示。

✓ **答案** $352\pi\text{cm}^2$

解析 大圆半径为 20 cm，得

$$S_{\text{大圆}} = \pi \times 20^2 = 400\pi\text{cm}^2$$

每个小圆半径为 4 cm，三个小圆的面积之和为

$$S_{\text{三个小圆}} = 3 \times \pi \times 4^2 = 48\pi\text{cm}^2$$

阴影面积为大圆面积减去三个小圆的面积，得

$$S_{\text{阴影}} = 400\pi - 48\pi = 352\pi\text{cm}^2$$

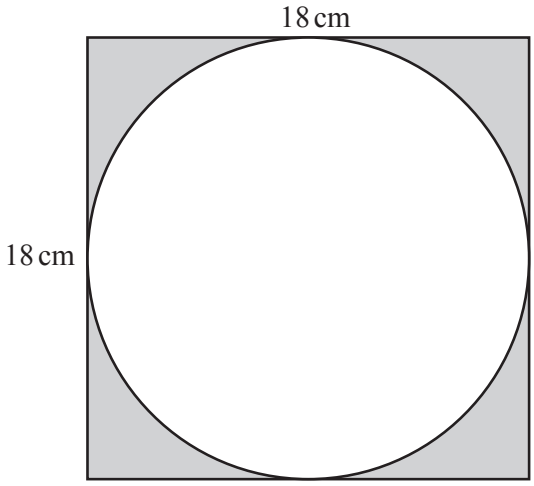
答：阴影面积为 $352\pi\text{cm}^2$。

5. [2023 · October/November 0580/32 Q7(d)(i)]
提示：看正方形边长对应圆的哪条线段，再确定圆面积所用半径。

Elize, Lily and Marco start a business.

(d) Elize buys a framed picture.

(i)



NOT TO SCALE

The picture is a circle with diameter 18 cm.
The frame is a square of side length 18 cm.

Calculate the shaded area.

伊莱兹、莉莉和马尔科合伙创业。
(d) 伊莱兹买了一幅带框的画。
(i) 画面是一个直径为 18 cm 的圆。画框的外轮廓是边长为 18 cm 的正方形。图中正方形的上边和左边均标有 18 cm，圆与正方形的四条边相切。图形未按比例绘制。
计算阴影部分的面积。

✓ **答案** 69.5cm^2

解析 圆形画面的直径为 18 cm，半径为

$$r=\frac{18}{2}=9\text{ cm}$$

阴影面积为正方形面积减去圆形画面的面积，得

$$S_{\text{阴影}}=18^2-\pi\times 9^2=324-81\pi\approx 69.5\text{cm}^2$$

答：阴影面积约为 69.5cm^2。

5.7 把等体积关系列成方程求尺寸

题型 1 把等体积关系列成方程求尺寸（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **圆柱体积计算：**球贴底且有一半浸水，水深等于球半径 3 cm。圆柱半径为 12 cm，圆周率记为 π。先求底面积 S，再乘水深，得到圆柱体积 $V_{\text{柱}}$。

$$S=\pi\times 12^2=144\pi\text{cm}^2$$

$$V_{\text{柱}}=S\times 3=432\pi\text{cm}^3$$

圆柱体积等于底面积与高的_____。

② **浸水体积排水：**金属球只有一半浸水，浸水部分的体积是_____。球半径记为 r，球体积记为 $V_{\text{球}}$。移出金属球，水位下降部分的圆柱体积等于浸水体积。

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_{浸}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 3^3=18\pi\text{cm}^3$$

$$144\pi h=18\pi$$

$$h=\frac{18\pi}{144\pi}=0.125$$

③ **倒水求新半径：**原有水体积要扣除球在水下占据的体积。

$$V_{水}=432\pi-18\pi=414\pi\text{cm}^3$$

倒入另一容器，水的体积_____。若水体积为 $8\pi\text{cm}^3$、新水深为 2 cm，设新半径为 t cm，取正平方根。

$$\pi t^2\times 2=8\pi$$

$$t^2=\frac{8\pi}{2\pi}=4$$

$$t=\sqrt{4}=2$$

④ **等体积求棱长：**图中正方体棱长为 6 cm，体积是棱长的三次方。三棱柱的底面是直角三角形，先求底面积再乘柱长。

正方体：

$V_{正}=6^3\text{cm}^3$

三棱柱：

$V_{棱}=\frac{1}{2}\times 4\times x\times 9\text{cm}^3$

体积相等时用_____连接；如 $4t=8$，两边同除以 4。

$$t=\frac{8}{4}=2$$

⑤ **单位小块计数：**图中每个小正方体的体积为 1cm^3，棱长为 1 cm。正面每排有 8 块、竖直有 3 层，向后有 2 排。总块数 N 等于三个方向块数的_____。

$$N=8\times 3\times 2=48$$

$$V=48\times 1=48\text{cm}^3$$

⑥ **整数尺寸重组：**用完所有单位小块，三个正整数尺寸的乘积_____。如原尺寸为 2 cm、3 cm、4 cm，总体积为 24cm^3。改写成另一组乘积，排除原尺寸的顺序互换。

$24=1\times 4\times 6$

尺寸可取 1 cm、4 cm、6 cm。

$24=4\times 3\times 2$

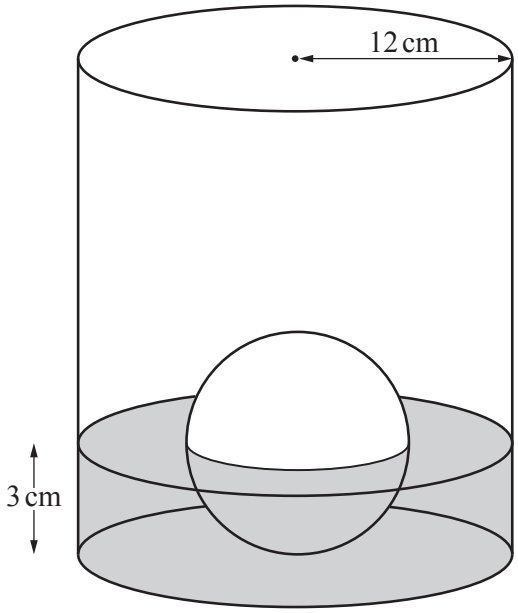
仅调换原尺寸顺序，仍是同一个长方体。

⑦ **球与完整容器数：**球内切于正方体并接触所有六个面时，球的直径等于正方体的棱长。例如棱长10 cm，球半径为 $\frac{10}{2}=5$ cm。若把体积为100cm^3的液体分装进每个容积12cm^3的容器，$\frac{100}{12}=8$余4，只能完整装满8个容器，余下液体不再算一个完整容器。

填空：①乘积　②半球体积　③不变　④等号　⑤乘积　⑥保持不变

点石成金　题目出现等体积、倒水、水位变化或用完所有小方块时，先确定相等的两个体积，再列方程。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q3(a)]



NOT TO SCALE

The diagram shows a cylinder containing water.
There is a solid metal sphere touching the base of the cylinder.
Half of the sphere is in the water.

The radius of the cylinder is 12 cm and the radius of the sphere is 3 cm.

(a) The sphere is removed from the cylinder and the level of the water decreases by h cm.

Show that $h = 0.125$.
[The volume, V, of a sphere with radius r is $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.]

图中有一个盛水的圆柱形容器。一个实心金属球与容器底面接触，球的一半浸在水中。圆柱的半径为 12 cm，球的半径为 3 cm。图中水深标为 3 cm。图形不按比例绘制。
(a) 从圆柱形容器中取出金属球，水位下降 h cm。证明 $h = 0.125$。[半径为 r 的球，其体积 V 的公式为 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$。]

解答　球的一半浸在水中，浸水部分为半球。

$$V_{浸} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 18\pi \text{cm}^3$$

移出金属球前后水的体积不变，水位下降部分的圆柱体积等于半球体积。

$$\pi \times 12^2 \times h = 18\pi$$

$$144\pi h = 18\pi$$

$$h = \frac{18\pi}{144\pi} = 0.125$$

答：$h = 0.125$。

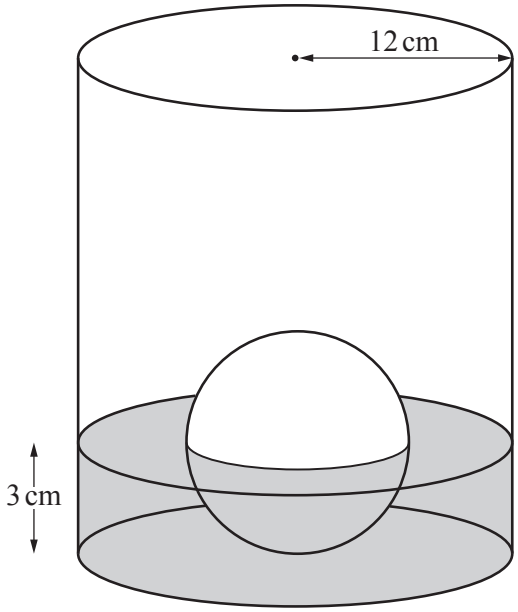
方法：先看球的浸水比例，再将浸水体积与水位下降形成的圆柱体积列等式。

辨析：浸水体积是球在水下的占位，水的体积是扣除占位后的实际水量。

针对练习

1. [2023 · February/March 0580/42 Q3(b)]

提示：先看原水深与球的占位，再比较倒水前后的水量。



NOT TO SCALE

The diagram shows a cylinder containing water.
There is a solid metal sphere touching the base of the cylinder.
Half of the sphere is in the water.

The radius of the cylinder is 12 cm and the radius of the sphere is 3 cm.

(b) The water in the cylinder is poured into another cylinder of radius R cm.
The depth of the water in this cylinder is 18 cm.

Calculate the value of R.

图中有一个盛水的圆柱形容器。一个实心金属球与容器底面接触，球的一半浸在水中。圆柱的半径为 12 cm，球的半径为 3 cm。图中水深标为 3 cm。图形不按比例绘制。

(b) 将圆柱形容器中的水倒入另一个半径为 R cm 的圆柱形容器。新容器中的水深为 18 cm。求 R 的值。

✓ **答案** $R = \sqrt{23} \approx 4.80$

解析 球贴着容器底面，且一半浸在水中，原水深为 3 cm。

$$V_{水} = \pi \times 12^2 \times 3 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 414\pi \text{cm}^3$$

倒水前后水的体积相等。

$$\pi R^2 \times 18 = 414\pi$$

$$R^2 = \frac{414\pi}{18\pi} = 23$$

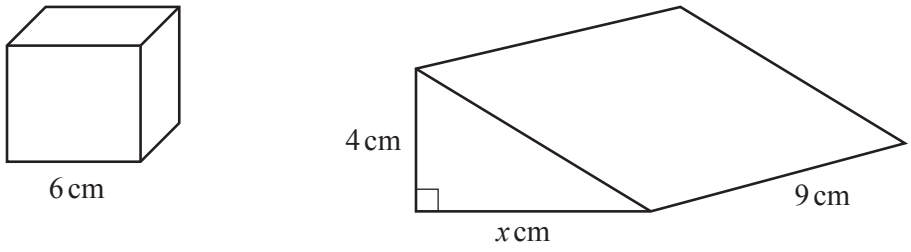
由 $R > 0$，得

$$R = \sqrt{23} \approx 4.80$$

答：$R \approx 4.80$。

2. [2023 · October/November 0580/31 Q4(b)]
提示：先辨认三角形底面的两条直角边，再比较两个立体的体积。

(b) The diagram shows two solids: a cube and a right-angled triangular prism.



NOT TO SCALE

Both solids have the same volume.

Calculate the value of x.

(b) 图中有两个立体：一个正方体和一个底面为直角三角形的三棱柱。正方体的棱长为 6 cm。三棱柱底面的两条直角边分别长 4 cm 和 x cm，柱长为 9 cm。图中标出了底面的直角。图形不按比例绘制。两个立体的体积相等。求 x 的值。

✓ **答案** $x = 12$

解析 正方体的体积为

$$V_{正} = 6^3 = 216\text{cm}^3$$

三棱柱的底面是直角三角形，其体积为

$$V_{棱} = \frac{1}{2} \times 4 \times x \times 9 = 18x\text{cm}^3$$

由两个立体的体积相等，得

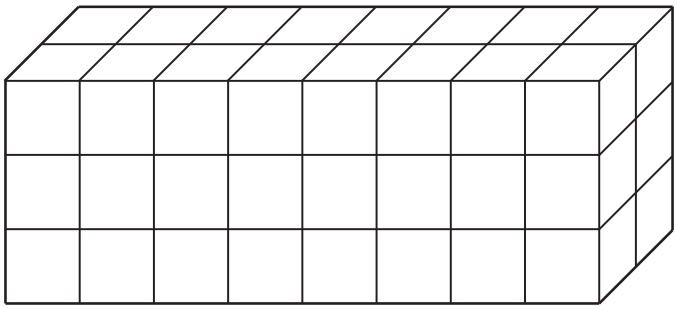
$$18x = 216$$

$$x = \frac{216}{18} = 12$$

答：$x = 12$。

3. [2023 · May/June 0580/33 Q3(d)(ii)]
提示：先数三个方向的小块数，再找乘积相同且非顺序互换的尺寸。

(d) The diagram shows a cuboid made from 1 cm^3 cubes.



NOT TO SCALE

(ii) Write down the dimensions of a different cuboid that can be made using all of the cubes.

(d) 图中是一个由体积为 1cm^3 的小正方体组成的长方体。图中正面横向有 8 个小正方体，竖直方向有 3 个，向后有 2 个。图形不按比例绘制。
(ii) 使用所有这些小正方体，可以组成另一个不同的长方体。写出这个长方体的一组尺寸。

✓ **答案** 1 cm × 6 cm × 8 cm

解析 图中长方体长、宽、高三个方向分别有 8 块、2 块、3 块。

$$N = 8 \times 2 \times 3 = 48$$

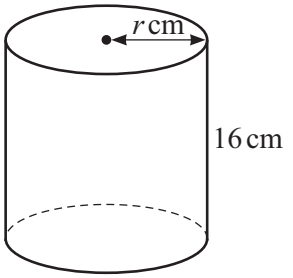
将所有小正方体排成 1 层，每层 6 行、每行 8 块。

$$48 = 1 \times 6 \times 8$$

每个小正方体的棱长为 1 cm，所得尺寸为 1 cm、6 cm、8 cm。原长方体没有长为 1 cm 的棱，所得长方体与原长方体不同。答：尺寸可为 1 cm × 6 cm × 8 cm。

4. [2025 · February/March 0580/22 Q13]

← 提示：分别表示圆柱和球的体积，再用等号连接。



NOT TO SCALE

The diagram shows a cylinder with radius r cm and height 16 cm.
A sphere has radius 3 cm.
The volume of the cylinder is equal to the volume of the sphere.

Find the value of r.

图示为一个半径为 r cm、高为 16 cm 的圆柱。图形不按比例绘制。一个球的半径为 3 cm。圆柱的体积等于球的体积。求 r 的值。

✓ **答案**

$$\frac{3}{2}$$

解析 由圆柱的体积等于球的体积，得

$$\pi r^2 \times 16 = \frac{4}{3}\pi \times 3^3$$

$$16\pi r^2 = 36\pi$$

$$r^2 = \frac{36\pi}{16\pi} = \frac{9}{4}$$

圆柱半径为正，故

$$r = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

答：$r = \frac{3}{2}$。

5. [2025 · May/June 0580/32 Q23]

提示：用球和圆锥各自的体积公式列出等式。

A sphere has radius 8 cm.
A cone has radius 8 cm and height h.
The sphere and the cone have the same volume.

Work out the height, h, of the cone.

一个球的半径为 8 cm。一个圆锥的半径为 8 cm，高为 h。球与圆锥的体积相等。求圆锥的高 h。

✓ **答案**

$$32 \text{ cm}$$

解析 以厘米为长度单位，由球与圆锥的体积相等，得

$$\frac{4}{3}\pi \times 8^3 = \frac{1}{3}\pi \times 8^2 \times h$$

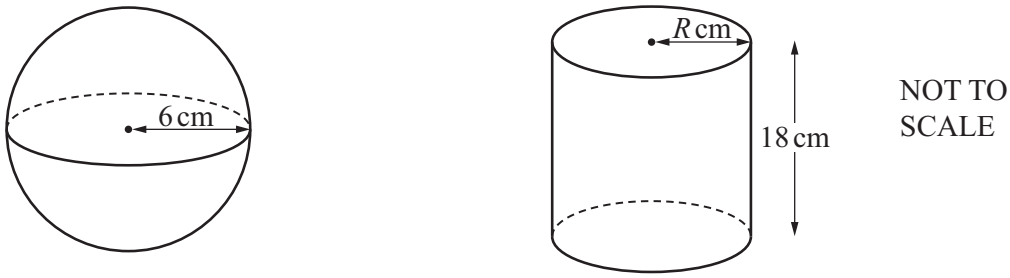
等式两边同除以 $\frac{1}{3}\pi \times 8^2$，得

$$h = \frac{\frac{4}{3}\pi \times 8^3}{\frac{1}{3}\pi \times 8^2} = 4 \times 8 = 32$$

答：圆锥的高为 32 cm。

6. [2024 · October/November 0580/21 Q16]

提示：先由体积相等求圆柱半径，再求曲面面积。



The diagram shows a sphere of radius 6 cm and a cylinder of height 18 cm and radius R cm.
The volume of the sphere is equal to the volume of the cylinder.

Calculate the curved surface area of the cylinder.
Give your answer in terms of π.
[The volume, V, of a sphere with radius r is $V = \frac{4}{3}\pi r^3$]

图示为一个半径为 6 cm 的球和一个高为 18 cm、半径为 R cm 的圆柱。图形不按比例绘制。球的体积等于圆柱的体积。计算圆柱的曲面面积。答案用含 π 的式子表示。［半径为 r 的球，其体积 V 为 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$。］

✓ **答案**

$$144\pi \text{cm}^2$$

解析 由球的体积等于圆柱的体积，得

$$\frac{4}{3}\pi \times 6^3 = \pi R^2 \times 18$$

$$288\pi = 18\pi R^2$$

$$R^2 = \frac{288\pi}{18\pi} = 16$$

圆柱半径为正，故

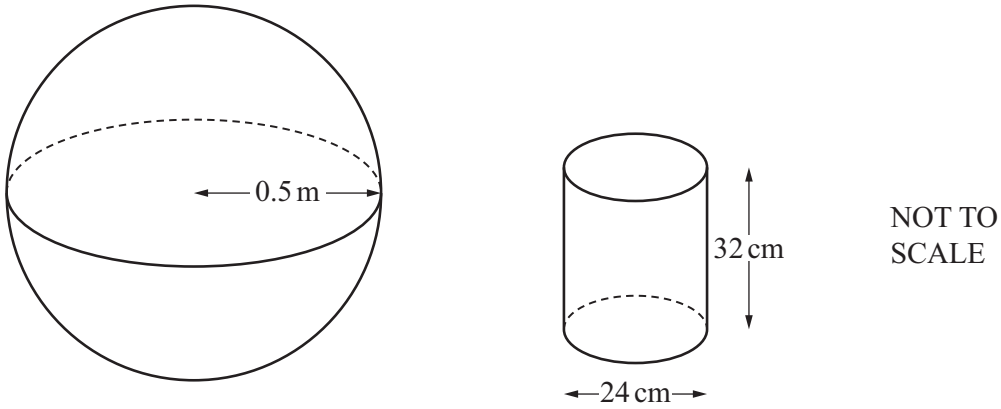
$$R = \sqrt{16} = 4$$

圆柱侧面展开成长方形，长为底面周长，宽为圆柱的高。
设圆柱的曲面面积为 S，则

$$S = 2\pi \times 4 \times 18 = 144\pi \text{cm}^2$$

答：圆柱的曲面面积为 $144\pi \text{cm}^2$。

7. [2024 · May/June 0580/13 Q23]
提示：先将水箱半径化为厘米，再分别求水箱和水壶的体积。



The diagram shows a spherical tank with radius 0.5 m and a cylindrical jug with diameter 24 cm and height 32 cm.
The tank is full of water.

Calculate how many times the jug can be completely filled with water from the tank.
[The volume, V, of a sphere with radius r is $\frac{4}{3}\pi r^3$.]

图中有一个半径为 0.5 m 的球形水箱，以及一个直径为 24 cm、高为 32 cm 的圆柱形水壶。图形未按比例绘制。
水箱中装满了水。
计算水箱中的水能将水壶完全装满多少次。
[半径为 r 的球的体积 V 为
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$]

✓ **答案** 36 次

解析 将水箱的半径化为厘米，得
$0.5 \times 100 = 50$（cm）。
水壶的半径为
$24 \div 2 = 12$（cm）。
由球的体积公式，水箱中水的体积为
$\frac{4}{3} \times \pi \times 50^3 = \frac{500000\pi}{3}$（$\text{cm}^3$）。
圆柱的体积等于底面积乘高，水壶的容积为
$\pi \times 12^2 \times 32 = 4608\pi$（$\text{cm}^3$）。
水的总体积除以水壶的容积，得
$\left(\frac{500000\pi}{3}\right) \div (4608\pi) = \frac{15625}{432} \approx 36.169$。
完全装满的次数取整数，舍去商的小数部分。
答：能将水壶完全装满 36 次。

8. [2025 · October/November 0580/41 Q14(d)]
提示：由相切条件求球的半径，再列熔铸前后的体积等式。

A cube contains a solid metal sphere.
The sphere touches all the faces of the cube.
The side length of the cube is 8 cm.

(a) Show that the volume of the sphere is $\frac{256}{3}\pi\,\text{cm}^3$.

(d) The sphere is melted down and made into a solid cylinder with radius 3.1 cm.

Calculate the **total** surface area of the cylinder.

一个正方体内装有一个实心金属球。
球与正方体的所有面相切。
正方体的棱长为 8 cm。
(a) 证明球的体积为 $\frac{256}{3}\pi\text{cm}^3$。
(d) 将这个球熔化，铸成一个半径为 3.1 cm 的实心圆柱。
计算这个圆柱的总表面积。

✓ **答案**

$$233\text{cm}^2$$

解析 球与正方体的所有面相切，球的直径等于正方体的棱长。
设球的半径为 R cm，得

$$R=\frac{8}{2}=4$$

球的体积为

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times4^3=\frac{256\pi}{3}\text{cm}^3$$

熔铸前后体积相等，设圆柱的高为 h cm，得

$$\pi\times3.1^2\times h=\frac{256\pi}{3}$$

$$h=\frac{256}{3\times3.1^2}$$

圆柱的总表面积等于两个底面积与曲面面积之和，得

$$S=2\pi\times3.1^2+2\pi\times3.1\times\frac{256}{3\times3.1^2}$$

$$S\approx233\text{cm}^2$$

答：圆柱的总表面积为 233cm^2。

5.8 统一密度与体积单位，再相乘求质量

题型 1 统一密度与体积单位，再相乘求质量（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **单位量求质量：**铝的体积为 1cm^3 时，质量为 2.7 g。体积为 6000cm^3 时，质量为 6000 个 2.7 g。质量等于密度与体积的_____。

$$m = \rho V$$

其中 m 表示质量，ρ 表示密度，V 表示体积。

② **标准形式表示：**例题的质量为 16200 g，将数值写成标准形式。写成 $a \times 10^n$，其中系数 a 满足下式，指数 n 为_____。

$$1 \le a < 10$$

$$16200 = 1.62 \times 10000 = 1.62 \times 10^4$$

③ **球体体积计算：**已知球的半径 r，用球体体积公式计算。以半径为 1 cm 的球为例。

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 1^3 = \frac{4\pi}{3}\text{cm}^3$$

④ **球体质量计算：**上述球的体积以立方厘米表示。若材料的密度为 $2\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$，相乘所得质量以克表示。

$$m = 2 \times \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}\text{ g} \approx 8.37758\text{ g}$$

⑤ **统一体积单位：**密度以 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ 表示时，体积须以立方米表示。立方厘米换成立方米，体积数值除以_____。

$$1\text{ m} = 100\text{ cm}$$

$$1\text{m}^3 = 100^3\text{cm}^3 = 1000000\text{cm}^3$$

$$2000\text{cm}^3 = \frac{2000}{1000000}\text{m}^3 = 0.002\text{m}^3$$

⑥ **质量单位换算：**克换千克除以 1000，千克换克乘以 1000。上述球的质量可按左栏换算。精确到最接近的克，千克数保留_____位小数。

克换千克：

$\frac{8\pi}{3}\text{ g} = \frac{8\pi}{3000}\text{ kg}$

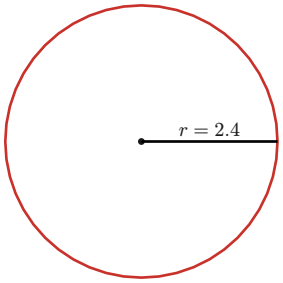
$\frac{8\pi}{3000}\text{ kg} \approx 0.00837758\text{ kg} \approx 0.008\text{ kg}$

千克换克：

$2\text{ kg} = 2 \times 1000\text{ g} = 2000\text{ g}$

填空：①积　②整数　③1000000　④三

先确定体积，才能把密度换成质量

	图像	数量关系
同一关系		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$，$m = \rho V$。

点石成金　题目出现密度和体积，或给出球的半径并求质量时，先求体积并统一密度与体积的单位。

例 1　[2023 · May/June 0580/33 Q8(c)]

(c) Aluminium is used to make the wire.
The mass of 1 cm^3 of aluminium is 2.7 grams.

Work out the mass, in grams, of 6000 cm^3 of aluminium.
Give your answer in standard form.

(c) 铝用于制作这根金属丝。1cm^3 铝的质量为 2.7 克。
求 6000cm^3 铝的质量，单位为克。答案用标准形式表示。

解答 每立方厘米铝的质量为 2.7 g，故所求质量为

$$m = 2.7 \times 6000 = 16200 \text{ g}$$

写成标准形式，得

$$16200 \text{ g} = 1.62 \times 10^4 \text{ g}$$

答：铝的质量为 1.62×10^4 g。

方法：先看密度分母与体积的单位，统一后从密度乘体积起手。

辨析：密度是单位体积的质量，质量是整块材料的总质量。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/23 Q11]

提示：看球的半径与密度单位，再核对质量单位和舍入要求。

A bronze sphere has radius 3.6 cm.
The density of bronze is 8.05 g/cm^3.

Find the mass of the sphere.
Give your answer **in kilograms**, correct to the nearest gram.

[The volume, V, of a sphere with radius r is $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.]

[Density = mass ÷ volume.]

一个青铜球的半径为 3.6 cm。青铜的密度为 8.05 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$。
求这个球的质量。答案用千克表示，精确到最接近的克。
[半径为 r 的球，其体积 V 为 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$。]　[密度 = 质量 ÷ 体积。]

✓ **答案** 1.573 kg

解析 由球体体积公式，得

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 3.6^3 = 62.208\pi \text{cm}^3$$

由质量等于密度乘体积，得

$$m = 8.05 \times 62.208\pi = 500.7744\pi \text{ g}$$

换算成千克，得

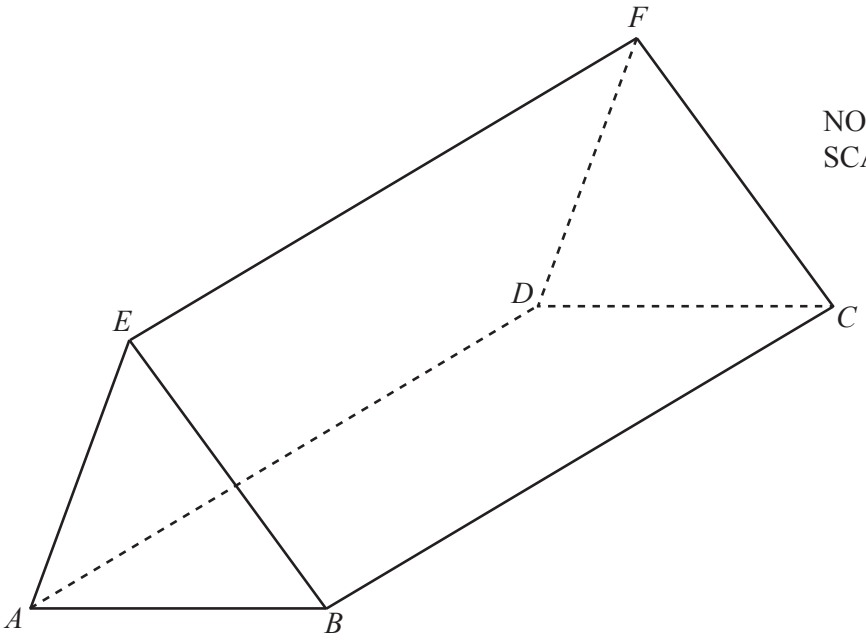
$$m = \frac{500.7744\pi}{1000} \text{ kg} \approx 1.573229 \text{ kg}$$

精确到最接近的克，千克数保留三位小数，得

$$m \approx 1.573 \text{ kg}$$

答：球的质量为 1.573 kg。

2. [2023 · May/June 0580/41 Q2(e)]
提示：比较密度分母与体积的单位，再核对所求质量单位。



The diagram shows a solid triangular prism $ABCDEF$ of length 15 cm.
$AB = 6.4$ cm, $EB = 5.7$ cm and the volume of the prism is 145 cm^3.

(e) The prism is made of plastic with density 938 kg/m^3.

Calculate the mass of the prism in **grams**.
[Density = mass ÷ volume]

图示实心三棱柱 $ABCDEF$，长度为 15 cm。图形不按比例绘制。$AB = 6.4$ cm，$EB = 5.7$ cm，三棱柱的体积为 $145 cm^3$。
(e) 这个三棱柱由密度为 $938 \frac{kg}{m^3}$ 的塑料制成。
计算这个三棱柱的质量，单位为克。［密度 = 质量 ÷ 体积。］

✓ **答案** 136 g

解析 密度以 $\frac{kg}{m^3}$ 表示，将体积换算成立方米，得

$$V = \frac{145}{1000000} m^3 = 0.000145 m^3$$

由质量等于密度乘体积，得

$$m = 938 \times 0.000145 = 0.13601 \text{ kg}$$

换算成克，得

$$m = 0.13601 \times 1000 = 136.01 \text{ g} \approx 136 \text{ g}$$

答：三棱柱的质量约为 136 g。

3. [2024 · May/June 0580/42 Q4(b)]
提示：先求水位下降部分的体积，它等于石头的体积。

(b) A rectangular fish tank with length 42 cm and width 35 cm is full of water.
A stone lies at the bottom of the tank.
When the stone is removed from the tank, the depth of the water decreases by 0.2 cm.
The density of the stone is 2.2 g/cm^3.

Calculate the mass of the stone in grams.
[Density = mass ÷ volume]

(b) 一个长为 42 cm、宽为 35 cm 的长方体鱼缸装满了水。一块石头位于鱼缸底部。从鱼缸中取出石头后，水深下降了 0.2 cm。石头的密度为 2.2 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$。
计算石头的质量，单位为克。［密度 = 质量 ÷ 体积。］

✓ **答案**

646.8 g

解析 石头的体积等于水位下降部分的长方体体积。
设石头的体积为 V，则

$$V = 42 \times 35 \times 0.2 = 294\text{cm}^3$$

设石头的质量为 m，由质量等于密度乘体积，得

$$m = 2.2 \times 294 = 646.8\ \text{g}$$

答：石头的质量为 646.8 g。

4. [2025 · May/June 0580/31 Q25]
提示：先将长方体的三个尺寸相乘，求出金条的体积。

A bar of gold in the shape of a cuboid has dimensions 2 cm by 4 cm by 6.5 cm.
The density of gold is 19.32 g/cm^3.

Calculate the mass of this bar of gold.

$$\left[\text{Density} = \frac{\text{mass}}{\text{volume}}\right]$$

一根长方体金条的尺寸为 2 cm、4 cm、6.5 cm。金的密度为 19.32 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$。
计算这根金条的质量。［密度 = 质量 ÷ 体积。］

✓ **答案**

1004.64 g

解析 设金条的体积为 V，质量为 m。
由长方体体积等于长、宽、高的乘积，得

$$V = 2 \times 4 \times 6.5 = 52\text{cm}^3$$

由质量等于密度乘体积，得

$$m = 19.32 \times 52 = 1004.64\ \text{g}$$

答：这根金条的质量为 1004.64 g。

5. [2025 · October/November 0580/41 Q14(c)]
提示：先由相切条件求球的半径，再求体积与质量。

A cube contains a solid metal sphere.
The sphere touches all the faces of the cube.
The side length of the cube is 8 cm.

(a) Show that the volume of the sphere is $\frac{256}{3}\pi\,\text{cm}^3$.

(c) The density of the metal of the sphere is $7.86\,\text{g/cm}^3$.

Calculate the mass of the sphere.
Give your answer in kilograms.
[Density = mass ÷ volume]

一个正方体内装有一个实心金属球。
球面与正方体的所有面相切。
正方体的棱长为 8 cm。
(a) 证明球的体积为 $\frac{256\pi}{3}\text{cm}^3$。
(c) 球所用金属的密度为 $7.86\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$。
计算球的质量，答案用千克表示。
[密度 = 质量 ÷ 体积。]

✓ **答案** 2.11 kg

解析 球面与正方体的所有面相切，故球的直径等于正方体的棱长。球的半径为

$$r = \frac{8}{2} = 4\ \text{cm}$$

球的体积为

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 4^3 = \frac{256\pi}{3}\text{cm}^3$$

由质量等于密度乘体积，得

$$m = 7.86 \times \frac{256\pi}{3} = 670.72\pi\ \text{g}$$

换成千克，得

$$m = \frac{670.72\pi}{1000}\ \text{kg} \approx 2.11\ \text{kg}$$

答：球的质量约为 2.11 kg。

5.9 找垂直底和高，计算三角形面积

题型 1 找垂直底和高，计算三角形面积（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **读取方格底长：**三角形 A 的竖直边连接 $(2,0)$ 与 $(2,6)$。取这条边为底，底长记为 b。用两端点的_____之差求底长。

$$b = 6 - 0 = 6\ \text{cm}$$

② **求对应垂直高：**底边竖直，对应的垂直高沿_____方向。过顶点 $(5,9)$ 作水平线，交底边延长线于 $(2,9)$。高记为 h，用两端点的横坐标之差求长度。

$$h = 5 - 2 = 3\ \text{cm}$$

③ **计算三角面积：**三角形 A 的底长为 6 cm，对应高为 3 cm。面积记为 S，底长与对应高相乘后除以_____。

$$S=\frac{1}{2}bh$$

④ **按直角认底高：**图中有直角符号，所标的两条线互相垂直。用下面的长度演示底与高的取法。

两条直角边长 4 cm、3 cm：

$S=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6\text{cm}^2$

底边长 4 cm，垂直虚线长 3 cm：

$S=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6\text{cm}^2$

斜边的长度不作这条底边的高。

⑤ **判定竖杆垂直：**竖直杆与水平地面内过杆脚的线段垂直。杆长 3 m，地面内从杆脚到另一顶点的线段长 4 m。分别取为高和底，计算面积。

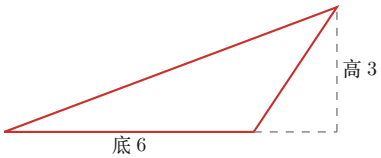
$$S=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6\text{m}^2$$

⑥ **写出面积单位：**底长与高用相同的长度单位表示。两个长度单位相乘，面积写相应的_____单位。

$\text{cm}\times\text{cm}=\text{cm}^2$　　$\text{m}\times\text{m}=\text{m}^2$

填空：①纵坐标　②水平　③2　④平方

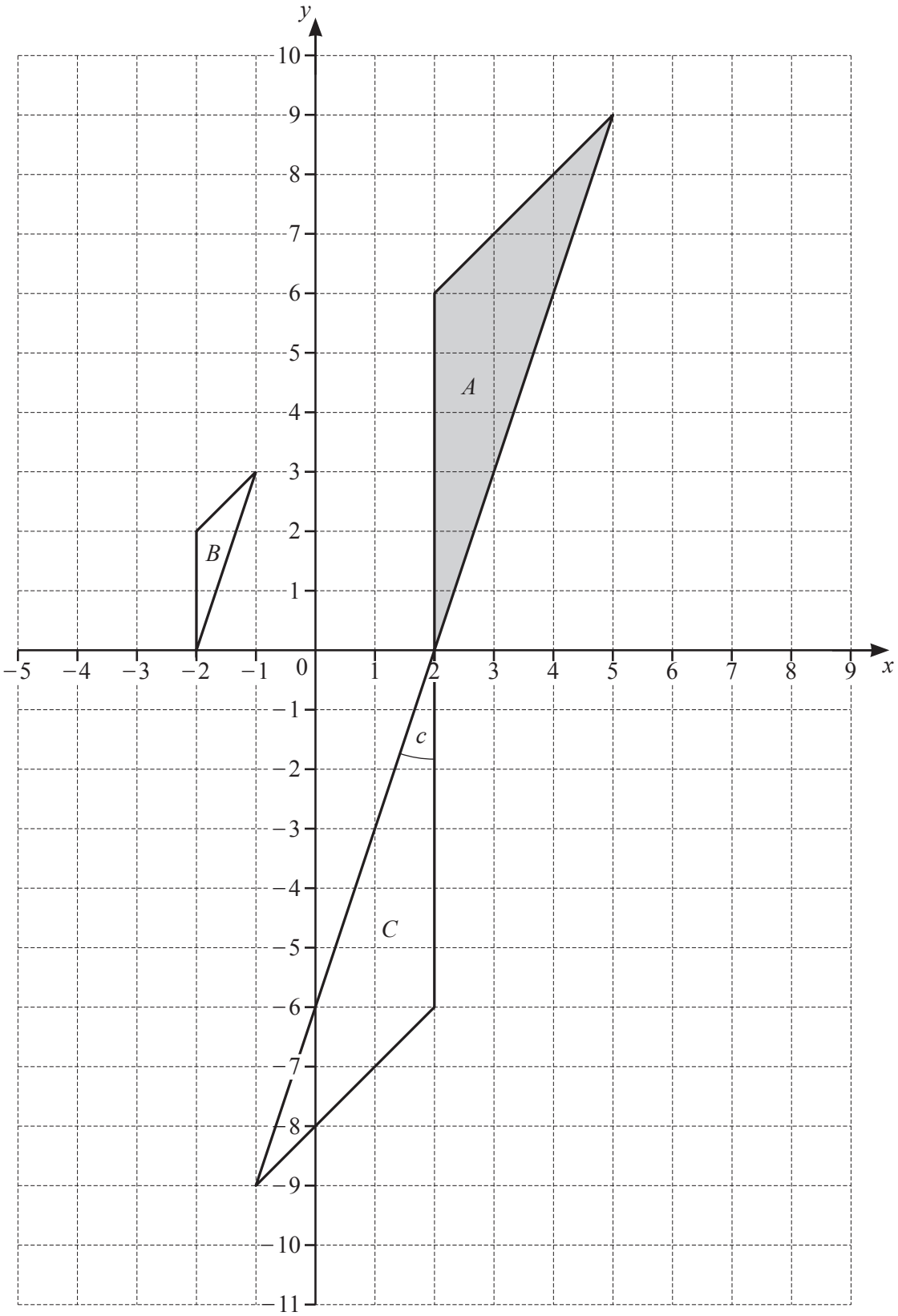
高与所选底边垂直

	图像	数量关系
同一关系		$S=\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$。

点石成金　题目出现方格图、直角符号或垂直关系，并要求三角形面积时，先确定一条底边及其对应的垂直高。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q5(c)]

The diagram shows three triangles, A, B and C, on a 1 cm^2 grid.



(c) Work out the area of triangle A.
Give the units of your answer.

图中在每个小方格面积为 1cm^2 的方格纸上画出了三个三角形 A、B 和 C。横轴标为 x，纵轴标为 y，三角形 C 内标有角 c。
(c) 求三角形 A 的面积，并写出答案的单位。

解答 取三角形 A 的竖直边为底，由端点坐标得

$$b = 6 - 0 = 6\ \text{cm}$$

底边竖直，对应高为顶点到直线 $x = 2$ 的水平距离，得

$$h = 5 - 2 = 3\ \text{cm}$$

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9\text{cm}^2$$

答：三角形 A 的面积为 9cm^2。

方法：先看竖直边两端的纵坐标，再用横坐标差求对应高。

辨析：斜边是三角形的边，高是对面顶点到底边所在直线的垂直距离。

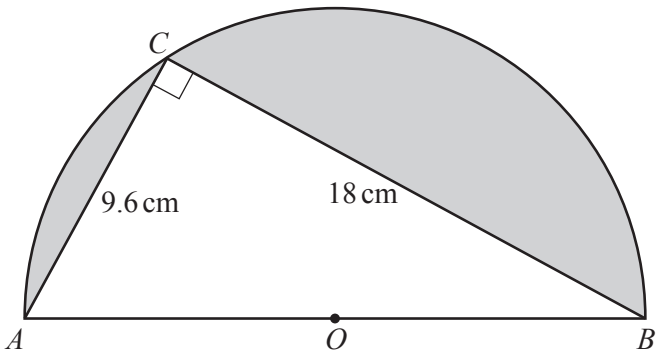
拓展：高的垂足可在底边延长线上，高不一定在三角形内部。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/33 Q9(a)(i)]

提示：看 C 处的直角符号，找出互相垂直的两条边。

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a semicircle with diameter AB.
O is the midpoint of AB and C is a point on the circumference.

(i) Calculate the area of triangle ABC.

(a) 图示一个以 AB 为直径的半圆。O 是 AB 的中点，C 是半圆弧上的一点。图中 $AC = 9.6$ cm，$BC = 18$ cm，$\angle ACB = 90°$。图形不按比例绘制。
(i) 计算三角形 ABC 的面积。

✓ **答案** 86.4cm^2

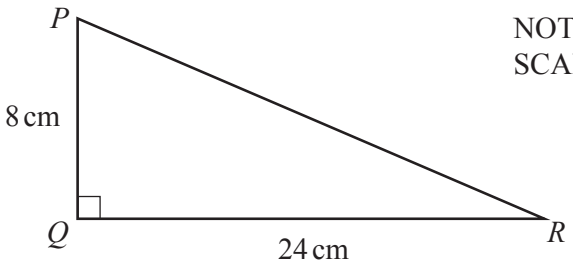
解析 由图中的直角符号得 $AC \perp BC$，取 BC 为底，AC 为对应高。

$$S = \frac{1}{2} \times 18 \times 9.6 = 86.4\text{cm}^2$$

答：三角形 ABC 的面积为 86.4cm^2。

2. [2023 · May/June 0580/41 Q4(a)(i)]
提示：看 Q 处的直角符号，核对所选底与高是否垂直。

(a)



(i) Calculate the area of triangle PQR.

(a) 图示三角形 PQR，$PQ = 8$ cm，$QR = 24$ cm，$\angle PQR = 90°$。图形不按比例绘制。
(i) 计算三角形 PQR 的面积。

✓ **答案** 96cm^2

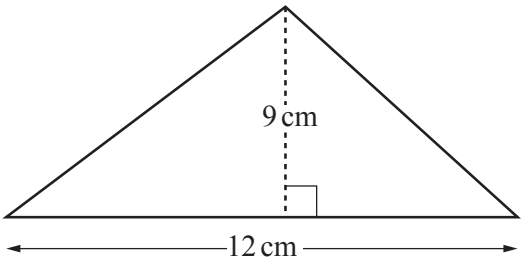
解析 由图中的直角符号得 $PQ \perp QR$，取 QR 为底，PQ 为对应高。

$$S = \frac{1}{2} \times 24 \times 8 = 96\text{cm}^2$$

答：三角形 PQR 的面积为 96cm^2。

3. [2023 · February/March 0580/42 Q8(a)]
提示：看虚线与底边相交处的标记，比较虚线和斜边的方向。

(a)



Calculate the area of the triangle.

(a) 图示三角形的底边长为 12 cm，从顶点到底边的虚线段长为 9 cm，虚线段与底边垂直。图形不按比例绘制。
计算这个三角形的面积。

✓ **答案** 54cm^2

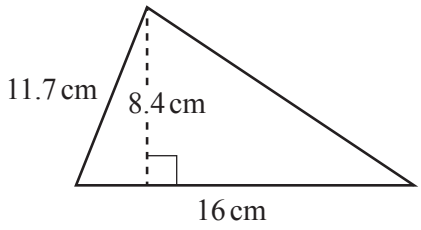
解析 由图中的直角符号知，长 9 cm 的虚线段垂直于长 12 cm 的底边。

$$S = \frac{1}{2} \times 12 \times 9 = 54\text{cm}^2$$

答：三角形的面积为 54cm^2。

4. [2023 · May/June 0580/32 Q5(b)]
提示：沿底边找到直角标记，再找与底边垂直的线段。

(b)



NOT TO SCALE

Find the area of this triangle.

（b）图示三角形的底边长为 16 cm，左侧斜边长为 11.7 cm。从顶点到底边的虚线段长为 8.4 cm，虚线段与底边垂直。图形不按比例绘制。
求这个三角形的面积。

✓ **答案** 67.2cm^2

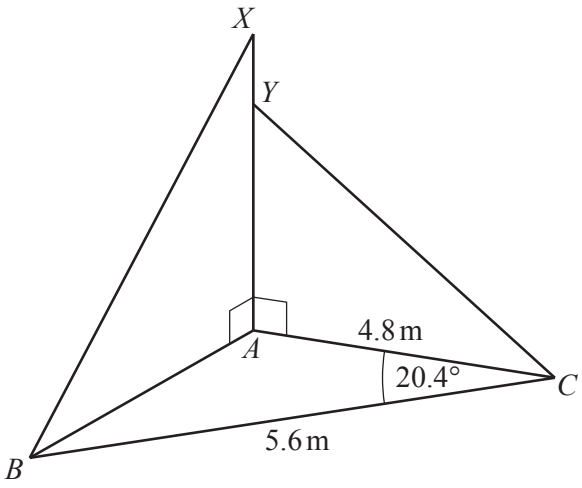
解析 由图中的直角符号知，长 16 cm 的底边所对应的高为 8.4 cm。

$$S = \frac{1}{2} \times 16 \times 8.4 = 67.2\text{cm}^2$$

答：三角形的面积为 67.2cm^2。

5. [2023 · May/June 0580/43 Q5(a)(iii)]
提示：看杆脚处，核对杆上所取线段与地面线段的垂直关系。

(a)



NOT TO SCALE

ABC is a scalene triangle on horizontal ground.
AYX is a straight vertical post, held in place by two straight wires XB and YC.
$AC = 4.8\,\text{m}$, $BC = 5.6\,\text{m}$ and angle $ACB = 20.4°$.

(iii) $AY = 2.9\,\text{m}$.

Calculate the area of triangle YAC.

（a）ABC 是水平地面上的一个不等边三角形。AYX 是一根竖直的直杆，由两根拉直的钢丝 XB 和 YC 固定。A、Y、X 在同一直线上，Y 位于 A 与 X 之间。图中竖杆在 A 处与地面上的 AB、AC 均垂直。已知 $AC = 4.8$ m，$BC = 5.6$ m，$\angle ACB = 20.4°$。图形不按比例绘制。
（iii）$AY = 2.9$ m。计算三角形 YAC 的面积。

✓ **答案** 6.96m^2

解析 AY 是竖直杆的一部分，AC 在水平地面上，故 $AY \perp AC$。取 AC 为底，AY 为对应高。

$$S=\frac{1}{2}\times 4.8\times 2.9=6.96\text{m}^2$$

答：三角形 YAC 的面积为 6.96m^2。

5.10 先求底面积，再乘柱体高度求体积

题型 1 先求底面积，再乘柱体高度求体积（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **数出三向格数：**小正方体的体积为 1cm^3，棱长为_____厘米。例图沿长、宽、高分别有 8、2、3 个小正方体。

② **底面积乘高：**以 A 表示底面积，h 表示垂直于底面的高。以 V 表示体积，先求底面积，再乘高。例图中：

$$A=8\times 2=16\text{cm}^2$$

$$V=Ah=16\times 3=48\text{cm}^3$$

③ **统一长度单位：**各边须化成相同的长度单位，体积使用_____单位。例如，长、宽为 3 cm、2 cm，高为 5 mm：

$$5\text{ mm}=0.5\text{ cm}$$

$$V=3\times 2\times 0.5=3\text{cm}^3$$

④ **直径换成半径：**给出直径时，先除以 2 求半径。以 d 表示直径，r 表示半径。半圆直径为 4 cm 时：

$$r=\frac{d}{2}=\frac{4}{2}=2\text{ cm}$$

⑤ **求半圆截面积：**半圆柱的两个端面都是半圆。续用半径 2 cm，以 A 表示半圆截面积：

$$A=\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi\times 2^2}{2}=2\pi\text{cm}^2$$

⑥ **截面积乘柱高：**半圆柱的垂直柱高是两端半圆间的距离。半圆自身的高等于半径。续用上述截面，取柱高 $h=5$ cm：

$$V=Ah=\frac{\pi r^2 h}{2}=\frac{\pi\times 2^2\times 5}{2}=10\pi\text{cm}^3$$

填空：①1　②立方

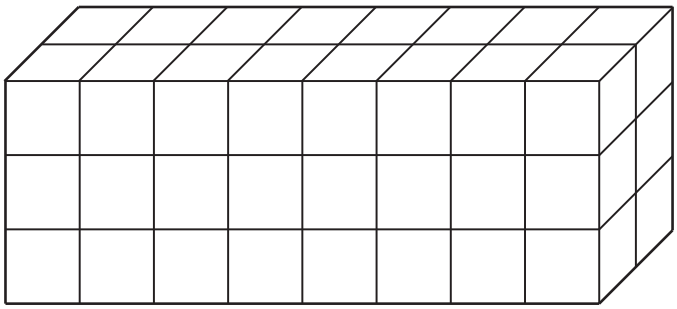
柱体体积由底面积与垂直柱高相乘

	图像	数量关系
同一关系		$V=(8\times 2)\times 3=48$。

点石成金　题目出现长方体或半圆柱的图形及尺寸，要求体积时，先求底面或截面的面积，再乘垂直柱高。

例 1　[2023 · May/June 0580/33 Q3(d)(i)]

(d) The diagram shows a cuboid made from 1 cm^3 cubes.



NOT TO SCALE

(i) Work out the volume of the cuboid.

(d) 图中所示的长方体由体积为 $1cm^3$ 的小正方体组成。图形不按比例绘制。
(i) 求这个长方体的体积。

解答　每个小正方体的棱长为 1 cm。数图得长、宽、高分别为 8 cm、2 cm、3 cm。底面积为

$$A = 8 \times 2 = 16cm^2$$

体积为

$$V = Ah = 16 \times 3 = 48cm^3$$

答：长方体的体积为 $48cm^3$。

方法：先数图中长、宽方向的格数求底面积，再数高度格数。

辨析：底面积是底面所占的大小，体积是立体所占空间的大小。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/32 Q2(c)(i)]

提示：看长、宽所在的底面，再找与底面垂直的棱。

(c) A cuboid measures 6 cm by 3 cm by 2 cm.

(i) Work out the volume of the cuboid.

(c) 一个长方体的长、宽、高分别为 6 cm、3 cm、2 cm。
(i) 求这个长方体的体积。

✓ **答案**

$36cm^3$

解析　以长为 6 cm、宽为 3 cm 的面为底面，高为 2 cm。

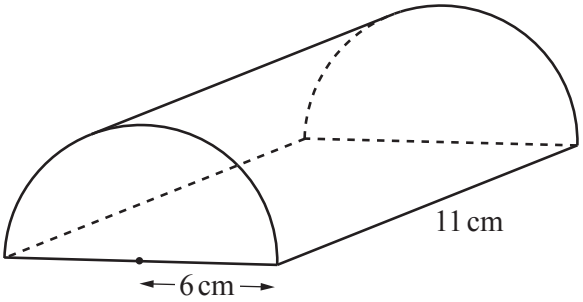
$$A = 6 \times 3 = 18cm^2$$

$$V = Ah = 18 \times 2 = 36cm^3$$

答：长方体的体积为 $36cm^3$。

2. [2023 · May/June 0580/41 Q4(b)]
提示：看半圆端面的半径，再找两端面之间的距离。

(b)



NOT TO SCALE

The diagram shows a half-cylinder of radius 6 cm and length 11 cm.

Calculate the volume of the half-cylinder.

(b) 图中所示的是一个半圆柱，半径为 6 cm，长为 11 cm。图中标出了半径 6 cm 和长 11 cm，图形不按比例绘制。
计算这个半圆柱的体积。

✓ **答案**

$$622\text{cm}^3$$

解析 半圆截面的半径为 6 cm，垂直柱高为 11 cm。
半圆截面积为

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 6^2}{2} = 18\pi\text{cm}^2$$

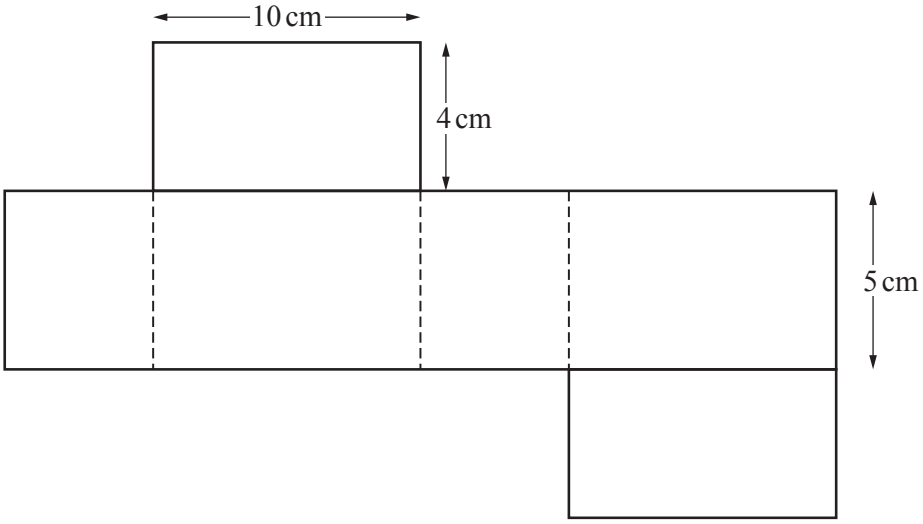
半圆柱的体积为

$$V = Ah = 18\pi \times 11 = 198\pi\text{cm}^3$$

$$V \approx 622\text{cm}^3$$

答：半圆柱的体积约为 622cm^3。

3. [2024 · February/March 0580/12 Q12(b)]
提示：先把上方矩形作为底面，辨认柱高对应的线段。



NOT TO SCALE

The diagram shows the net of a cuboid.

(b) Work out the volume of this cuboid.

图示为一个长方体的展开图，图形不按比例绘制。
上方矩形的水平边长为 10 cm，竖直边长为 4 cm；中间横排矩形的高为 5 cm。
(b) 求这个长方体的体积。

✓ **答案** 200cm^3

解析 展开图上方的矩形是长方体的一个底面，其两边长分别为 10 cm、4 cm。横排侧面的共同高度为 5 cm，故长方体的高为 5 cm。

底面积为

$$A = 10 \times 4 = 40\text{cm}^2$$

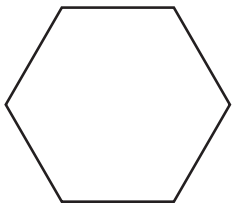
体积为

$$V = Ah = 40 \times 5 = 200\text{cm}^3$$

答：长方体的体积为 200cm^3。

4. [2024 · May/June 0580/42 Q9(b)(ii)(a)]
提示：用已给的横截面积乘柱长。

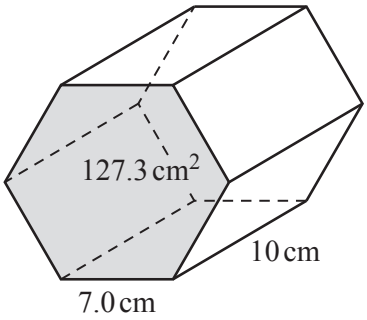
(b)



NOT TO SCALE

The diagram shows a regular hexagon.
The area of the hexagon is 127.3 cm^2.

(ii) The hexagon is the cross-section of a prism of length 10 cm.



NOT TO SCALE

(a) Find the volume of the prism.

(b) 图示为一个正六边形，图形不按比例绘制。
这个六边形的面积为 127.3cm^2。
(ii) 这个六边形是一个长为 10 cm 的棱柱的横截面。
棱柱图中标出了六边形的边长 7.0 cm、横截面积 127.3cm^2 和柱长 10 cm，图形不按比例绘制。
(a) 求这个棱柱的体积。

✓ **答案** 1273cm^3

解析 棱柱的横截面积为 127.3cm^2，柱长为 10 cm。横截面积乘柱长，得

$$V = 127.3 \times 10 = 1273\text{cm}^3$$

答：棱柱的体积为 1273cm^3。

5. [2024 · October/November 0580/33 Q1(a)(iii)]
提示：先求长与宽的乘积，再乘高。

(iii) The box of cereal is a cuboid.
The cuboid measures 25 cm by 20 cm by 5 cm.

Work out the volume of the cuboid.

(iii) 这个麦片盒是一个长方体。
长方体的长、宽、高分别为 25 cm、20 cm、5 cm。
求这个长方体的体积。

✓ **答案** 2500cm^3

解析 以长为 25 cm、宽为 20 cm 的面为底面，底面积为

$$A = 25 \times 20 = 500\text{cm}^2$$

长方体的高为 5 cm，故体积为

$$V = Ah = 500 \times 5 = 2500\text{cm}^3$$

答：长方体的体积为 2500cm^3。

5.11 分清各个面，求棱柱总表面积

题型 1 分清各个面，求棱柱总表面积（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **分清三对面：** 图中长方体的长、宽、高分别为 5 cm、3 cm、2 cm。长方体共有 _____ 个面，相对的面面积相等。

上下两面：
$5 \times 3 = 15\text{cm}^2$

前后两面：
$5 \times 2 = 10\text{cm}^2$

左右两面：

$$3 \times 2 = 6\text{cm}^2$$

② **合成长方体表面积：** 三对面各有两个，将三种面积的和乘 2。用 l、w、h 分别表示长、宽、高，S 表示表面积。

$$S = 2(lw + lh + wh)$$

③ **求梯形面积：** 梯形的两条平行边长为 9 cm、3 cm，它们的垂直距离为 4 cm。用 a、b 表示两条平行边长，h 表示梯形的高，A 表示面积。

$$A = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(9+3) \times 4}{2} = 24\text{cm}^2$$

④ **求梯形斜边：** 方格图中，每条斜边横跨 4 格、竖跨 3 格。每格边长为 1 cm，由勾股定理求斜边长 c。

$$c = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

⑤ **合成棱柱侧面积：** 棱柱各侧面都是矩形，一边分别对应底面的各边。另一边均为柱长，故侧面积等于底面 _____ 乘柱长。沿用上述梯形，柱长取 2 cm，用 P 表示底面周长，L 表示柱长。

$$P = 9 + 3 + 5 + 5 = 22 \text{ cm}$$

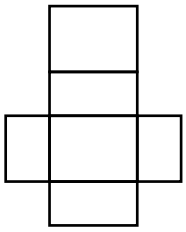
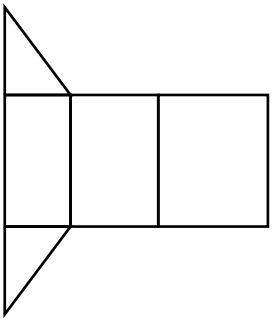
$$S_{侧} = PL = 22 \times 2 = 44\text{cm}^2$$

⑥ **合成棱柱表面积：** 两个全等底面与全部侧面的面积相加，得总表面积。用 S 表示总表面积，长度用厘米时，其单位为 _____。

$$S = 2A + S_{侧} = 2 \times 24 + 44 = 92\text{cm}^2$$

填空：①6　②周长　③cm^2

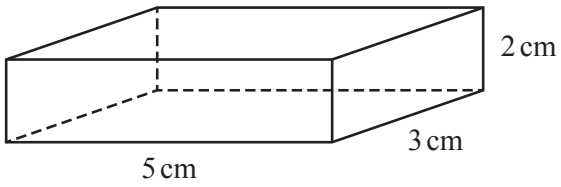
展开图按相邻面连接，配对面大小相同

	长方体 $4\times3\times2$	三棱柱：底边 $3,4,5$，长 6
可折叠的展开图		
面的配对	2 个 4×3，2 个 4×2，2 个 3×2。	2 个全等直角三角形，3 个侧面矩形。

点石成金　题目出现棱柱或展开图，并要求总表面积时，先分清两个底面和各侧面，再求面积之和。

例 1　[2023 · October/November 0580/31 Q4(a)(ii)]

(a) The diagram shows a cuboid.



NOT TO SCALE

(ii) Calculate the surface area of the cuboid.

(a) 图示为一个长方体，长为 5 cm，宽为 3 cm，高为 2 cm。图形不按比例绘制。
(ii) 计算这个长方体的表面积。

解答　长方体的上下两面、前后两面、左右两面分别全等。

上下两面各自的面积为

$$5\times3=15\text{cm}^2$$

前后两面各自的面积为

$$5\times2=10\text{cm}^2$$

左右两面各自的面积为

$$3\times2=6\text{cm}^2$$

故长方体的表面积为

$$S=2(15+10+6)=62\text{cm}^2$$

答：长方体的表面积为 62cm^2。

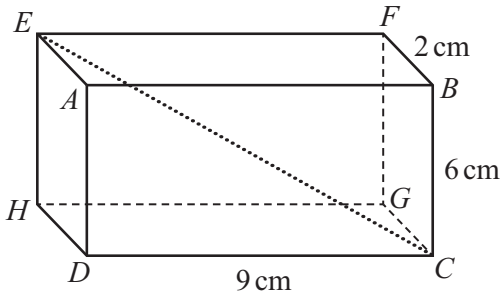
方法：先看长、宽、高的标注，从三种不同朝向的面起手求面积。

辨析：单面面积是两条相邻棱长的积，表面积是六个面的面积和。

针对练习

1. [2026 · May/June 0580/21 Q21(b)]

提示：先求三种不同大小的矩形面积，再合成六个面的面积。



NOT TO SCALE

The diagram shows a solid cuboid $ABCDEFGH$.
$BF = 2$ cm, $BC = 6$ cm and $CD = 9$ cm.

(b) Calculate the surface area of the cuboid.

图示为实心长方体 $ABCDEFGH$，图形不按比例绘制。
$BF = 2$ cm，$BC = 6$ cm，$CD = 9$ cm。
(b) 计算这个长方体的表面积。

✓ **答案** 168cm^2

解析 长方体的三种棱长分别为 2 cm、6 cm、9 cm。三对相对的面中，每对面的面积分别为

$$2 \times 6 = 12\text{cm}^2$$

$$2 \times 9 = 18\text{cm}^2$$

$$6 \times 9 = 54\text{cm}^2$$

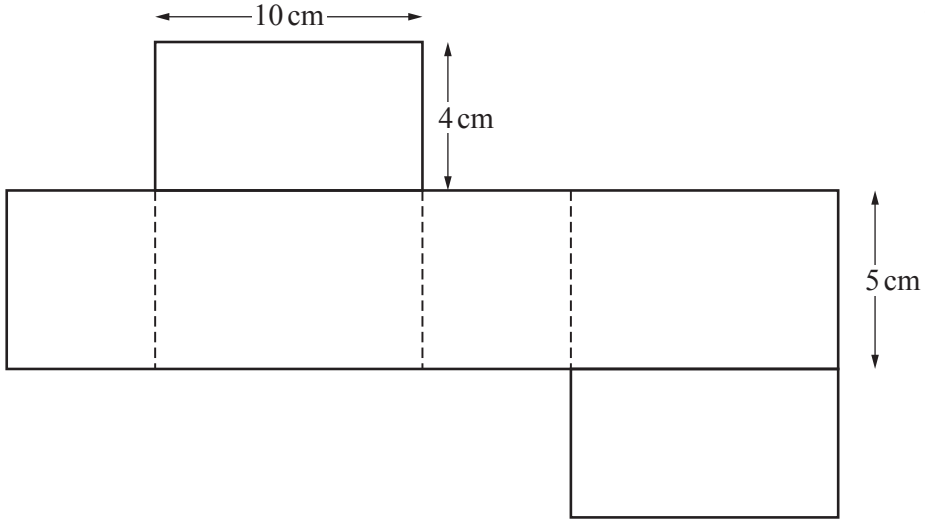
相对的面面积相等，故表面积为

$$S = 2(12 + 18 + 54) = 168\text{cm}^2$$

答：长方体的表面积为 168cm^2。

2. [2024 · February/March 0580/12 Q12(a)]

提示：先从展开图辨认三种棱长，再求三对面的面积。



NOT TO SCALE

The diagram shows the net of a cuboid.

(a) Work out the surface area of this cuboid.

图示为一个长方体的展开图，图形不按比例绘制。
上方矩形的水平边长为 10 cm，竖直边长为 4 cm；中间横排矩形的高为 5 cm。
(a) 求这个长方体的表面积。

✓ **答案** 220cm^2

解析 展开图上方矩形的两边长分别为 10 cm、4 cm，横排侧面的共同高度为 5 cm，故长方体的三种棱长为 10 cm、4 cm、5 cm。

三种不同大小的面的面积分别为

$$10 \times 4 = 40\text{cm}^2$$

$$10 \times 5 = 50\text{cm}^2$$

$$4 \times 5 = 20\text{cm}^2$$

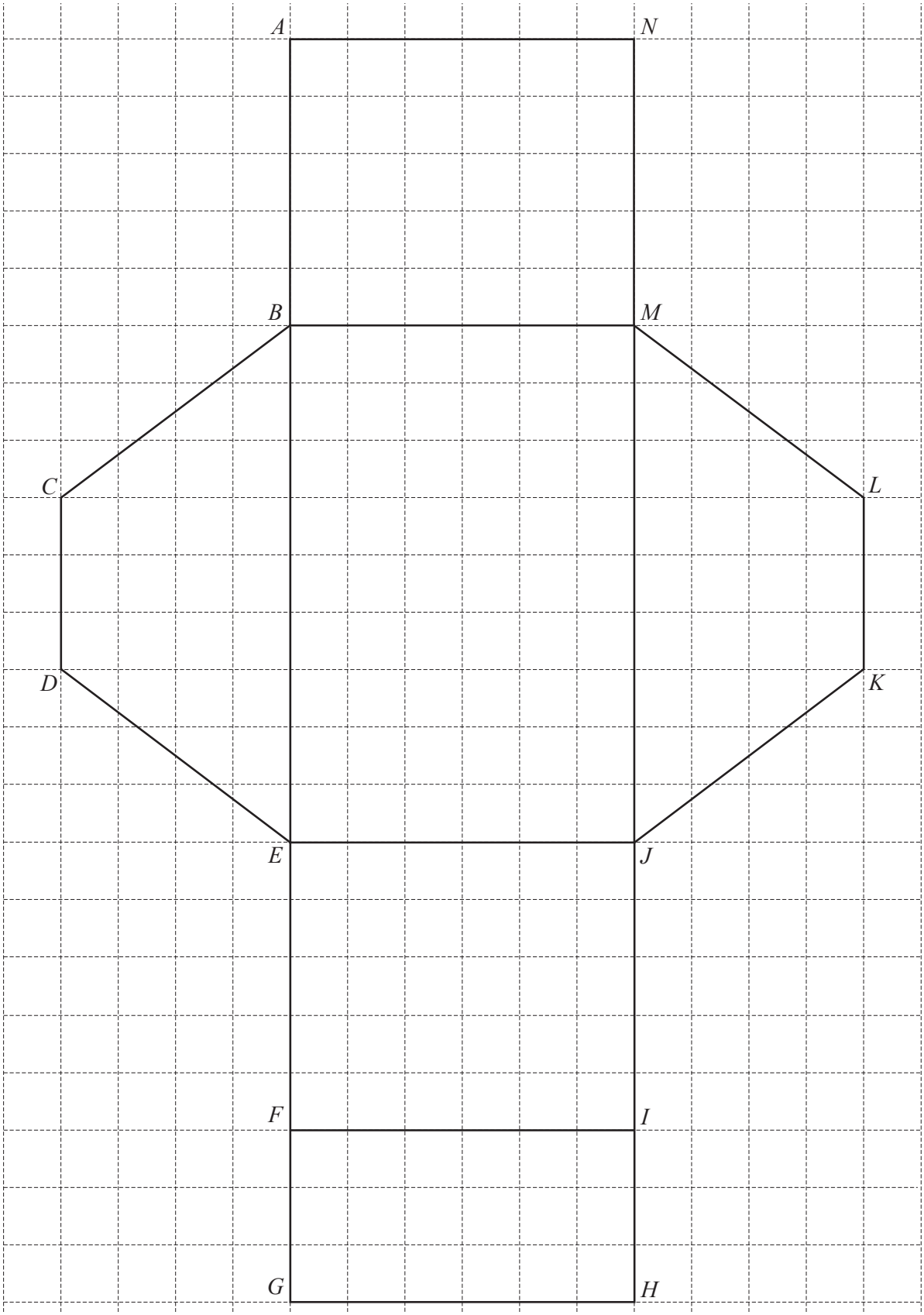
每种面各有两个，故表面积为

$$S = 2(40 + 50 + 20) = 220\text{cm}^2$$

答：长方体的表面积为 220cm^2。

3. [2023 · May/June 0580/31 Q4(a)(ii)]
提示：看斜边横竖跨格数，比对折叠后重合的边来配矩形边长。

(a) The diagram shows the net of a solid on a 1 cm^2 grid.



(ii) Calculate the total surface area of the solid.

4（a）图示为一个立体图形的展开图，画在每个小方格面积为 1cm^2 的方格纸上。图中左侧从上到下标有点 A、B、E、F、G，左边外侧标有点 C、D；右侧从上到下标有点 N、M、J、I、H，右边外侧标有点 L、K。

（ii）计算这个立体图形的总表面积。

✓ **答案** 180cm^2

解析 每个小方格的面积为 1cm^2，故边长为 1 cm。

由方格得，梯形 $BCDE$ 的两条平行边长为

$$BE = 9\text{ cm},\quad CD = 3\text{ cm}$$

两条平行边之间的垂直距离为 4 cm，故一个梯形的面积为

$$A = \frac{(9+3)\times 4}{2} = 24\text{cm}^2$$

两条斜边各横跨 4 格、竖跨 3 格，由勾股定理得

$$BC = DE = \sqrt{4^2+3^2} = 5\text{ cm}$$

棱柱的柱长为

$$BM = 6\text{ cm}$$

折叠后相互重合的边长度相等，四个矩形侧面的面积之和为

$$S_{侧} = 6\times 5 + 6\times 9 + 6\times 5 + 6\times 3 = 132\text{cm}^2$$

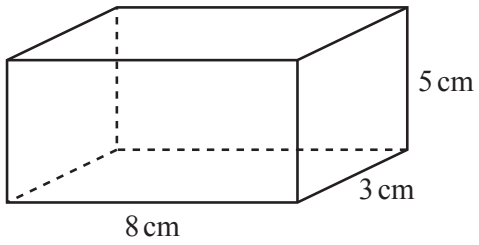
加上两个全等的梯形底面，得总表面积

$$S = 2\times 24 + 132 = 180\text{cm}^2$$

答：这个立体图形的总表面积为 180cm^2。

4. [2023 · May/June 0580/13 Q8]

提示：看三条棱长分别围成哪些面，比较相对面的大小。



NOT TO SCALE

Find the total surface area of the cuboid.

图示为一个长方体，长为 8 cm，宽为 3 cm，高为 5 cm。图形不按比例绘制。
求这个长方体的总表面积。

✓ **答案** 158cm^2

解析 长方体的三对相对面分别全等。

上下两面各自的面积为

$$8\times 3 = 24\text{cm}^2$$

前后两面各自的面积为

$$8\times 5 = 40\text{cm}^2$$

左右两面各自的面积为

$$3\times 5 = 15\text{cm}^2$$

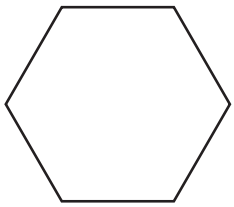
故长方体的总表面积为

$$S = 2(24 + 40 + 15) = 158\text{cm}^2$$

答：长方体的总表面积为 158cm^2。

5. [2024 · May/June 0580/42 Q9(b)(ii)(b)]
提示：先用正六边形的六条等长边求底面周长。

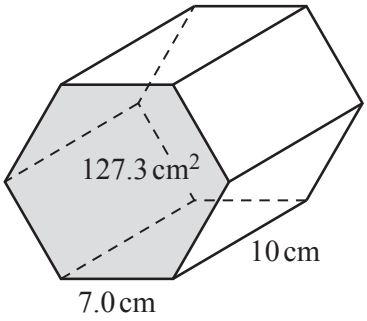
(b)



NOT TO SCALE

The diagram shows a regular hexagon.
The area of the hexagon is 127.3 cm^2.

(ii) The hexagon is the cross-section of a prism of length 10 cm.



NOT TO SCALE

(b) Calculate the surface area of the prism.

(b) 图示为一个正六边形，面积为 127.3cm^2。图形不按比例绘制。
(ii) 这个正六边形是一个柱长为 10 cm 的棱柱的横截面。图中横截面面积标为 127.3cm^2，一条边长标为 7.0 cm。图形不按比例绘制。
(b) 计算这个棱柱的表面积。

✓ **答案** 675cm^2

解析 正六边形的六条边等长，底面周长为

$$P = 6 \times 7.0 = 42 \text{ cm}$$

棱柱的侧面积为

$$S_{侧} = 42 \times 10 = 420\text{cm}^2$$

将两个底面与全部侧面的面积相加，得

$$S = 2 \times 127.3 + 420 = 674.6\text{cm}^2 \approx 675\text{cm}^2$$

答：棱柱的表面积为 675cm^2。

第六章 三角学

Chapter 6

6.1 先辨对边、邻边和斜边，再用三角比求边

题型 1 先辨对边、邻边和斜边，再用三角比求边（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **辨认三边位置：**直角所对的边是_____。以所求锐角为准，其对面为对边，紧邻它的直角边为邻边。

② **写出三种边比：**正弦用对边与斜边，余弦用邻边与斜边，正切用对边与邻边。计算器设为_____（DEG）。

$$\sin\theta=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}},\quad \cos\theta=\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}},\quad \tan\theta=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}$$

③ **已知斜边求边：**本例的斜边为 8.6cm，所取锐角为 42°。已知斜边时，把斜边乘以相应三角比。

求对边：

$a=8.6\sin 42^\circ\approx 5.75\ \text{cm}$

求邻边：

$b=8.6\cos 42^\circ\approx 6.39\ \text{cm}$

④ **未知斜边移项：**若邻边为 6cm、角为 60°，未知斜边先从分母移出。所求斜边等于邻边_____余弦值。

$$\cos 60^\circ=\frac{6}{h}\Longrightarrow h\cos 60^\circ=6\Longrightarrow h=\frac{6}{\cos 60^\circ}=12\ \text{cm}$$

⑤ **正切连接两边：**若邻边为 5cm、锐角为 45°，可求对边。若已知对边，改用除法求邻边。

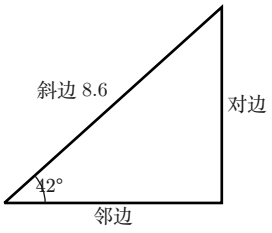
$\tan 45^\circ=\frac{a}{5}\Longrightarrow a=5\tan 45^\circ=5\ \text{cm}$

$\tan\theta=\frac{a}{b}\Longrightarrow b=\frac{a}{\tan\theta}$

⑥ **代回检查边长：**斜边必须比任一直角边长。角与三边位置确定后，再选择比值；中间结果保留足够精度。

填空：①斜边 ②角度制 ③除以

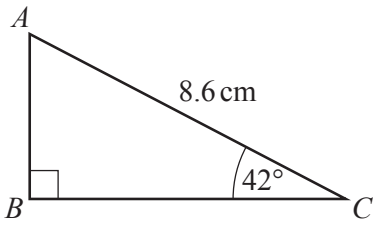
先按给定角辨认三条边

	图像	数量关系
同一关系		$\sin 42^\circ=\frac{\text{对边}}{8.6}$，$\cos 42^\circ=\frac{\text{邻边}}{8.6}$。

点石成金　题目出现直角三角形，给出一个锐角和一条边并求另一条边时，先相对该锐角辨认对边、邻边和斜边。

例 1　[2023 · May/June 0580/12 Q22(a)]

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a right-angled triangle ABC.

Calculate AB.

(a) 图示为直角三角形 ABC，$\angle ABC = 90°$。
图中 $AC = 8.6$ cm，$\angle ACB = 42°$。
示意图不按比例绘制。
求 AB 的长。

解答　在直角三角形 ABC 中，相对 $42°$，AB 为对边，AC 为斜边。

$$\sin 42° = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{8.6}$$

$$AB = 8.6 \sin 42° = 5.754523... \text{ cm} \approx 5.75 \text{ cm}$$

答：$AB = 5.75$ cm。

方法：先找直角对面的边，再看 42° 所对的边，选用对应边比。

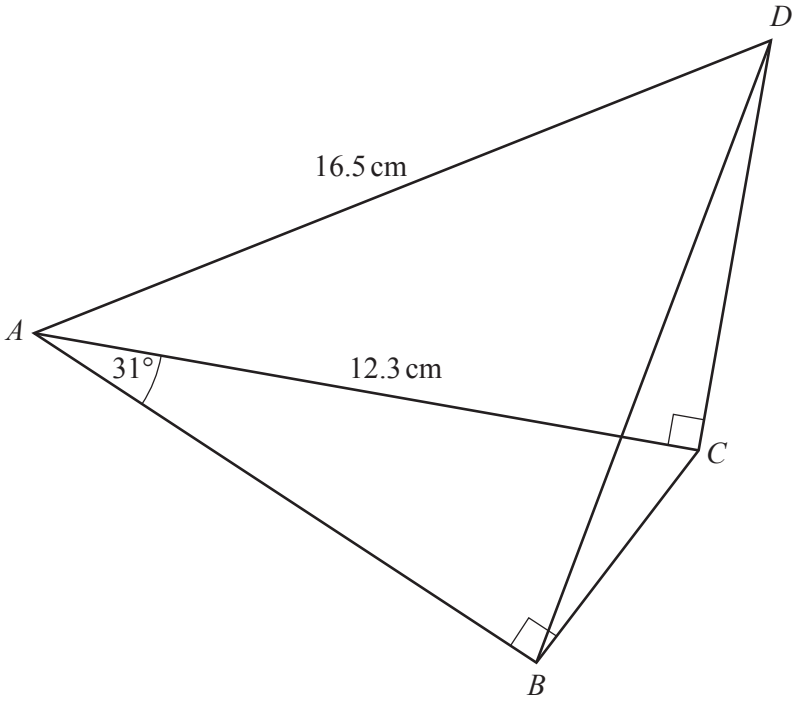
辨析：斜边是直角的对边，邻边是贴着参考锐角的直角边。

术语：DEG：角度制，按度数解释输入的角。

针对练习

1. [2023 · February/March 0580/42 Q10(a)]

提示：看31°旁的直角边，比较所求边与斜边的位置。



The diagram shows a quadrilater $ABCD$.
$AC = 12.3$ cm and $AD = 16.5$ c
Angle $BAC = 31°$, angle $ABC =$ 0° and angle $ACD = 90°$.

(a) Show that $AB = 10.54$ cm, correct to 2 decimal places.

图示为四边形 $ABCD$，图中连接了 AC 和 BD。
$AC = 12.3$ cm，$AD = 16.5$ cm。
$\angle BAC = 31°$，$\angle ABC = 90°$，$\angle ACD = 90°$。
示意图不按比例绘制。
(a) 证明：$AB = 10.54$ cm，精确到小数点后两位。

✓ **答案** $AB = 10.54$ cm（精确到小数点后两位）

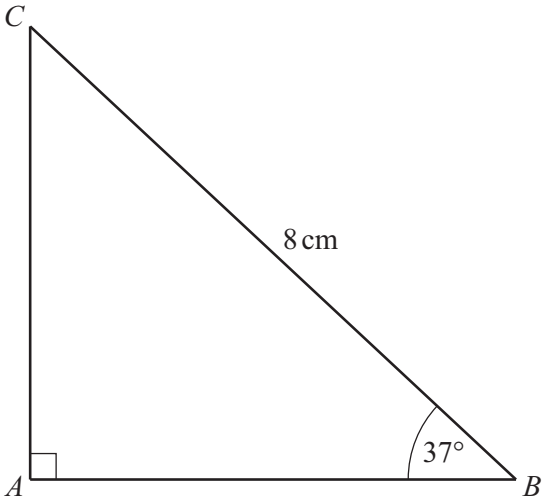
解析 在直角三角形 ABC 中，相对 31°，AB 为邻边，AC 为斜边。

$$\cos 31° = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{12.3}$$

$$AB = 12.3 \cos 31° = 10.543157... \text{ cm} \approx 10.54 \text{ cm}$$

答：$AB = 10.54$ cm，精确到小数点后两位。

2. [2024 · May/June 0580/13 Q17]
提示：以 37° 为参考角，辨认所求边与斜边的位置。



NOT TO SCALE

The diagram shows a right-angled triangle.

Calculate AB.

图示为直角三角形 ABC，$\angle BAC = 90°$，$BC = 8$ cm，$\angle ABC = 37°$。图形不按比例绘制。
计算 AB 的长。

✓ **答案** 6.39 cm

解析 相对 37°，AB 为邻边，BC 为斜边。

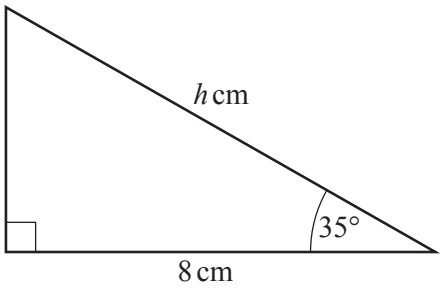
$$\cos 37° = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{8}$$

$$AB = 8\cos 37° = 6.389084... \text{ cm} \approx 6.39 \text{ cm}$$

答：$AB = 6.39$ cm。

3. [2023 · May/June 0580/33 Q7(c)]
提示：看 35° 旁的已知边，判断未知边应放在分子还是分母。

(c)



NOT TO SCALE

The diagram shows a right-angled triangle.

Calculate the value of h.

(c) 图示为一个直角三角形，左下角为直角。底边长为 8 cm，斜边长为 h cm，底边与斜边的夹角为 35°。
示意图不按比例绘制。
求 h 的值。

✓ **答案** $h = 9.77$

解析 相对 35°，长为 8 cm 的边为邻边，长为 h cm 的边为斜边。

$$\cos 35° = \frac{8}{h}$$

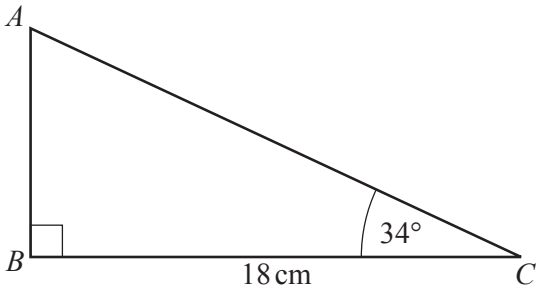
$$h\cos 35° = 8$$

$$h = \frac{8}{\cos 35°} = 9.766196... \approx 9.77$$

答：$h = 9.77$。

4. [2023 · October/November 0580/12 Q21]
提示：以 34° 为参考，比较已知边和所求边各属哪类边。

ABC is a right-angled triangle.



NOT TO SCALE

Calculate AC.

ABC 是一个直角三角形，$\angle ABC = 90°$。
图中 $BC = 18$ cm，$\angle ACB = 34°$。
示意图不按比例绘制。
求 AC 的长。

✓ **答案** $AC = 21.7$ cm

解析 在直角三角形 ABC 中，相对 34°，BC 为邻边，AC 为斜边。

$$\cos 34° = \frac{BC}{AC} = \frac{18}{AC}$$

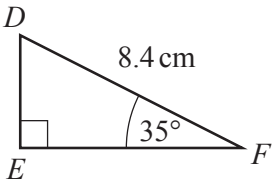
$$AC\cos 34° = 18$$

$$AC = \frac{18}{\cos 34°} = 21.711923... \text{ cm} \approx 21.7 \text{ cm}$$

答：$AC = 21.7$ cm。

5. [2023 · October/November 0580/31 Q10(c)]
提示：看 35° 贴着哪条直角边，再与已知斜边配成边比。

(c) DEF is a right-angled triangle.



NOT TO SCALE

Calculate EF.

(c) DEF 是一个直角三角形，$\angle DEF = 90°$。
图中 $DF = 8.4$ cm，$\angle DFE = 35°$。
示意图不按比例绘制。
求 EF 的长。

✓ **答案** $EF = 6.88$ cm

解析 在直角三角形 DEF 中，相对 $35°$，EF 为邻边，DF 为斜边。

$$\cos 35° = \frac{EF}{DF} = \frac{EF}{8.4}$$

$$EF = 8.4\cos 35° = 6.880877... \text{ cm} \approx 6.88 \text{ cm}$$

答：$EF = 6.88$ cm。

6.2 由两边的比反求直角三角形的角

题型 1 由两边的比反求直角三角形的角（Core / Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **确定已知边比：**本例的两直角边为 7.5cm 和 12.8cm。相对所求角，分别确定对边、邻边和_____。

② **反正切求角度：**已知对边、邻边，用反正切。计算器设为角度制，先求比值，再按反正切键。

$$\tan y = \frac{7.5}{12.8} \Longrightarrow y = \tan^{-1}\left(\frac{7.5}{12.8}\right) \approx 30.4°$$

③ **反余弦求角度：**已知邻边、斜边，改用_____。例如邻边 3cm、斜边 5cm：

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \Longrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53.1°$$

④ **选择相应反函数：**已知哪两边，就使用相应的比。反函数的输出是角，反三角符号不表示取倒数。

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}\right)$ | $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}\right)$

⑤ **面积先求长度：**Extended 题可能先由面积建立二次方程。以下演示先展开、移项，再因式分解。

$$\frac{1}{2}(t+1)(t+2) = 6 \Longrightarrow t^2 + 3t - 10 = 0 \Longrightarrow (t+5)(t-2) = 0$$

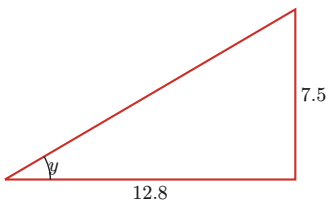
$$t = -5 \text{ 或 } t = 2$$

⑥ **按边长条件选根：**把候选根代回两条边长，舍去不合条件的根。上式若两边为 t+1、t+2，保留_____，得直角边 3、4，再求角。

$$\tan\theta = \frac{3}{4} \Longrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36.9°$$

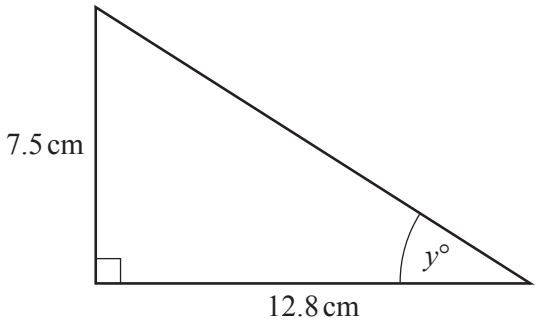
填空：①斜边　②反余弦　③$t = 2$

两直角边的比确定给定角

	图像	数量关系
同一关系		$\tan y = \frac{7.5}{12.8}$，$y = \tan^{-1}\left(\frac{7.5}{12.8}\right)$。

点石成金　题目出现直角三角形、已知两边并求锐角时，先按所求角确定对边、邻边和斜边，再列三角比。

例 1　[2023 · May/June 0580/11 Q22]



NOT TO SCALE

The diagram shows a right-angled triangle.

Calculate the value of y.

图示为一个直角三角形，竖直的直角边长为 7.5 cm，水平的直角边长为 12.8 cm，右下方的锐角标为 $y°$。图形不按比例绘制。求 y 的值。

解答　相对角 y，对边长为 7.5 cm，邻边长为 12.8 cm，由正切比得

$$\tan y = \frac{7.5}{12.8}$$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{7.5}{12.8}\right) \approx 30.4°$$

答：$y = 30.4°$。

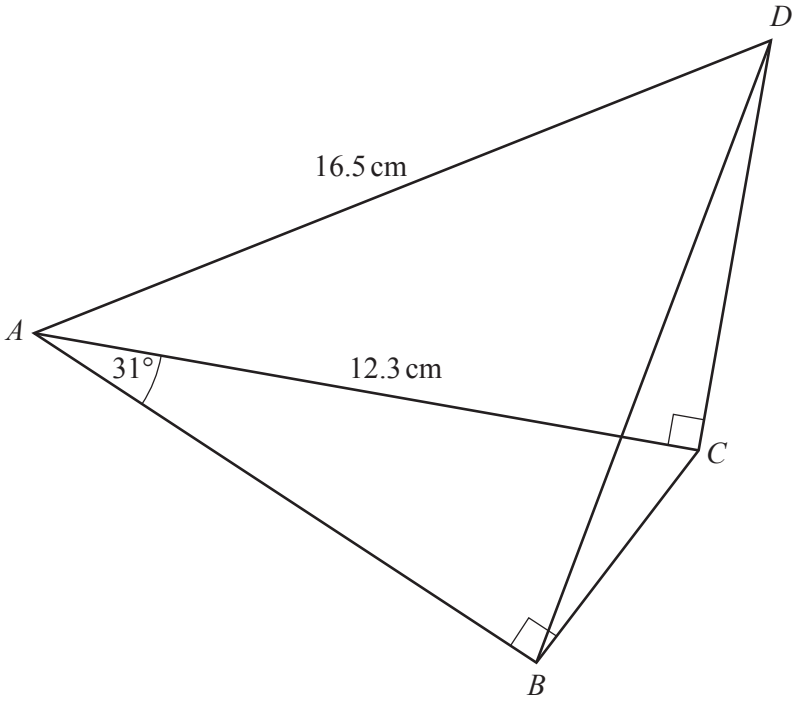
方法：先找角 y 对面的边，再按对边与邻边的顺序列比。

辨析：对边是所求角对面的边，邻边是贴着此角的直角边。

拓展：直角三角形中，较长直角边所对的锐角较大。

针对练习

1. [2023 · February/March 0580/42 Q10(b)]
提示：先看直角对面的边，再辨认角 DAC 旁的两条边。



NOT TO SCALE

The diagram shows a quadrilater $ABCD$.
$AC = 12.3$ cm and $AD = 16.5$ c
Angle $BAC = 31°$, angle $ABC =$ 0° and angle $ACD = 90°$.

(b) Show that angle $DAC = 41.80°$ correct to 2 decimal places.

图示为四边形 $ABCD$，图中连有 AC 和 BD。已知 $AC = 12.3$ cm，$AD = 16.5$ cm，$\angle BAC = 31°$，$\angle ABC = 90°$，$\angle ACD = 90°$。图形不按比例绘制。
(b) 证明：$\angle DAC = 41.80°$，精确到小数点后两位。

✓ **答案** $\angle DAC = 41.80°$（精确到小数点后两位）

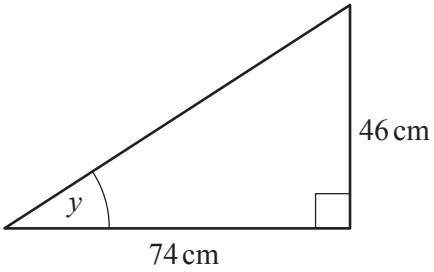
解析 在直角三角形 ACD 中，$\angle ACD = 90°$，故 AD 为斜边。由余弦比得

$$\cos(\angle DAC) = \frac{AC}{AD} = \frac{12.3}{16.5}$$

$$\angle DAC = \cos^{-1}\left(\frac{12.3}{16.5}\right) = 41.801...°$$

答：$\angle DAC = 41.80°$，精确到小数点后两位。

2. [2023 · February/March 0580/12 Q24]
提示：以角 y 为参照，辨认两边位置后确定比值顺序。



NOT TO SCALE

The diagram shows a right-angled triangle.

Show that angle y is 31.9°, correct to 1 decimal place.

图示为一个直角三角形，底边长为 74 cm，右侧直角边长为 46 cm，左下方的锐角标为 y。图形不按比例绘制。
证明：角 y 为 31.9°，精确到小数点后一位。

✓ **答案** $y = 31.9°$（精确到小数点后一位）

解析 相对角 y，对边长为 46 cm，邻边长为 74 cm，由正切比得

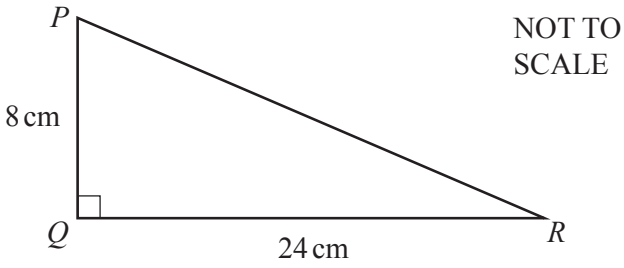
$$\tan y = \frac{46}{74}$$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{46}{74}\right) = 31.865...°$$

答：$y = 31.9°$，精确到小数点后一位。

3. [2023 · May/June 0580/41 Q4(a)(ii)]
← 提示：看 R 处的角，比较 PQ 与 QR 相对此角的位置。

(a)



(ii) Calculate angle PRQ.

4 (a) 图中三角形 PQR 在 Q 点处为直角，$PQ = 8$ cm，$QR = 24$ cm。图形不按比例绘制。
(ii) 求 $\angle PRQ$。

✓ **答案** $\angle PRQ = 18.4°$

解析 在直角三角形 PQR 中，$\angle PQR = 90°$。相对 $\angle PRQ$，对边为 PQ，邻边为 QR，由正切比得

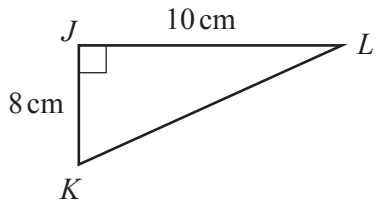
$$\tan(\angle PRQ) = \frac{PQ}{QR} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\angle PRQ = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18.4°$$

答：$\angle PRQ = 18.4°$。

4. [2023 · October/November 0580/31 Q10(d)]
提示：以 K 处的角为参照，区分 JL 与 JK 的位置。

(d) JKL is a right-angled triangle.



NOT TO SCALE

Calculate angle JKL.

(d) JKL 是一个直角三角形，直角在 J 点，$JL = 10$ cm，$JK = 8$ cm。图形不按比例绘制。
求 $\angle JKL$。

✓ **答案** $\angle JKL = 51.3°$

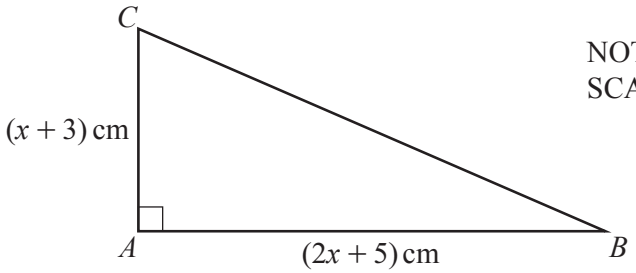
解析 在直角三角形 JKL 中，$\angle KJL = 90°$。相对 $\angle JKL$，对边为 JL，邻边为 JK，由正切比得

$$\tan(\angle JKL) = \frac{JL}{JK} = \frac{10}{8}$$

$$\angle JKL = \tan^{-1}\left(\frac{10}{8}\right) \approx 51.3°$$

答：$\angle JKL = 51.3°$。

5. [2023 · May/June 0580/42 Q3(a)(iii)]
提示：先把各根代入边长检验正负，再按 C 处的角列比。



NOT TO SCALE

The diagram shows a right-angled triangle ABC.

(a) (i) The area of the triangle is $60\,\text{cm}^2$.

Show that $2x^2 + 11x - 105 = 0$.

(ii) Solve by factorisation.

$$2x^2 + 11x - 105 = 0$$

(iii) Calculate angle ACB.

图示为直角三角形 ABC，直角在 A 点，$AC = (x + 3)$ cm，$AB = (2x + 5)$ cm。图形不按比例绘制。
(a) (i) 三角形的面积为 60cm^2。证明：

$$2x^2 + 11x - 105 = 0$$

(ii) 用因式分解法解方程：

$$2x^2 + 11x - 105 = 0$$

(iii) 求 $\angle ACB$。

✓ **答案** (i) $2x^2+11x-105=0$；(ii) $x=-10.5$ 或 $x=5$；(iii) $\angle ACB=61.9°$。

解析 由直角三角形的面积公式得

$$\frac{1}{2}(x+3)(2x+5)=60$$

$$(x+3)(2x+5)=120$$

$$2x^2+11x+15=120$$

$$2x^2+11x-105=0$$

将左边因式分解，得

$$(2x+21)(x-5)=0$$

$\therefore\ 2x+21=0$ 或 $x-5=0$，解得

$$x=-10.5 \text{ 或 } x=5$$

当 $x=-10.5$ 时，

$$AC=(-10.5+3)\text{ cm}=-7.5\text{ cm}$$

边长不能为负，故取 $x=5$。代入得

$$AC=(5+3)\text{ cm}=8\text{ cm}$$

$$AB=(2\times5+5)\text{ cm}=15\text{ cm}$$

相对 $\angle ACB$，对边为 AB，邻边为 AC，由正切比得

$$\tan(\angle ACB)=\frac{AB}{AC}=\frac{15}{8}$$

$$\angle ACB=\tan^{-1}\left(\frac{15}{8}\right)\approx 61.9°$$

答：(i) 所求方程为 $2x^2+11x-105=0$；(ii) 方程的根为 $x=-10.5$ 或 $x=5$；(iii) $\angle ACB=61.9°$。

6.3 用勾股定理在直角三角形中求长度

题型 1 用勾股定理在直角三角形中求长度（Core / Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **直角决定斜边：**本例在 C 处有直角，AB 是_____。两直角边平方相加，得到斜边平方。

$$AB^2=AC^2+BC^2=8.9^2+13.2^2$$

$$c^2=a^2+b^2\Longrightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}$$

② **已知斜边求边：**用斜边平方_____已知直角边平方，再开正平方根。例如斜边 5cm、一直角边 3cm：

$$b^2=5^2-3^2=16\Longrightarrow b=4\text{ cm}$$

③ **共用边分步求：**两个直角三角形共用一边，先求该边，再代入另一三角形。例如先求 x，再求 y：

$$x^2=13^2-5^2=144\Longrightarrow x=12$$

$$y^2=x^2+9^2=144+81=225\Longrightarrow y=15$$

④ **周长合并三边：**缺边求出后，把三条边长相加。例如上面 3、4、5 的三角形，周长为_____cm。

$$P = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ cm}$$

⑤ **空间分两次算：**Extended 题先在底面求投影，再在竖直截面求空间线段。长方体的长、宽、高取 3、4、12cm 作演示。

$$d^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Longrightarrow d = 5$$

$$l^2 = d^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Longrightarrow l = 13 \text{ cm}$$

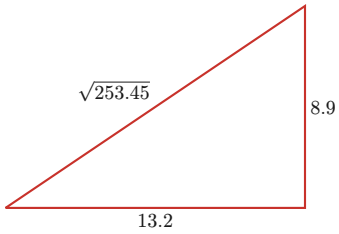
若端点是棱的中点，先把该棱长除以 2，再求投影长度。

⑥ **反求底面边长：**正方形底边为 x、高为 4、空间对角线为 6 时，底面两边各贡献一个平方项。边长取_____。

$$x^2 + x^2 + 4^2 = 6^2 \Longrightarrow 2x^2 = 20 \Longrightarrow x = \sqrt{10}$$

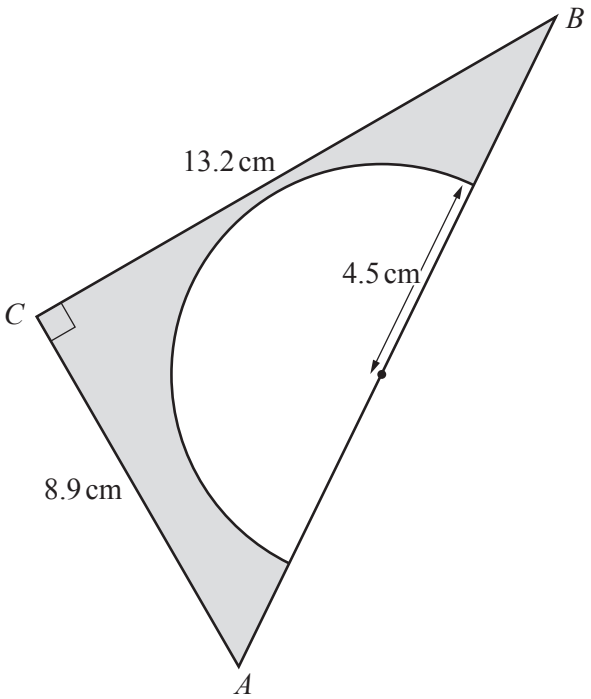
填空：①斜边　②减去　③12　④正根

两条直角边的平方和等于斜边平方

	图像	数量关系
同一关系		$13.2^2 + 8.9^2 = 253.45$。

点石成金　题目出现直角标记并要求边长时，先认定斜边，再列斜边平方等于两直角边平方和。

例 1　[2023 · May/June 0580/31 Q10(b)]



NOT TO SCALE

The diagram shows a right-angled triangle, ABC, and a semicircle.
The radius of the semicircle is 4.5 cm.
$AC = 8.9$ cm and $BC = 13.2$ cm.

(b) Calculate AB.

图示为直角三角形 ABC 和一个半圆，三角形的直角在 C 处。半圆的半径为 4.5 cm，直径在 AB 上，三角形内半圆外的部分涂有阴影。$AC = 8.9$ cm，$BC = 13.2$ cm。图形不按比例绘制。

(b) 求 AB 的长度。

解答 由 $\angle ACB = 90°$，得

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 8.9^2 + 13.2^2 = 253.45$$

$$AB = \sqrt{253.45} = 15.9201... \text{ cm} \approx 15.9 \text{ cm}$$

答：$AB = 15.9$ cm。

方法：先找 C 处的直角标记，认出对边 AB，再列平方关系。

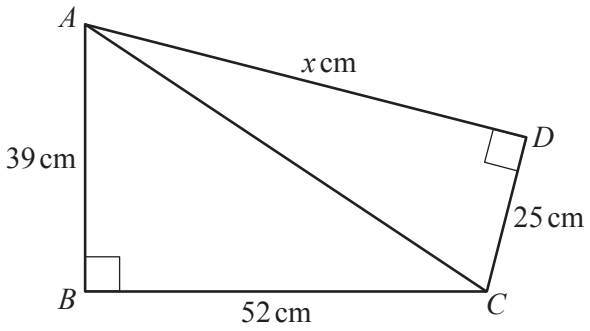
辨析：斜边是直角的对边，直角边是夹成直角的两边。

拓展：直角三角形中，斜边长大于任一条直角边。

针对练习

1. [2023 · February/March 0580/12 Q25]

提示：先看两个直角的位置，比较共用边 AC 在两图中的角色。



NOT TO SCALE

The diagram shows two right-angled triangles, ABC and ACD.

Work out the value of x.

图示为两个直角三角形 ABC 和 ACD，直角分别在 B 和 D 处。$AB = 39$ cm，$BC = 52$ cm，$CD = 25$ cm，$AD = x$ cm。图形不按比例绘制。求 x 的值。

✓ **答案** $x = 60$

解析 由 $\angle ABC = 90°$，得

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 39^2 + 52^2 = 4225$$

$$AC = \sqrt{4225} = 65 \text{ cm}$$

由 $\angle ADC = 90°$，得

$$AD^2 = AC^2 - CD^2$$

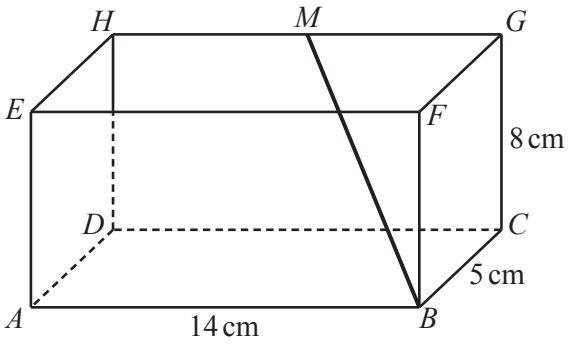
$$x^2 = 65^2 - 25^2 = 3600$$

$\because x > 0$，$\therefore$

$$x = \sqrt{3600} = 60$$

答：$x = 60$。

2. [2023 · October/November 0580/23 Q21(a)]
提示：先找 M 在底面的垂足，分清底面距离与竖直高度。



NOT TO SCALE

The diagram shows a cuboid $ABCDEFGH$.
$AB = 14$ cm, $BC = 5$ cm and $CG = 8$ cm.
M is the midpoint of HG.

(a) Calculate BM.

图示为长方体 $ABCDEFGH$。$AB = 14$ cm，$BC = 5$ cm，$CG = 8$ cm。M 是 HG 的中点，图中连结了 BM。图形不按比例绘制。
(a) 求 BM 的长度。

✓ **答案** $BM = 11.7$ cm

解析 过 M 作底面 $ABCD$ 的垂线，垂足为 N，连结 BN。
$\because M$ 是 HG 的中点，$\therefore N$ 是 DC 的中点。

$$NC = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AB = 7 \text{ cm}$$

$$MN = CG = 8 \text{ cm}$$

在直角三角形 BCN 中，

$$BN^2 = BC^2 + NC^2 = 5^2 + 7^2 = 74$$

在竖直截面内的直角三角形 BNM 中，

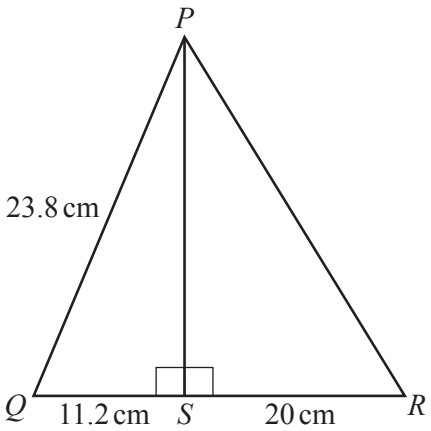
$$BM^2 = BN^2 + MN^2 = 74 + 8^2 = 138$$

$$BM = \sqrt{138} = 11.7473... \text{ cm} \approx 11.7 \text{ cm}$$

答：$BM = 11.7$ cm。

3. [2023 · May/June 0580/12 Q22(b)]
提示：先找共用边 PS，分别判断它在两个三角形中是否为斜边。

(b)



NOT TO SCALE

The diagram shows right-angled triangles PQ nd PRS.
$PQ = 23.8\,\text{cm}$, $QS = 11.2\,\text{cm}$ and $SR = 20\,\text{c}$

Calculate PR.

(b) 图示为直角三角形 PQS 和 PRS。Q、S、R 在同一直线上，$PS \perp QR$。$PQ = 23.8$ cm，$QS = 11.2$ cm，$SR = 20$ cm。图形不按比例绘制。求 PR 的长度。

✓ **答案** $PR = 29$ cm

解析 在直角三角形 PQS 中，

$$PS^2 = PQ^2 - QS^2 = 23.8^2 - 11.2^2 = 441$$

$$PS = \sqrt{441} = 21 \text{ cm}$$

在直角三角形 PRS 中，

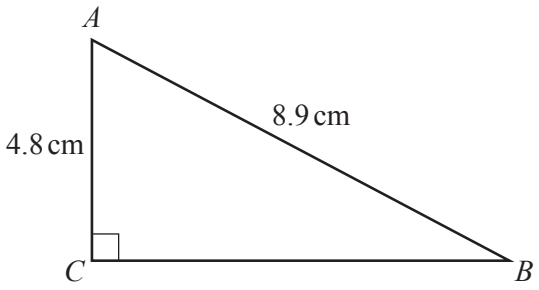
$$PR^2 = PS^2 + SR^2 = 21^2 + 20^2 = 841$$

$$PR = \sqrt{841} = 29 \text{ cm}$$

答：$PR = 29$ cm。

4. [2023 · October/November 0580/32 Q8(d)]
提示：先看 C 处直角确定斜边，开方后再按有效数字取舍。

(d)



NOT TO SCALE

The diagram shows a right-angled triangle ABC.

Show that BC is 7.5 cm, correct to 2 significant figures.

(d) 图示为直角三角形 ABC，直角在 C 处。$AC = 4.8$ cm，$AB = 8.9$ cm。图形不按比例绘制。证明 BC 的长度保留两位有效数字为 7.5 cm。

✓ **答案** $BC \approx 7.5$ cm（两位有效数字）

解析 由 $\angle ACB = 90°$，得

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 8.9^2 - 4.8^2 = 56.17$$

$$BC = \sqrt{56.17} = 7.49466... \text{ cm}$$

保留两位有效数字，得

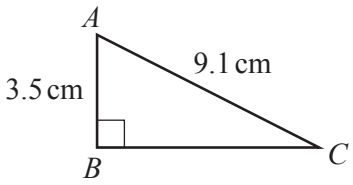
$$BC \approx 7.5 \text{ cm}$$

答：BC 的长度保留两位有效数字为 7.5 cm。

5. [2023 · October/November 0580/31 Q10(b)]

提示：先看 B 处直角，比较 AC 与 AB 的平方以求缺边。

(b) ABC is a right-angled triangle.



NOT TO SCALE

Calculate BC.

(b) ABC 是直角三角形，直角在 B 处。图中 $AB = 3.5$ cm，$AC = 9.1$ cm。图形不按比例绘制。求 BC 的长度。

✓ **答案** $BC = 8.4$ cm

解析 由 $\angle ABC = 90°$，得

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 9.1^2 - 3.5^2 = 70.56$$

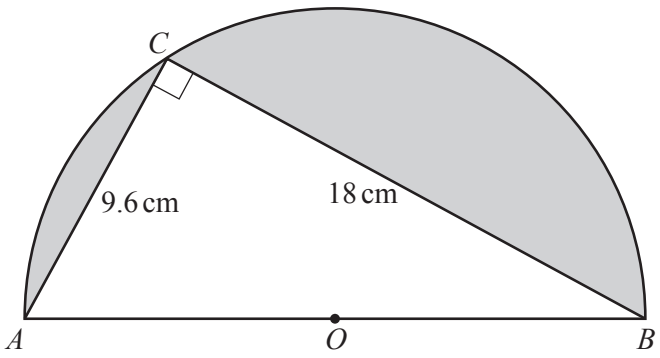
$$BC = \sqrt{70.56} = 8.4 \text{ cm}$$

答：$BC = 8.4$ cm。

6. [2023 · October/November 0580/33 Q9(a)(ii)]

提示：先看直角对面是哪条边，再判断两条已知边平方如何组合。

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a semicircle with diameter AB.
O is the midpoint of AB and C is a point on the circumference.

(ii) Show that $AB = 20.4$ c

(a) 图示为一个以 AB 为直径的半圆。O 是 AB 的中点，C 是半圆弧上的一点。图中 $\angle ACB = 90°$，$AC = 9.6$ cm，$BC = 18$ cm；半圆内三角形 ABC 外的部分涂有阴影。图形不按比例绘制。

(ii) 证明 $AB = 20.4$ cm。

✓ **答案** $AB = 20.4$ cm

解析 由图中直角标记，得 $\angle ACB = 90°$。

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 9.6^2 + 18^2 = 416.16$$

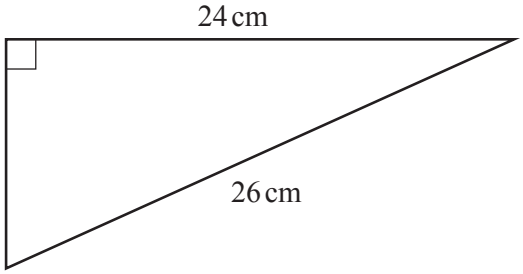
$$AB = \sqrt{416.16} = 20.4 \text{ cm}$$

答：$AB = 20.4$ cm。

7. [2023 · May/June 0580/33 Q7(e)]

← 提示：先比较已知边确定斜边，补齐缺边后再求三边之和。

(e)



NOT TO SCALE

The diagram shows a right-angled triangle.

Calculate the perimeter of this triangle.

(e) 图示为一个直角三角形，一条直角边长为 24 cm，斜边长为 26 cm。图形不按比例绘制。求这个三角形的周长。

✓ **答案** 60 cm

解析 设未知直角边长为 a cm，由勾股定理，得

$$a^2 = 26^2 - 24^2 = 100$$

$\because a > 0$，$\therefore$

$$a = \sqrt{100} = 10$$

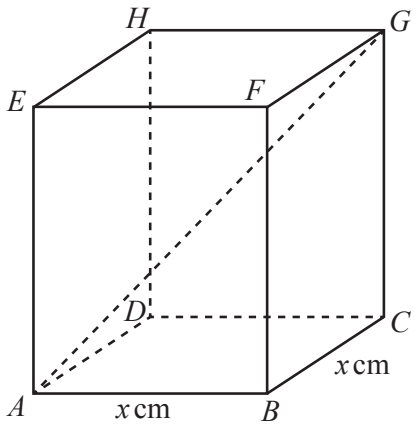
三角形的周长为

$$(24 + 26 + 10) \text{ cm} = 60 \text{ cm}$$

答：这个三角形的周长为 60 cm。

8. [2023 · May/June 0580/42 Q10(a)]
提示：先看底面对角线所在的竖直截面，找出两个相等的平方项。

(a)



NOT TO SCALE

ABCDEFGH is a cuboid with square base of side x cm.
$CG = 20$ cm and $AG = 28$ c

Calculate the value of x.

(a) $ABCDEFGH$ 是一个长方体，底面为边长 x cm 的正方形。图中 $AB = BC = x$ cm，$CG = 20$ cm，空间对角线 $AG = 28$ cm。图形不按比例绘制。求 x 的值。

✓ **答案** $x = 13.9$

解析 连结底面对角线 AC，画出竖直截面 ACG。

在直角三角形 ABC 中，

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

在直角三角形 ACG 中，

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 = AB^2 + BC^2 + CG^2$$

代入得

$$28^2 = x^2 + x^2 + 20^2$$

$$2x^2 = 28^2 - 20^2 = 384$$

$$x^2 = 192$$

$\because x > 0$，$\therefore$

$$x = \sqrt{192} = 13.8564\ldots \approx 13.9$$

答：$x = 13.9$。

6.4 用余弦定理联系三边和一个角

题型 1 用余弦定理联系三边和一个角（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **两边夹角求边：**两边长记为 a、b，夹角为 C，其对边为 c。用余弦定理求平方，再取_____。

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$AB=\sqrt{4.8^2+5.6^2-2\times4.8\times5.6\cos20.4^\circ}\approx2.002927918\ \text{m}$$

② **三边反求角度：**由同一公式移项，先求余弦值，再按反余弦键。沿用本例完整精度的三边，能求回 20.4°。

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$C=\cos^{-1}\left(\frac{4.8^2+5.6^2-AB^2}{2\times4.8\times5.6}\right)=20.4^\circ$$

③ **体积补出夹角：**三棱柱先用体积除以柱长，得到截面积。例如体积 120cm^3、柱长 10cm，截面两边 6cm 和 5cm 且夹角为锐角。

$$S=\frac{120}{10}=12\Longrightarrow12=\frac{1}{2}\times6\times5\sin\theta$$

$$\sin\theta=0.8\Longrightarrow\theta\approx53.1^\circ$$

④ **相邻角先合并：**图中夹角被分成两个相邻角，先分别求角再相加。例如 20° 与 40° 合成 60°，夹着的两边为 4 和 6。

$$c=\sqrt{4^2+6^2-2\times4\times6\cos60^\circ}=\sqrt{28}$$

⑤ **余弦之后求高：**求出边长后，若还要求三角形的垂高，在垂足处建立直角三角形。斜边已知时，垂高等于斜边乘_____。

$$h=b\sin\alpha$$

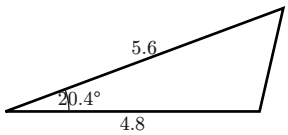
例如斜边 10、与底边的夹角 30°，垂高为 $10\sin30^\circ=5$。

⑥ **完整路线求均速：**先补齐三角形，再把经过的各段相加。平均速度等于_____除以总时间，时间统一为小时。

$$v=\frac{s}{t},\quad s=3+4+5=12\ \text{km},\quad t=\frac{30}{60}=0.5\ \text{h}\Longrightarrow v=24\ \text{km/h}$$

填空：①正平方根　②正弦值　③总路程

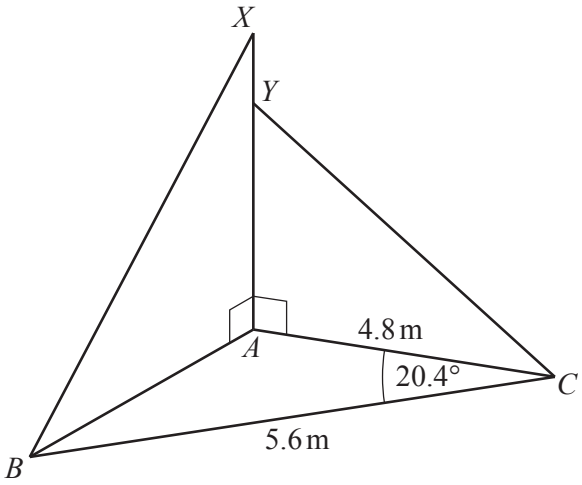
两边和夹角确定第三边

	图像	数量关系
同一关系		$a^2=4.8^2+5.6^2-2\times4.8\times5.6\cos20.4^\circ$。

点石成金　题目出现三角形的两边及夹角，或三边与所求角时，先把所求边与其对角对应，再写余弦定理。

例 1　[2023 · May/June 0580/43 Q5(a)(i)]

(a)



NOT TO SCALE

ABC is a scalene triangle on horizontal ground.
AYX is a straight vertical post, held in place by two straight wires XB and YC.
$AC = 4.8$ m, $BC = 5.6$ m and angle $ACB = 20.4°$.

(i) Calculate AB.

(a) ABC 是水平地面上的一个不等边三角形。AYX 是一根竖直杆，A、Y、X 在同一直线上，两根拉直的金属线 XB 和 YC 将杆固定。$AC = 4.8$ m，$BC = 5.6$ m，$\angle ACB = 20.4°$。图中杆与地面垂直，图形不按比例绘制。
(i) 计算 AB 的长度。

解答　在三角形 ABC 中，由余弦定理得

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\angle ACB)$$

$$AB^2 = 4.8^2 + 5.6^2 - 2 \times 4.8 \times 5.6 \times \cos 20.4°$$

边长为正，得

$$AB = \sqrt{4.8^2 + 5.6^2 - 2 \times 4.8 \times 5.6 \times \cos 20.4°} \approx 2.00 \text{ m}$$

答：AB 的长度为 2.00 m。

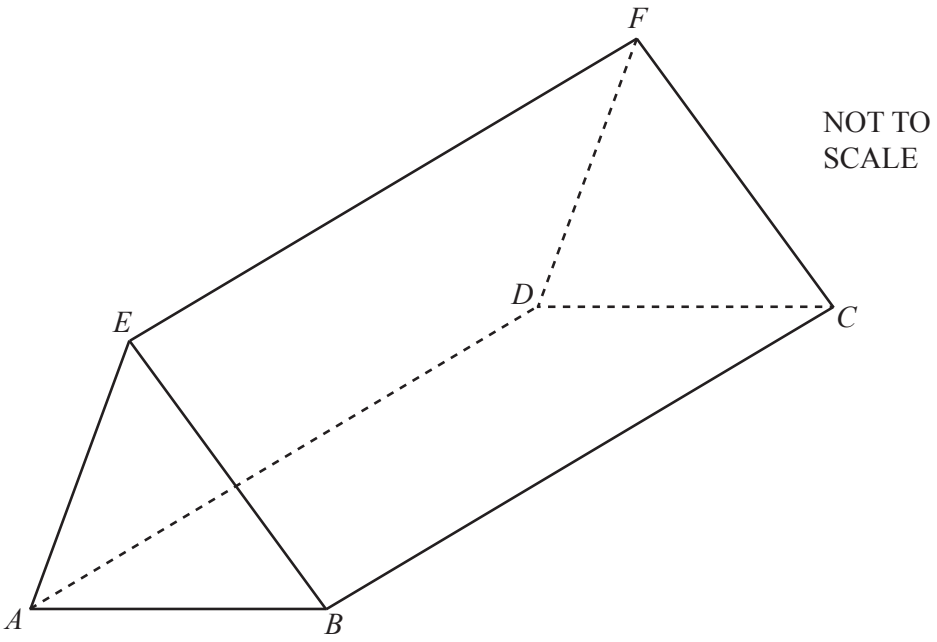
方法：看两条已知边交会处的角，先把所求边配到它的对面。

辨析：边长平方是余弦定理算出的量，边长是该量的正平方根。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/41 Q2(b)]

提示：看体积与棱柱长度，先求截面积，再找两边夹角。



The diagram shows a solid triangular prism $ABCDEF$ of length 15 cm.
$AB = 6.4$ cm, $EB = 5.7$ cm and the volume of the prism is 145 cm^3.

(a) Show that angle $EBA = 32°$, correct to the nearest degree.

(b) Find the length of EA.

图示为一个长度为 15 cm 的实心三棱柱 $ABCDEF$。$AB = 6.4$ cm，$EB = 5.7$ cm，三棱柱的体积为 145cm^3。图形不按比例绘制。
(a) 证明 $\angle EBA = 32°$，精确到最接近的整数度。
(b) 求 EA 的长度。

✓ **答案** (a) 32°，精确到最接近的整数度；(b) 3.40 cm。

解析 设三角形 ABE 的面积为 S，由棱柱的体积得

$$15S = 145$$

$$S = \frac{145}{15}\text{cm}^2$$

由三角形面积公式得

$$\frac{1}{2} \times 6.4 \times 5.7 \times \sin(\angle EBA) = \frac{145}{15}$$

$$\sin(\angle EBA) = \frac{2 \times 145}{15 \times 6.4 \times 5.7}$$

取锐角解，得

$$\angle EBA = \sin^{-1}\left(\frac{2 \times 145}{15 \times 6.4 \times 5.7}\right) \approx 32.003479°$$

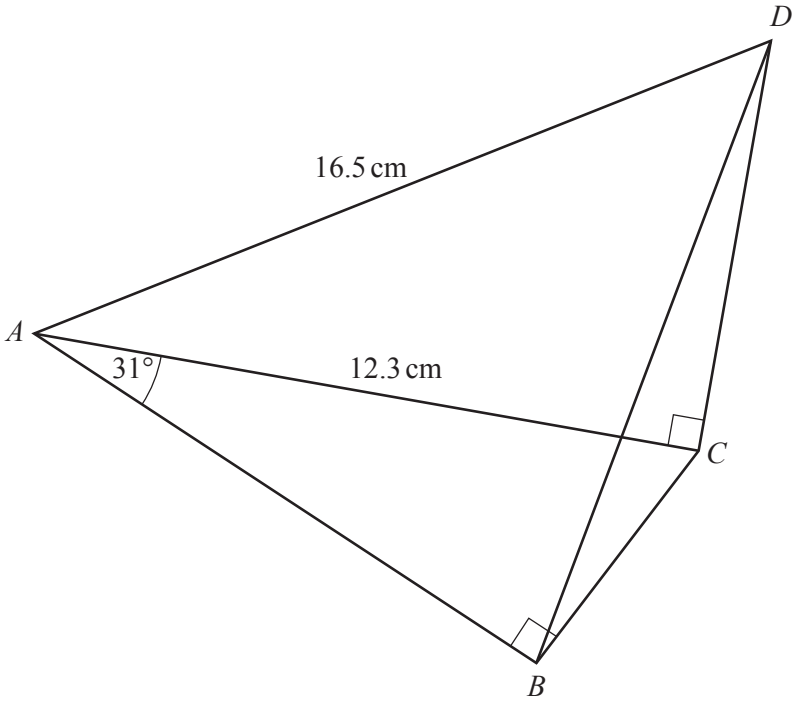
因此，$\angle EBA = 32°$，精确到最接近的整数度。
以 θ 表示上述未取整的角，由余弦定理得

$$EA^2 = 6.4^2 + 5.7^2 - 2 \times 6.4 \times 5.7 \times \cos\theta$$

$$EA = \sqrt{6.4^2 + 5.7^2 - 2 \times 6.4 \times 5.7 \times \cos\theta} \approx 3.40 \text{ cm}$$

答：(a) 所求角为 32°；(b) EA 的长度为 3.40 cm。

2. [2023 · February/March 0580/42 Q10(c)]
提示：看对角线分出的两个角，找对所求边对应的夹角。



The diagram shows a quadrilater $ABCD$.
$AC = 12.3$ cm and $AD = 16.5$ c
Angle $BAC = 31°$, angle $ABC =$ 0° and angle $ACD = 90°$.

(a) Show that $AB = 10.54$ cm, correct to 2 decimal places.

(b) Show that angle $DAC = 41.80°$ correct to 2 decimal places.

(c) Calculate BD.

图示为四边形 $ABCD$，图中画有对角线 AC 和 BD。$AC = 12.3$ cm，$AD = 16.5$ cm。$\angle BAC = 31°$，$\angle ABC = 90°$，$\angle ACD = 90°$。图形不按比例绘制。
(a) 证明 $AB = 10.54$ cm，精确到小数点后两位。
(b) 证明 $\angle DAC = 41.80°$，精确到小数点后两位。
(c) 计算 BD 的长度。

✓ **答案** (a) 10.54 cm；(b) 41.80°；(c) 16.7 cm。

解析 在直角三角形 ABC 中，$\angle ABC = 90°$，得

$$\cos 31° = \frac{AB}{12.3}$$

$$AB = 12.3 \cos 31° \approx 10.54315780 \text{ cm}$$

因此，$AB = 10.54$ cm，精确到小数点后两位。
在直角三角形 ACD 中，$\angle ACD = 90°$，得

$$\cos(\angle DAC) = \frac{12.3}{16.5}$$

$$\angle DAC = \cos^{-1}\left(\frac{12.3}{16.5}\right) \approx 41.80184419°$$

因此，$\angle DAC = 41.80°$，精确到小数点后两位。
由图中两个相邻角相加，得

$$\angle DAB = \angle BAC + \angle DAC = 31° + \cos^{-1}\left(\frac{12.3}{16.5}\right) \approx 72.80184419°$$

在三角形 ABD 中，由余弦定理得

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos(\angle DAB)$$

代入未取整的边长和角度，得

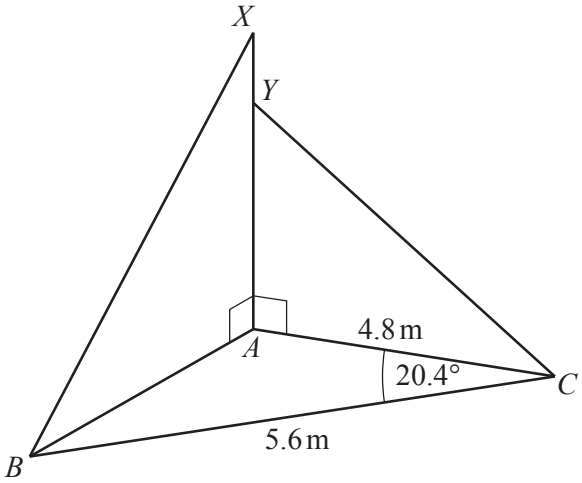
$$BD^2 = (12.3\cos 31°)^2 + 16.5^2 - 2 \times (12.3\cos 31°) \times 16.5 \times \cos\left(31° + \cos^{-1}\left(\frac{12.3}{16.5}\right)\right)$$

$$BD \approx 16.74917566 \text{ cm} \approx 16.7 \text{ cm}$$

答：(a) $AB = 10.54$ cm；(b) $\angle DAC = 41.80°$；(c) $BD = 16.7$ cm。

3. [2023 · May/June 0580/43 Q5(a)(ii)]
提示：先看两边夹角求公共边，再解 64° 的对边与邻边。

(a)



NOT TO SCALE

ABC is a scalene triangle on horizontal ground.
AYX is a straight vertical post, held in place by two straight wires *XB* and *YC*.
AC = 4.8 m, *BC* = 5.6 m and angle *ACB* = 20.4°.

(i) Calculate *AB*.

(ii) Angle *XBA* = 64°.

Calculate *AX*.

(a) ABC 是水平地面上的一个不等边三角形。
AYX 是一根笔直的竖杆，A、Y、X 依次位于杆上。两根笔直的拉线 XB 和 YC 将竖杆固定。图中竖杆在 A 处垂直于地面上的 AB 和 AC。
$AC = 4.8$ m，$BC = 5.6$ m，$\angle ACB = 20.4°$。

示意图不按比例绘制。
(i) 求 AB 的长。
(ii) $\angle XBA = 64°$。求 AX 的长。

✓ **答案** (i) $AB = 2.00$ m；(ii) $AX = 4.11$ m。

解析 在三角形 ABC 中，由余弦定理得

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC\cos 20.4°$$

$$AB^2 = 4.8^2 + 5.6^2 - 2 \times 4.8 \times 5.6\cos 20.4°$$

$$AB = \sqrt{4.8^2 + 5.6^2 - 2 \times 4.8 \times 5.6\cos 20.4°} = 2.002927... \text{ m} \approx 2.00 \text{ m}$$

竖杆垂直于水平地面，故 $\angle XAB = 90°$。相对 $64°$，AX 为对边，AB 为邻边。

$$\tan 64° = \frac{AX}{AB}$$

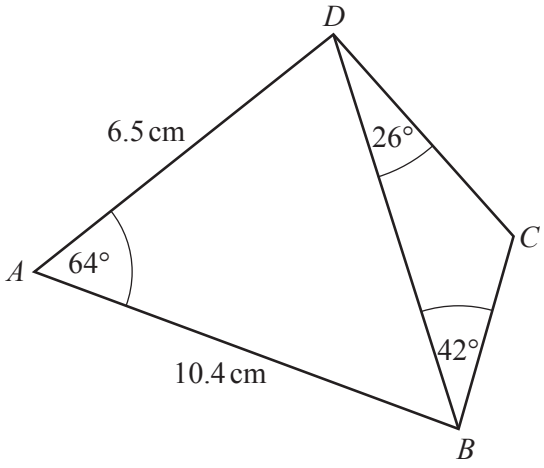
代入 AB 的未取近似值，得

$$AX = \sqrt{4.8^2 + 5.6^2 - 2 \times 4.8 \times 5.6\cos 20.4°}\tan 64°$$

$$AX = 4.106610... \text{ m} \approx 4.11 \text{ m}$$

答：(i) $AB = 2.00$ m；(ii) $AX = 4.11$ m。

4. [2024 · May/June 0580/42 Q6(a)]
提示：在三角形 A B D 中，将两条已知边与它们的夹角对应。



NOT TO SCALE

$ABCD$ is a quadrilateral with $AB = 10.4$ cm and $AD = 6.5$ cm.
Angle $DAB = 64°$, angle $BDC = 26°$ and angle $DBC = 42°$.

(a) Show that $BD = 9.55$ cm, correct to 2 decimal places.

$ABCD$ 是一个四边形，图中连接了 BD。$AB = 10.4$ cm，$AD = 6.5$ cm，$\angle DAB = 64°$，$\angle BDC = 26°$，$\angle DBC = 42°$。图形不按比例绘制。
(a) 证明 $BD = 9.55$ cm，精确到小数点后两位。

✓ **答案** $BD = 9.55$ cm（精确到小数点后两位）

解析 在三角形 ABD 中，由余弦定理得

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD\cos(\angle DAB)$$

$$BD^2 = 10.4^2 + 6.5^2 - 2 \times 10.4 \times 6.5\cos 64°$$

边长为正，得

$$BD = \sqrt{10.4^2 + 6.5^2 - 2 \times 10.4 \times 6.5 \cos 64^\circ} = 9.546843... \text{ cm}$$

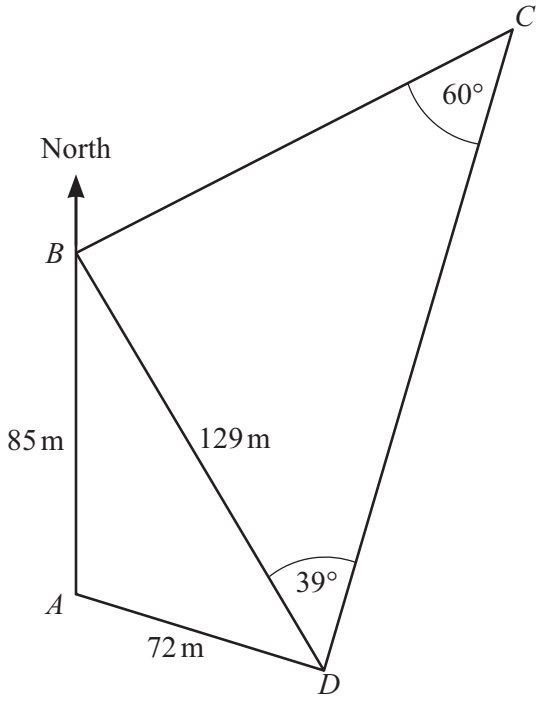
$$BD \approx 9.55 \text{ cm}$$

答：$BD = 9.55$ cm，精确到小数点后两位。

5. [2024 · October/November 0580/42 Q7(a)(iii)]

提示：在三角形 A B D 中，用三条已知边求所求角的余弦值。

(a)



NOT TO SCALE

The diagram shows a field, $ABCD$ with B north of A.
BD is a path across the field.
$AB = 85$ m, $AD = 72$ m, $BD = 129$ m, angle $BDC = 39°$ and angle $BCD = 60°$.

(iii) Show that angle $ABD = 31.6°$, correct to 1 decimal place.

(a) 图示为一块田地 $ABCD$，B 在 A 的正北方向，图中标有正北方向。BD 是一条穿过田地的小路。$AB = 85$ m，$AD = 72$ m，$BD = 129$ m，$\angle BDC = 39°$，$\angle BCD = 60°$。图形不按比例绘制。
(iii) 证明 $\angle ABD = 31.6°$，精确到小数点后一位。

✓ **答案** $\angle ABD = 31.6°$（精确到小数点后一位）

解析 在三角形 ABD 中，$\angle ABD$ 的对边为 AD。由余弦定理得

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \times AB \times BD \cos(\angle ABD)$$

$$\cos(\angle ABD) = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2 \times AB \times BD}$$

$$\cos(\angle ABD) = \frac{85^2 + 129^2 - 72^2}{2 \times 85 \times 129}$$

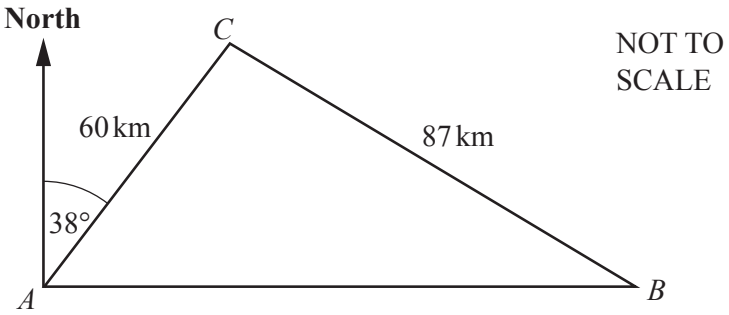
$$\angle ABD = \arccos\left(\frac{85^2 + 129^2 - 72^2}{2 \times 85 \times 129}\right) = 31.581903...°$$

$$\angle ABD \approx 31.6°$$

答：$\angle ABD = 31.6°$，精确到小数点后一位。

6. [2023 · May/June 0580/42 Q7(b)]

提示：看方位角与正东的关系，再核对全程路段和时间单位。



The diagram shows the straight roads between town A, town B and town C.
$AC = 60\,\text{km}$, $CB = 87\,\text{km}$ and B is due east of A.
The bearing of C from A is 038°.

(a) Show that angle $ACB = 95.1°$, correct to 1 decimal place.

(b) Without stopping, a car travels from town A to town C then to town B, before returning directly to town A.
The total time taken for the journey is 3 hours 20 minutes.

Calculate the average speed of the car for this journey.
Give your answer in kilometres per hour.

图中画出了城镇 A、城镇 B 和城镇 C 之间的直线道路，并标有正北方向。$AC = 60$ km，$CB = 87$ km，B 在 A 的正东方向。从 A 看 C 的方位角为 038°。图形不按比例绘制。

(a) 证明 $\angle ACB = 95.1°$，精确到小数点后一位。

(b) 一辆汽车从城镇 A 驶往城镇 C，再驶往城镇 B，随后沿直线返回城镇 A，途中不停留。全程共用时 3 小时 20 分钟。计算汽车全程的平均速度，答案以千米每小时表示。

✓ **答案** (a) 95.1°；(b) 77.1 km/h。

解析 B 在 A 的正东方向，由方位角得

$$\angle CAB = 90° - 38° = 52°$$

由正弦定理得

$$\frac{\sin(\angle ABC)}{60} = \frac{\sin 52°}{87}$$

因 $BC > AC$，故 $\angle ABC < \angle CAB$，取锐角解，得

$$\angle ABC = \sin^{-1}\left(\frac{60\sin 52°}{87}\right) \approx 32.91919409°$$

由三角形内角和得

$$\angle ACB = 180° - 52° - \sin^{-1}\left(\frac{60\sin 52°}{87}\right) \approx 95.08080591°$$

因此，$\angle ACB = 95.1^\circ$，精确到小数点后一位。

以 θ 表示上述未取整的 $\angle ACB$，由余弦定理得

$$AB^2 = 60^2 + 87^2 - 2 \times 60 \times 87 \times \cos\theta$$

$$AB = \sqrt{60^2 + 87^2 - 2 \times 60 \times 87 \times \cos\theta} \approx 109.9707818 \text{ km}$$

全程总路程为

$$s = 60 + 87 + AB \approx 256.9707818 \text{ km}$$

全程总时间为

$$t = \frac{3 \times 60 + 20}{60} \text{ h} = \frac{200}{60} \text{ h}$$

用未取整的路程计算平均速度，得

$$v = \frac{s}{t} = \frac{60 + 87 + AB}{\frac{200}{60}} \approx 77.1 \text{ km/h}$$

答：(a) $\angle ACB = 95.1^\circ$；(b) 汽车全程的平均速度为 77.1 km/h。

6.5 配对边与对角，用正弦定理解三角形

题型 1 配对边与对角，用正弦定理解三角形（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **边与对角配对：**本例中 8.3cm 与 y° 相对，16.2cm 与 105° 相对。正弦定理中的边长必须与它的_____配对。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

② **反正弦求角度：**先从已知一对边角求出另一角的正弦值，再用反正弦求锐角主值 t。

$$\sin y = \frac{8.3 \sin 105^\circ}{16.2}$$

$$t = \arcsin\left(\frac{8.3 \sin 105^\circ}{16.2}\right) \approx 29.7^\circ$$

③ **检验补角候选：**正弦相同的两个内角互为_____。若题目指定钝角，应检验 180° −t；候选角与已知角之和必须小于 180° 。

$$(180^\circ - t) + 105^\circ \approx 255.3^\circ > 180^\circ$$

本例的补角不合条件，保留锐角。

④ **求边单独移项：**已经有一对完整边角时，用相等比值列式。等式两边同乘所求边对应角的正弦。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

⑤ **直线上补齐角：**相邻角在一条直线上，相加等于_____。例如邻角为 80° 、另一顶角为 25° ：

$$A = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

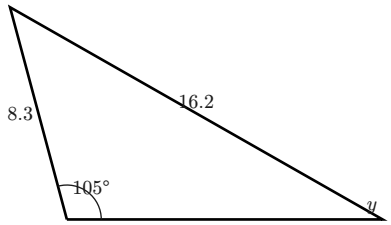
$$B = 180^\circ - 100^\circ - 25^\circ = 55^\circ$$

⑥ **中点求出整段：**中点把线段分成两条等长的半段。先求半段，再乘以 2；例如半段 4cm，整段为 8cm。

$$PQ = 2PM = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}$$

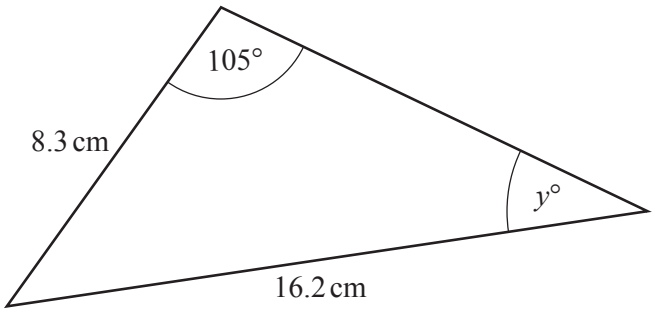
填空：①对角　②补角　③180°

正弦定理按边与对角配对

	图像	数量关系
同一关系		$\sin\frac{y}{8.3}=\sin 105\frac{^\circ}{16.2}$。

点石成金　题目出现已知一组边与对角，还给出另一边或另一角时，先将各边与其对角配对，列正弦定理。

例 1　[2023 · October/November 0580/21 Q18]



NOT TO SCALE

Calculate the value of y.

如图，一个三角形中，长为 8.3 cm 的边所对的角为 $y°$，长为 16.2 cm 的边所对的角为 105°。图形不按比例绘制。求 y 的值。

解答　由正弦定理得

$$\frac{\sin(y^\circ)}{8.3}=\frac{\sin 105^\circ}{16.2}$$

$$\sin(y^\circ)=\frac{8.3\sin 105^\circ}{16.2}$$

设反正弦所得锐角主值为 t，则

$$t=\arcsin\left(\frac{8.3\sin 105^\circ}{16.2}\right)\approx 29.7^\circ$$

另一候选角为 $180^\circ-t$，但

$$(180^\circ-t)+105^\circ\approx 255.3^\circ>180^\circ$$

不合三角形内角和条件，故

$$y^\circ=t\approx 29.7^\circ$$

答：$y\approx 29.7$。

方法：先看已知角对着哪条边，再把所求角与对边配成另一组。

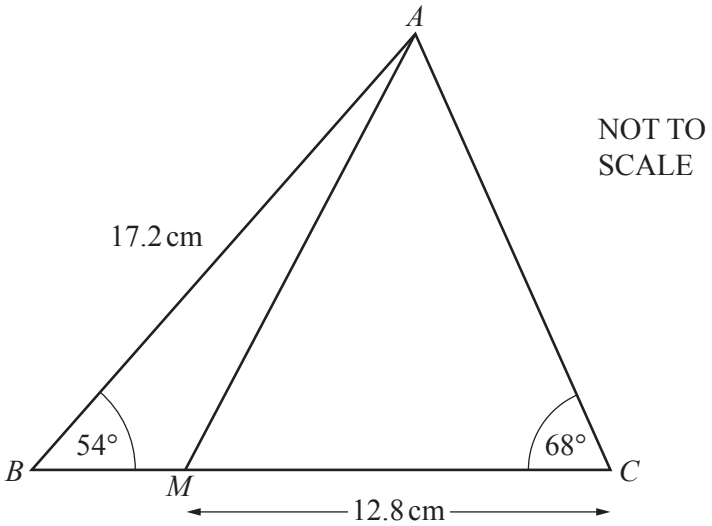
辨析：主值是反正弦的输出，补角是还需检验角和的候选角。

拓展：同一三角形中，较长边所对的角较大，可据此复核。

针对练习

1. [2024 · February/March 0580/42 Q6(a)]

提示：将 AB 与它的对角配成一组，再配对所求边。



The diagram shows triangle ABC with $AB = 17.2\,\text{cm}$.
Angle $ABC = 54°$ and angle $ACB = 68°$.

(a) Calculate AC.

图示为三角形 ABC，$AB = 17.2$ cm，$\angle ABC = 54°$，$\angle ACB = 68°$。图中 M 在边 BC 上，连接了 AM，且 $MC = 12.8$ cm。图形不按比例绘制。

(a) 计算 AC 的长。

✓ **答案** 15.0 cm

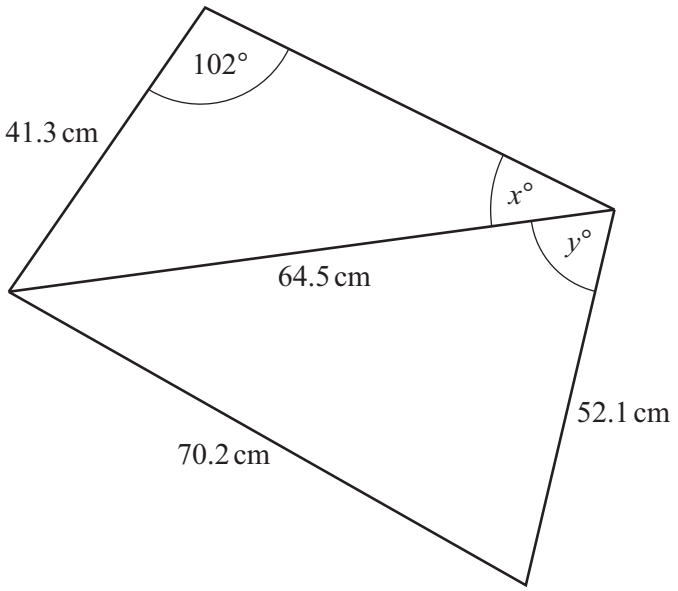
解析 AC 与 $54°$ 相对，AB 与 $68°$ 相对。由正弦定理得

$$\frac{AC}{\sin 54°} = \frac{AB}{\sin 68°}$$

$$AC = \frac{17.2 \sin 54°}{\sin 68°} = 15.007910\ldots\ \text{cm} \approx 15.0\ \text{cm}$$

答：$AC = 15.0$ cm。

2. [2025 · October/November 0580/43 Q18(a)]
提示：先将 102° 与它的对边配成一组。



NOT TO SCALE

(a) Calculate the value of x.

如图，四边形的一条对角线长为 64.5 cm。对角线上方的三角形中，左侧边长为 41.3 cm，顶角为 102°，右端的角为 $x°$。对角线下方的三角形中，与对角线左端相连的边长为 70.2 cm，与右端相连的边长为 52.1 cm，右端的角为 $y°$。图形不按比例绘制。
(a) 求 x 的值。

✓ **答案**

38.8

解析 在对角线上方的三角形中，由正弦定理得

$$\frac{\sin(x°)}{41.3} = \frac{\sin 102°}{64.5}$$

$$\sin(x°) = \frac{41.3\sin 102°}{64.5}$$

设反正弦所得锐角主值为 t，则

$$t = \arcsin\left(\frac{41.3\sin 102°}{64.5}\right) \approx 38.778973°$$

另一候选角为 $180° - t$，但

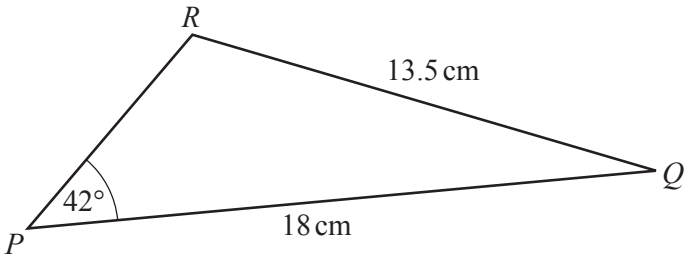
$$(180° - t) + 102° \approx 243.221027° > 180°$$

不合三角形内角和条件，故

$$x° = t \approx 38.8°$$

答：$x \approx 38.8$。

3. [2023 · October/November 0580/23 Q19]
提示：看所求角的钝角限定，比较两候选角与已知角的和。



Calculate the obtuse angle PRQ.

如图，在三角形 PQR 中，$\angle RPQ = 42°$，$RQ = 13.5$ cm，$PQ = 18$ cm。图形不按比例绘制。求钝角 PRQ 的大小。

✓ **答案** 116.9°

解析 在三角形 PQR 中，由正弦定理得

$$\frac{\sin(\angle PRQ)}{18} = \frac{\sin 42°}{13.5}$$

$$\sin(\angle PRQ) = \frac{18\sin 42°}{13.5}$$

设反正弦所得锐角主值为 t，则

$$t = \arcsin\left(\frac{18\sin 42°}{13.5}\right) \approx 63.1°$$

$\because$ 所求 $\angle PRQ$ 为钝角，$\therefore$

$$\angle PRQ = 180° - \arcsin\left(\frac{18\sin 42°}{13.5}\right) \approx 116.9°$$

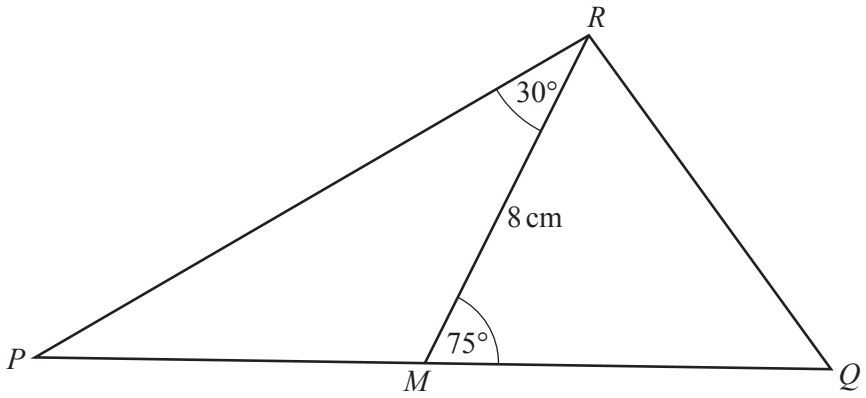
此时第三个内角为

$$\angle PQR = 180° - 42° - \angle PRQ \approx 21.1° > 0°$$

符合三角形内角和条件。
答：$\angle PRQ \approx 116.9°$。

4. [2023 · May/June 0580/43 Q5(b)]
提示：先看共线处的邻角，再配对边角，末尾核对半段与整段。

(b)



NOT TO SCALE

In triangle PQR, M is the midpoint of PQ.
$RM = 8$ cm, angle $PRM = 30°$ and angle $RMQ = 75°$.

Calculate PQ.

(b) 如图，在三角形 PQR 中，M 是 PQ 的中点。$RM = 8$ cm，$\angle PRM = 30°$，$\angle RMQ = 75°$。图形不按比例绘制。求 PQ 的长度。

✓ **答案** 11.3 cm

解析 ∵ P, M, Q 在同一直线上，∴

$$\angle PMR = 180° - 75° = 105°$$

在三角形 PRM 中，由内角和得

$$\angle RPM = 180° - 105° - 30° = 45°$$

由正弦定理得

$$\frac{PM}{\sin 30°} = \frac{8}{\sin 45°}$$

$$PM = \frac{8 \sin 30°}{\sin 45°} \text{ cm}$$

∵ M 是 PQ 的中点，∴

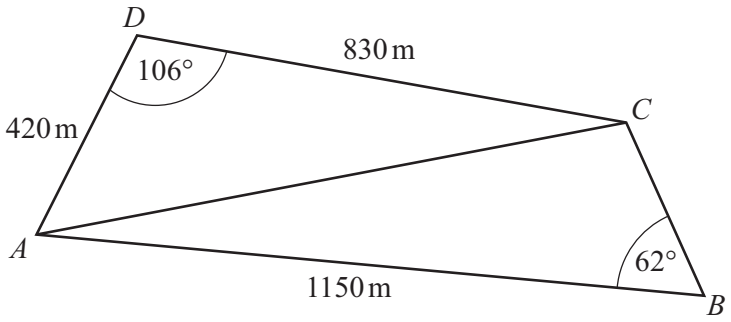
$$PQ = 2PM = \frac{2 \times 8 \sin 30°}{\sin 45°} \text{ cm} \approx 11.3 \text{ cm}$$

答：$PQ \approx 11.3$ cm。

5. [2024 · October/November 0580/41 Q6(b)]

提示：先在三角形 ADC 中求公共边 AC，再转入三角形 ABC。

The diagram shows a field $ABCD$.
A straight path AC goes across the field.



NOT TO SCALE

(a) Show that $AC = 1028$ m, correct to the nearest metre.

(b) Angle ACB is obtuse.

Calculate angle ACB.

图示为一块田地 $ABCD$。一条笔直的小路 AC 穿过田地。图中 $AD = 420$ m，$DC = 830$ m，$AB = 1150$ m，$\angle ADC = 106°$，$\angle ABC = 62°$。图形不按比例绘制。

(a) 证明 $AC = 1028$ m，精确到最接近的整数米。

(b) $\angle ACB$ 是钝角。计算 $\angle ACB$。

✓ **答案** 99.1°

解析 在三角形 ADC 中，由余弦定理求出公共边 AC。

$$AC^2 = 420^2 + 830^2 - 2 \times 420 \times 830 \cos 106°$$

$$AC = \sqrt{420^2 + 830^2 - 2 \times 420 \times 830 \cos 106°} = 1028.335725... \text{ m}$$

在三角形 ABC 中，由正弦定理得

$$\frac{\sin(\angle ACB)}{1150} = \frac{\sin 62°}{AC}$$

计算时保留 AC 的完整精度，得

$$\sin(\angle ACB) = \frac{1150 \sin 62°}{AC} = 0.987410...$$

设反正弦所得锐角为 t，则

$$t = \arcsin\left(\frac{1150 \sin 62°}{AC}\right) = 80.898886...°$$

∵所求角为钝角，∴

$$\angle ACB = 180° - t = 99.101113...° \approx 99.1°$$

此角与已知角的和满足

$$62° + 99.101113...° < 180°$$

答：$\angle ACB = 99.1°$。

6.6 把方位角转成三角形内角，再解三角形

题型 1　把方位角转成三角形内角，再解三角形（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **方位角从北起：** 方位角从起点北向沿_____量取。角度用三位数表示，例如 007°；本例给出 A 到 C 的方位角 114°。

② **等腰关系补角：** B 在 A 正南方，先用平角减去方位角。AC=BC，两底角相等。

$$\angle BAC = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$$

$$\angle ABC = 66^\circ,\quad \angle ACB = 180^\circ - 66^\circ - 66^\circ = \underline{\qquad}^\circ$$

③ **反向方位换算：** 起点与终点互换，两向的方位角相差_____。小于 180° 时加 180°，否则减 180°。

$114^\circ + 180^\circ = 294^\circ$　　$294^\circ - 180^\circ = 114^\circ$

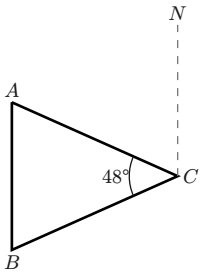
④ **从北向量目标：** 本例在 C 点，CA 方位角 294°，CB 在 CA 南侧 48°。按实际转向减去该内角。$294^\circ - 48^\circ = 246^\circ$

⑤ **先求三角形角：** 若还需正弦定理，先把方位角换成内角。以下用另一组数示范：内角 A=40°、其对边 9，B 的对边 6。$\sin B = \frac{6\sin 40^\circ}{9} \Longrightarrow B \approx 25.374^\circ$ $180^\circ - B \approx 154.626^\circ$，$154.626^\circ + 40^\circ > 180^\circ$ 补角不合内角和，舍去。

⑥ **内角换成方位：** 例如起点到前一点的方位角 050°，反向为 230°。若目标射线在反向射线顺时针 15° 处：$230^\circ + 15^\circ = 245^\circ$ 先画起点北向，再判断加减；所得方位角保持在 0° 至 360° 内。

填空：①顺时针　②48　③180°

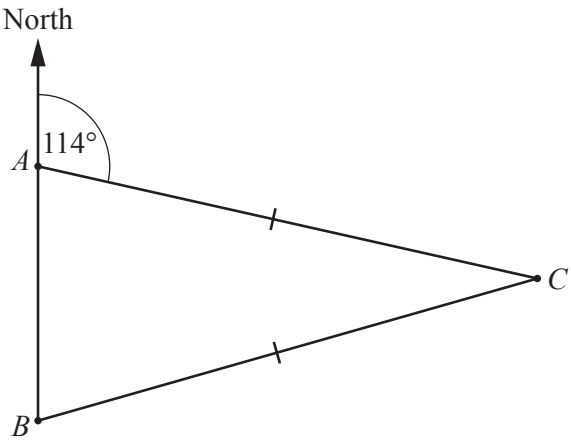
先确定方位的起点和正北线

	图像	数量关系
同一关系		从 C 到 A 的方位为 294°，到 B 的方位为 $294^\circ - 48^\circ = 246^\circ$。

点石成金　题目出现方位角、正东或正南等方向条件及三角形时，先把方向间的角转成三角形内角。

例 1　[2023 · May/June 0580/43 Q4(a)]

(a)



NOT TO SCALE

A, B and C are three towns and the bearing of C from A is 114°.
B is due south of A and $AC = BC$.

Calculate the bearing of B from C.

(a) A、B 和 C 是三个城镇。图中箭头指向北，图形未按比例绘制。
从 A 看 C 的方位角为 114°。
B 在 A 的正南方，且 $AC = BC$，图中两条相同的刻痕表示这两条边等长。
求从 C 看 B 的方位角。

解答　B 在 A 的正南方，故

$$\angle BAC = 180° - 114° = 66°$$

由 $AC = BC$，得

$$\angle ABC = \angle BAC = 66°$$

由三角形内角和，得

$$\angle ACB = 180° - 66° - 66° = 48°$$

从 C 看 A 的方位角为

$$114° + 180° = 294°$$

图中 CB 在 CA 的南侧，从 C 的北向顺时针量到 CB，得

$$294° - 48° = 246°$$

答：从 C 看 B 的方位角为 246°。

方法：先看 A 点的正南线，用平角扣去方位角求内角。

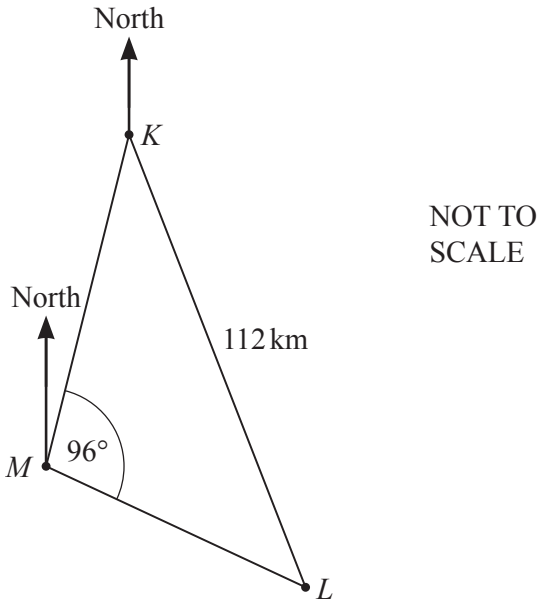
辨析：内角是两边间的夹角，方位角是从起点北向顺时针量的角。

针对练习

1. [2022 · October/November 0580/42 Q7(c)]

提示：先求从 K 看 M 的方位角，再求 K 处的三角形内角。

(c)



The diagram shows the positions of a lighthouse, L, and two ships, K and M.
The bearing of L from K is 155° and $KL = 112\,\text{km}$.
The bearing of K from M is 010° and angle $KML = 96°$.

Find the bearing and distance of ship M from the lighthouse, L.

(c) 图示为灯塔 L 和两艘船 K、M 的位置。K、M 两处的箭头均指向北方，图形未按比例绘制。
从 K 看 L 的方位角为 155°，且 $KL = 112$ km。
从 M 看 K 的方位角为 010°，且 $\angle KML = 96°$。
求从灯塔 L 看船 M 的方位角，以及船 M 到灯塔 L 的距离。

✓ **答案** 方位角为 286°，距离为 64.6 km。

解析 从 M 看 K 的方位角为 010°，故从 K 看 M 的方位角为

$$010° + 180° = 190°$$

在 K 处，两条射线的方位角之差为三角形内角，得

$$\angle MKL = 190° - 155° = 35°$$

由三角形内角和，得

$$\angle MLK = 180° - 96° - 35° = 49°$$

从 L 看 K 的方位角为

$$155° + 180° = 335°$$

图中 LM 在 LK 的逆时针方向，相隔 49°，故从 L 看 M 的方位角为

$$335° - 49° = 286°$$

LM 对着 35°，KL 对着 96°。由正弦定理，得

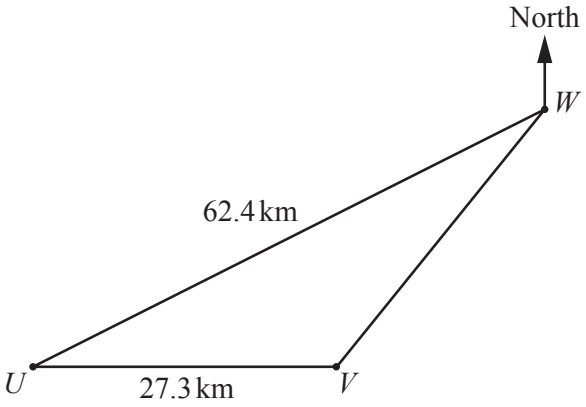
$$\frac{LM}{\sin 35°} = \frac{KL}{\sin 96°}$$

$$LM = \frac{112 \sin 35°}{\sin 96°} \text{ km} \approx 64.6 \text{ km}$$

答：从灯塔 L 看船 M 的方位角为 286°，距离为 64.6 km。

2. [2023 · May/June 0580/21 Q18]

提示：先配对边与对角，再看 WU 在 WV 哪侧，判断转角方向。



NOT TO SCALE

The diagram shows the position of three towns, U, V and W.
U is due west of V and angle $UVW = 125°$.

Calculate the bearing of U from W.

图示为三个城镇 U、V 和 W 的位置。图中 W 处的箭头指向北，图形未按比例绘制。
$UV = 27.3$ km，$UW = 62.4$ km。
U 在 V 的正西方，且 $\angle UVW = 125°$。
求从 W 看 U 的方位角。

✓ **答案**

236°

解析 由正弦定理得

$$\frac{\sin(\angle UWV)}{27.3} = \frac{\sin 125°}{62.4}$$

$$\sin(\angle UWV) = \frac{27.3 \sin 125°}{62.4}$$

由三角形内角和，其余两内角之和为

$$180° - 125° = 55°$$

故 $\angle UWV$ 为锐角，得

$$\angle UWV = \arcsin\left(\frac{27.3 \sin 125°}{62.4}\right) \approx 21.0007°$$

U 在 V 的正西方，东西方向与南北方向垂直，从 V 看 W 的方位角为

$$125° - 90° = 35°$$

从 W 看 V 的方位角为

$$35° + 180° = 215°$$

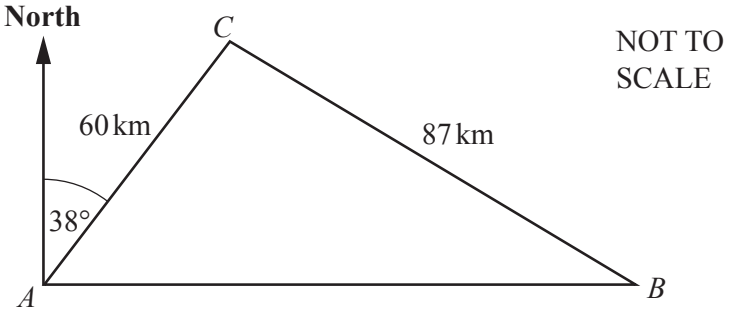
图中 WU 在 WV 的西侧，从 W 的北向顺时针量到 WU，得

$$215^\circ + 21.0007^\circ \approx 236^\circ$$

答：从 W 看 U 的方位角为 236°。

3. [2023 · May/June 0580/42 Q7(a)]

提示：先看 A 点的东向线，再用内角和比较反正弦的两解。



The diagram shows the straight roads between town A, town B and town C.
$AC = 60\,\text{km}$, $CB = 87\,\text{km}$ and B is due east of A.
The bearing of C from A is 038°.

(a) Show that angle $ACB = 95.1^\circ$, correct to 1 decimal place.

图示为城镇 A、城镇 B 和城镇 C 之间的笔直道路。图中 A 处的箭头指向北，图形未按比例绘制。
$AC = 60$ km，$CB = 87$ km，且 B 在 A 的正东方。
从 A 看 C 的方位角为 038°。
(a) 证明 $\angle ACB = 95.1^\circ$，精确到小数点后一位。

✓ **答案** $\angle ACB = 95.1^\circ$（精确到小数点后一位）

解析 B 在 A 的正东方，东向与北向垂直，故

$$\angle CAB = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$$

由正弦定理得

$$\frac{\sin(\angle ABC)}{60} = \frac{\sin 52^\circ}{87}$$

$$\sin(\angle ABC) = \frac{60\sin 52^\circ}{87}$$

$$\angle ABC = \arcsin\left(\frac{60\sin 52^\circ}{87}\right) \approx 32.919194^\circ$$

另一可能的角为

$$180^\circ - 32.919194^\circ = 147.080806^\circ$$

但

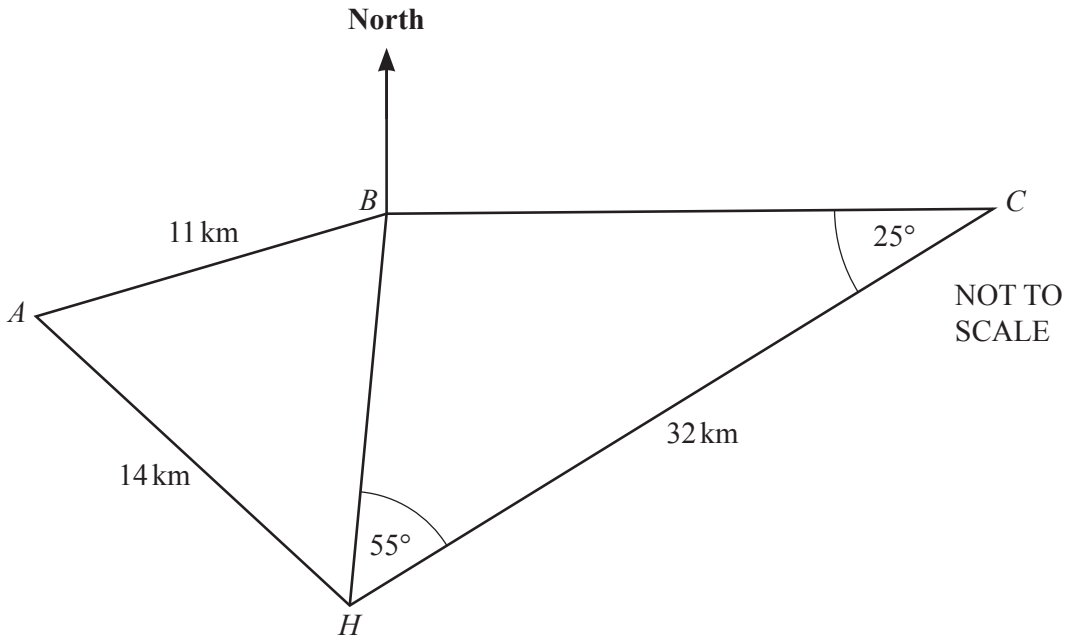
$$52^\circ + 147.080806^\circ > 180^\circ$$

不符合三角形内角和，故舍去该解。由三角形内角和得

$$\angle ACB = 180^\circ - 52^\circ - 32.919194^\circ \approx 95.1^\circ$$

答：$\angle ACB = 95.1°$，精确到小数点后一位。

4. [2024 · May/June 0580/41 Q6(c)]
提示：先用三角形 B C H 的内角和求角。



The diagram shows the positions of two lighthouses A and B, a boat C and a harbour H.
C is due east of B.

(b) (i) Show that angle $CBH = 100°$.

(ii) Show that $BH = 13.7$ km, correct to 1 decimal place.

(c) Calculate the bearing of A from B.

图示为两座灯塔 A、B，一艘船 C 和一个港口 H 的位置。C 在 B 的正东方。图中 B 处的箭头指向北，图形不按比例绘制。
$AB = 11$ km，$AH = 14$ km，$HC = 32$ km，$\angle BCH = 25°$，$\angle BHC = 55°$。
(b)(i) 证明 $\angle CBH = 100°$。
(ii) 证明 $BH = 13.7$ km，精确到小数点后一位。
(c) 求从 B 看 A 的方位角。

✓ **答案**

$258°$

解析 在三角形 BCH 中，由内角和得

$$\angle CBH = 180° - 25° - 55° = 100°$$

由正弦定理得

$$\frac{BH}{\sin 25°} = \frac{32}{\sin 100°}$$

$$BH = \frac{32 \sin 25°}{\sin 100°} \approx 13.73241055 \text{ km}$$

在三角形 ABH 中，由余弦定理得

$$\cos\angle ABH=\frac{11^2+(BH)^2-14^2}{2\times 11\times BH}$$

$$\angle ABH=\arccos\left(\frac{11^2+(BH)^2-14^2}{2\times 11\times BH}\right)\approx 67.91701955^\circ$$

C 在 B 的正东方，从 B 看 H 的方位角为

$$90^\circ+100^\circ=190^\circ$$

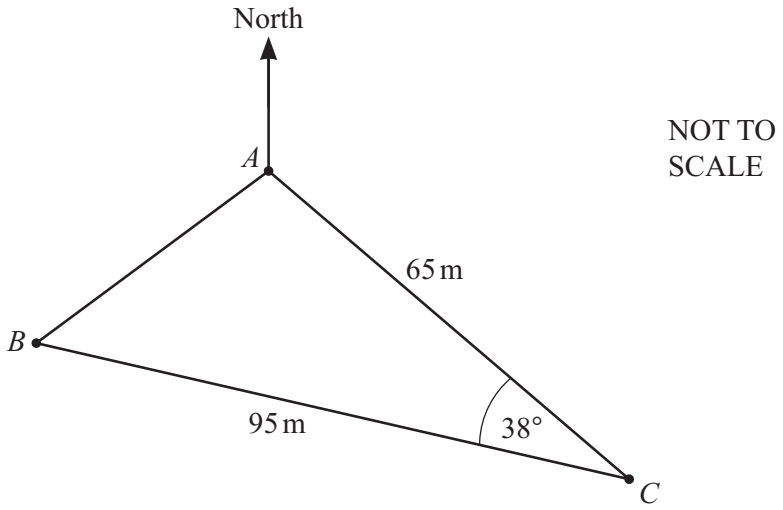
图中从射线 BH 顺时针转到射线 BA，故所求方位角为

$$190^\circ+\angle ABH\approx 257.91701955^\circ\approx 258^\circ$$

答：从 B 看 A 的方位角为 258°。

5. [2025 · February/March 0580/42 Q17(c)]

提示：先由两条已知边及其夹角求 $\angle A$ 与 $\angle B$。



The diagram shows three points A, B and C on horizontal ground.
The bearing of C from A is 145° and angle $ACB = 38°$.
$AC = 65$ m and $BC = 95$ m.

(b) Show that $AB = 59.3$ m, correct to 1 decimal place.

(c) Angle BAC is obtuse.

Work out the bearing of B from A.

图示为水平地面上三个点 A、B 和 C。图中 A 处的箭头指向北，图形不按比例绘制。
从 A 看 C 的方位角为 145°，$\angle ACB=38^\circ$。
$AC=65$ m，$BC=95$ m。
(b) 证明 $AB=59.3$ m，精确到小数点后一位。
(c) $\angle BAC$ 是钝角。求从 A 看 B 的方位角。

✓ **答案**

244.6°

解析 由余弦定理得

$$AB^2=65^2+95^2-2\times 65\times 95\cos 38^\circ$$

$$AB=\sqrt{65^2+95^2-2\times65\times95\cos38^\circ}\approx59.31329693\ \text{m}$$

由正弦定理得

$$\frac{\sin\angle BAC}{95}=\frac{\sin38^\circ}{AB}$$

$$\sin\angle BAC=\frac{95\sin38^\circ}{AB}$$

设反正弦所得锐角主值为 t，则

$$t=\arcsin\left(\frac{95\sin38^\circ}{AB}\right)\approx80.42996061^\circ$$

$\because\angle BAC$ 是钝角，$\therefore$

$$\angle BAC=180^\circ-t\approx99.57003939^\circ$$

图中从射线 AC 顺时针转到射线 AB，故所求方位角为

$$145^\circ+\angle BAC\approx244.57003939^\circ\approx244.6^\circ$$

答：从 A 看 B 的方位角为 244.6°。

6.7 作线段在平面上的垂直投影，再求线面角

题型 1 作线段在平面上的垂直投影，再求线面角（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **垂足确定投影：**空间端点向平面作垂线，垂足与另一个端点的连线是_____。线段与其投影的夹角称为线面角。

底面 ABCD：

P 的垂足为 A，PC 的投影为 AC。

$\theta=\angle PCA$

侧面 ADQP：

C 的垂足为 D，PC 的投影为 PD。

$\varphi=\angle CPD$

② **勾股补足边长：**本例底面是矩形，先求对角线，再求空间线段。两次使用的直角均由垂直关系确定。$AC=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}$ cm $PC=\sqrt{4^2+74}=\sqrt{90}$ cm

③ **用三角比求角：**对于 θ，PA 是对边，AC 是邻边，PC 是_____。计算器设角度制。

$\tan\theta=\frac{4}{\sqrt{74}}$

$\theta=\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{74}}\right)\approx24.9^\circ$

$\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{90}}$

$\theta=\arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{90}}\right)\approx24.9^\circ$

④ **截面求出垂高：**垂高未给出时，先在截面中求它。棱柱体积等于截面积乘柱长，三角形截面面积含二分之一。

体积求高：

$70=\frac{1}{2}\times5\times h\times7$

$h=4$ cm

截面角求高：

斜边取 6cm、底角取 30° 演示。

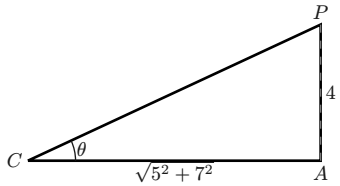
$h=6\sin30^\circ=3$ cm

⑤ **中点确定半边：**本例 K 为 AB 中点，QD 垂直底面，故 QK 在底面的投影是 DK。中点使所用的底边长度变为_____。$AK=\frac{5}{2}$，$DK=\sqrt{7^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{221}}{2}$ $QK=\sqrt{4^2+\frac{221}{4}}=\frac{\sqrt{285}}{2}$ cm

⑥ **换平面重找投影：**同一线段与不同平面的夹角，所用投影可能不同。每次先确认垂足和直角，再按已知边选正弦、余弦或正切。

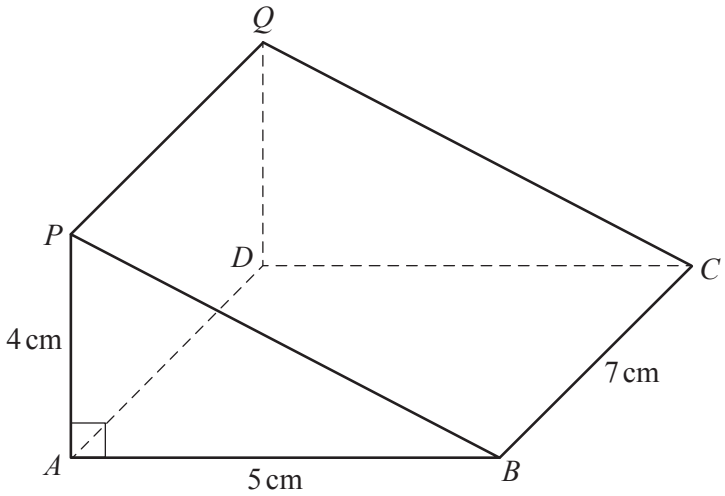
填空：①垂直投影　②斜边　③一半

垂直截面中的角才是线面角

	图像	数量关系
同一关系		$\tan\theta=\frac{4}{\sqrt{5^2+7^2}}$。

点石成金　题目出现空间线段与某个面的夹角时，先作该线段在所求平面上的垂直投影。

例 1　[2023 · February/March 0580/22 Q22]



NOT TO SCALE

The diagram shows a triangular prism $ABCDQP$ of length 7 cm.
The cross-section is triangle PAB with $PA = 4$ cm, $AB = 5$ cm and angle PAB

Calculate the angle between the line PC and the base $ABCD$.

图示三棱柱 $ABCDQP$，棱柱长为 7 cm。截面为三角形 PAB，其中 $PA=4$ cm，$AB=5$ cm，$\angle PAB=90°$。图形不按比例绘制。计算直线 PC 与底面 $ABCD$ 的夹角。

解答　由直棱柱的性质，PA 垂直于底面 $ABCD$，所以 PC 在底面上的投影为 AC，所求角为 $\angle PCA$。

底面 $ABCD$ 是矩形，由勾股定理得

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}\text{ cm}$$

在直角三角形 PAC 中，

$$\tan\angle PCA=\frac{PA}{AC}=\frac{4}{\sqrt{74}}$$

$$\angle PCA=\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{74}}\right)\approx 24.9°$$

答：PC 与底面 $ABCD$ 的夹角为 24.9°。

方法：先看底面的垂线标记，从找端点垂足、连投影起手。

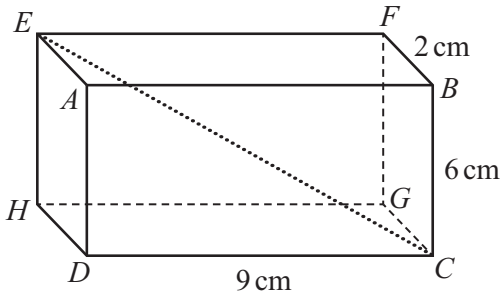
辨析：线面角是斜线与投影的夹角，直角是垂线与平面的夹角。

拓展：同一斜线换一个投影平面，垂足和所用直角三角形也可能改变。

针对练习

1. [2026 · May/June 0580/21 Q21(d)]

提示：先确定 E 在底面上的垂足。



NOT TO SCALE

The diagram shows a solid cuboid $ABCDEFGH$.
$BF = 2$ cm, $BC = 6$ cm and $CD = 9$ cm.

(c) Calculate CE.

(d) The angle between CE and the base $CDHG$ is $x°$.

Find the value of $\sin x°$.

图示为实心长方体 $ABCDEFGH$。$BF = 2$ cm，$BC = 6$ cm，$CD = 9$ cm。图形不按比例绘制。
(c) 计算 CE 的长度。
(d) CE 与底面 $CDHG$ 的夹角为 $x°$。求 $\sin(x°)$ 的值。

✓ **答案**

$$\frac{6}{11}$$

解析 由长方体的性质，EH 垂直于底面 $CDHG$，且

$$DH = BF = 2 \text{ cm}$$

$$EH = BC = 6 \text{ cm}$$

CE 在底面上的投影为 CH，故

$$x° = \angle ECH$$

在底面矩形 $CDHG$ 中，由勾股定理得

$$CH^2 = CD^2 + DH^2 = 9^2 + 2^2 = 85\text{cm}^2$$

在直角三角形 EHC 中，

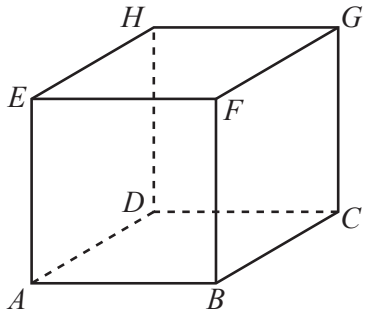
$$CE = \sqrt{CH^2 + EH^2} = \sqrt{85 + 6^2} = 11 \text{ cm}$$

$$\sin(x°) = \frac{EH}{CE} = \frac{6}{11}$$

答：$\sin(x°) = \frac{6}{11}$。

2. [2023 · May/June 0580/43 Q9(b)]
提示：看空间对角线的端点垂足，比较垂高与底面投影长。

(b)



NOT TO SCALE

The diagram shows a cube $ABCDEFGH$ of edge 7 cm.

Calculate the angle between AG and the base of the cube.

(b) 图示正方体 $ABCDEFGH$，棱长为 7 cm。图形不按比例绘制。
计算 AG 与正方体底面 $ABCD$ 的夹角。

✓ **答案** 35.3°

解析 正方体中，GC 垂直于底面 $ABCD$，所以 AG 在底面上的投影为 AC，所求角为 $\angle GAC$。
底面是边长为 7 cm 的正方形，

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}\ \text{cm}$$

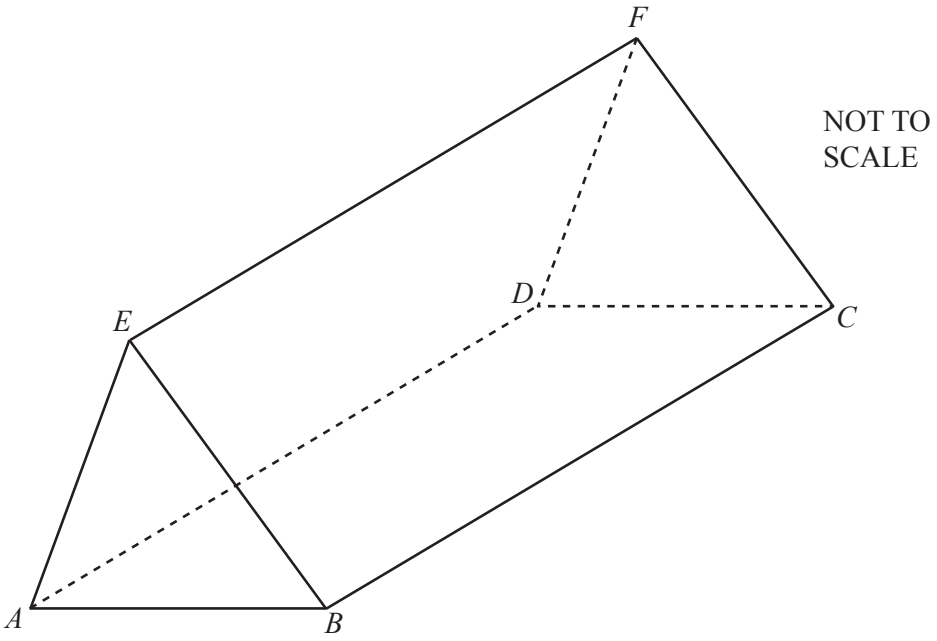
在直角三角形 ACG 中，

$$\tan \angle GAC = \frac{CG}{AC} = \frac{7}{7\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\angle GAC = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 35.3°$$

答：AG 与正方体底面的夹角为 35.3°。

3. [2023 · May/June 0580/41 Q2(d)]
提示：看截面角与相同截面，比较截面垂高和侧面对角线长。



The diagram shows a solid triangular prism $ABCDEF$ of length 15 cm.
$AB = 6.4$ cm, $EB = 5.7$ cm and the volume of the prism is 145 cm^3.

(a) Show that angle $EBA = 32°$, correct to the nearest degree.

(d) Calculate the angle BF makes with the base, $ABCD$, of the prism.

图示一个实心三棱柱 $ABCDEF$，棱柱长为 15 cm。$AB = 6.4$ cm，$EB = 5.7$ cm，棱柱的体积为 145cm^3。图形不按比例绘制。
(a) 证明：$\angle EBA$ 精确到最接近的整数度为 32°。
(d) 计算 BF 与棱柱底面 $ABCD$ 的夹角。

✓ **答案** (a) 32°；(d) 10.8°

解析 过 E 作 $EK \perp AB$，垂足为 K。由三棱柱的体积得

$$\frac{1}{2} \times 6.4 \times EK \times 15 = 145$$

$$EK = \frac{2 \times 145}{6.4 \times 15} = \frac{145}{48} \text{ cm}$$

在直角三角形 EKB 中，

$$\sin \angle EBA = \frac{EK}{EB} = \frac{\frac{145}{48}}{5.7}$$

$$\angle EBA = \arcsin\left(\frac{\frac{145}{48}}{5.7}\right) \approx 32.0035°$$

所以，$\angle EBA$ 精确到最接近的整数度为 32°。
用 (a) 所得的 32° 求截面垂高，

$$EK \approx 5.7 \sin 32° \text{ cm}$$

过 F 作 FT 垂直于底面 $ABCD$，垂足为 T。两端截面相同，故

$$FT = EK \approx 5.7 \sin 32° \text{ cm}$$

侧面 $EBCF$ 是矩形，由勾股定理得

$$BF=\sqrt{EB^2+EF^2}=\sqrt{5.7^2+15^2}=\sqrt{257.49}\text{ cm}$$

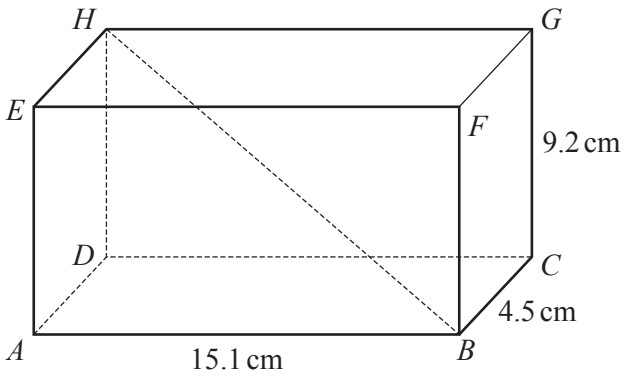
BF 在底面上的投影为 BT，所求角为 $\angle FBT$。
在直角三角形 BTF 中，

$$\sin\angle FBT=\frac{FT}{BF}\approx\frac{5.7\sin 32°}{\sqrt{257.49}}$$

$$\angle FBT\approx\arcsin\left(\frac{5.7\sin 32°}{\sqrt{257.49}}\right)\approx 10.8°$$

答：(a) $\angle EBA$ 精确到最接近的整数度为 32°；(d) BF 与底面的夹角为 10.8°。

4. [2023 · October/November 0580/21 Q21]
提示：看指定侧面的垂线，比较垂线长与面内投影长。



NOT TO SCALE

The diagram shows a cuboid $ABCDEFGH$.
$AB = 15.1$ cm, $BC = 4.5$ cm and $CG = 9.2$ cm.

Calculate the angle that the diagonal BH makes with the face $ADHE$.

图示长方体 $ABCDEFGH$。$AB=15.1$ cm，$BC=4.5$ cm，$CG=9.2$ cm。图形不按比例绘制。
计算对角线 BH 与面 $ADHE$ 的夹角。

✓ **答案** 55.9°

解析 长方体中，BA 垂直于面 $ADHE$，所以 BH 在该面上的投影为 AH，所求角为 $\angle BHA$。
面 $ADHE$ 是矩形，且

$$AD=BC=4.5\text{ cm}$$

$$DH=CG=9.2\text{ cm}$$

由勾股定理得

$$AH=\sqrt{AD^2+DH^2}=\sqrt{4.5^2+9.2^2}=\sqrt{104.89}\text{ cm}$$

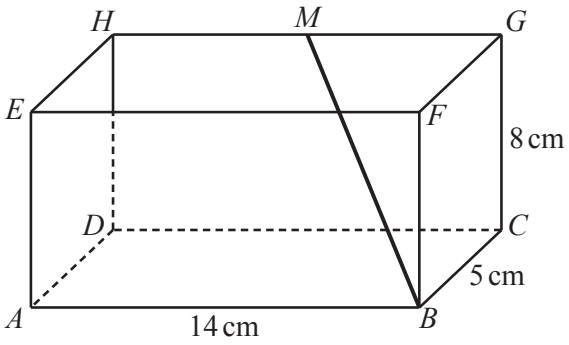
在直角三角形 BAH 中，

$$\tan\angle BHA=\frac{AB}{AH}=\frac{15.1}{\sqrt{104.89}}$$

$$\angle BHA=\arctan\left(\frac{15.1}{\sqrt{104.89}}\right)\approx 55.9°$$

答：BH 与面 $ADHE$ 的夹角为 55.9°。

5. [2023 · October/November 0580/23 Q21(b)]
提示：看中点在底面的对应位置，比较垂高与空间斜边长。



NOT TO SCALE

The diagram shows a cuboid $ABCDEFGH$.
$AB = 14$ cm, $BC = 5$ cm and $CG = 8$ cm.
M is the midpoint of HG.

(a) Calculate BM.

(b) Calculate the angle that BM makes with the base $ABCD$.

图示长方体 $ABCDEFGH$。$AB = 14$ cm，$BC = 5$ cm，$CG = 8$ cm。M 是 HG 的中点。图形不按比例绘制。
(a) 计算 BM 的长度。
(b) 计算 BM 与底面 $ABCD$ 的夹角。

✓ **答案** (a) 11.7 cm；(b) 42.9°

解析 过 M 作 MN 垂直于底面 $ABCD$，垂足为 N。
M 是 HG 的中点，所以 N 是 DC 的中点，且

$$CN = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2} \times 14 = 7 \text{ cm}$$

$$MN = CG = 8 \text{ cm}$$

BM 在底面上的投影为 BN。在底面内的直角三角形 BCN 中，

$$BN = \sqrt{BC^2 + CN^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74} \text{ cm}$$

在直角三角形 BNM 中，

$$BM = \sqrt{BN^2 + MN^2} = \sqrt{74 + 8^2} = \sqrt{138} \text{ cm} \approx 11.7 \text{ cm}$$

所求线面角为 $\angle MBN$，

$$\sin \angle MBN = \frac{MN}{BM} = \frac{8}{\sqrt{138}}$$

$$\angle MBN = \arcsin\left(\frac{8}{\sqrt{138}}\right) \approx 42.9°$$

答：(a) $BM = 11.7$ cm；(b) BM 与底面 $ABCD$ 的夹角为 42.9°。

6.8 先求参考角，再按象限找区间内的全部解

题型 1　先求参考角，再按象限找区间内的全部解（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **整理三角函数值：**本例先移项并除以系数，使三角函数单独在左边。所得正弦值为_____。 $5\sin x+3=0 \Longrightarrow \sin x=-\frac{3}{5}=-0.6$

② **求出参考角：**参考角 α 取锐角。用三角函数值的绝对值求它，计算器设为_____。$\alpha=\arcsin(0.6)\approx 36.8699°$

③ **根据正负选象限：**从水平向右的射线起逆时针量角。按函数值正负选择象限，再与参考角配合。

象限	正弦	余弦	正切	角
第一象限	正	正	正	α
第二象限	正	负	负	$180°-\alpha$
第三象限	负	负	正	$180°+\alpha$
第四象限	负	正	负	$360°-\alpha$

④ **检查区间全解：**本例正弦为负，取第三、四象限。两角都在 $0°$ 至 $360°$ 内，共有_____个解。

$x=180°+\alpha\approx 216.8699°$ | $x=360°-\alpha\approx 323.1301°$

若余弦为负，则选择第二、三象限；例如 cosx=−1/2 时，解为 $120°$ 、$240°$ 。

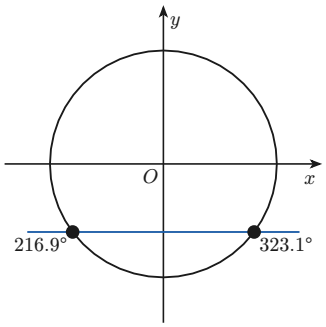
⑤ **正切利用周期：**正切的周期为_____。例如 tanx=1，在 $0°$ 至 $360°$ 内从 $45°$ 开始，每次增加 $180°$ 。$\tan 45°=1$，$\tan 225°=1$ $45°-180°<0°$，$225°+180°>360°$ 因此本演示只有 $45°$ 、$225°$ 两个解。

⑥ **反角限制筛选：**反角满足 $180°<x<360°$。例如 cosx=0.4，反余弦先给出主值，再检验对称角。$\theta=\arccos(0.4)\approx 66.4218°$

主值小于 $180°$ ，舍去。 | $x=360°-\theta\approx 293.5782°$ 属于反角，保留。

填空：①−0.6　②角度制　③2　④180°

同一正弦值在一周内可对应两个角

	图像	数量关系
同一关系		$\sin x=-0.6$ 在第三、第四象限各有一个解。

点石成金　题目出现三角方程及角的范围时，先求参考角，再按函数值的正负选象限，写出范围内的全部解。

例 1　[2023 · May/June 0580/22 Q21]

Solve the equation　$5\sin x=-3$　for $0°\leqslant x\leqslant 360°$.

在 $0°\leq x\leq 360°$ 范围内，解方程 $5\sin x=-3$。

解答　由题意得

$\sin x=-\frac{3}{5}=-0.6$。

设参考角为 α，则

$\alpha=\arcsin(0.6)\approx 36.8699°$。

∵ 正弦值为负，∴ x 在第三或第四象限。

$x=180°+\alpha\approx 216.9°$，

方法：先看正弦项的系数，除去系数求函数值，再求参考角、选象限。

$x = 360° - \alpha \approx 323.1°$。
两角均满足 $0° \le x \le 360°$。
答：$x = 216.9°$ 或 $323.1°$。

! 辨析：参考角是对应的锐角，所求角是指定区间内满足方程的角。

拓展：正弦值相同的角可落在不同象限，反正弦主值未必涵盖区间内全部解。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/21 Q19(b)]
提示：先移常数项，再看余弦值的符号，对照象限表找全角。

(b) Solve the equation $5\cos x + 3 = 0$ for $0° \leqslant x \leqslant 360°$.

(b) 在 $0° \le x \le 360°$ 范围内，解方程 $5\cos x + 3 = 0$。

✓ **答案** $x = 126.9°$ 或 $233.1°$

解析 由
$5\cos x + 3 = 0$,
得
$5\cos x = -3$,
$\cos x = -\frac{3}{5} = -0.6$。
设参考角为 α，则
$\alpha = \arccos(0.6) \approx 53.1301°$。
$\because$ 余弦值为负，$\therefore$ x 在第二或第三象限。
$x = 180° - \alpha \approx 126.9°$,
$x = 180° + \alpha \approx 233.1°$。
两角均满足 $0° \le x \le 360°$。
答：$x = 126.9°$ 或 $233.1°$。

2. [2023 · May/June 0580/43 Q7(c)(ii)]
提示：先整理出正弦值，再按符号选象限，逐个核对区间。

(ii) Solve the equation $3\sin x + 1 = 0$ for $0° \leqslant x \leqslant 360°$.

(ii) 在 $0° \le x \le 360°$ 范围内，解方程 $3\sin x + 1 = 0$。

✓ **答案** $x = 199.5°$ 或 $340.5°$

解析 由
$3\sin x + 1 = 0$,
得
$3\sin x = -1$,
$\sin x = -\frac{1}{3}$。
设参考角为 α，则
$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \approx 19.4712°$。
$\because$ 正弦值为负，$\therefore$ x 在第三或第四象限。
$x = 180° + \alpha \approx 199.5°$,
$x = 360° - \alpha \approx 340.5°$。
两角均满足 $0° \le x \le 360°$。
答：$x = 199.5°$ 或 $340.5°$。

3. [2023 · February/March 0580/42 Q12(b)]
提示：先认特殊角，再按正切周期向两侧补角，与区间端点比较。

(b) Find x when $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ and $0° \leqslant x \leqslant 360°$.

(b) 已知 $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$，且 $0° \leq x \leq 360°$，求 x。

✓ **答案** $x = 30°$ 或 $210°$

解析 ∵

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

且正切的周期为 $180°$，∴

$x = 30°$,

或

$x = 30° + 180° = 210°$。

又

$30° - 180° = -150° < 0°$,

$210° + 180° = 390° > 360°$。

故题给区间内共有两个解。

答：$x = 30°$ 或 $210°$。

4. [2023 · October/November 0580/21 Q19(b)]
提示：看反角的范围，比较反余弦主值与其对称角的位置。

(b) When $\cos x = 0.21$, find the **reflex** angle x.

(b) 已知 $\cos x = 0.21$，求反角 x。

✓ **答案**

$$x = 282.1°$$

解析 由

$\cos x = 0.21$,

得主值

$\theta = \arccos(0.21) \approx 77.878°$。

∵ 余弦值为正，∴ x 在第一或第四象限。

又 x 为反角，满足 $180° < x < 360°$，故舍去第一象限的主值，取第四象限的角。

$x = 360° - \theta \approx 282.1°$。

答：$x = 282.1°$。

5. [2024 · October/November 0580/21 Q21]
提示：先移项、除以系数，求出正切值。

Solve the equation $3\tan x + 5 = 1$ for $0° \leqslant x \leqslant 360°$.

在 $0° \leq x \leq 360°$ 范围内，解方程 $3\tan x + 5 = 1$。

✓ **答案** $x = 126.9°$ 或 $306.9°$

解析 由题意得

$$3\tan x = 1 - 5 = -4$$

$$\tan x = -\frac{4}{3}$$

设参考角为 α，则

$$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53.13010235°$$

∵ 正切值为负，∴ x 在第二或第四象限。

$$x = 180° - \alpha \approx 126.9°$$

$$x = 360° - \alpha \approx 306.9°$$

正切的周期为 180°，上述两角相差 180°。

$$126.86989765° - 180° < 0°$$

$$306.86989765° + 180° > 360°$$

故区间内共有上述两个解。

答：$x = 126.9°$ 或 306.9°。

6.9 用特殊角三角比求精确值

题型 1 用特殊角三角比求精确值（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **认识三角比：**例题把 60° 的正弦与 30° 的正切相乘。直角三角形中，斜边正对直角。取锐角 θ，其对面的直角边是对边，另一条直角边是邻边。

$$\text{正弦：}\sin\theta = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$$

$$\text{余弦：}\cos\theta = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$$

$$\text{正切：}\tan\theta = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}}$$

② **构造特殊三角形：**

边长为 2 的等边三角形作高 h，底边与顶角各分成两半。

$$\frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{60°}{2} = 30°$$

$$h^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

$$h = \sqrt{3}$$

两直角边均为 1 的等腰直角三角形，设斜边为 c。

$$\frac{180° - 90°}{2} = 45°$$

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$c = \sqrt{2}$$

③ **求出精确比值：**把上述三角形的边长代入三角比，得到下表。计算中保留_____，不换成小数近似值。

三角比	30°	45°	60°
正弦	$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
余弦	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$
正切	$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$	$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

④ **解出未知边长：**把边长代入三角比，两边同乘分母以解出未知边长。

对边为 2 cm，设 30° 的邻边为 u cm。

邻边为 3 cm，设 30° 所在三角形的斜边为 v cm。

$$\tan 30^\circ = \frac{2}{u}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{u}$$

$$\frac{u}{\sqrt{3}} = 2$$

$$u = 2\sqrt{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{3}{v}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{v}$$

$$\frac{v\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$v\sqrt{3} = 6$$

$$v = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

⑤ **消去根式分母：**分子、分母同乘_____，分数的值不变。分母含根式时，作分母有理化，消去分母中的根号。

$$v = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

⑥ **衔接两个三角形：**两个直角三角形共边时，先求_____，再代入另一个三角形。设共边长为 d，它是下方三角形的斜边，30° 的对边长为 1。它又是上方三角形中 45° 的邻边，设上方斜边长为 t。

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{d}$$

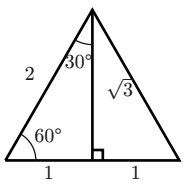
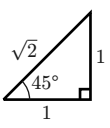
$$d = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\cos 45^\circ = \frac{d}{t}$$

$$t = \frac{d}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$$

填空：①精确值　②同一个非零数　③公共边

特殊角来自两个直角三角形

	等边三角形作高	等腰直角三角形
边与角		

点石成金　题目出现特殊角的三角比或含特殊角的直角三角形，要求精确值时，先写出对应角的精确三角比。

例 1　[2026 · May/June 0580/21 Q18]

$y = \sin 60° \times \tan 30°$.

Find the value of y.

已知
$y = \sin 60° \times \tan 30°$。
求 y 的值。

解答　代入特殊角的三角比，得

$$y = \sin 60° \times \tan 30°$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

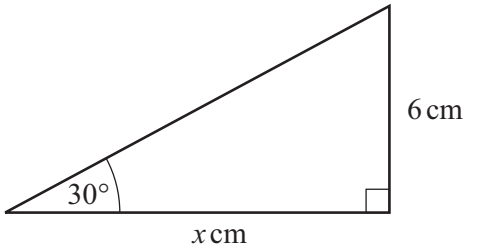
方法：看两个因子的角度与函数名，先代入精确比值再约分。

辨析：正弦是对边与斜边之比，正切是对边与邻边之比。

答：$y = \frac{1}{2}$。

针对练习

1. [2025 · May/June 0580/21 Q20]
提示：以三十度为参照，比较已知边与未知边分别是哪条直角边。



NOT TO SCALE

Find the exact value of x.

图示直角三角形的左下角为 30°，右下角为直角，右侧直角边长为 6 cm，底边长为 x cm。图形不按比例绘制。求 x 的精确值。

答案

$$6\sqrt{3}$$

解析　相对于 30°，对边长为 6 cm，邻边长为 x cm，由正切得

$$\tan 30° = \frac{6}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{x}$$

两边同乘 x，得

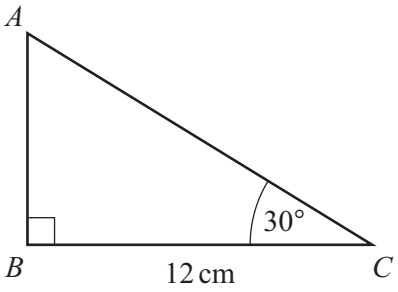
$$\frac{x}{\sqrt{3}} = 6$$

$$x = 6\sqrt{3}$$

答：$x = 6\sqrt{3}$。

2. [2026 · February/March 0580/22 Q17(a)]

提示：先找直角对面的边，再辨认三十度的邻边。



NOT TO SCALE

(a) Find the length of AC.
Give your answer in the form $a\sqrt{b}$.

图中，三角形 ABC 的顶点 A 在左上方，B 在左下方，C 在右下方。$\angle ABC = 90°$，$\angle ACB = 30°$，$BC = 12$ cm。图形不按比例绘制。
(a) 求 AC 的长度，答案写成 $a\sqrt{b}$ 的形式。

✓ **答案**

$$8\sqrt{3}\text{ cm}$$

解析 三角形 ABC 在 B 点为直角，相对于 30°，BC 是邻边，AC 是斜边，由余弦得

$$\cos 30° = \frac{BC}{AC}$$

$$AC = \frac{BC}{\cos 30°}$$

代入并将分母有理化，得

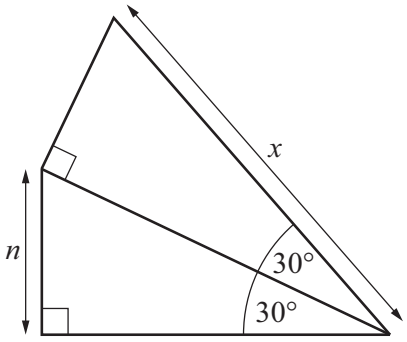
$$AC = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}\text{ cm}$$

答：$AC = 8\sqrt{3}$ cm。

3. [2025 · May/June 0580/23 Q23(b)]

提示：看公共边在上下三角形中的角色，先从下方求起。

(b)



NOT TO SCALE

The diagram shows two different right-angled triangles joined by a common side.

Find x in terms of n.

(b) 图中两个不同的直角三角形由一条公共边相连。下方三角形的左下角为直角，左侧边长为 n，右端的角为 30°。上方三角形在公共边左端处为直角，公共边与长为 x 的斜边在右端的夹角为 30°。图形不按比例绘制。
用 n 表示 x。

✓ **答案**

$$\frac{4n\sqrt{3}}{3}$$

解析 设公共边长为 d。在下方直角三角形中，n 是 $30°$ 的对边长，d 是斜边长，由正弦得

$$\sin 30° = \frac{n}{d}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{n}{d}$$

$$d = 2n$$

在上方直角三角形中，公共边是 $30°$ 的邻边，长为 x 的边是斜边，由余弦得

$$\cos 30° = \frac{d}{x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2n}{x}$$

$$x = \frac{2n}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4n}{\sqrt{3}} = \frac{4n\sqrt{3}}{3}$$

答：$x = \frac{4n\sqrt{3}}{3}$。

6.10 用零点和渐近线画正切图象

题型 1 用零点和渐近线画正切图象（Extended）

考频 ★☆☆☆☆

知识梳理

① **正切比值关系：**题中x为角，单位为度，y为正切值。记$\sin x$为正弦值，$\cos x$为余弦值。正切值等于正弦值除以_____。

$$\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (\cos x \neq 0)$$

② **横轴交点确定：**分子为零且分母不为零，商为零。使函数值为零的x称为零点。本题的零点为_____。

$$\tan 0° = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 180° = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\tan 360° = \frac{0}{1} = 0$$

③ **竖直渐近线：**分母为零，正切值无定义。曲线无限接近而不相交的竖直线称为竖直渐近线。本题在两条虚线处断开，虚线方程为_____。

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\cos 270^\circ = 0$$

④ **分支正负位置：**由正弦值、余弦值的符号判定商的符号。正切值为正时曲线在横轴上方，为负时在横轴下方。

x的范围	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	曲线位置
$0^\circ < x < 90^\circ$	$+$	$+$	$+$	横轴上方
$90^\circ < x < 180^\circ$	$+$	$-$	$-$	横轴下方
$180^\circ < x < 270^\circ$	$-$	$-$	$+$	横轴上方
$270^\circ < x < 360^\circ$	$-$	$+$	$-$	横轴下方

⑤ **重复图形确定：**角增加180°时，正弦值、余弦值同时变号，商不变。图形沿横轴每隔_____重复一次，这个最小正角度称为周期。

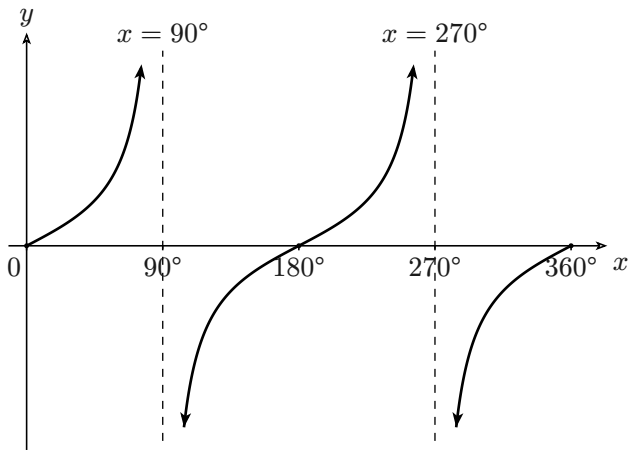
$$\tan 225^\circ = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 = \tan 45^\circ$$

$$\tan(x + 180^\circ) = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x \quad (\cos x \neq 0)$$

⑥ **渐近两侧描线：**分母趋近零而分子不趋近零，商的绝对值不断增大。记$+\infty$、$-\infty$分别表示向上、向下无界延伸。每段曲线从左向右_____，三个分支分开绘制。

角的变化	正弦值趋近	余弦值趋近	正切值
从左侧趋近90°	1	0（正值）	$+\infty$
从右侧趋近90°	1	0（负值）	$-\infty$
从左侧趋近270°	-1	0（负值）	$+\infty$
从右侧趋近270°	-1	0（正值）	$-\infty$

⑦

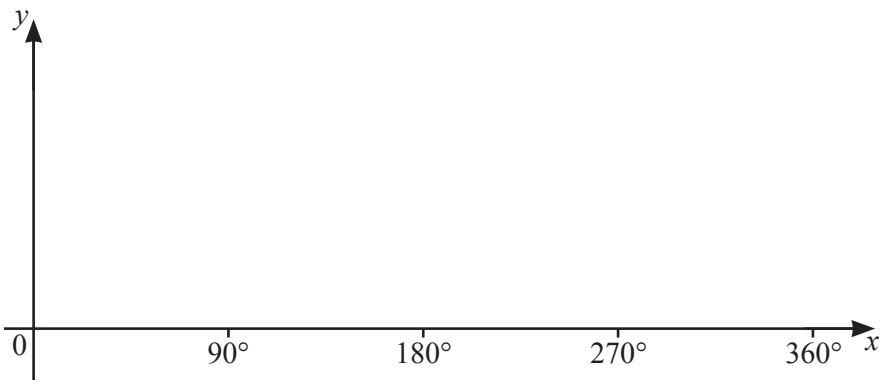


填空：①余弦值　②0°、180°、360°　③$x = 90^\circ$、$x = 270^\circ$　④180°　⑤递增

点石成金　题目出现正切函数及作图范围时，先标出零点，画出竖直渐近线。

例 1　[2021 · May/June 0580/21 Q19(a)]

(a) Sketch the graph of $y = \tan x$ for $0° \leqslant x \leqslant 360°$.



(a) 在所给坐标系中，画出$y = \tan x$在$0° \leq x \leq 360°$内的图象草图。横轴为x轴，纵轴为y轴；原点标为0，横轴其余刻度依次为90°、180°、270°、360°。

解答　由正切值是正弦值与余弦值的比，得

$$\tan 0° = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 180° = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\tan 360° = \frac{0}{1} = 0$$

方法：先看作图范围，标出零点和渐近线，再分段描线。

辨析：零点是函数值为零的角，渐近线是曲线无限趋近的直线。

拓展：正切函数是奇函数，图象关于原点中心对称。

故曲线经过$(0°, 0)$、$(180°, 0)$、$(360°, 0)$。

∵ $x = 90°$、$x = 270°$时，余弦值为零，正切值无定义，

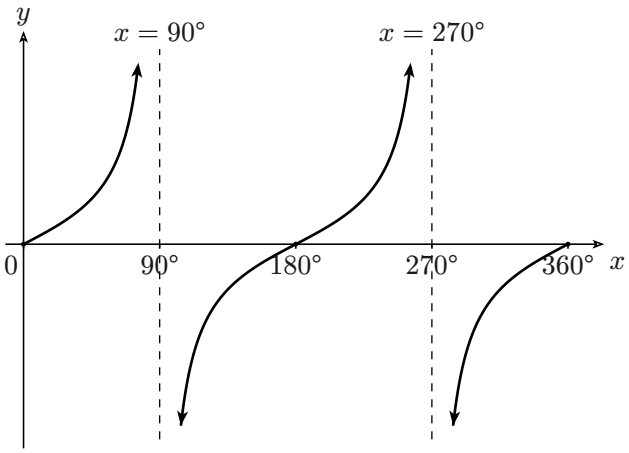
∴ 画竖直渐近线

$$x = 90°$$

$$x = 270°$$

由比值的符号及两侧趋近方向，90°、270°左侧的曲线向上无界延伸，右侧的曲线向下无界延伸。

在$0° \leq x < 90°$、$90° < x < 270°$、$270° < x \leq 360°$内分别画递增曲线，图象每隔180°重复一次，得



答：图象如图，三个分支在$x=90°$、$x=270°$处断开。

第七章 变换与向量

Chapter 7

7.1 由对应点的共同位移确定或画出平移

题型 1 由对应点的共同位移确定或画出平移（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **方格坐标：**每个小方格面积为 1cm^2，边长为 1 cm。图中顶点 $(2,6)$ 的横坐标为 2，纵坐标为 6。

② **读平移向量：**题给平移向量 $\begin{pmatrix}3\\-10\end{pmatrix}$，上分量表示横向位移，下分量表示纵向位移。正数表示向右或向上，负数表示向左或向下。

上分量为 3向_____移动 3 格　　下分量为 -10向_____移动 10 格

③ **点的坐标相加：**顶点 $(2,6)$ 按题给向量平移，两个坐标分别加上对应分量。

$$(2+3,6-10)=(5,-4)$$

一般地，起点为 (x,y)，平移向量为 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$。终点 (x',y') 满足

$$(x',y')=(x+a,y+b)$$

④ **逐点平移作图：**图形各顶点的位移向量必须_____。三角形 A 的另两个顶点平移后为

$$(2+3,0-10)=(5,-10)$$

$$(5+3,9-10)=(8,-1)$$

标出三个新顶点，按原顺序连线，形状、大小和朝向不变。

⑤ **反求平移向量：**已知对应点 $(2,6)$ 与 $(5,-4)$，用_____的坐标减去_____的坐标。

$$\begin{pmatrix}5-2\\-4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-10\end{pmatrix}$$

其余两组对应点分别相减，核实位移一致。

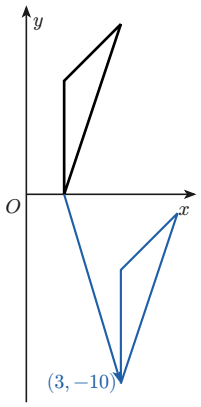
$$\begin{pmatrix}5-2\\-10-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}8-5\\-1-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-10\end{pmatrix}$$

完整描述该变换，应写出平移及其向量。

填空：①右　②下　③相同　④终点　⑤起点

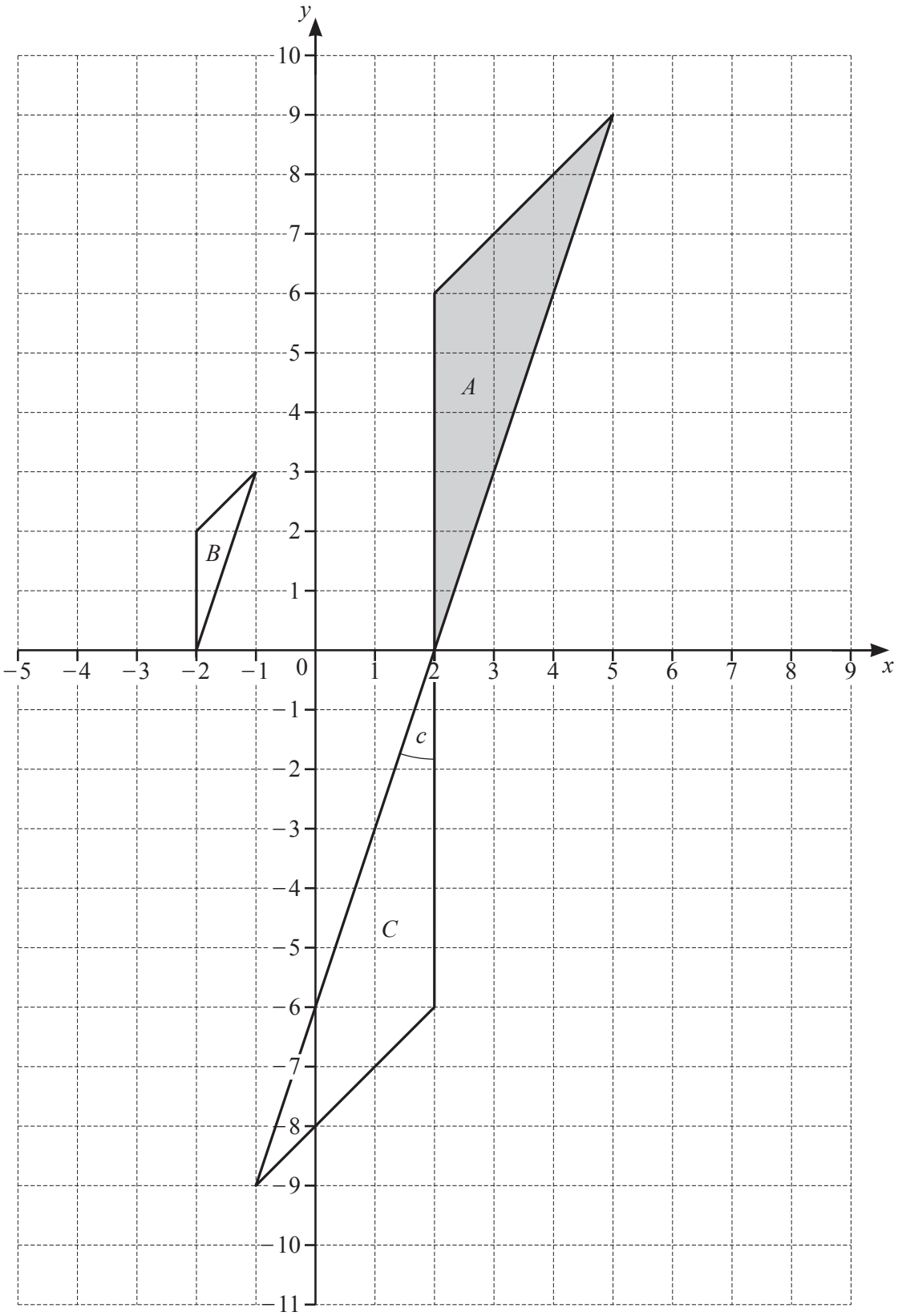
每个对应点的横纵位移都相同

	图像	数量关系
同一关系		每个点的 x 加 3，y 减 10。

点石成金　题目出现平移向量或要求描述两个图形间的平移时，先读出顶点坐标，再按对应分量相加或相减。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q5(e)(i)]

The diagram shows three triangles, A, B and C, on a 1 cm^2 grid.



(e) On the grid, draw the image of

(i) triangle A after a translation by the vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$

图中在每个小方格面积为 1cm^2 的方格纸上给出了三角形 A、B 和 C，横轴为 x，纵轴为 y，所标角为 c。
(e) 在方格纸上画出以下变换后的图形。
(i) 三角形 A 按向量 $\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ 平移后的图形。

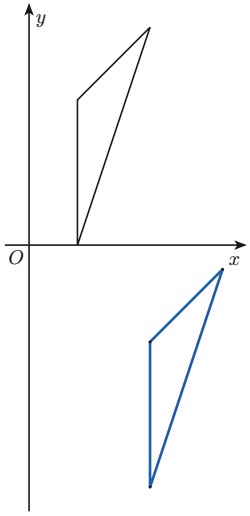
解答 由图得，三角形 A 的顶点为 $(2,0)$、$(2,6)$、$(5,9)$。
平移向量为 $\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$，各顶点的横坐标加 3，纵坐标减 10，得

$$(2+3,0-10)=(5,-10)$$

$$(2+3,6-10)=(5,-4)$$

$$(5+3,9-10)=(8,-1)$$

在方格纸上标出这三个点，并依次连成三角形。
答：所求三角形的顶点为 $(5,-10)$、$(5,-4)$、$(8,-1)$。



方法：先读原图各顶点坐标，再将向量上、下分量分别加到横、纵坐标。

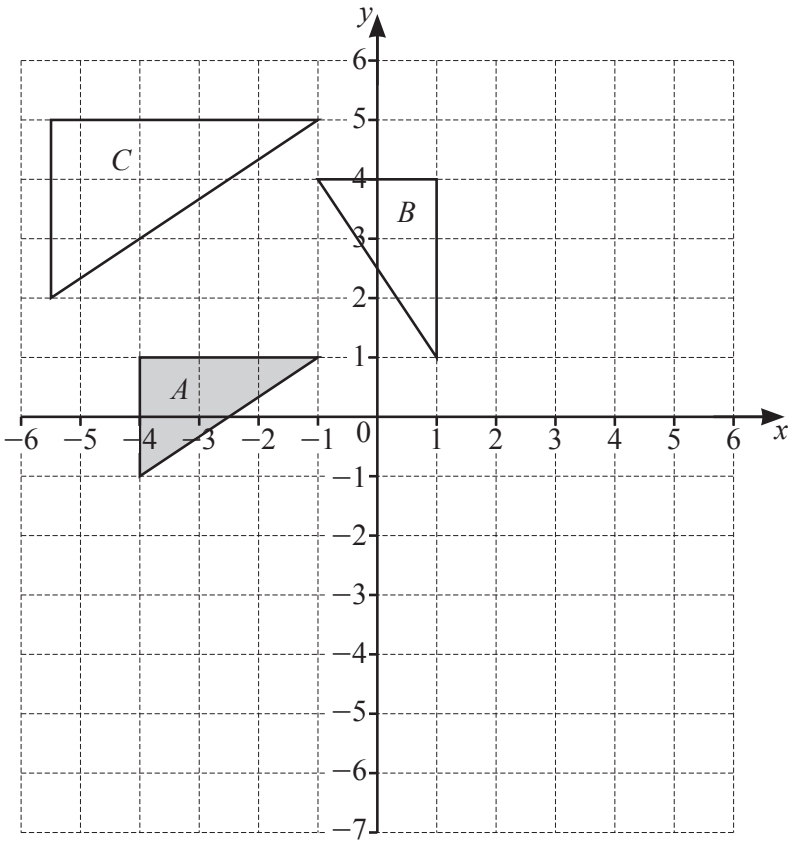
辨析：点的坐标是位置，向量的分量是位置的改变量。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/32 Q9(c)]

提示：从原图逐个读取顶点，横、纵坐标分别配对向量分量。

Triangles A, B and C are shown on the grid.



(c) On the grid, translate triangle A by the vector $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

图中在方格纸上给出了三角形 A、B 和 C，横轴为 x，纵轴为 y。

(c) 在方格纸上，将三角形 A 按向量 $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ 平移。

✓ **答案** 顶点为 $(2,-3)$、$(2,-5)$、$(5,-3)$ 的三角形。

解析 由图得，三角形 A 的顶点为 $(-4,1)$、$(-4,-1)$、$(-1,1)$。

平移向量为 $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$，各顶点的横坐标加 6，纵坐标减 4，得

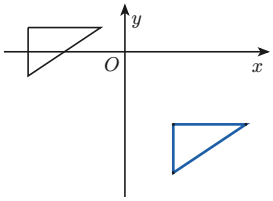
$$(-4+6,1-4)=(2,-3)$$

$$(-4+6,-1-4)=(2,-5)$$

$$(-1+6,1-4)=(5,-3)$$

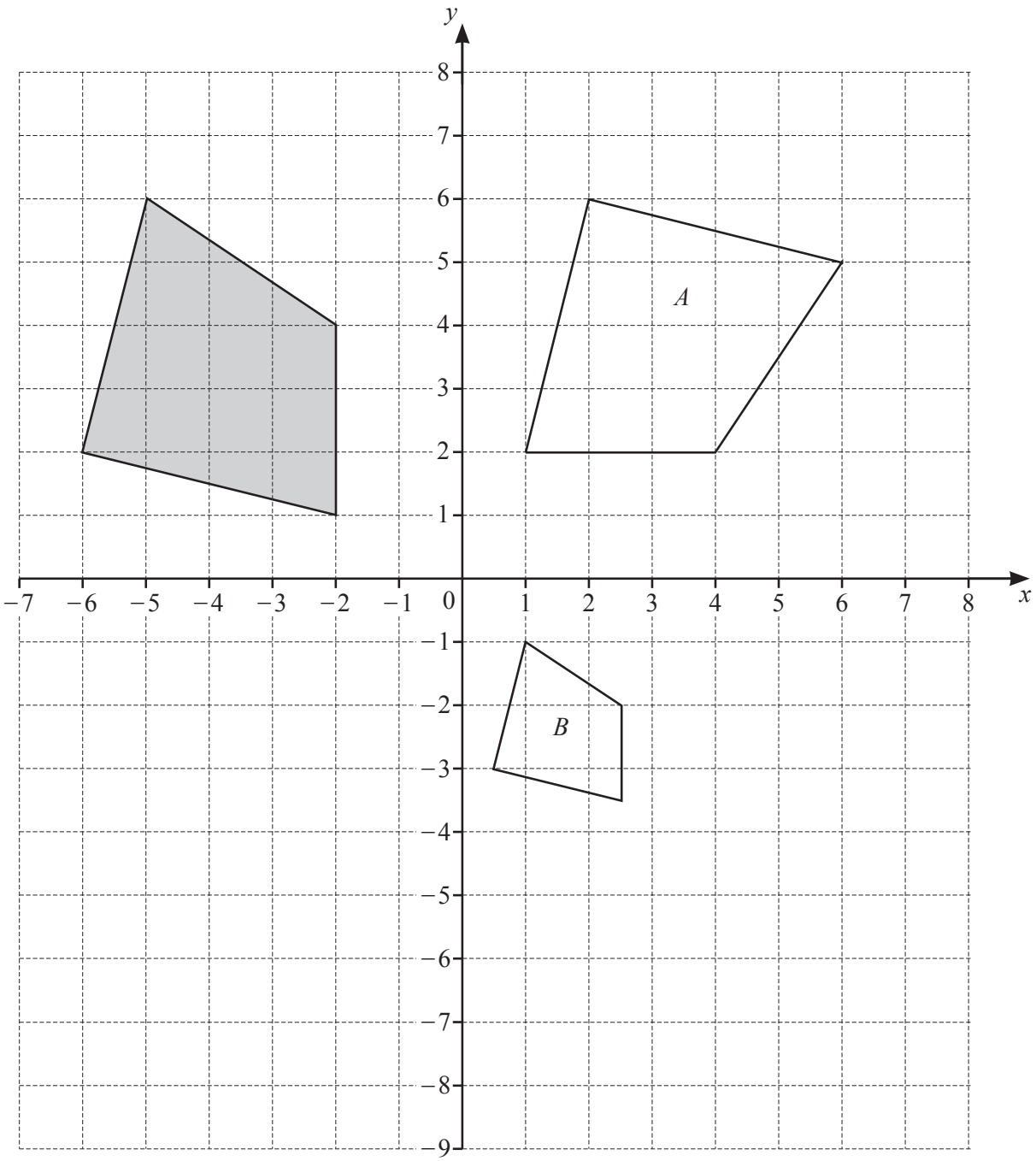
在方格纸上标出这三个点，并依次连成三角形。

答：所求三角形的顶点为 $(2,-3)$、$(2,-5)$、$(5,-3)$。



2. [2023 · May/June 0580/31 Q2(c)(i)]
提示：沿阴影图形边界逐点移动，连线顺序与原图一致。

(b) Three of these shapes are shown on the grid.



(c) On the grid, draw the image of

(i) the shaded shape after a translation by the vector $\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

坐标网格上给出了阴影四边形及图形 A、B。（c）（i）在同一网格上画出阴影图形按向量$\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$平移后的像。

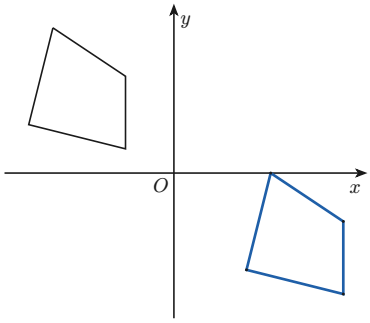
✓ **答案** 顶点依次为 $(4,0)$、$(7,-2)$、$(7,-5)$、$(3,-4)$ 的四边形。

解析 平移向量为 $\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$，设原顶点为 (x,y)，平移后的顶点为 (x',y')，则

$$(x',y')=(x+9,y-6)$$

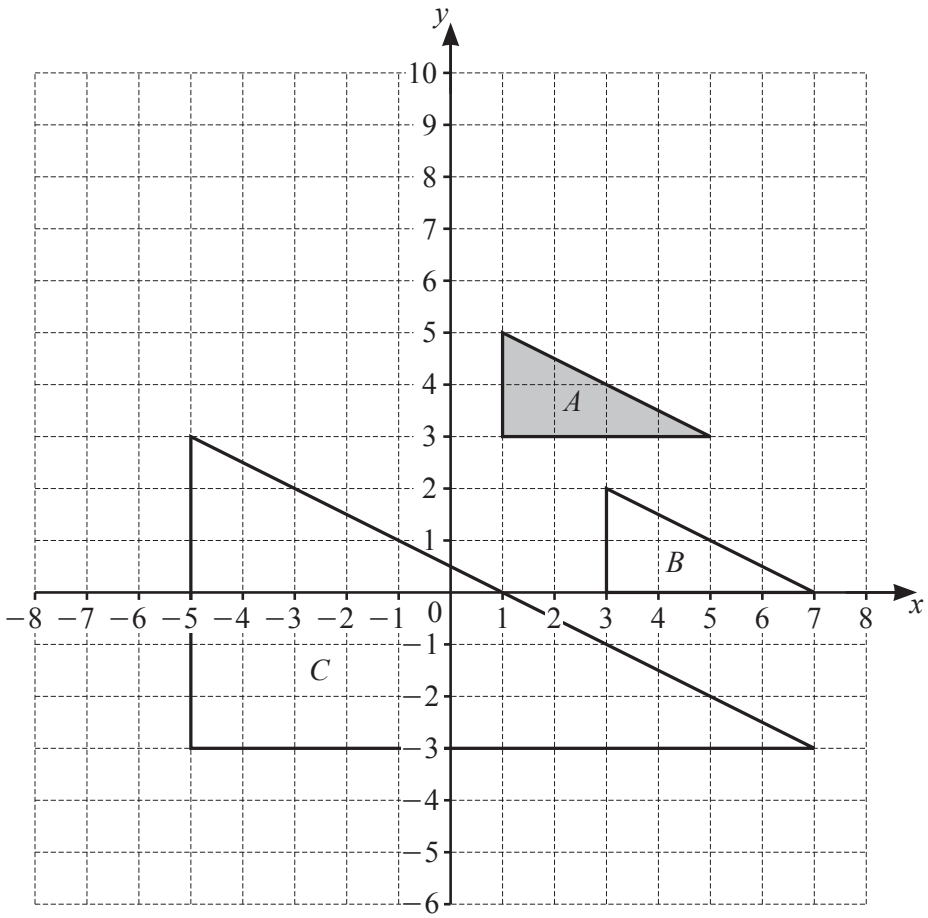
将阴影图形的各顶点向右移动 9 格、向下移动 6 格，再按原顺序连线。

答：所求四边形的顶点依次为 $(4,0)$、$(7,-2)$、$(7,-5)$、$(3,-4)$。



3. [2023 · October/November 0580/31 Q6(a)]

提示：先配对两个三角形的顶点，再比较各组横、纵坐标差。



(a) Describe fully the **single** transformation that maps triangle A onto triangle B.

图中给出了三角形 A、B 和 C，横轴为 x，纵轴为 y。

(a) 完整描述将三角形 A 变换到三角形 B 的单一变换。

✓ **答案** 平移，平移向量为 $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$。

解析 由图得，三角形 A 的三个顶点 $(1,3)$、$(1,5)$、$(5,3)$，分别对应三角形 B 的顶点 $(3,0)$、$(3,2)$、$(7,0)$。

用终点坐标减去起点坐标，得

$$\begin{pmatrix}3-1\\0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7-5 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

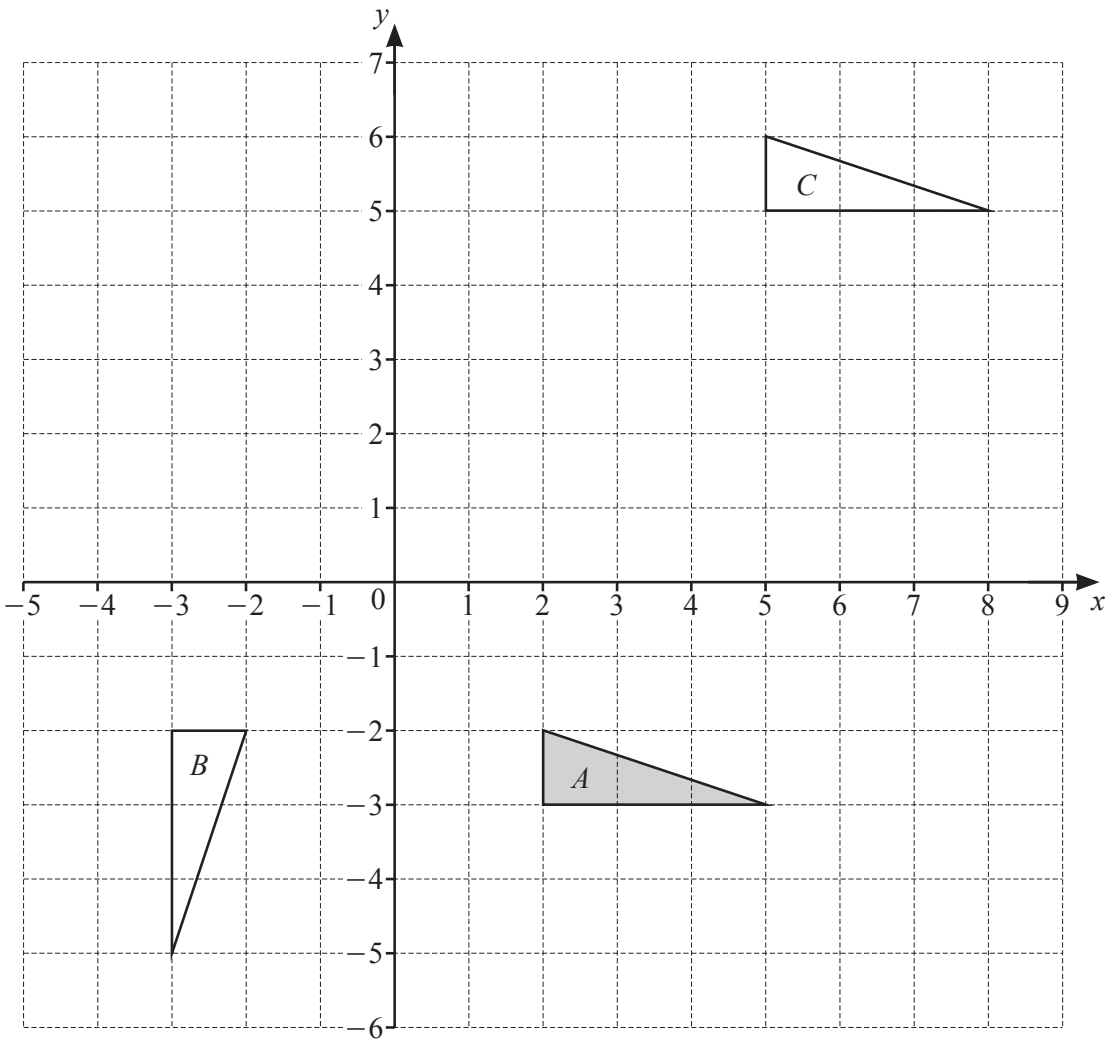
三个对应顶点的位移相同。

答：该单一变换是平移，平移向量为 $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$。

4. [2023 · October/November 0580/33 Q6(b)(ii)]

提示：从原图到像图求坐标差，纵坐标相减时保留负号。

(b)



(ii) Describe fully the **single** transformation that maps triangle A onto triangle C.

(b) 图中给出了三角形 A、B 和 C，横轴为 x，纵轴为 y。

(ii) 完整描述将三角形 A 变换到三角形 C 的单一变换。

✓ **答案** 平移，平移向量为 $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$。

解析 由图得，三角形 A 的三个顶点 $(2,-2)$、$(2,-3)$、$(5,-3)$，分别对应三角形 C 的顶点 $(5,6)$、$(5,5)$、$(8,5)$。用终点坐标减去起点坐标，得

$$\begin{pmatrix} 5-2 \\ 6-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5-2 \\ 5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8-5 \\ 5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

三个对应顶点的位移相同。

答：该单一变换是平移，平移向量为 $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$。

5. [2023 · May/June 0580/12 Q15(c)]

提示：看向量的起点与终点，起点两坐标分别加对应分量。

F is the point $(1, -4)$, $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ and $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -12 \\ 35 \end{pmatrix}$.

Find

(c) the coordinates of the point G.

点 F 的坐标为 $(1, -4)$，$\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -12 \\ 35 \end{pmatrix}$。求

(c) 点 G 的坐标。

✓ **答案** $(9, -7)$

解析 $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ 表示从点 F 到点 G 的位移。

由 $F(1, -4)$，得

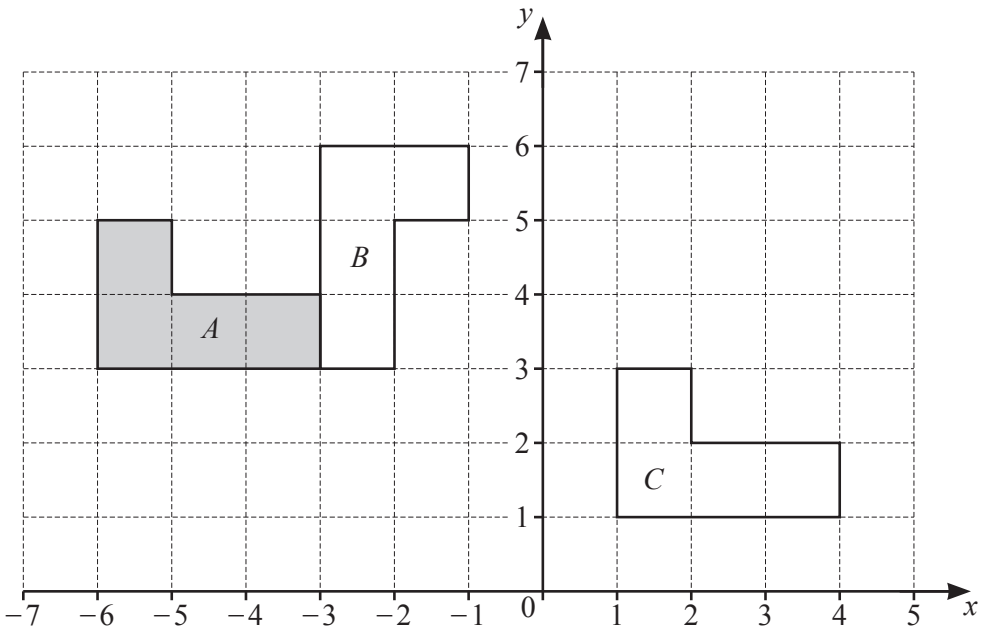
$$G = (1 + 8, -4 - 3) = (9, -7)$$

答：点 G 的坐标为 $(9, -7)$。

6. [2023 · May/June 0580/13 Q23(b)]

提示：按折角位置配对顶点，比较各组位移是否一致。

The diagram shows three shapes, A, B and C, on a 1 cm^2 grid.



Describe fully the **single** transformation that maps

(b) shape A onto shape C.

图中在每个小方格面积为 1cm^2 的方格纸上给出了三个图形 A、B 和 C，横轴为 x，纵轴为 y。
完整描述完成下列映射的单一变换。
(b) 将图形 A 变换到图形 C。

✓ **答案** 平移，平移向量为 $\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$。

解析 由图中相同位置的对应顶点，分别求坐标差，得

$$\begin{pmatrix}1-(-6)\\1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1-(-6)\\3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2-(-5)\\3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2-(-5)\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4-(-3)\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4-(-3)\\1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$$

六个对应顶点的位移相同。
答：该单一变换是平移，平移向量为 $\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$。

7.2 对应点到反射轴等距，画出或描述反射

题型 1 对应点到反射轴等距，画出或描述反射（Core / Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **反射点的定位：**三角形 A 的顶点 $(2,6)$ 在直线 $x=4$ 左侧两格。沿水平方向，在轴右侧两格处取像点 $(6,6)$。对应点的连线与反射轴垂直，两点到轴的距离_____。

② **横纵坐标变化：**用 (x',y') 表示点 (x,y) 的像。竖直轴反射时纵坐标_____，水平轴反射时横坐标_____。

竖直轴 $x=a$，a 为轴的横坐标

点 $(5,9)$ 关于 $x=4$ 反射：

$$x'=4+(4-5)=3$$

$$y'=9$$

一般地：

$x'=2a-x,\quad y'=y$

水平轴 $y=b$，b 为轴的纵坐标

点 $(2,6)$ 关于 $y=1$ 反射：

$$x'=2$$

$$y'=1+(1-6)=-4$$

一般地：

$x'=x,\quad y'=2b-y$

③ **负数轴的反射：**反射轴的坐标为负数时，仍在轴的另一侧取等距像点。用例题顶点 $(2,6)$ 分别演示：

关于 $x=-1$ 反射

$$x'=-1+(-1-2)=-4$$

关于 $y=-1$ 反射

$$x'=2$$

$$y' = 6$$

像点为 $(-4, 6)$。

$$y' = -1 + (-1 - 6) = -8$$

像点为 $(2, -8)$。

④ **图形反射画法：**三角形 A 有三个顶点，分别作出三个像点。按原图各边的连接关系，连接相应像点。点 $(4, 2)$ 在轴 $x = 4$ 上，像仍为 $(4, 2)$，轴上的点位置_____。

⑤ **反射变换描述：**已知原图与像，作对应点连线的垂直平分线。用前述反射的对应点求中点，并核对其余连线。描述反射须写出变换名称和轴的方程。

对应点连线水平

例题三个顶点反射后的中点横坐标为：

$$\frac{2+6}{2} = \frac{2+6}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$$

各条连线均被 $x = 4$ 垂直平分。

答：反射，反射轴为 $x = 4$。

对应点连线竖直

例题三个顶点关于 $y = 1$ 反射后：

$$\frac{6+(-4)}{2} = \frac{0+2}{2} = \frac{9+(-7)}{2} = 1$$

各条连线均被 $y = 1$ 垂直平分。

答：反射，反射轴为 $y = 1$。

⑥ **斜轴反射拓展：**轴为 $x + y = 6$ 时，取点 $(2, 1)$ 示范。交换横纵坐标，再分别用 6 减去。

$$x' = 6 - 1 = 5, \quad y' = 6 - 2 = 4$$

$$(x', y') = (5, 4)$$

$$\frac{2+5}{2} = 3.5, \quad \frac{1+4}{2} = 2.5$$

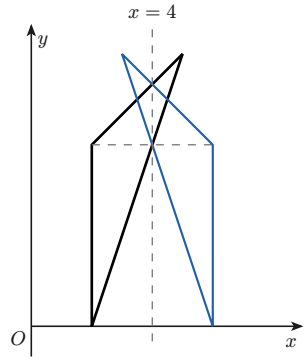
$$3.5 + 2.5 = 6$$

$$\frac{4-1}{5-2} = 1$$

中点在轴上，连线与斜率为 -1 的轴垂直，故这两点互为反射像。

填空：①相等　②不变　③不变　④不变

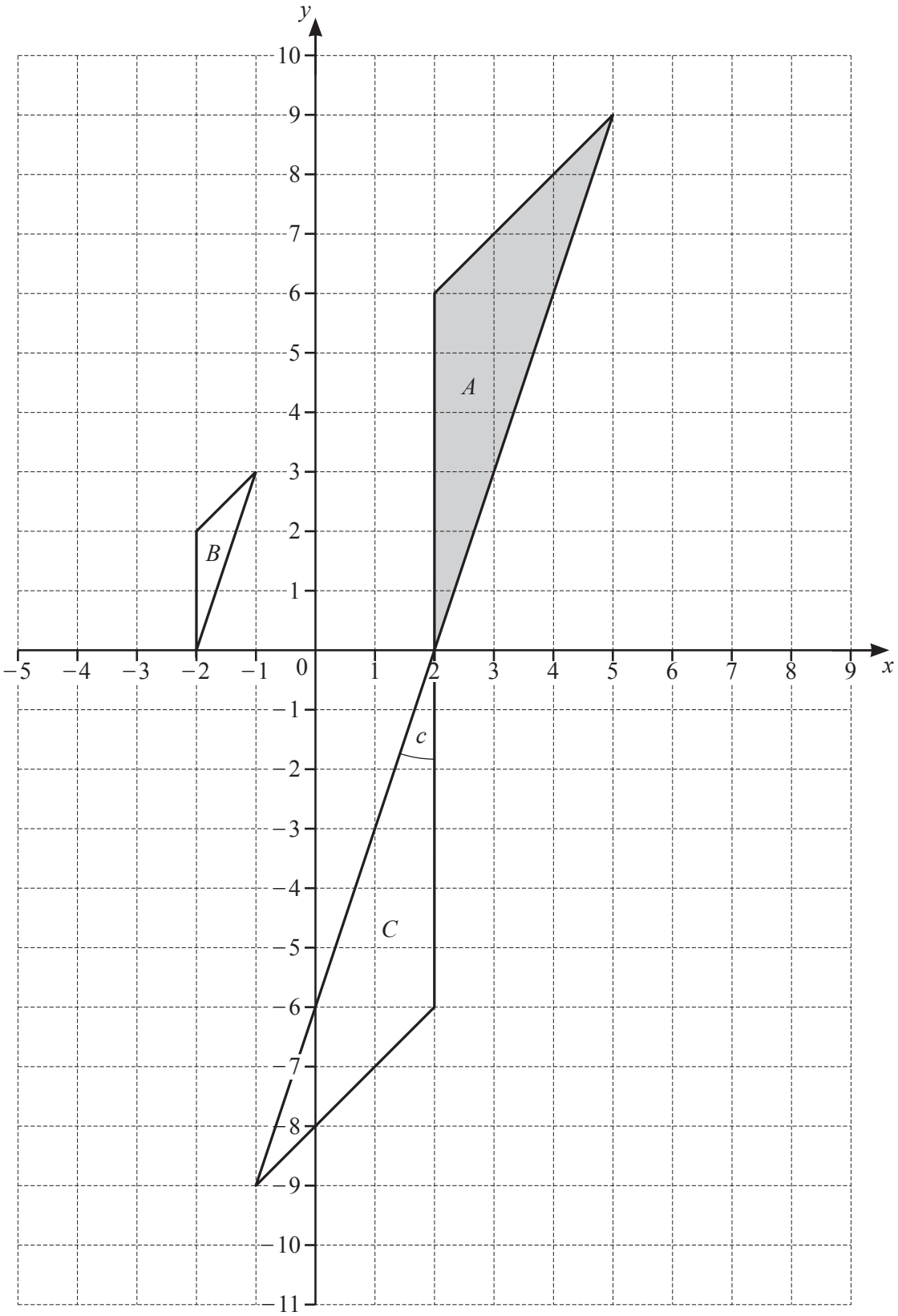
反射轴平分每对对应点的连线

	图像	数量关系
同一关系		$x' = 8 - x$，$y' = y$。

点石成金　题目出现反射轴或要求描述两个图形间的反射时，先使对应点连线垂直于轴，并让两点到轴等距。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q5(e)(ii)]

The diagram shows three triangles, A, B and C, on a 1 cm^2 grid.



(e) On the grid, draw the image of

(ii) triangle A after a reflection in the line $x = 4$.

图中给出了三个三角形 A、B 和 C，每个小方格的面积为 1cm^2。横轴为 x，纵轴为 y，图中所标的角为 c。
(e)（ii）在方格纸上，画出三角形 A 关于直线 $x = 4$ 反射后的图形。

方法：先看竖直反射轴，数各顶点离轴几格，再到另一侧定点。

辨析：横坐标是左右位置，纵坐标是上下位置。

拓展：反射前后，对应边等长，对应角相等。

解答 由图得三角形 A 的顶点为 $(2,0)$、$(2,6)$、$(5,9)$。
关于直线 $x = 4$ 反射，纵坐标不变。

$$x' = 2 \times 4 - x = 8 - x$$

顶点 $(2,0)$ 的像满足

$$x' = 8 - 2 = 6, \quad y' = 0$$

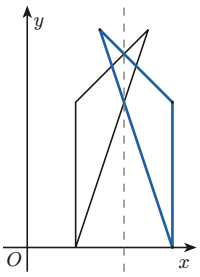
顶点 $(2,6)$ 的像满足

$$x' = 8 - 2 = 6, \quad y' = 6$$

顶点 $(5,9)$ 的像满足

$$x' = 8 - 5 = 3, \quad y' = 9$$

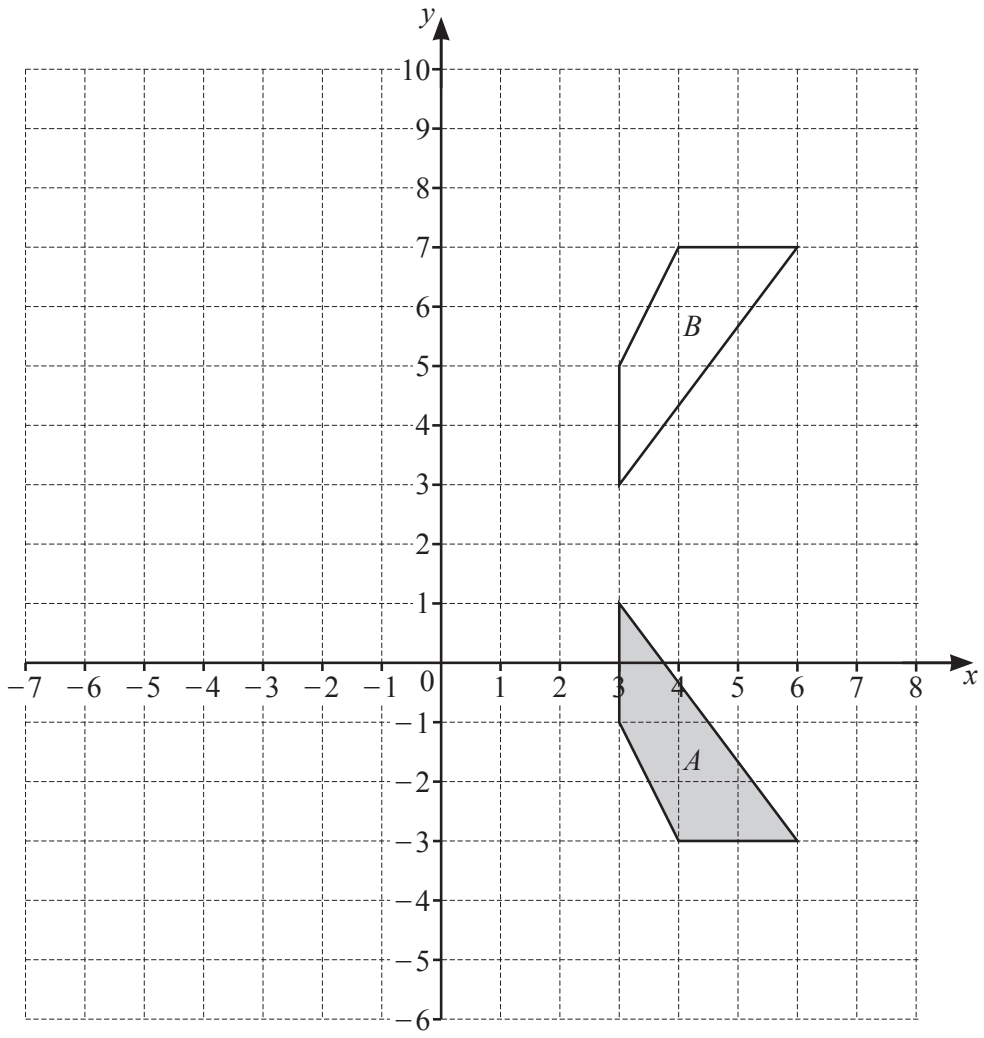
在方格纸上标出三个像点，并依次连接成三角形。
答：像的三个顶点为 $(6,0)$、$(6,6)$、$(3,9)$。



针对练习

1. [2023 · May/June 0580/22 Q10(a)]

提示：先配对两图顶点，再比较各条连线的方向与中点。



(a) Describe fully the **single** transformation that maps shape A onto shape B.

图中给出了图形 A 和 B，横轴为 x，纵轴为 y。

(a) 完整描述将图形 A 映射到图形 B 的单一变换。

✓ **答案** 反射，反射轴为 $y = 2$。

解析 由图，A 的顶点 $(3,1)$、$(3,-1)$、$(4,-3)$、$(6,-3)$，分别对应 B 的顶点 $(3,3)$、$(3,5)$、$(4,7)$、$(6,7)$。各对顶点的横坐标相同，连线均竖直。

$$\frac{1+3}{2} = 2$$

$$\frac{-1+5}{2} = 2$$

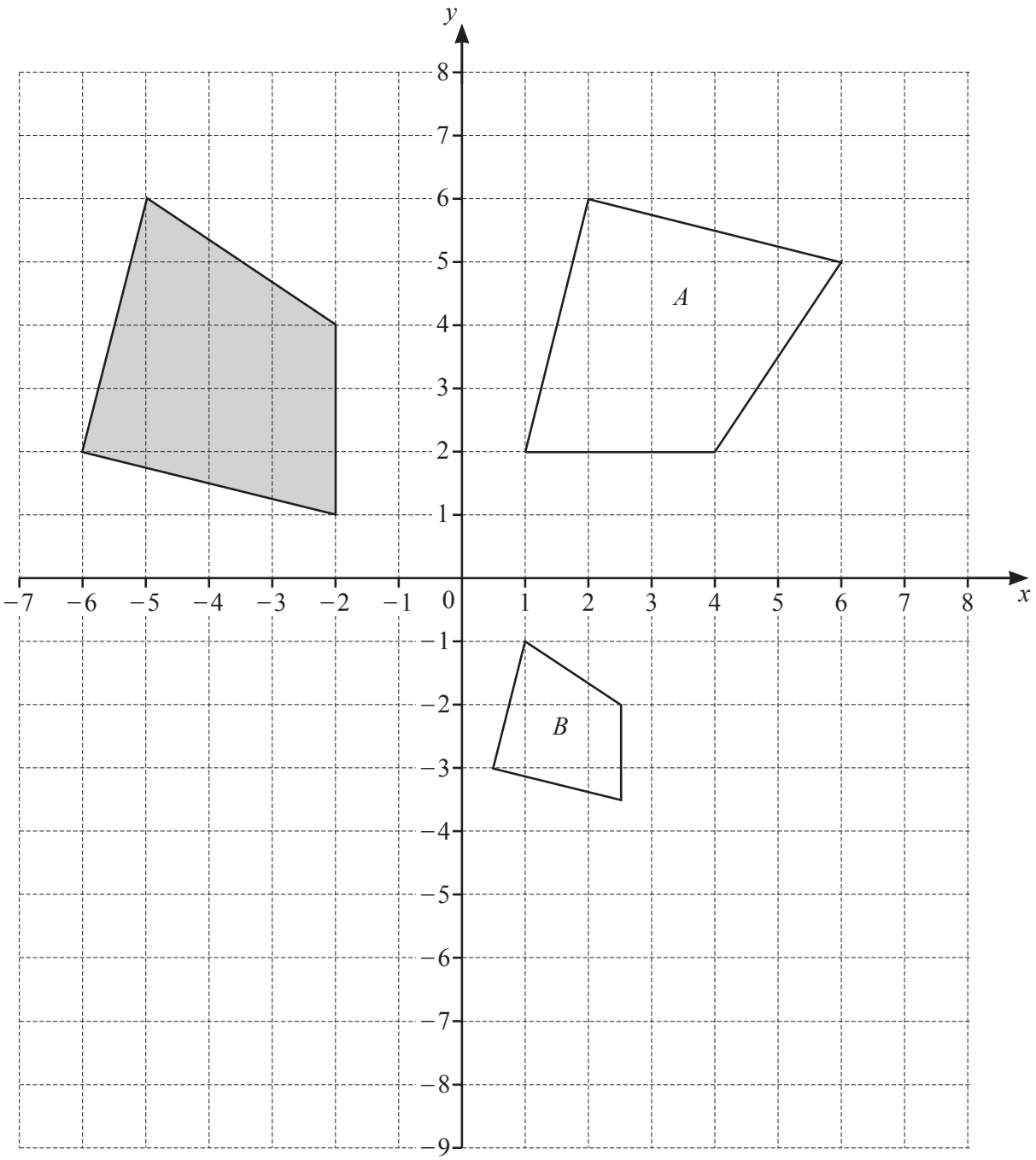
$$\frac{-3+7}{2} = 2$$

各条对应点连线均被直线 $y = 2$ 垂直平分。

答：反射，反射轴为 $y = 2$。

2. [2023 · May/June 0580/31 Q2(c)(ii)]
提示：从负数轴的位置起数，比较顶点与像点离轴的格数。

(b) Three of these shapes are shown on the grid.



(c) On the grid, draw the image of

(ii) the shaded shape after a reflection in the line $y = -1$.

坐标网格上给出了阴影四边形及图形 A、B。（c）（ii）在同一网格上画出阴影图形关于$y = -1$反射后的像。

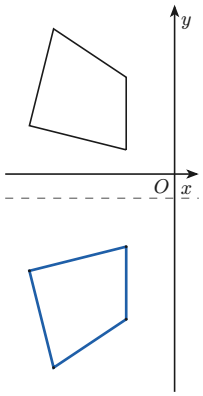
✓ **答案** 像的顶点为 $(-2,-3)$、$(-2,-6)$、$(-5,-8)$、$(-6,-4)$。

解析 关于直线 $y = -1$ 反射，横坐标不变。

$$y' = 2 \times (-1) - y = -2 - y$$

各顶点沿竖直方向在轴的另一侧取等距像点，再按原边的连接关系连线。

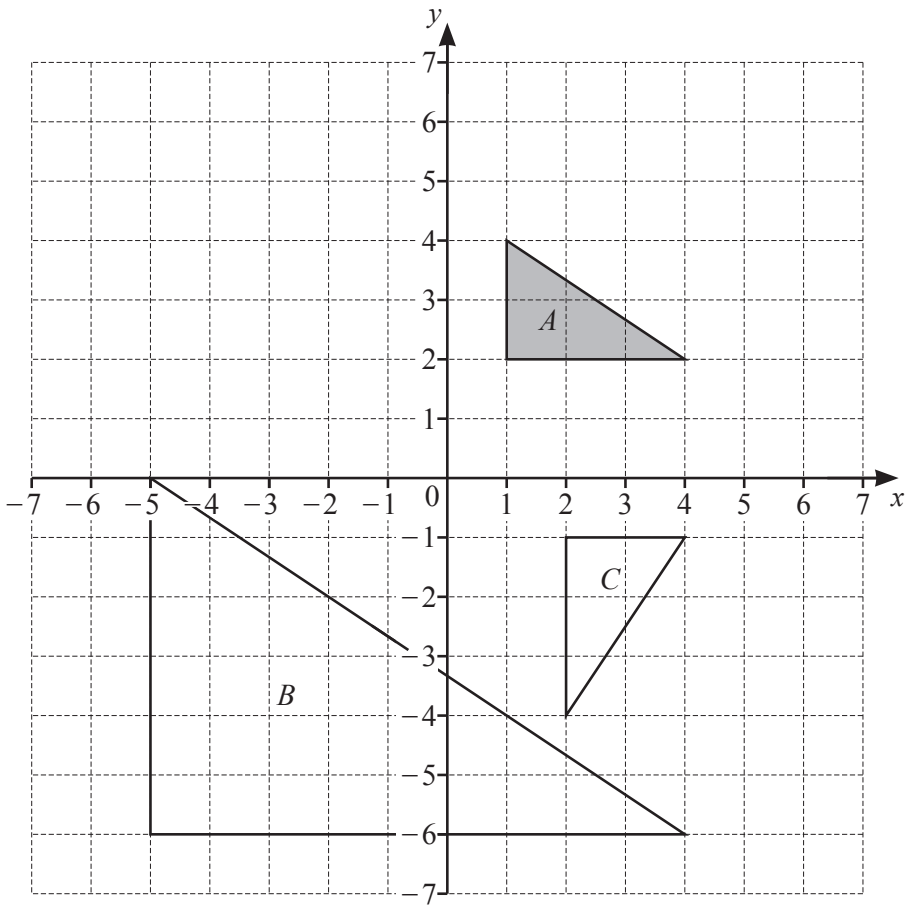
答：像的顶点为 $(-2,-3)$、$(-2,-6)$、$(-5,-8)$、$(-6,-4)$。



3. [2023 · May/June 0580/32 Q6(b)(ii)]

提示：先标清竖直轴的位置，再逐点比较左右两侧的距离。

(b) The diagram shows three triangles A, B and C, on a grid.



(ii) On the grid, reflect triangle A in the line $x=-1$.

(b) 图中给出了方格纸上的三个三角形 A、B 和 C，横轴为 x，纵轴为 y。

(ii) 在方格纸上，作出三角形 A 关于直线 $x=-1$ 的反射像。

✓ **答案** 像的顶点为 $(-3,2)$、$(-6,2)$、$(-3,4)$。

解析 由图得三角形 A 的顶点为 $(1,2)$、$(4,2)$、$(1,4)$。

关于直线 $x=-1$ 反射，纵坐标不变。

$$x' = 2 \times (-1) - x = -2 - x$$

顶点 $(1, 2)$ 的像满足

$$x' = -2 - 1 = -3, \quad y' = 2$$

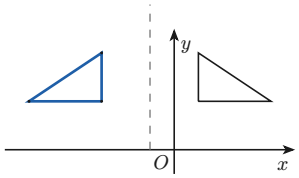
顶点 $(4, 2)$ 的像满足

$$x' = -2 - 4 = -6, \quad y' = 2$$

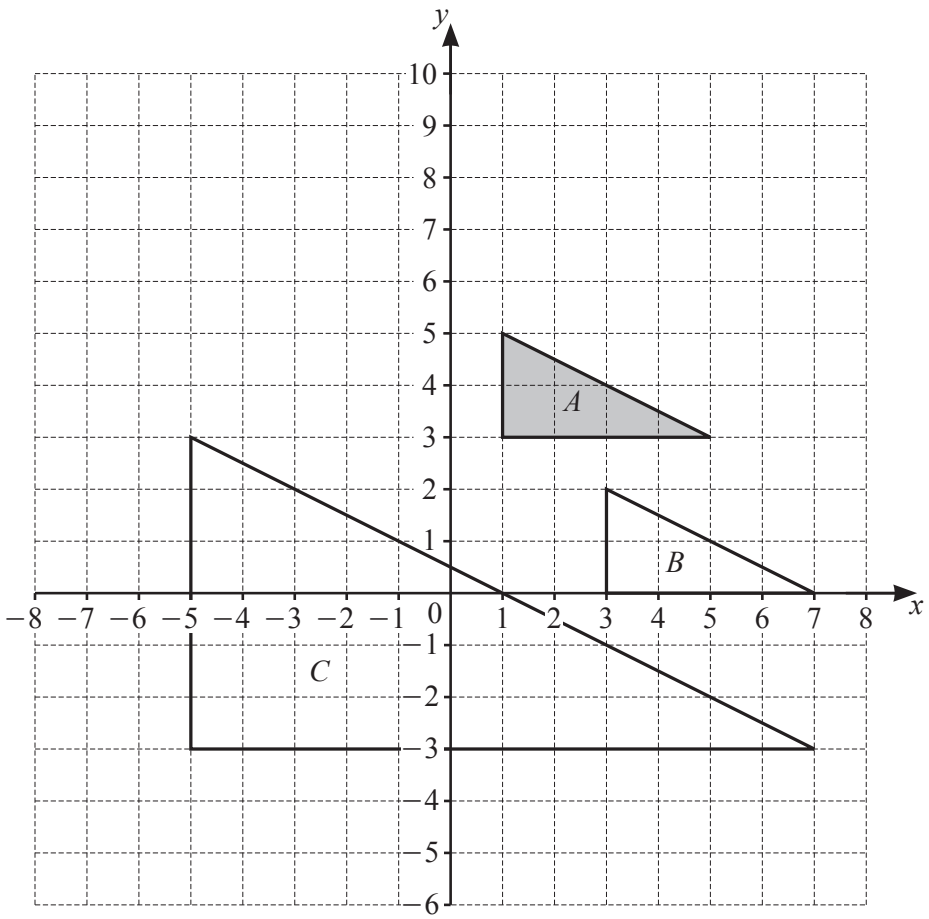
顶点 $(1, 4)$ 的像满足

$$x' = -2 - 1 = -3, \quad y' = 4$$

标出三个像点，并依次连接成三角形。
答：像的顶点为 $(-3, 2)$、$(-6, 2)$、$(-3, 4)$。



4. [2023 · October/November 0580/31 Q6(c)]
提示：先数顶点到水平轴的竖直格数，再按对像点所在一侧。



(c) On the grid, draw the image of triangle A after a reflection in the line $y = 6$.

坐标网格上给出了三角形 A、B、C。（c）在网格上画出三角形 A 关于直线$y = 6$反射后的像。

✓ **答案**　像的顶点为 $(1,7)$、$(1,9)$、$(5,9)$。

解析　由图得三角形 A 的顶点为 $(1,5)$、$(1,3)$、$(5,3)$。

当反射轴为 $y=6$ 时，横坐标不变。

$$y'=2\times 6-y=12-y$$

顶点 $(1,5)$ 的像满足

$$x'=1,\quad y'=12-5=7$$

顶点 $(1,3)$ 的像满足

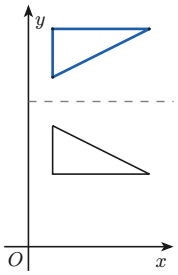
$$x'=1,\quad y'=12-3=9$$

顶点 $(5,3)$ 的像满足

$$x'=5,\quad y'=12-3=9$$

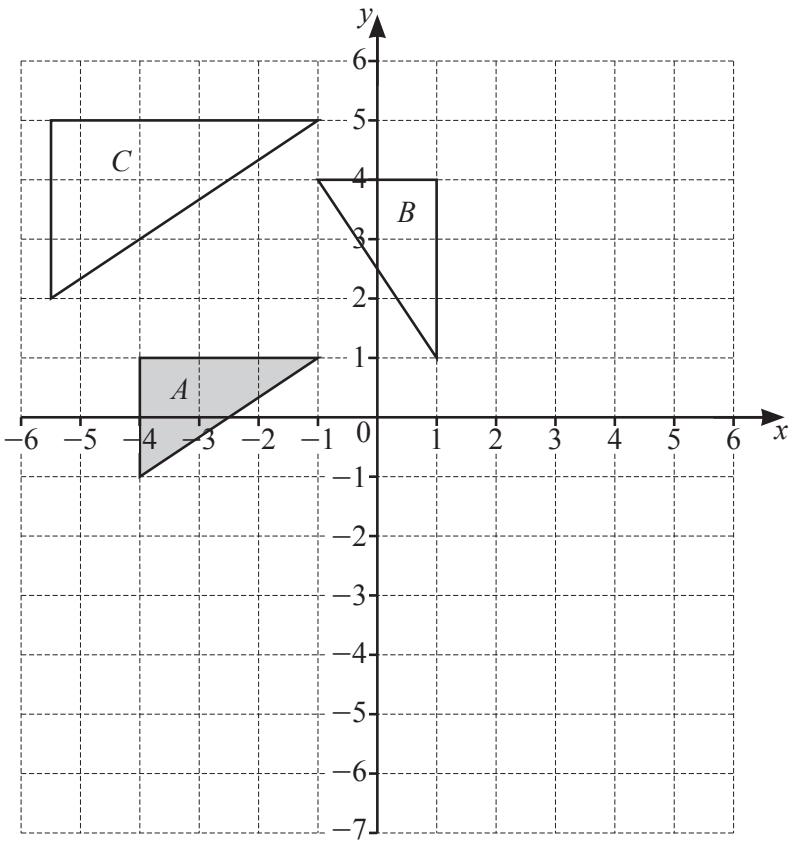
标出三个像点，并依次连接成三角形。

答：关于直线 $y=6$ 反射所得像的顶点为 $(1,7)$、$(1,9)$、$(5,9)$。



5. [2023 · October/November 0580/32 Q9(d)]
提示：先比较各顶点在负数轴的上方还是下方，再量距离。

Triangles A, B and C are shown on the grid.



(d) On the grid, reflect triangle A in the line $y=-2$.

图中给出了方格纸上的三角形 A、B 和 C，横轴为 x，纵轴为 y。
(d) 在方格纸上，作出三角形 A 关于直线 $y=-2$ 的反射像。

✓ **答案** 像的顶点为 $(-4,-3)$、$(-4,-5)$、$(-1,-5)$。

解析 由图得三角形 A 的顶点为 $(-4,-1)$、$(-4,1)$、$(-1,1)$。

关于直线 $y=-2$ 反射，横坐标不变。

$$y' = 2\times(-2) - y = -4 - y$$

顶点 $(-4,-1)$ 的像满足

$$x' = -4, \quad y' = -4-(-1) = -3$$

顶点 $(-4,1)$ 的像满足

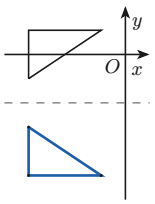
$$x' = -4, \quad y' = -4-1 = -5$$

顶点 $(-1,1)$ 的像满足

$$x' = -1, \quad y' = -4-1 = -5$$

标出三个像点，并依次连接成三角形。

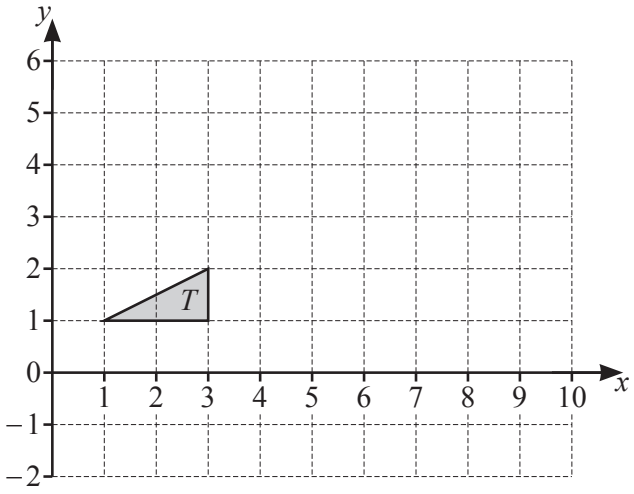
答：像的顶点为 $(-4,-3)$、$(-4,-5)$、$(-1,-5)$。



6. [2023 · February/March 0580/42 Q4(a)(ii)(b)]

提示：看对应点连线是否垂直斜轴，再查中点是否落在轴上。

(a)



(b) Reflect triangle T in the line $x+y=6$.
Label the image Q.

（a）坐标网格给出三角形 T。（ii）（b）将 T 关于直线$x+y=6$反射，把像标记为 Q。

✓ **答案** 三角形 Q 的顶点为 $(4,3)$、$(5,3)$、$(5,5)$。

解析 设三角形 T 的一个顶点为 (x,y)，其像点为 (x',y')。

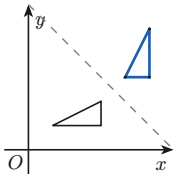
关于直线 $x+y=6$ 反射，交换横纵坐标后分别用 6 减去。

$$x'=6-y$$

$$y'=6-x$$

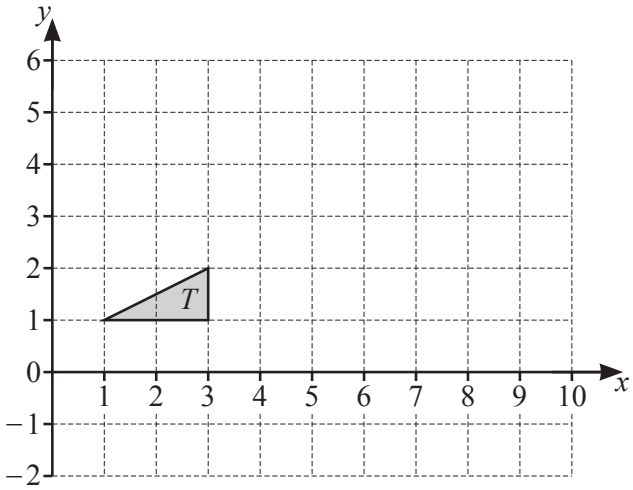
分别作出三个顶点的像，连接成三角形，并标记为 Q。

答：三角形 Q 的顶点为 $(4,3)$、$(5,3)$、$(5,5)$。



7. [2023 · February/March 0580/42 Q4(a)(ii)(c)]
提示：先找重合顶点，再比较其余对应点连线的中点位置。

(a)



(ii) **(a)** Rotate triangle T about (4, 2) by 90° clockwise.
Label the image P.

(b) Reflect triangle T in the line $x+y=6$.
Label the image Q.

(c) Describe fully the **single** transformation that maps triangle P onto triangle Q.

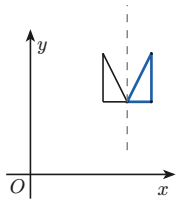
(a) 坐标网格给出三角形 T。 (ii) (a) 以(4, 2)为中心，把 T 顺时针旋转 90°，把像标记为 P。 (b) 将 T 关于$x+y=6$反射，把像标记为 Q。 (c) 完整描述把 P 映射到 Q 的单一变换。

✓ **答案** 反射，反射轴为 $x=4$。

解析 由前两小问的结果，三角形 P 的顶点为 $(3,3)$、$(4,3)$、$(3,5)$，三角形 Q 的顶点为 $(5,3)$、$(4,3)$、$(5,5)$。
对应点 $(3,3)$ 与 $(5,3)$ 的连线水平，其中点横坐标为

$$\frac{3+5}{2}=4$$

对应点 $(3,5)$ 与 $(5,5)$ 的连线也被直线 $x=4$ 垂直平分。
顶点 $(4,3)$ 在直线 $x=4$ 上，反射后位置不变。
答：反射，反射轴为 $x=4$。



7.3 旋转

题型 1 由对应顶点确定旋转中心、角度和方向（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **辨认旋转图形：** 例图中，A 绕固定点转动后与 B 重合。这种变换称为旋转，形状和大小不变。按边长和转折配对，撇号表示变换后的点。

$$P=(-5,5),\quad P'=(-1,5)$$

$$Q=(-6,3),\quad Q'=(-3,6)$$

② **作出中垂线：**旋转中心到一组对应点的距离相等。两坐标分别取平均，得到连线的中点。过中点作垂线，所得直线称为垂直平分线。

$$M=\left(\frac{-5+(-1)}{2},\frac{5+5}{2}\right)=(-3,5)$$

$$PP'\text{ 的垂直平分线为 }x=-3$$

③ **一般方向的中垂线：**以两个对应点为圆心，用同一个大于两点距离一半的半径，在连线两侧各画一对相交圆弧。连接两处圆弧交点，便得到该连线的垂直平分线。圆弧交点到两个圆心等距，因此连线上的点到两圆心也等距。对另一组对应点重复作图，两条中垂线的交点给出旋转中心。

④ **确定旋转中心：**再作另一组对应点连线的垂直平分线。网格对角线的垂线沿另一方向的对角线。两条垂直平分线的交点就是旋转中心。

$$N=\left(\frac{-6+(-3)}{2},\frac{3+6}{2}\right)=\left(-\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)$$

$$QQ'\text{ 的垂直平分线为 }y=-x$$

$$x=-3,\quad y=-(-3)=3$$

$$O=(-3,3)$$

⑤ **判断转动方向：**以中心为起点，向右、向上的位移取正。a、b 分别表示横、纵位移。转过四分之一周，旋转角为 _____。

顺时针转动	逆时针转动
转前位移为 (a,b)	转前位移为 (a,b)
转后位移为 $(b,-a)$	转后位移为 $(-b,a)$

⑥ **核对对应顶点：**例图以 O 为中心，计算两组对应点的位移。两组均满足相同的角度和方向，符合该旋转。

$$P\text{ 的位移}=(-5-(-3),5-3)=(-2,2)$$

$$P'\text{ 的位移}=(-1-(-3),5-3)=(2,2)$$

$$Q\text{ 的位移}=(-6-(-3),3-3)=(-3,0)$$

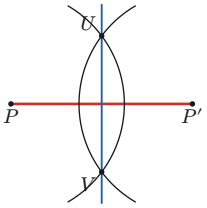
$$Q'\text{ 的位移}=(-3-(-3),6-3)=(0,3)$$

两组均符合顺时针转动 $90°$ 的规律。

⑦ **写全旋转描述：**题目要求完整描述旋转时，须写出 _____、_____ 和 _____。

填空：①90°　②旋转中心　③旋转角　④旋转方向

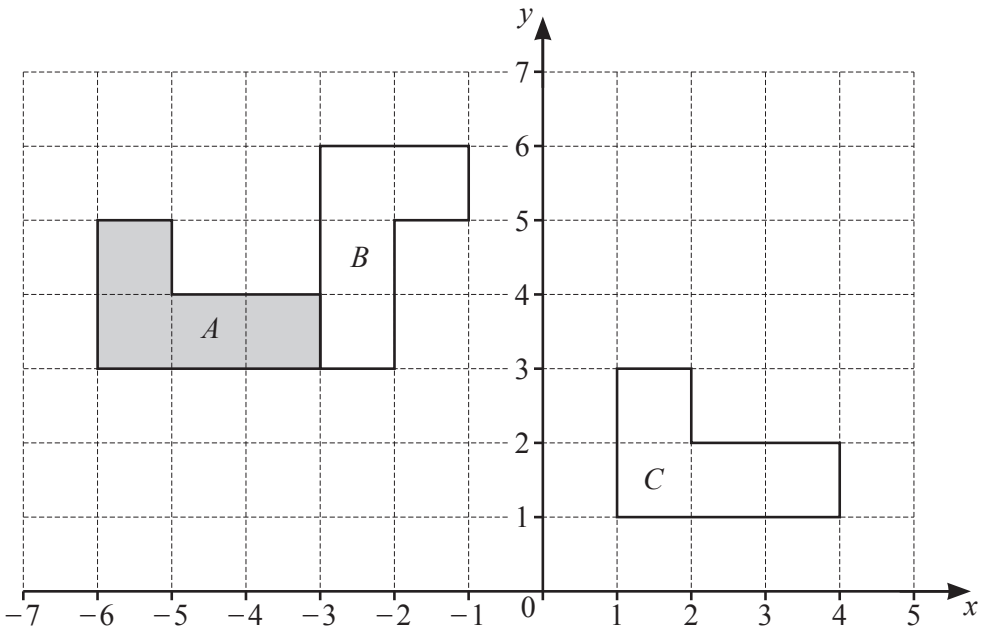
等半径圆弧作垂直平分线

	图像	数量关系
同一关系		$PU=P'U=2.5$，$PV=P'V=2.5$；UV 上的点到 P、P' 等距。

点石成金　题目出现两个形状、大小相同而朝向不同的图形，要求描述单一变换时，先标出两组对应顶点。

例 1　[2023 · May/June 0580/13 Q23(a)]

The diagram shows three shapes, A, B and C, on a 1 cm^2 grid.



Describe fully the **single** transformation that maps

(a) shape A onto shape B

图中在每个小方格面积为 1cm^2 的方格纸上，画出了三个图形 A、B 和 C。横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。
完整描述下列单一变换：
(a) 将图形 A 变换为图形 B。

解答　按相邻边长及转折，取两组对应顶点。

$$P=(-5,5),\quad P'=(-1,5)$$

$$Q=(-6,3),\quad Q'=(-3,6)$$

方法：先看边长和转折确定点的配对，再从两组连线的中垂线起手。

辨析：中点是连线的平分点，旋转中心是两条中垂线的交点。

PP' 水平，其中点为 $(-3,5)$，故垂直平分线为

$$x=-3$$

QQ' 的中点为

$$N=\left(\frac{-6+(-3)}{2},\frac{3+6}{2}\right)=\left(-\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)$$

QQ' 沿右上方网格对角线，故垂直平分线为

$$y=-x$$

联立得旋转中心

$$O=(-3,3)$$

以 O 为起点，P、P' 的位移分别为

$$(-5-(-3),5-3)=(-2,2)$$

$$(-1-(-3),5-3)=(2,2)$$

Q、Q' 的位移分别为

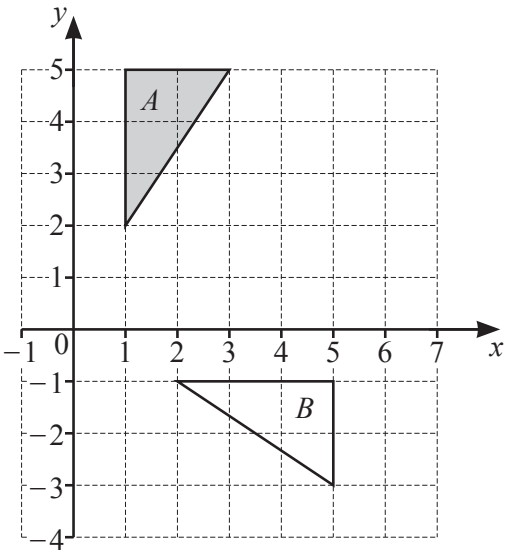
$$(-6-(-3),3-3)=(-3,0)$$

$$(-3-(-3),6-3)=(0,3)$$

两组位移均符合顺时针转动 $90°$ 的规律。
答：以 $(-3,3)$ 为中心，顺时针旋转 $90°$。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/23 Q8]
提示：看两条直角边的长短配对顶点，再比较中心两侧的位移。



Describe fully the **single** transformation that maps triangle A onto triangle B.

图中画出了三角形 A 和三角形 B，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。
完整描述将三角形 A 变换为三角形 B 的单一变换。

✓ **答案** 以 $(0,0)$ 为中心，顺时针旋转 $90°$。

解析 按两条直角边的长度，取两组对应顶点。

$$P=(1,5),\quad P'=(5,-1)$$

$$Q=(1,2),\quad Q'=(2,-1)$$

两条对应点连线的中点分别为

$$M=\left(\frac{1+5}{2},\frac{5+(-1)}{2}\right)=(3,2)$$

$$N=\left(\frac{1+2}{2},\frac{2+(-1)}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

过 M 作 PP' 的垂线，过 N 作 QQ' 的垂线。
由图作出两条垂直平分线，得交点

$$O = (0, 0)$$

以 O 为起点，P、P' 的位移分别为

$$(1 - 0, 5 - 0) = (1, 5)$$

$$(5 - 0, -1 - 0) = (5, -1)$$

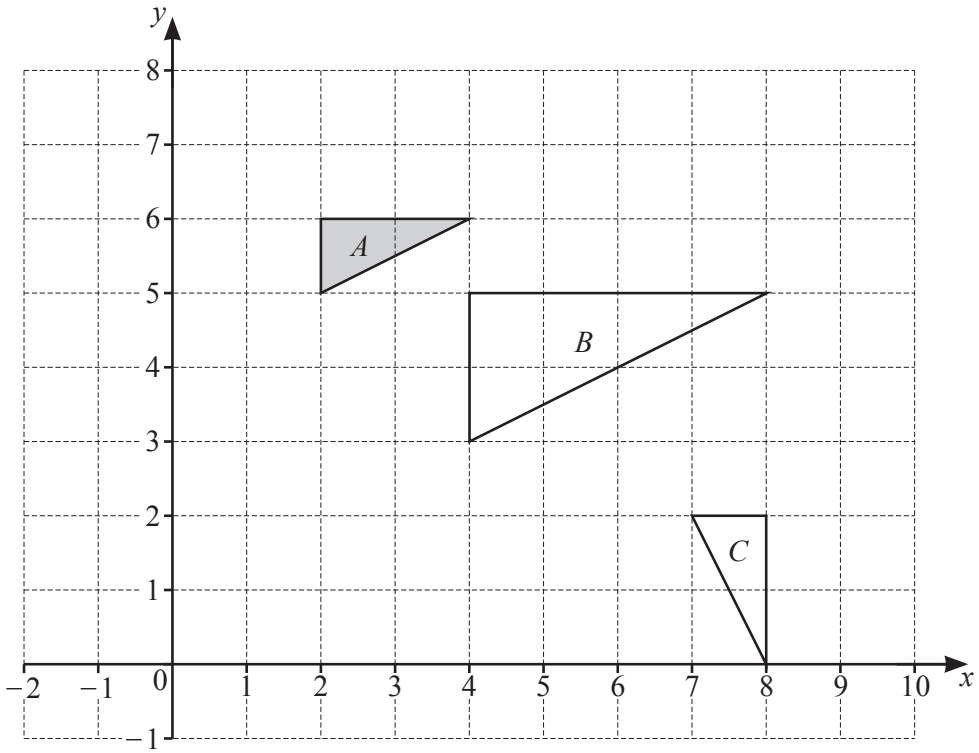
Q、Q' 的位移分别为

$$(1 - 0, 2 - 0) = (1, 2)$$

$$(2 - 0, -1 - 0) = (2, -1)$$

两组位移均符合顺时针转动 90° 的规律。
答：以 $(0, 0)$ 为中心，顺时针旋转 90°。

2. [2023 · May/June 0580/21 Q11(b)]
提示：先找两条中垂线的交点，再比较对应点相对交点的位移。



Describe the **single** transformation that maps

(b) triangle A onto triangle C.

图中画出了三角形 A、B 和 C，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。
描述下列单一变换：
(b) 将三角形 A 变换为三角形 C。

✓ **答案** 以 $(3, 1)$ 为中心，顺时针旋转 90°。

解析 按两条直角边的长度，取两组对应顶点。

$$P=(2,6),\quad P'=(8,2)$$

$$Q=(2,5),\quad Q'=(7,2)$$

两条对应点连线的中点分别为

$$M=\left(\frac{2+8}{2},\frac{6+2}{2}\right)=(5,4)$$

$$N=\left(\frac{2+7}{2},\frac{5+2}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right)$$

过 M 作 PP' 的垂线，过 N 作 QQ' 的垂线。
由图作出两条垂直平分线，得交点

$$O=(3,1)$$

以 O 为起点，P、P' 的位移分别为

$$(2-3,6-1)=(-1,5)$$

$$(8-3,2-1)=(5,1)$$

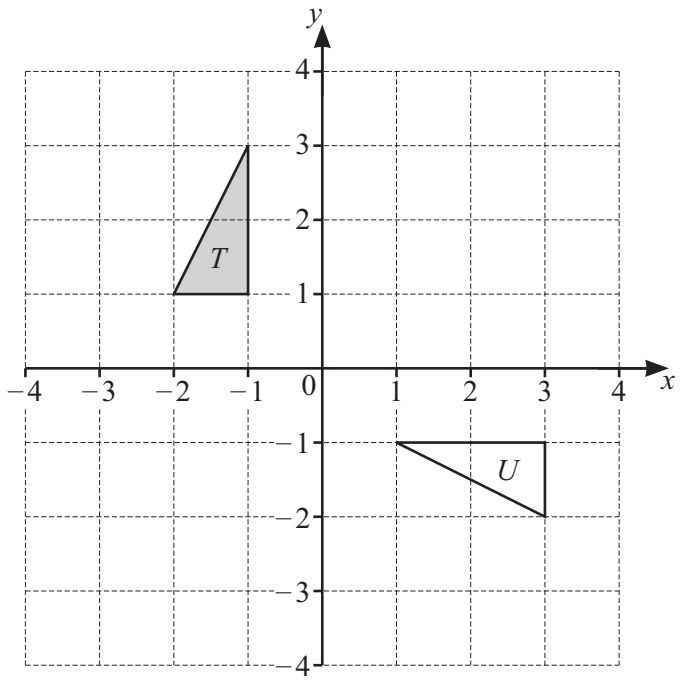
Q、Q' 的位移分别为

$$(2-3,5-1)=(-1,4)$$

$$(7-3,2-1)=(4,1)$$

两组位移均符合顺时针转动 $90°$ 的规律。
答：以 $(3,1)$ 为中心，顺时针旋转 $90°$。

3. [2025 · May/June 0580/22 Q5(b)]
提示：先按直角及相邻边长配对顶点。



(b) Describe fully the **single** transformation that maps triangle T onto triangle U.

图中在坐标方格上画出了三角形 T 和三角形 U，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，每小格表示 1 个单位。三角形 T 的顶点为 $(-2,1)$、$(-1,1)$、$(-1,3)$；三角形 U 的顶点为 $(1,-1)$、$(3,-1)$、$(3,-2)$。
(b) 完整描述将三角形 T 变换为三角形 U 的单一变换。

✓ **答案** 以 $(2,2)$ 为中心，逆时针旋转 $90°$。

解析 按直角及相邻边长配对顶点，取

$$P=(-1,1),\quad P'=(3,-1)$$

$$Q=(-1,3),\quad Q'=(1,-1)$$

两组对应点连线的中点分别为

$$M=\left(\frac{-1+3}{2},\frac{1+(-1)}{2}\right)=(1,0)$$

$$N=\left(\frac{-1+1}{2},\frac{3+(-1)}{2}\right)=(0,1)$$

作 PP'、QQ' 的垂直平分线，从方格图读得交点

$$O=(2,2)$$

以 O 为起点，P、P' 的位移分别为

$$(-1-2,1-2)=(-3,-1)$$

$$(3-2,-1-2)=(1,-3)$$

Q、Q' 的位移分别为

$$(-1-2,3-2)=(-3,1)$$

$$(1-2,-1-2)=(-1,-3)$$

两组位移均符合逆时针旋转 $90°$ 时，由 (a,b) 变为 $(-b,a)$ 的规律。
第三组对应顶点相对于 O 的位移为

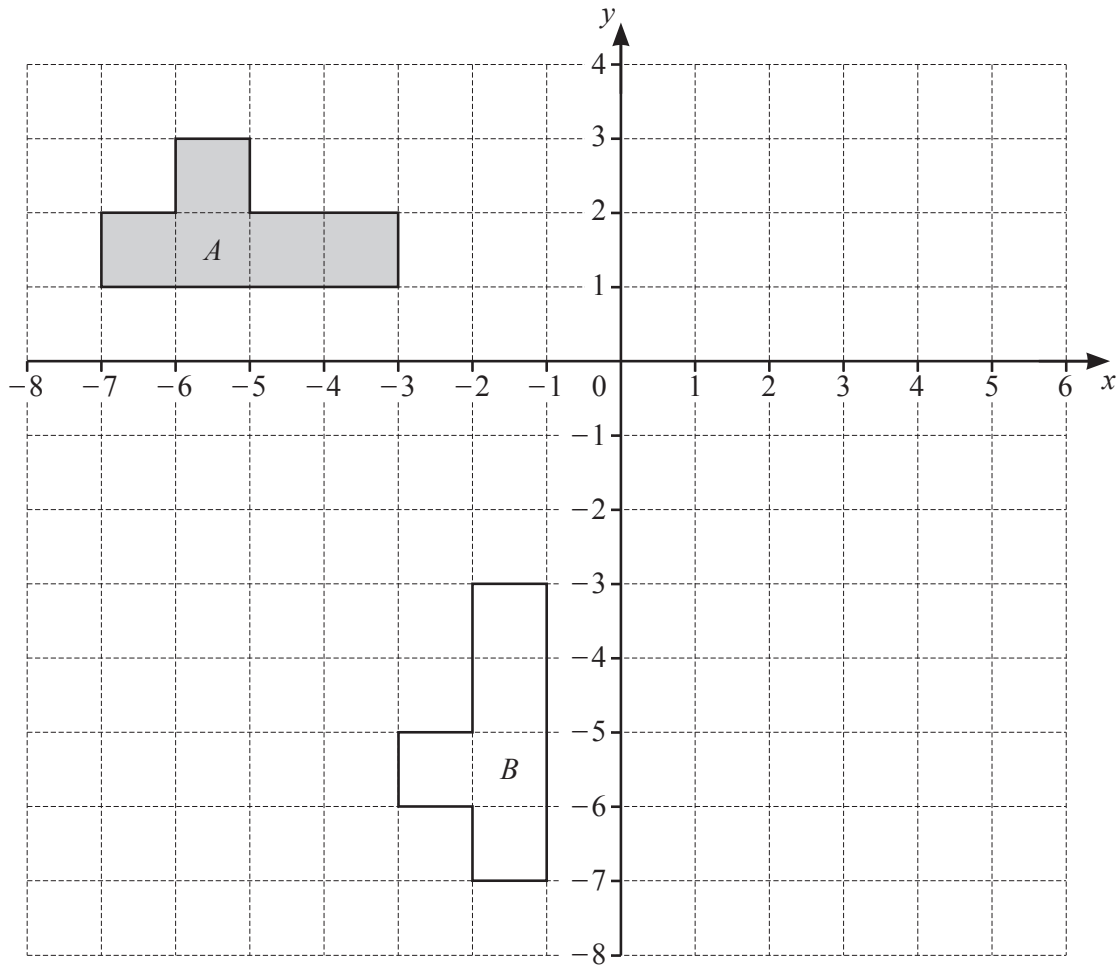
$$(-2-2,1-2)=(-4,-1)$$

$$(3-2,-2-2)=(1,-4)$$

也符合相同规律。
答：以 $(2,2)$ 为中心，逆时针旋转 $90°$。

4. [2024 · February/March 0580/12 Q18(a)]
提示：先按边长和转折配对顶点，再作对应点连线的中垂线。

The diagram shows two shapes, A and B, on a grid.



(a) Describe fully the **single** transformation that maps shape A onto shape B.

图中在方格纸上画出了两个图形 A 和 B。横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。
(a) 完整描述将图形 A 变换为图形 B 的单一变换。

✓ **答案** 以 $(0,0)$ 为中心，逆时针旋转 $90°$。

解析 按相邻边长及转折，取两组对应顶点。

$$P=(-7,1),\quad P'=(-1,-7)$$

$$Q=(-3,1),\quad Q'=(-1,-3)$$

两组对应点连线的中点分别为

$$\left(\frac{-7+(-1)}{2},\frac{1+(-7)}{2}\right)=(-4,-3)$$

$$\left(\frac{-3+(-1)}{2},\frac{1+(-3)}{2}\right)=(-2,-1)$$

分别作 PP'、QQ' 的垂直平分线，交于

$$O=(0,0)$$

以 O 为起点，两组对应点的位移分别为

$$P \text{ 的位移} = (-7, 1), \quad P' \text{ 的位移} = (-1, -7)$$

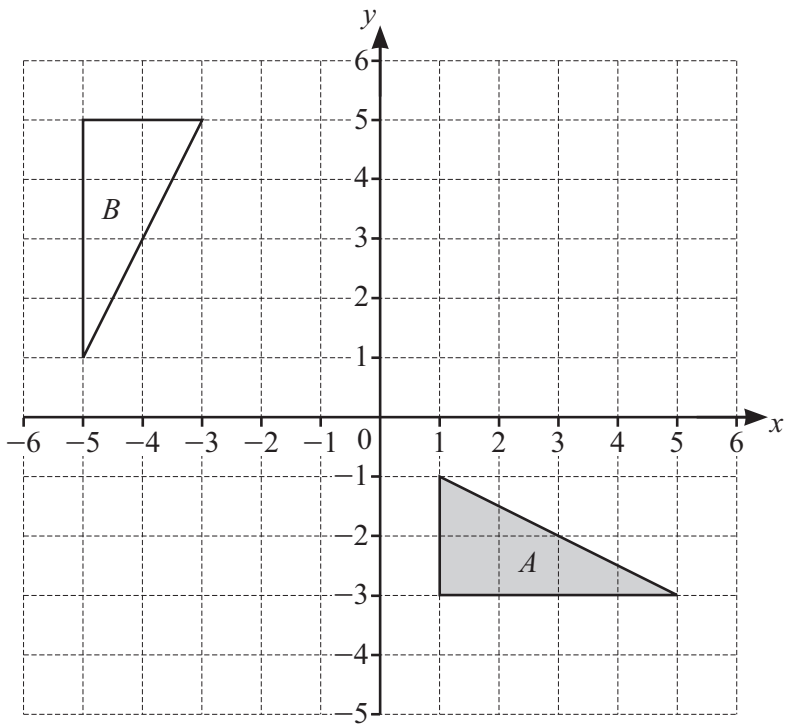
$$Q \text{ 的位移} = (-3, 1), \quad Q' \text{ 的位移} = (-1, -3)$$

两组均符合 (a, b) 变为 $(-b, a)$ 的规律，为逆时针旋转 $90°$。

答：以 $(0, 0)$ 为中心，逆时针旋转 $90°$。

5. [2024 · October/November 0580/41 Q2(b)]

提示：先将两个直角顶点配对，再按边长确定另一组对应顶点。



(b) Describe fully the **single** transformation that maps triangle A onto triangle B.

图中画出了三角形 A 和三角形 B。横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。

(b) 完整描述将三角形 A 变换为三角形 B 的单一变换。

✓ **答案** 以 $(2, 4)$ 为中心，顺时针旋转 $90°$。

解析 按对应边长配对顶点，直角顶点互相对应。取

$$P = (1, -3), \quad P' = (-5, 5)$$

$$Q = (1, -1), \quad Q' = (-3, 5)$$

两组对应点连线的中点分别为

$$\left(\frac{1 + (-5)}{2}, \frac{-3 + 5}{2}\right) = (-2, 1)$$

$$\left(\frac{1 + (-3)}{2}, \frac{-1 + 5}{2}\right) = (-1, 2)$$

分别作 PP'、QQ' 的垂直平分线，交于

$$O=(2,4)$$

以 O 为起点，第一组对应点的位移为

$$P \text{ 的位移}=(1-2,-3-4)=(-1,-7)$$

$$P' \text{ 的位移}=(-5-2,5-4)=(-7,1)$$

另一组对应点的位移为

$$Q \text{ 的位移}=(1-2,-1-4)=(-1,-5)$$

$$Q' \text{ 的位移}=(-3-2,5-4)=(-5,1)$$

两组均符合 (a,b) 变为 $(b,-a)$ 的规律，为顺时针旋转 $90°$。

答：以 $(2,4)$ 为中心，顺时针旋转 $90°$。

7.4 按中心到顶点的同一倍率画放大或缩小图

题型 1 按中心到顶点的同一倍率画放大或缩小图（Core / Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **辨认原图顶点：** 图中三角形 T 的顶点为 $(1,1)$、$(3,1)$、$(3,2)$。放缩中心为 $(0,2)$，各顶点都围绕此点变换。

② **求出中心位移：** 用顶点坐标减去中心坐标，得到从中心到顶点的位移。对顶点 $(1,1)$，有：

$$(1-0,1-2)=(1,-1)$$

③ **计算顶点像点：** 位移乘以倍率，再加回中心坐标，得到像点。对顶点 $(1,1)$，倍率为 3 时，有：

$$(0+3\cdot 1,2+3\cdot(-1))=(3,-1)$$

设中心为 (a,b)，原顶点为 (x,y)，倍率为 k，像点为 (x',y')：

$$(x',y')=(a+k\cdot(x-a),b+k\cdot(y-b))$$

④ **区分倍率正负：** 根据倍率正负确定像点所在方向。

$k>0$：原顶点与像点在从中心出发的_____射线上。像点到中心的距离乘以 k。

$k<0$：从中心看，像点与原顶点的方向_____。像点到中心的距离乘以 $|k|$。

⑤ **演算负数倍率：** 取顶点 $(3,1)$，改用中心 $(1,2)$、倍率 -2。先求位移，再乘倍率并加回中心坐标：

$$(3-1,1-2)=(2,-1)$$

$$((-2)\cdot 2,(-2)\cdot(-1))=(-4,2)$$

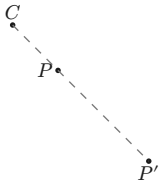
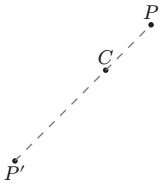
$$(1-4,2+2)=(-3,4)$$

原顶点在中心右下方，像点在中心左上方。

⑥ **连成所求图形：** 每个顶点都使用相同的中心和倍率。按原图顶点的顺序连接各像点，并连接首尾。

填空：①同一 ②相反

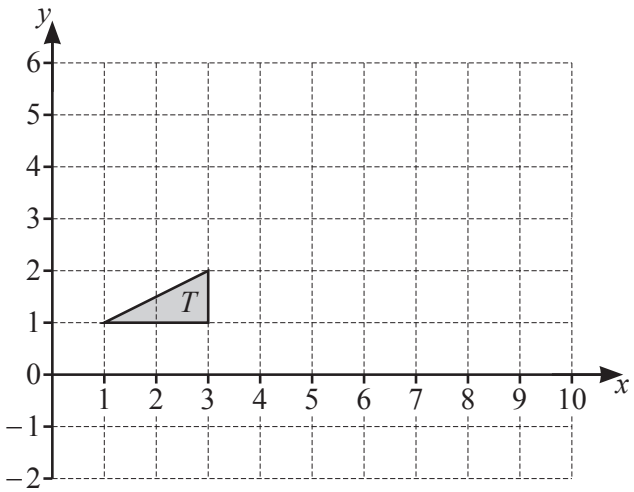
倍率决定对应点相对中心的位移

	Core：正倍率 3	Extended：负倍率 -2
中心与对应点		
相对中心的位移	$(1,-1)\mapsto(3,-3)$	$(1,1)\mapsto(-2,-2)$

点石成金　题目出现图形、放缩中心和倍率，要求画出像时，先读出各顶点坐标，求中心到各顶点的位移。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q4(a)(i)]

(a)



(i) Enlarge triangle T by scale factor 3, centre $(0, 2)$.

(a) 图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，三角形 T 的顶点为 $(1,1)$、$(3,1)$、$(3,2)$。
(i) 以 $(0,2)$ 为中心，按倍率 3 放大三角形 T。

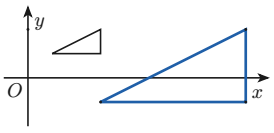
解答　由图得，三角形 T 的顶点为 $(1,1)$、$(3,1)$、$(3,2)$。
以 $(0,2)$ 为中心，将各顶点相对中心的位移乘以 3，三个像点分别为：

$$(0+3\cdot(1-0),2+3\cdot(1-2))=(3,-1)$$

$$(0+3\cdot(3-0),2+3\cdot(1-2))=(9,-1)$$

$$(0+3\cdot(3-0),2+3\cdot(2-2))=(9,2)$$

答：在网格上依次连接 $(3,-1)$、$(9,-1)$、$(9,2)$，并连接首尾，得到所求三角形。



方法：先读网格中的中心和顶点，再算各顶点相对中心的位移。

辨析：正倍率是沿原射线取像，负倍率是沿反向射线取像。

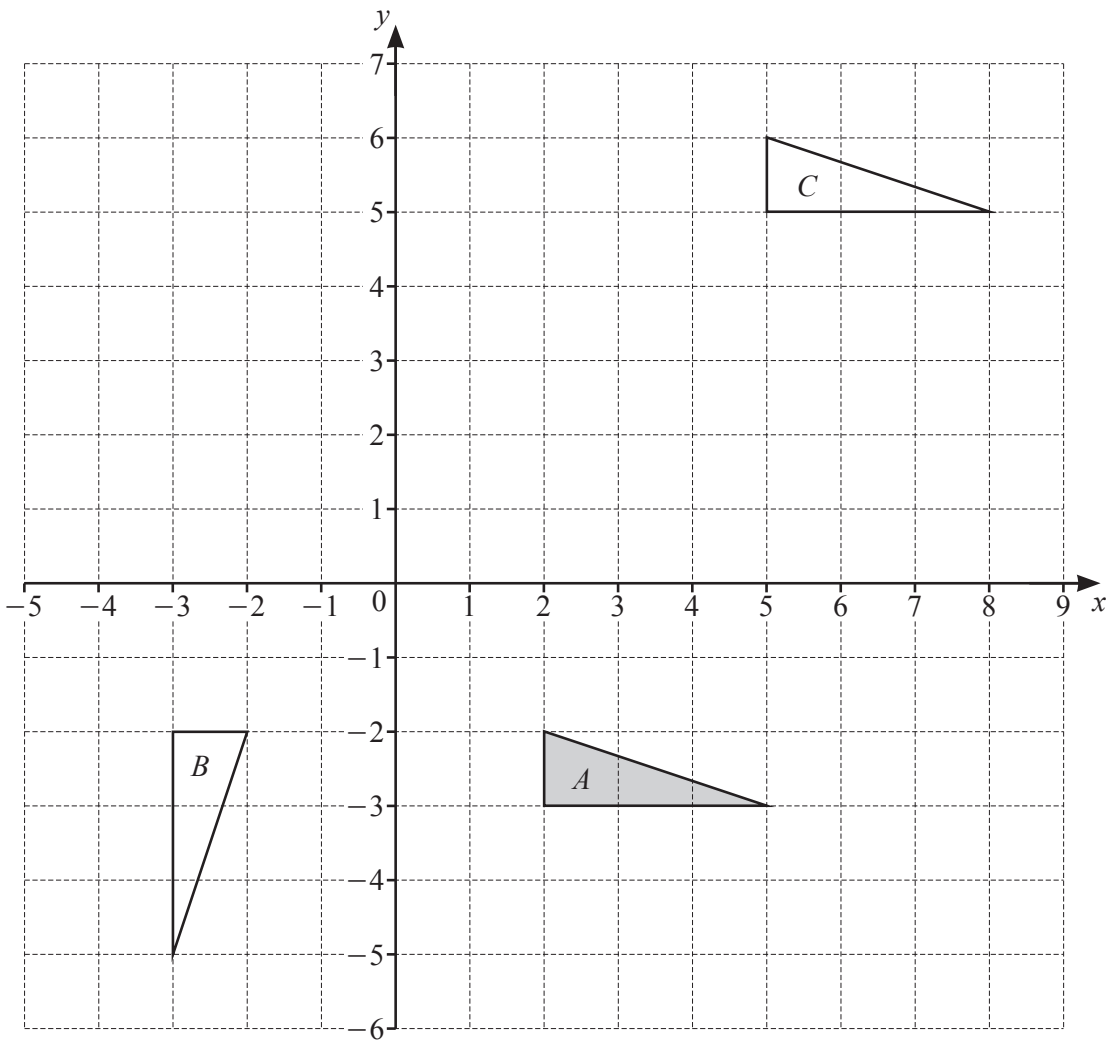
拓展：放缩前后对应角相等，对应边长按同一比例变化。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/33 Q6(b)(iii)]

提示：从中心数出横纵格数，比较变换前后各方向的位移。

(b)



(iii) On the grid, enlarge triangle A by scale factor 3, centre $(4, -5)$.

(b) 图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。三角形 A 的顶点为 $(2,-2)$、$(2,-3)$、$(5,-3)$；三角形 B 的顶点为 $(-3,-2)$、$(-2,-2)$、$(-3,-5)$；三角形 C 的顶点为 $(5,6)$、$(5,5)$、$(8,5)$。

(iii) 在网格上，以 $(4,-5)$ 为中心，按倍率 3 放大三角形 A。

✓ **答案** 依次连接顶点 $(-2,1)$、$(7,1)$、$(-2,4)$，并连接首尾。

解析 由图得，三角形 A 的顶点为 $(2,-3)$、$(5,-3)$、$(2,-2)$。

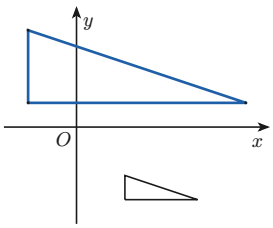
以 $(4,-5)$ 为中心，将各顶点相对中心的位移乘以 3，三个像点分别为：

$$(4+3\cdot(2-4),-5+3\cdot(-3-(-5)))=(-2,1)$$

$$(4+3\cdot(5-4),-5+3\cdot(-3-(-5)))=(7,1)$$

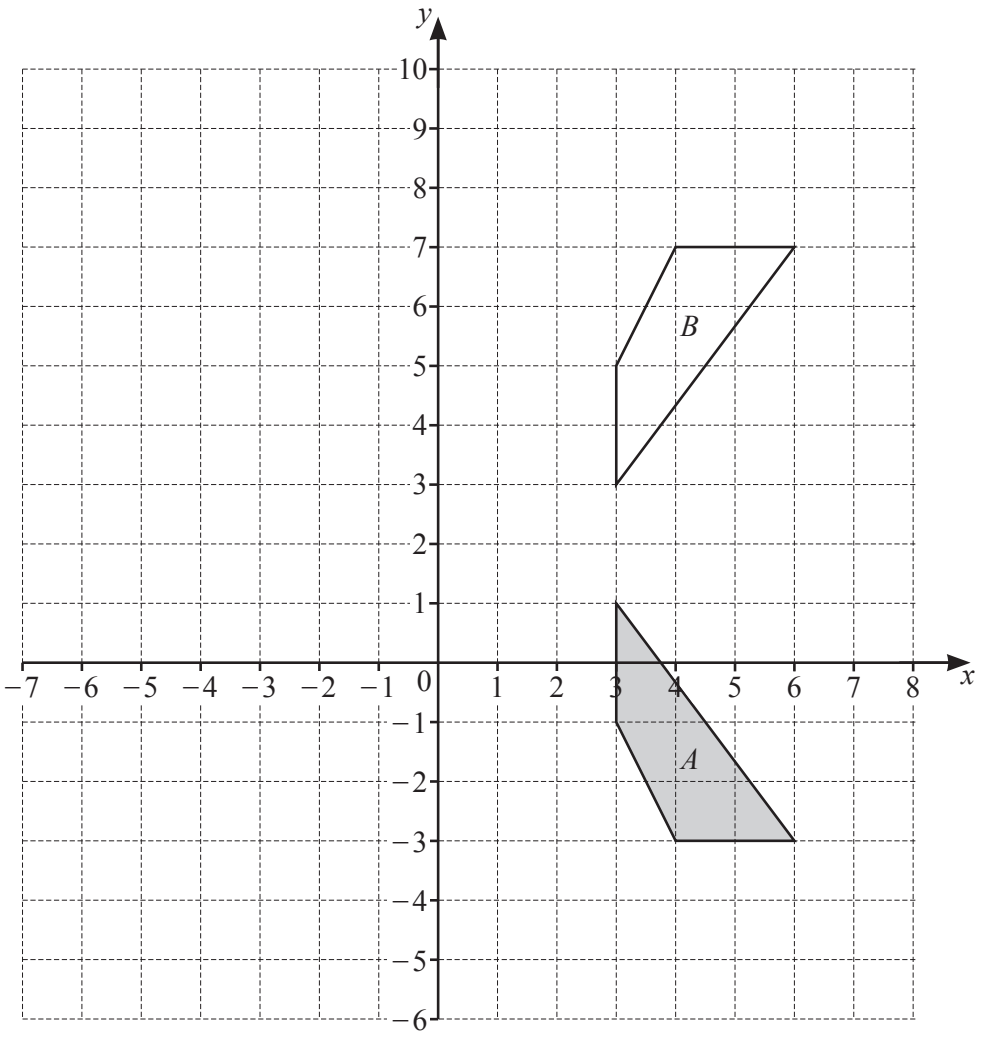
$$(4+3\cdot(2-4),-5+3\cdot(-2-(-5)))=(-2,4)$$

答：在网格上依次连接 $(-2,1)$、$(7,1)$、$(-2,4)$，并连接首尾，得到所求三角形。



2. [2023 · May/June 0580/22 Q10(c)]

提示：先看倍率符号，再比较对应点相对中心的方向与距离。



(c) Enlarge shape A by scale factor -2, centre $(2, 0)$.

图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。图形 A 的顶点依次为 $(3,1)$、$(3,-1)$、$(4,-3)$、$(6,-3)$；图形 B 的顶点依次为 $(3,3)$、$(3,5)$、$(4,7)$、$(6,7)$。

(c) 以 $(2,0)$ 为中心，按倍率 -2 对图形 A 作放缩变换。

✓ **答案** 依次连接顶点 $(0,-2)$、$(0,2)$、$(-2,6)$、$(-6,6)$，并连接首尾。

解析 由图得，图形 A 的顶点依次为 $(3,1)$、$(3,-1)$、$(4,-3)$、$(6,-3)$。

以 $(2,0)$ 为中心，将各顶点相对中心的位移乘以 -2，四个像点分别为：

$$(2+(-2)\cdot(3-2),0+(-2)\cdot(1-0))=(0,-2)$$

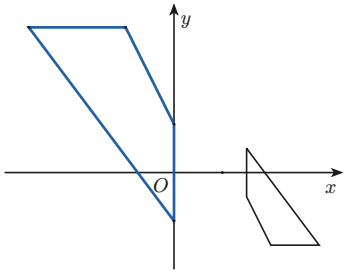
$$(2+(-2)\cdot(3-2),0+(-2)\cdot(-1-0))=(0,2)$$

$$(2+(-2)\cdot(4-2),0+(-2)\cdot(-3-0))=(-2,6)$$

$$(2+(-2)\cdot(6-2),0+(-2)\cdot(-3-0))=(-6,6)$$

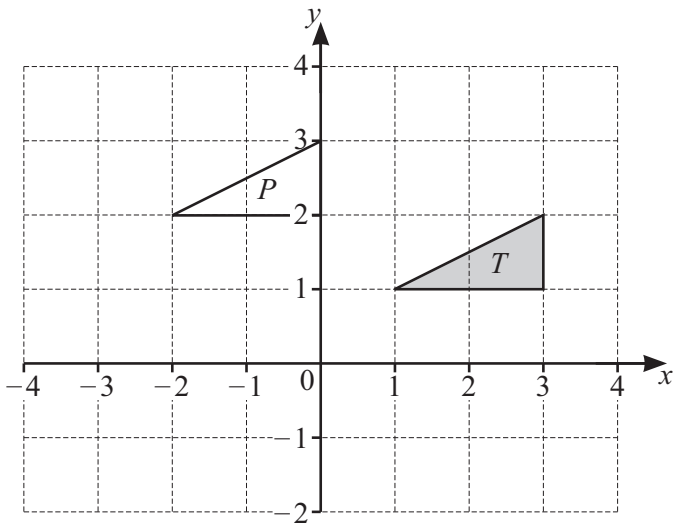
倍率为负，各像点与对应原顶点分居中心两侧。

答：在网格上依次连接 $(0,-2)$、$(0,2)$、$(-2,6)$、$(-6,6)$，并连接首尾，得到所求四边形。



3. [2025 · October/November 0580/21 Q5(b)]

提示：先写出三角形 T 各顶点相对中心的位移。



(b) Draw the image of triangle T after an enlargement of scale factor 2, centre (3, 3).

图中画出了三角形 P 和三角形 T。横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。

(b) 画出三角形 T 以 $(3,3)$ 为中心、按倍率 2 放大后的像。

✓ **答案** 依次连接 $(-1,-1)$、$(3,-1)$、$(3,1)$，并连接首尾。

解析 由图得，三角形 T 的顶点为 $(1,1)$、$(3,1)$、$(3,2)$。

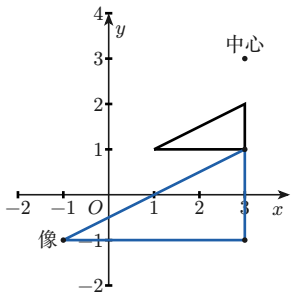
以 $(3,3)$ 为中心，各顶点相对中心的位移乘以 2，再加回中心坐标。三个像点分别为

$$(3+2\cdot(1-3),3+2\cdot(1-3))=(-1,-1)$$

$$(3+2\cdot(3-3),3+2\cdot(1-3))=(3,-1)$$

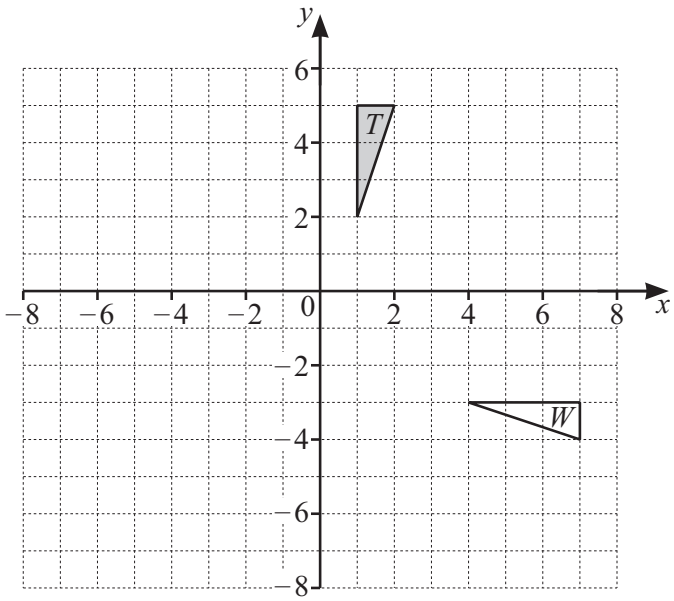
$$(3+2\cdot(3-3),3+2\cdot(2-3))=(3,1)$$

答：在网格上依次连接 $(-1,-1)$、$(3,-1)$、$(3,1)$，并连接首尾，得到所求三角形。



4. [2024 · May/June 0580/23 Q19(b)]

提示：先求各顶点相对中心的位移，再将两个分量分别乘以负倍率。



(b) Draw the enlargement of triangle T with scale factor -2 and centre of enlargement $(-1, 1)$.

图中画出了三角形 T 和三角形 W。横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。

(b) 画出三角形 T 以 $(-1,1)$ 为中心、按倍率 -2 作放缩变换后的像。

✓ **答案** 依次连接 $(-5,-1)$、$(-5,-7)$、$(-7,-7)$，并连接首尾。

解析 由图得，三角形 T 的顶点为 $(1,2)$、$(1,5)$、$(2,5)$。

以 $(-1,1)$ 为中心，各顶点相对中心的位移乘以 -2，再加回中心坐标。三个像点分别为

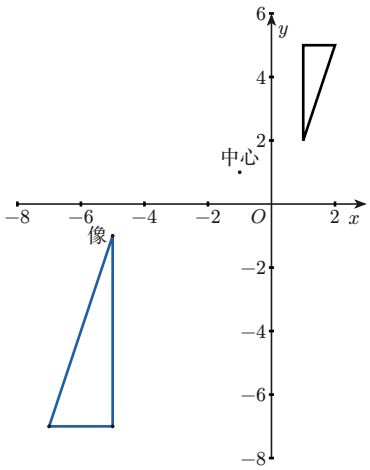
$$(-1+(-2)\cdot(1-(-1)),\,1+(-2)\cdot(2-1))=(-5,-1)$$

$$(-1+(-2)\cdot(1-(-1)),\,1+(-2)\cdot(5-1))=(-5,-7)$$

$$(-1+(-2)\cdot(2-(-1)),\,1+(-2)\cdot(5-1))=(-7,-7)$$

倍率为负，各像点与原顶点分别位于中心的相反方向。

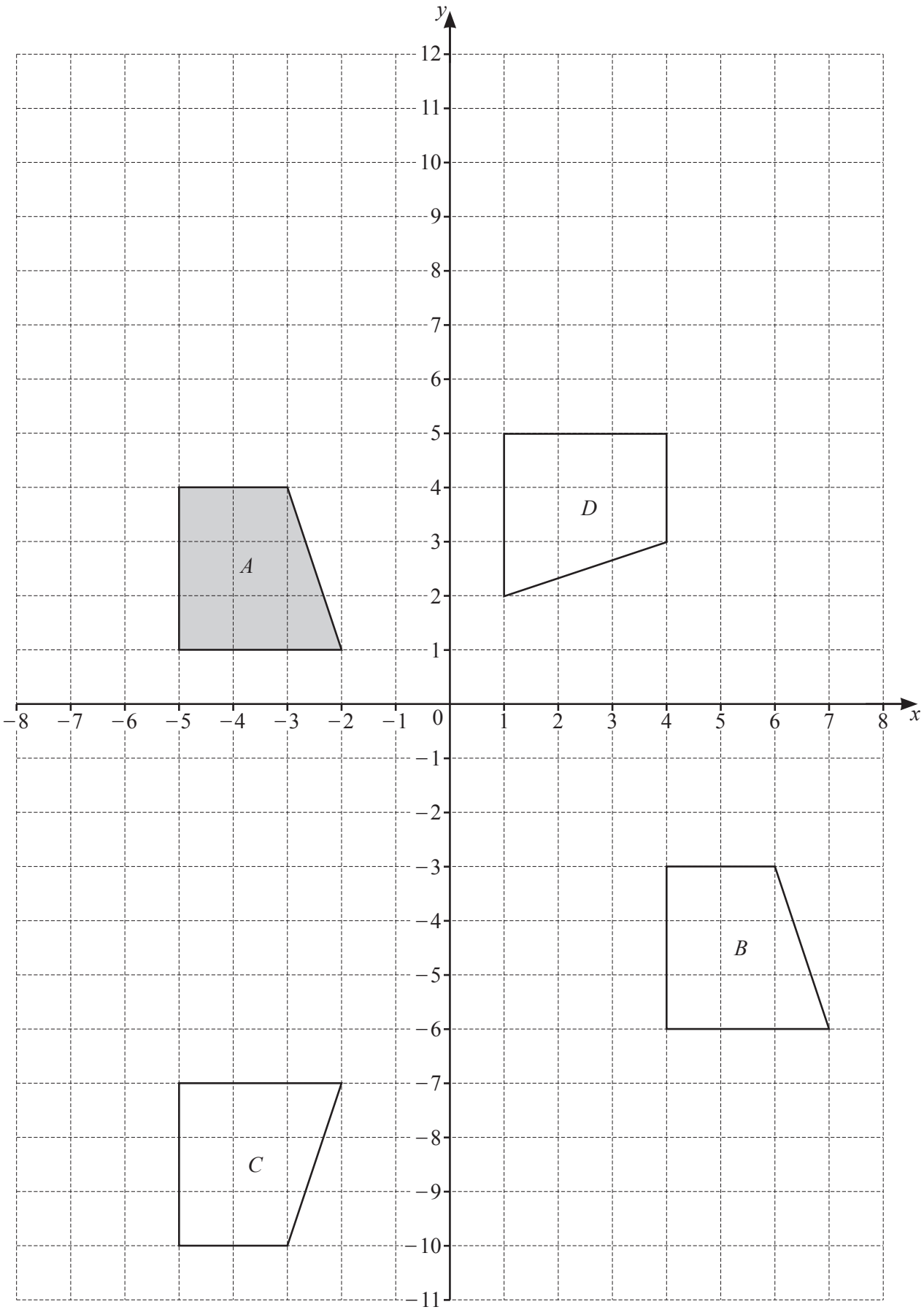
答：在网格上依次连接 $(-5,-1)$、$(-5,-7)$、$(-7,-7)$，并连接首尾，得到所求三角形。


6
y
4
2
中心
−8
−6
−4
−2
O
2
x
像
−2
−4
−6
−8

5. [2024 · May/June 0580/32 Q3(d)]

提示：按原图顺序记下四个顶点，各点均使用同一中心和倍率。

The diagram shows four quadrilaterals, A, B, C and D, on a 1 cm^2 grid.



(d) On the grid, enlarge quadrilateral A by scale factor 2, centre $(-3,-3)$.

图中在每个小方格面积为 1cm^2 的方格纸上，画出了四个四边形 A、B、C 和 D。横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。
(d) 在网格上，以 $(-3,-3)$ 为中心，按倍率 2 放大四边形 A。

✓ **答案** 依次连接 $(-7,5)$、$(-7,11)$、$(-3,11)$、$(-1,5)$，并连接首尾。

解析 由图得，四边形 A 的顶点依次为 $(-5,1)$、$(-5,4)$、$(-3,4)$、$(-2,1)$。
以 $(-3,-3)$ 为中心，各顶点相对中心的位移乘以 2，再加回中心坐标。四个像点分别为

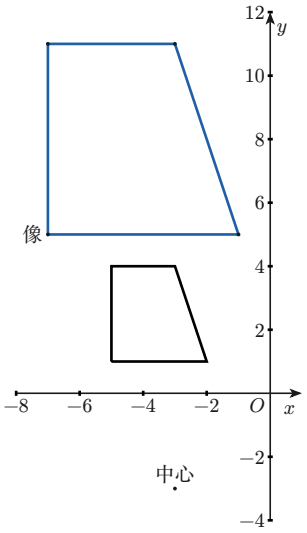
$$(-3+2\cdot(-5-(-3)),-3+2\cdot(1-(-3)))=(-7,5)$$

$$(-3+2\cdot(-5-(-3)),-3+2\cdot(4-(-3)))=(-7,11)$$

$$(-3+2\cdot(-3-(-3)),-3+2\cdot(4-(-3)))=(-3,11)$$

$$(-3+2\cdot(-2-(-3)),-3+2\cdot(1-(-3)))=(-1,5)$$

答：在网格上依次连接 $(-7,5)$、$(-7,11)$、$(-3,11)$、$(-1,5)$，并连接首尾，得到所求四边形。



7.5 用对应边长比和对应点连线找位似参数

题型 1 用对应边长比和对应点连线找位似参数（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **对应边与顶点：**三角形 A、B 的竖边分别长 6 格、2 格。这两条边互为对应边。它们的上端点相互对应，下端点相互对应。

② **计算位似倍率：**把 A 变为 B，原图为 A，像为 B。倍率记作 k，用像的边长除以原图的对应边长。

$k=\frac{\text{像的对应边长}}{\text{原图的对应边长}}=\frac{2}{6}=$ _____

③ **判断放缩方向：**本例两个三角形的对应边方向相同，倍率为正。正倍率的大小决定图形放大还是缩小。

倍率大于 1，图形放大。

把 B 变为 A：

$k=\frac{6}{2}=3$

倍率大于 0 且小于 1，图形缩小。

把 A 变为 B：

$k=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

④ **确定位似中心：**连接对应顶点 $(2,0)$ 与 $(-2,0)$。再连接对应顶点 $(2,6)$ 与 $(-2,2)$，并延长。两条直线的交点 $(-4,0)$ 为位似中心。

⑤ **读取半格数据：**坐标 2 与 3 正中间的位置读作 2.5。对应边长含半格时，仍用像的边长除以原图的边长。

原图边长为 2 格，像的对应边长为 3 格：

$k = \frac{3}{2} = 1.5$

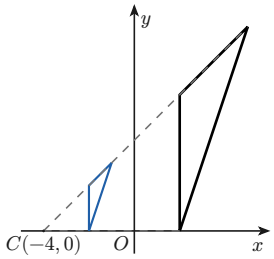
原图边长为 3 格，像的对应边长为 1.5 格：

$k = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$

⑥ **写全变换要素：**图形按同一倍率放大或缩小，称为位似变换（enlargement）。完整描述须写出变换名称、_____和_____。倍率小于 1 时，变换名称仍为位似变换。

填空：①三分之一　②位似中心　③倍率

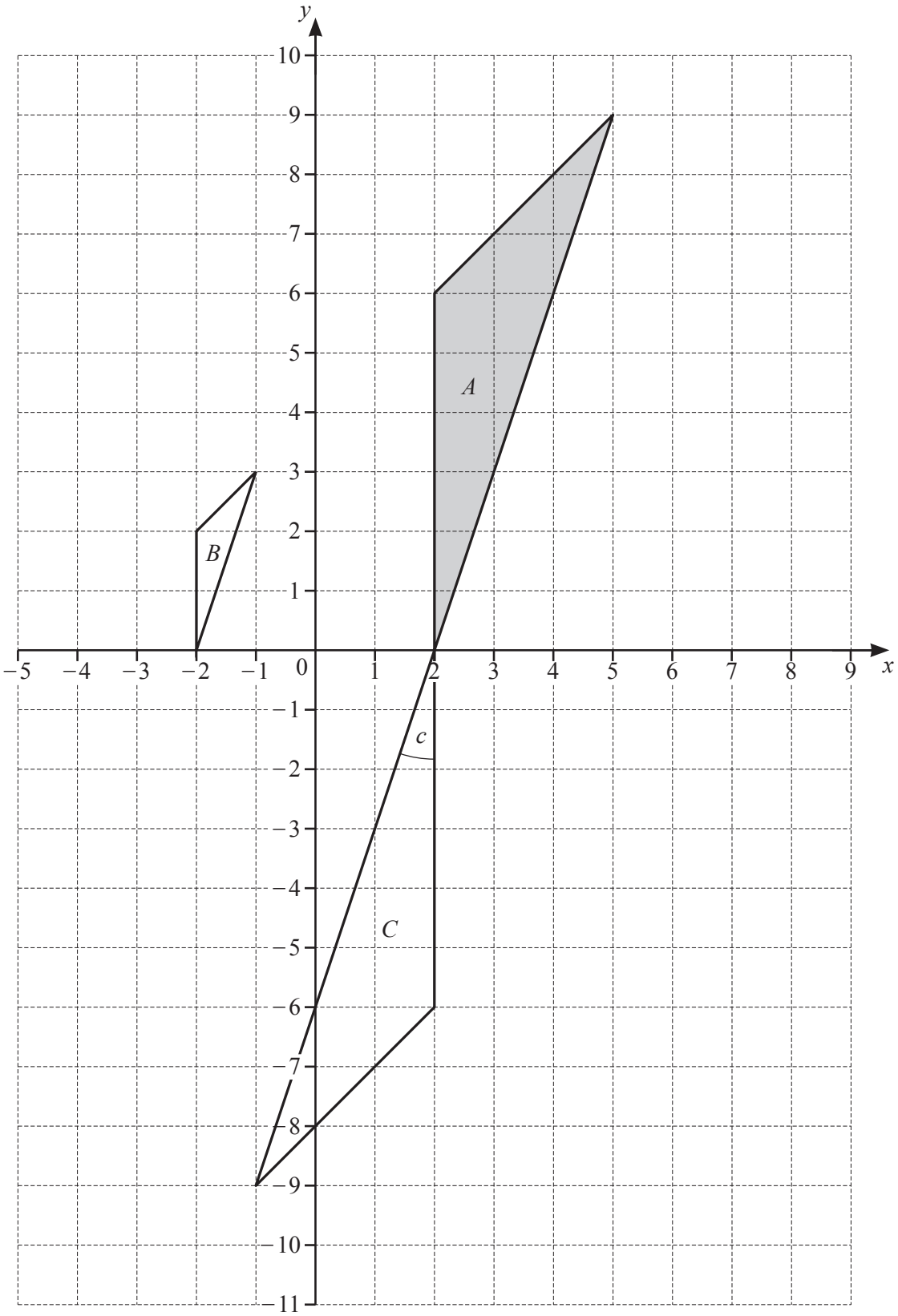
对应点连线相交于同一个位似中心

	图像	数量关系
同一关系		三组对应位移均乘 $\frac{1}{3}$，中心保持 $(-4, 0)$。

点石成金　题目出现方格纸上的两个相似图形，要求完整描述单一变换时，先求对应边长比，再连接并延长对应顶点连线。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q5(d)(i)]

The diagram shows three triangles, A, B and C, on a 1 cm^2 grid.



(d) Describe fully the **single** transformation that maps

(i) triangle A onto triangle B

图中在每个小方格面积为 1cm^2 的方格纸上，画出了三个三角形 A、B 和 C。横轴为 x，纵轴为 y，三角形 C 中标出了角 c。
(d) 完整描述完成下列映射的单一变换：
(i) 将三角形 A 映射到三角形 B。

解答 三角形 A 与三角形 B 的对应边方向相同，边长成比例，故为位似变换。由两条对应竖边的长度得
$k=\frac{2-0}{6-0}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$。
连接对应顶点 $(2,0)$ 与 $(-2,0)$，所得直线为横轴。
连接对应顶点 $(2,6)$ 与 $(-2,2)$，并延长，与横轴交于 $(-4,0)$。
答：位似变换，中心为 $(-4,0)$，倍率为 $\frac{1}{3}$。

方法：先认原图和像，比对应竖边，再延长两组对应顶点连线。

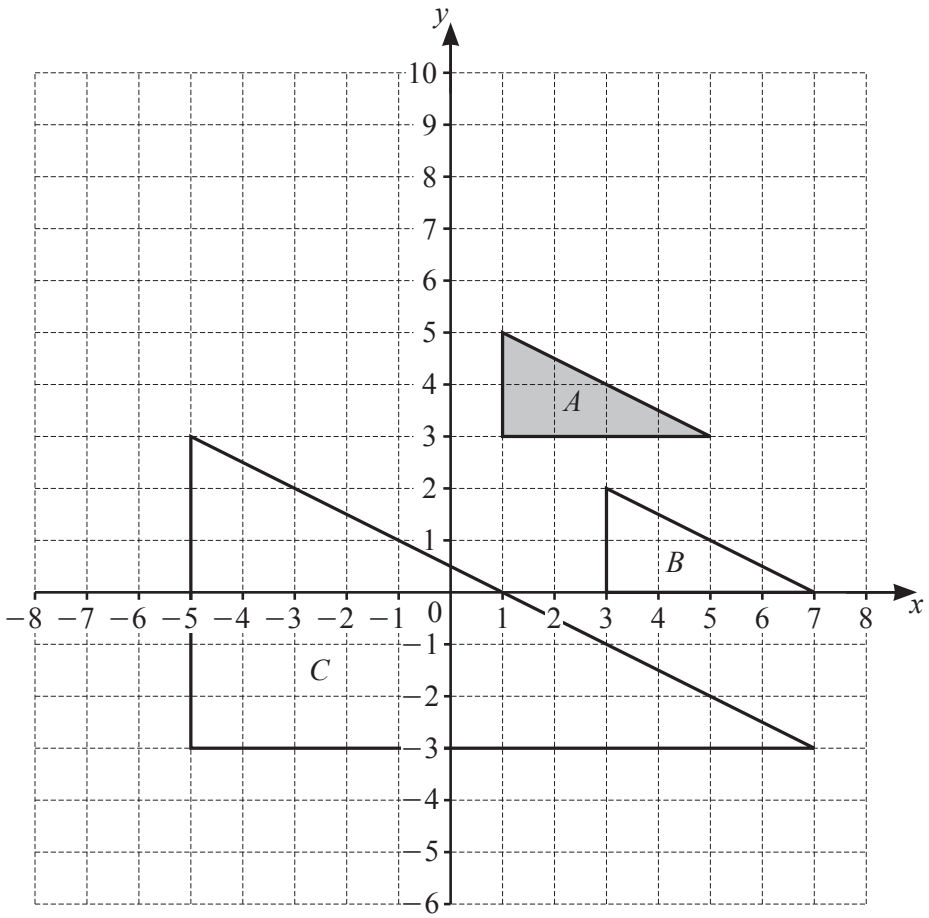
辨析：倍率是像与原图的对应边长之比，中心是对应顶点连线的交点。

术语：enlargement：位似变换，包含放大与缩小。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/31 Q6(b)]

提示：看两图竖边的端点纵坐标，比边长，再延长对应顶点连线。



(b) Describe fully the **single** transformation that maps triangle A onto triangle C.

图中画出了三角形 A、B 和 C，横轴为 x，纵轴为 y。
(b) 完整描述将三角形 A 映射到三角形 C 的单一变换。

✓ **答案** 位似变换，中心为 $(4,6)$，倍率为 3。

解析 三角形 A 与三角形 C 的对应边方向相同，边长成比例，故为位似变换。由两条对应竖边的长度得 $k=\frac{3-(-3)}{5-3}=\frac{6}{2}=3$。

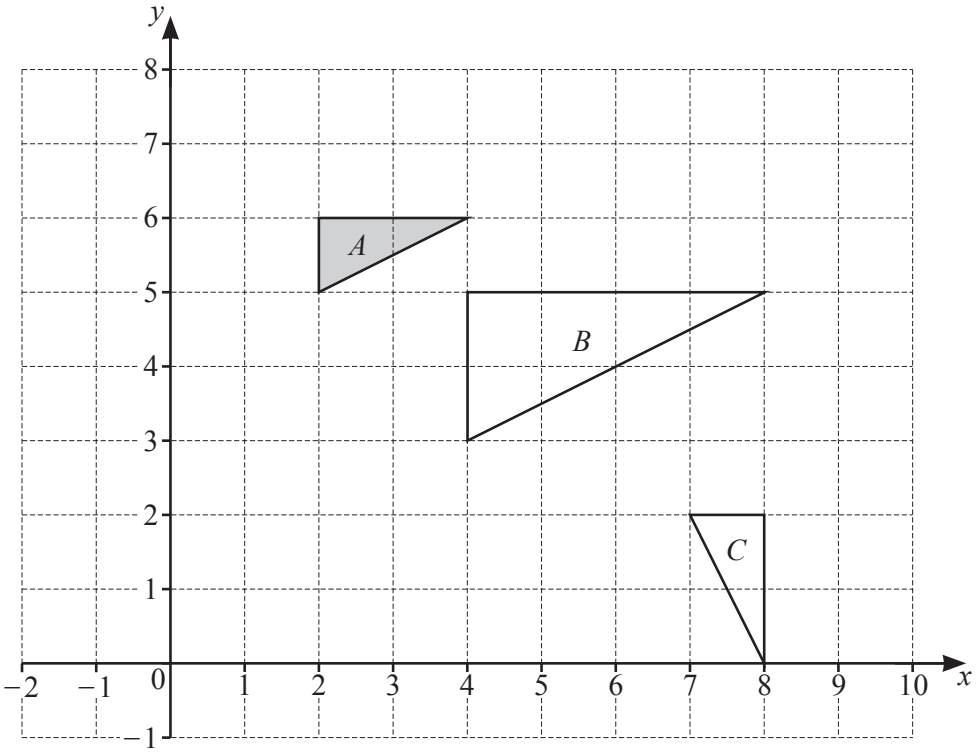
连接对应顶点 $(1,5)$ 与 $(-5,3)$，以及 $(5,3)$ 与 $(7,-3)$，并延长。

两条直线交于 $(4,6)$，故位似中心为 $(4,6)$。

答：位似变换，中心为 $(4,6)$，倍率为 3。

2. [2023 · May/June 0580/21 Q11(a)]

提示：先分清原图和像，比竖边长度，再找对应顶点连线的交点。



Describe the **single** transformation that maps

(a) triangle A onto triangle B

图中画出了三角形 A、B 和 C，横轴为 x，纵轴为 y。

描述完成下列映射的单一变换：

(a) 将三角形 A 映射到三角形 B。

✓ **答案** 位似变换，中心为 $(0,7)$，倍率为 2。

解析 三角形 A 与三角形 B 的对应边方向相同，边长成比例，故为位似变换。由两条对应竖边的长度得 $k=\frac{5-3}{6-5}=\frac{2}{1}=2$。

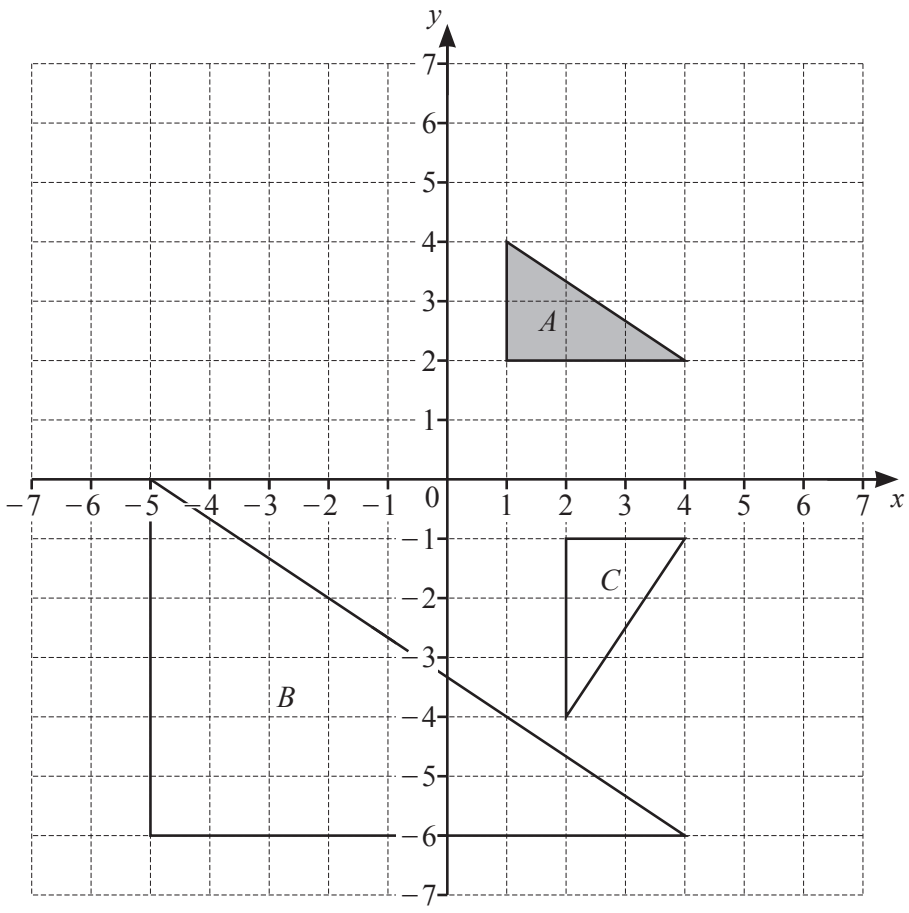
连接对应顶点 $(2,6)$ 与 $(4,5)$，以及 $(2,5)$ 与 $(4,3)$，并延长。

两条直线交于 $(0,7)$，故位似中心为 $(0,7)$。

答：位似变换，中心为 $(0,7)$，倍率为 2。

3. [2023 · May/June 0580/32 Q6(b)(i)(a)]
提示：看横坐标相同的对应顶点，再用另一组连线找交点。

(b) The diagram shows three triangles A, B and C, on a grid.



(i) Describe fully the **single** transformation that maps

(a) triangle A onto triangle B

(b) 图中在方格纸上画出了三个三角形 A、B 和 C。横轴为 x，纵轴为 y。
(i) 完整描述完成下列映射的单一变换：
(a) 将三角形 A 映射到三角形 B。

✓ **答案** 位似变换，中心为 $(4,6)$，倍率为 3。

解析 三角形 A 与三角形 B 的对应边方向相同，边长成比例，故为位似变换。由两条对应竖边的长度得 $k=\frac{0-(-6)}{4-2}=\frac{6}{2}=3$。

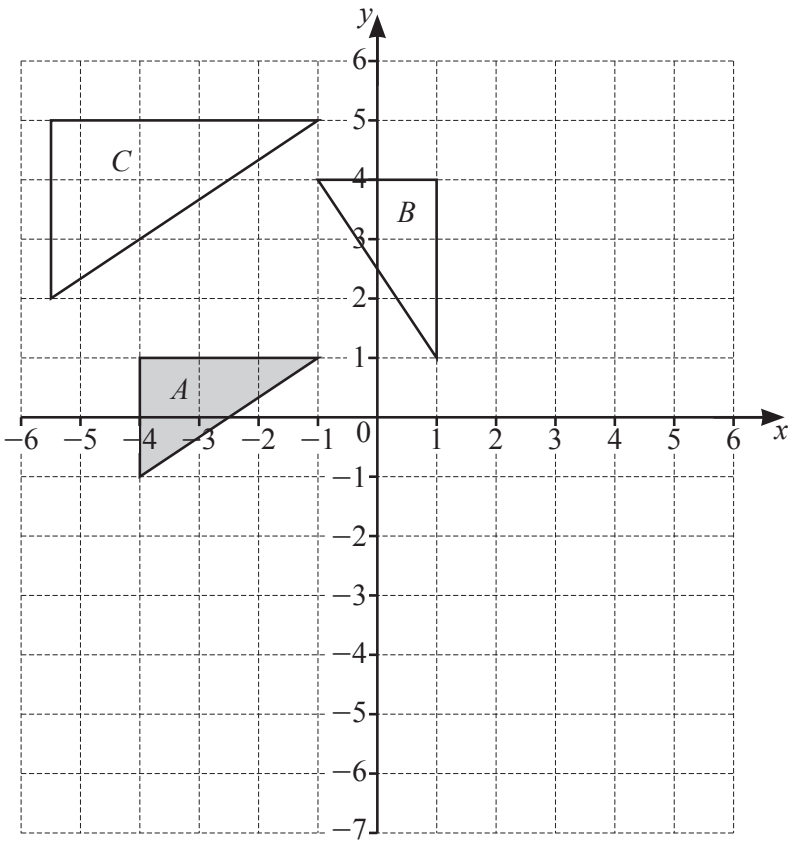
连接对应顶点 $(4,2)$ 与 $(4,-6)$，所得直线上各点的横坐标均为 4。

连接对应顶点 $(1,4)$ 与 $(-5,0)$，并延长，与前一条直线交于 $(4,6)$。

答：位似变换，中心为 $(4,6)$，倍率为 3。

4. [2023 · October/November 0580/32 Q9(b)]
提示：比对应竖边长度，左下顶点按半格读，再连接对应顶点。

Triangles A, B and C are shown on the grid.



(b) Describe fully the **single** transformation that maps triangle A onto triangle C.

图中在方格纸上画出了三角形 A、B 和 C。横轴为 x，纵轴为 y。
(b) 完整描述将三角形 A 映射到三角形 C 的单一变换。

✓ **答案** 位似变换，中心为 $(-1,-7)$，倍率为 1.5。

解析 三角形 A 与三角形 C 的对应边方向相同，边长成比例，故为位似变换。由两条对应竖边的长度得 $k=\frac{5-2}{1-(-1)}=\frac{3}{2}=1.5$。

连接对应顶点 $(-1,1)$ 与 $(-1,5)$，所得直线上各点的横坐标均为 -1。

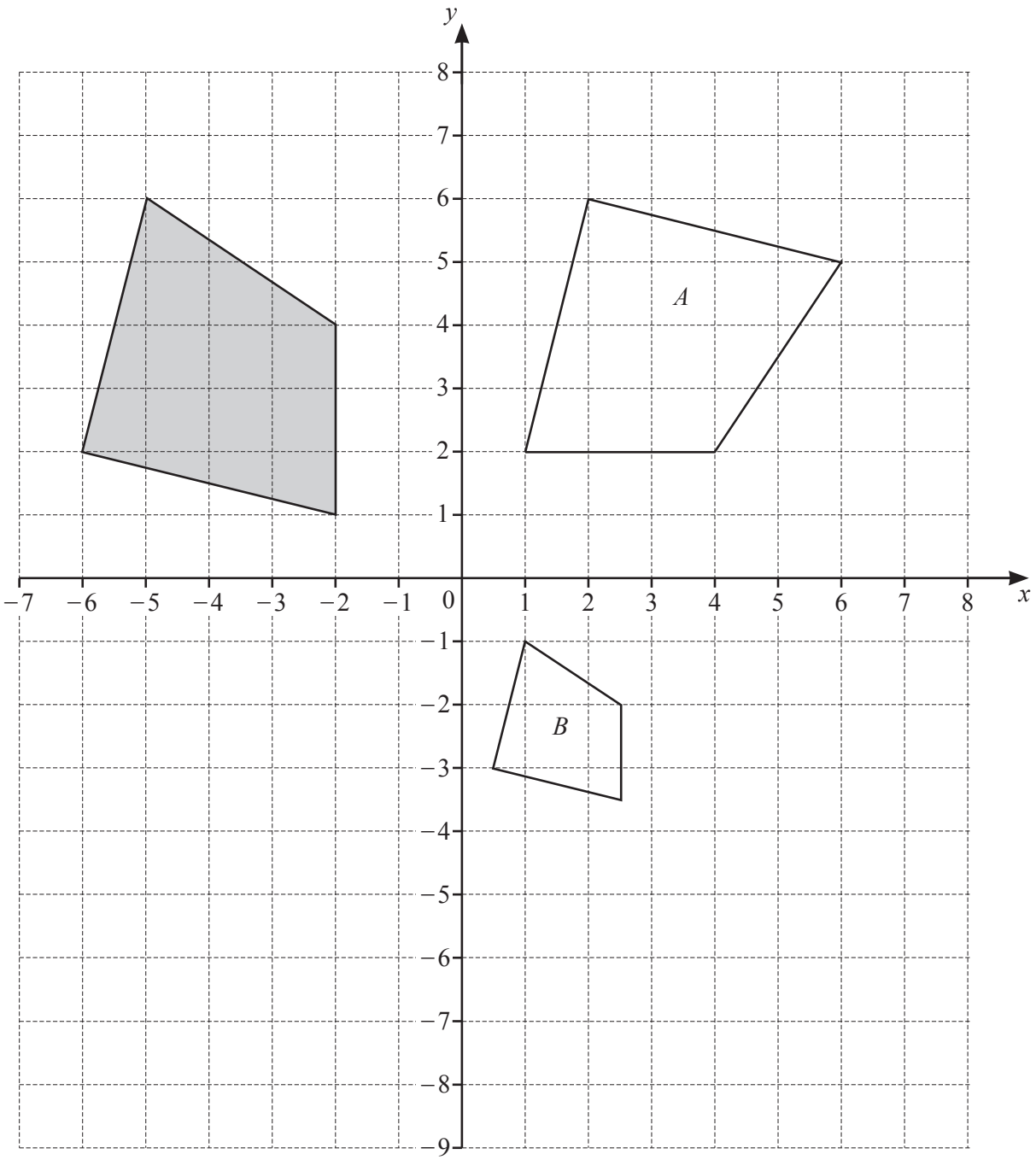
三角形 C 的左下顶点为 $(-5.5,2)$。

连接对应顶点 $(-4,-1)$ 与 $(-5.5,2)$，并延长，与前一条直线交于 $(-1,-7)$。

答：位似变换，中心为 $(-1,-7)$，倍率为 1.5。

5. [2023 · May/June 0580/31 Q2(b)(ii)]
提示：看右侧竖边，核准半格端点，比像与原图的边长。

(b) Three of these shapes are shown on the grid.



Describe fully the **single** transformation that maps

(ii) the shaded shape onto shape B.

(b) 图中在方格纸上画出了三个这样的图形，分别为阴影图形、图形 A 和图形 B。横轴为 x，纵轴为 y。
完整描述完成下列映射的单一变换：
(ii) 将阴影图形映射到图形 B。

✓ **答案** 位似变换，中心为 $(7,-8)$，倍率为 $\frac{1}{2}$。

解析 阴影图形与图形 B 的对应边方向相同，边长成比例，故为位似变换。
阴影图形的右侧竖边两端为 $(-2,4)$、$(-2,1)$。
图形 B 的对应顶点为 $(2.5,-2)$、$(2.5,-3.5)$。由对应边长得

$k=\frac{-2-(-3.5)}{4-1}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$。

连接 $(-2,4)$ 与 $(2.5,-2)$，以及 $(-2,1)$ 与 $(2.5,-3.5)$，并延长。

两条直线交于 $(7,-8)$，故位似中心为 $(7,-8)$。

答：位似变换，中心为 $(7,-8)$，倍率为 $\frac{1}{2}$。

7.6 对应分量相加减，计算列向量

题型 1 对应分量相加减，计算列向量（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **列向量的分量：**例题给出两个向量。

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

列向量上面的数是_____，下面的数是_____。

② **列向量相减：**两个列向量相减，对应分量分别相减。例题中的减法写成

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}-1-2\\3-5\end{pmatrix}$$

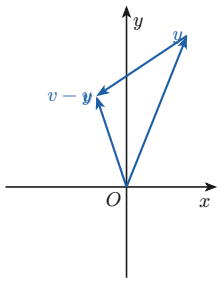
③ **列向量相加：**两个列向量相加，对应分量分别相加。续用例题中的向量，加上负数时可作如下计算。

$$\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2+(-1)\\5+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$$

④ **箭头向量记号：**$\overrightarrow{FG}$ 表示从点 F 到点 G 的向量。写成列向量后，仍按对应分量相加减。

填空：①横分量　②纵分量

对应分量相减给出向量差

	图像	数量关系
同一关系		$v-y=(-1-2,3-5)=(-3,-2)$。

点石成金　题目出现两个列向量的和或差时，先将横分量与横分量、纵分量与纵分量分别相加减。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q8(a)]

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

Find

(a) $\mathbf{v}-\mathbf{y}$

已知

$v=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$　$y=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

求：

(a) $v-y$。

解答　由对应分量相减，得

$$v-y=\begin{pmatrix}-1-2\\3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$$

答：$\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$。

方法：先看减号两侧的列向量，上下两行分别按原顺序相减。

辨析：横分量是列向量上面的数，纵分量是下面的数。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/13 Q10(a)]

提示：看两列同一行的数，横分量相加时保留负数的符号。

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}13\\-2\end{pmatrix}$$

Work out.

(a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$

已知

$a=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$　$b=\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$　$c=\begin{pmatrix}13\\-2\end{pmatrix}$

计算。

(a) $a+b$。

✓ **答案**

$$\begin{pmatrix}-2\\10\end{pmatrix}$$

解析 由对应分量相加，得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4+(-6)\\9+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-6\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\10\end{pmatrix}$$

答：$\begin{pmatrix}-2\\10\end{pmatrix}$。

2. [2023 · May/June 0580/12 Q15(b)]

提示：先看箭头向量的列式，再将同一行的分量配对相加。

F is the point $(1,-4)$, $\overrightarrow{FG}=\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$ and $\overrightarrow{GH}=\begin{pmatrix}-12\\35\end{pmatrix}$.

Find

(b) $\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}$

F 是点 $(1,-4)$，且

$\overrightarrow{FG}=\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$　$\overrightarrow{GH}=\begin{pmatrix}-12\\35\end{pmatrix}$

求：

(b) $\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}$。

✓ **答案**

$$\begin{pmatrix}-4\\32\end{pmatrix}$$

解析 由对应分量相加，得

$$\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}=\begin{pmatrix}8+(-12)\\-3+35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-12\\32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\32\end{pmatrix}$$

答：$\begin{pmatrix}-4\\32\end{pmatrix}$。

3. [2025 · May/June 0580/21 Q8(a)]

提示：先把向量 m 的两个分量分别乘 2，再按对应分量相减。

$$\mathbf{m}=\begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix}\qquad\mathbf{n}=\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$$

(a) Find $2\mathbf{m}-\mathbf{n}$.

已知

$m=\begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix}$，　$n=\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$

(a) 求 $2m-n$。

✓ **答案**

$$\begin{pmatrix}14\\13\end{pmatrix}$$

解析 向量乘以 2，两个分量分别乘以 2，得

$$2\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 2\cdot 11 \\ 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 10 \end{pmatrix}$$

再按对应分量相减，得

$$2\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 22-8 \\ 10-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

答：$\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$。

4. [2024 · February/March 0580/42 Q7(a)(ii)(a)]

提示：将上、下对应分量分别按原顺序相减。

(a) $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(ii) **(a)** Find $\mathbf{p} - \mathbf{q}$.

(a) 已知

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(ii) (a) 求 $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$。

✓ **答案**

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix}$$

解析 对应分量分别相减，得

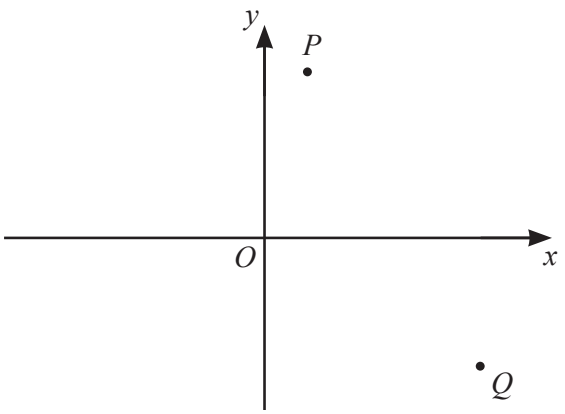
$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 8-(-4) \\ -5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+4 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix}$$

答：$\begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix}$。

5. [2024 · May/June 0580/41 Q5(a)(i)]

提示：先确定箭头的起点和终点，再分别求横、纵坐标的差。

(a) P is the point (1, 7).
Q is the point (5, –5).



NOT TO SCALE

(i) Find $\overrightarrow{PQ}$.

(a) 点 P 的坐标为 $(1, 7)$。
点 Q 的坐标为 $(5, -5)$。

图中 O 为坐标原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，标有点 P 和 Q。图形不按比例绘制。

(i) 求 $\overrightarrow{PQ}$。

✓ **答案**

$$\begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix}$$

解析 由终点坐标减去起点坐标，得

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}5-1\\-5-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix}$$

答：$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix}$。

7.7 把每个分量乘以同一个数

题型 1 把每个分量乘以同一个数（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **列向量的分量：**题中的向量写成列向量。

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

上、下两个数称为向量的_____。上分量是 -1，下分量是 3。

② **数乘逐项计算：**所求 $2\boldsymbol{v}$ 表示向量 $\boldsymbol{v}$ 的 2 倍。上、下每个分量都乘以_____，位置保持不变。

$$2\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2\times(-1)\\2\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$$

③ **先乘后按位减：**以求 $\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{v}$ 为例，先算出 $2\boldsymbol{v}$。再将上、下对应分量分别_____。

$$\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-(-2)\\5-6\end{pmatrix}$$

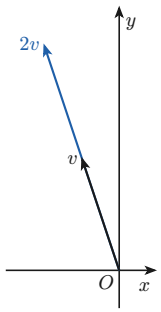
④ **减去负数变号：**上分量出现 $2-(-2)$，减去 -2 等于加上_____。

$$2-(-2)=2+2=4$$

$$\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$$

填空：①分量　②2　③相减　④2

数乘改变长度并保留或反转方向

	图像	数量关系
同一关系		$v=(-1,3)$，$2v=(-2,6)$。

点石成金　题目出现求列向量的几倍或含倍数的向量差时，先把所乘向量的每个分量乘以给定倍数。

例 1　[2023 · February/March 0580/12 Q8(b)]

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

Find

(b) $2\mathbf{v}$.

已知

$v=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$，$y=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

求：

(b) $2v$。[1 分]

解答　把 v 的两个分量分别乘以 2，得

$$2v=\begin{pmatrix}2\times(-1)\\2\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$$

答：$\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$。

方法：先看向量前的倍数，再从上分量起逐项相乘，保留原位置。

辨析：数乘是每项同乘，向量相减是同位置作差。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/23 Q10(a)]

提示：看倍数是否乘遍上下两项，再核对负分量的符号。

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$$

(a) Find $3\overrightarrow{AB}$

已知

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$

(a) 求 $3\overrightarrow{AB}$。[1 分]

✓ **答案**　$\begin{pmatrix}21\\-9\end{pmatrix}$

解析　把 $\overrightarrow{AB}$ 的两个分量分别乘以 3，得

$$3\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\times7\\3\times(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\-9\end{pmatrix}$$

答：$\begin{pmatrix}21\\-9\end{pmatrix}$。

2. [2023 · May/June 0580/11 Q11]
提示：先看数乘部分，再按行相减，核对减负数的变号。

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$$

Work out $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$.

已知

$a=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

计算 $a-2b$。[2 分]

✓ **答案** $\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$

解析 先把 b 的两个分量分别乘以 2，得

$$2b=\begin{pmatrix}2\times(-2)\\2\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$$

再按对应分量相减，得

$$a-2b=\begin{pmatrix}3-(-4)\\7-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$$

答：$\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$。

3. [2023 · October/November 0580/13 Q10(b)]
提示：看上下分量各自的符号，与正倍数相乘后核对。

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}13\\-2\end{pmatrix}$$

Work out.

(b) $3\mathbf{c}$

已知

$a=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$，$c=\begin{pmatrix}13\\-2\end{pmatrix}$

计算：

(b) $3c$。[1 分]

✓ **答案** $\begin{pmatrix}39\\-6\end{pmatrix}$

解析 把 c 的两个分量分别乘以 3，得

$$3c=\begin{pmatrix}3\times13\\3\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39\\-6\end{pmatrix}$$

答：$\begin{pmatrix}39\\-6\end{pmatrix}$。

4. [2023 · May/June 0580/12 Q15(a)]
提示：对照原列向量，核对每项的倍数与上下位置。

F is the point $(1,-4)$, $\overrightarrow{FG}=\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$ and $\overrightarrow{GH}=\begin{pmatrix}-12\\35\end{pmatrix}$.

Find

(a) $3\overrightarrow{FG}$

点 F 的坐标为 $(1,-4)$，且
$\overrightarrow{FG}=\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{GH}=\begin{pmatrix}-12\\35\end{pmatrix}$

求：
(a) $3\overrightarrow{FG}$。[1 分]

✓ **答案** $\begin{pmatrix}24\\-9\end{pmatrix}$

解析 把 $\overrightarrow{FG}$ 的两个分量分别乘以 3，得

$$3\overrightarrow{FG}=\begin{pmatrix}3\times 8\\3\times(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\-9\end{pmatrix}$$

答：$\begin{pmatrix}24\\-9\end{pmatrix}$。

5. [2025 · May/June 0580/23 Q12(a)]
提示：把向量的上、下两个分量分别乘以向量前的数。

(a) $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

Find $5\mathbf{v}$.

(a) 已知
$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

求 $5\boldsymbol{v}$。

✓ **答案**

$$\begin{pmatrix}10\\-15\end{pmatrix}$$

解析 把两个分量分别乘以 5，得

$$5\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}5\times 2\\5\times(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-15\end{pmatrix}$$

答：$\begin{pmatrix}10\\-15\end{pmatrix}$。

7.8 先确定两个分量，再用勾股定理求向量模

题型 1 先确定两个分量，再用勾股定理求向量模（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **分量与长度：**题中向量记为$\boldsymbol{v}$，横、纵分量分别为-4、5。

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$$

向量的模是它的_____，不小于0。

② **负数的平方：**分量为负数时，平方须连同负号一起计算。

$$(-4)^2=(-4)\times(-4)=_____$$

③ **勾股求模：**横、纵方向互相垂直，用勾股定理求模。记$|\boldsymbol{v}|$为向量的模。

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{(-4)^2+5^2}$$

一般地，横、纵分量为a、b时，

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{a^2+b^2}$$

④ **精度保留：**需要近似值时，先算出更多位，再按要求舍入。

$$\sqrt{5}=2.2360679...$$

保留3位有效数字

$\sqrt{5}\approx 2.24$

保留1位小数

$\sqrt{5}\approx 2.2$

⑤ **反向向量：**箭头上两端字母的次序交换，两个分量都变号。例如，已知下列向量，反向后得

$$\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$$

⑥ **沿路径相加：**O表示原点，A的位置向量就是$\overrightarrow{OA}$。续上例，若位置向量如下，沿O到A再到B相加。

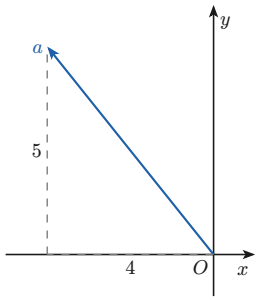
$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

同一位置的分量分别相加，得到目标向量的两个分量。

填空：①长度　②16

两个分量构成直角三角形

	图像	数量关系
同一关系		$\lvert a\rvert=\sqrt{(-4)^2+5^2}=\sqrt{41}$。

点石成金　题目出现求向量的模时，先确定目标向量的两个分量，再将两分量平方相加后开方。

例 1　[2023 · May/June 0580/21 Q16(a)]

(a) Find the magnitude of the vector $\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$.

(a) 求向量$\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$的模。

解答　由向量的两个分量，用勾股定理得

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$\sqrt{41} = 6.403124... \approx 6.40$$

答：向量的模约为6.40。

方法：先看目标向量的横、纵分量，从各自平方起手。

辨析：分量是带方向的数值，模是不小于零的长度。

拓展：相反向量的两个分量都变号，模保持不变。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/22 Q9(d)]

提示：看横、纵分量，负分量连同符号一起平方。

F is the point $(1, -4)$, $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$ and $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix}-12\\35\end{pmatrix}$.

Find

(d) the magnitude of vector $\overrightarrow{GH}$.

点F的坐标为$(1, -4)$，且$\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix}-12\\35\end{pmatrix}$。

求：

(d) 向量$\overrightarrow{GH}$的模。

✓ **答案**

37

解析　由$\overrightarrow{GH}$的两个分量，用勾股定理得

$$\left|\overrightarrow{GH}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 35^2} = \sqrt{144 + 1225} = \sqrt{1369} = 37$$

答：向量$\overrightarrow{GH}$的模为37。

2. [2025 · October/November 0580/23 Q8(b)]
提示：将两个分量分别平方，再求平方和的非负平方根。

$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) Find $\left|\overrightarrow{DE}\right|$.

已知
$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) 求 $\left|\overrightarrow{DE}\right|$。

✓ **答案**

5

解析 由勾股定理，得

$$\left|\overrightarrow{DE}\right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

答：$\left|\overrightarrow{DE}\right| = 5$。

3. [2023 · October/November 0580/23 Q10(b)]
提示：看两个分量，平方和开方后再按精度要求舍入。

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) Find $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$。
(b) 求$\left|\overrightarrow{AB}\right|$。

✓ **答案**

7.62

解析 由$\overrightarrow{AB}$的两个分量，用勾股定理得

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$$

$$\sqrt{58} = 7.615773... \approx 7.62$$

答：$\left|\overrightarrow{AB}\right| \approx 7.62$。

4. [2023 · May/June 0580/23 Q12]
提示：先按对路径上的箭头方向，再求目标位置向量的分量。

The position vector of A is $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ and $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Show that $\left|\overrightarrow{OB}\right| = 5.1$, correct to 1 decimal place.

A的位置向量为$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$，且$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$。
证明：$\left|\overrightarrow{OB}\right| = 5.1$，精确到1位小数。

✓ **答案** 5.1（精确到1位小数）

解析 由A的位置向量，得

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

沿O到A再到B的路径相加，反向向量变号，得

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

由勾股定理，得

$$\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$

$$\sqrt{26} = 5.099019... \approx 5.1$$

答：$\left|\overrightarrow{OB}\right|$精确到1位小数为5.1，得证。

5. [2025 · May/June 0580/23 Q12(b)]

提示：先由点的坐标和已知位移求出另一端点的坐标。

(b) H is the point $(-3, 8)$ and K is the point $(-4, 0)$.

$$\overrightarrow{HJ} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Find $\left|\overrightarrow{JK}\right|$.

(b) 点 H 的坐标为 $(-3, 8)$，点 K 的坐标为 $(-4, 0)$。

$$\overrightarrow{HJ} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

求 $\left|\overrightarrow{JK}\right|$。

✓ **答案**

10

解析 由起点坐标加上位移分量，得点 J 的横、纵坐标分别为

$$-3 + 7 = 4$$

$$8 + (-2) = 6$$

所以点 J 的坐标为 $(4, 6)$。

由终点坐标减去起点坐标，得

$$\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} -4 - 4 \\ 0 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

由勾股定理，得

$$\left|\overrightarrow{JK}\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

答：$\left|\overrightarrow{JK}\right| = 10$。

7.9 沿路径相加，用已知向量表示目标向量

题型 1　沿路径相加，用已知向量表示目标向量（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **反向取负：**例图中，$\overrightarrow{OC}$ 表示从 O 到 C 的向量。交换起点与终点，所得向量与原向量互为相反数。 $\overrightarrow{CO}=-\overrightarrow{OC}=$ _____

② **中点倍数：**A 是线段 OB 的中点。$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 同向，整段向量是半段向量的两倍。$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}=$ _____ $\boldsymbol{x}$

③ **沿路相加：**从 C 到 B，可经过点 O。按行进方向作路径相加，中间点衔接。

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}$$

④ **分点位置：**以 O 为原点，M,N 的位置向量分别为 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$。$R$ 在线段 MN 上，且 $MR:RN=1:2$。先求整段，再乘分点比例，最后加起点的位置向量。

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$$

$\overrightarrow{MR}=$ _____ $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})$

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MR}=\boldsymbol{p}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})=\frac{2}{3}\boldsymbol{p}+\frac{1}{3}\boldsymbol{q}$$

⑤ **直线上点表示：**以 O 为原点，平行四边形 $ODEF$ 中有以下向量。L 是 DE 的中点，S 在 FE 经过 E 的延长线上。设 $\overrightarrow{FS}=t\boldsymbol{u}$，沿路径求位置向量。

$$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{u},\quad \overrightarrow{OF}=\boldsymbol{v}$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OF}=\boldsymbol{v}$$

$$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}$$

$$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{u}$$

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FS}=\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{u}$$

⑥ **交点系数比较：**若 S 还在 OL 的延长线上，设 $\overrightarrow{OS}=k\overrightarrow{OL}$。$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 不平行，两种表示中对应向量的系数相等。

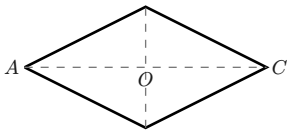
$$k\left(\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\right)=\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{u}$$

$\boldsymbol{u}$ 的系数	$\boldsymbol{v}$ 的系数
$k=t$	$\frac{k}{2}=1$

$$k=2,\quad t=2$$

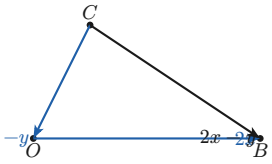
$$\overrightarrow{OS}=2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$$

⑦ **菱形对角线的中点：**菱形的两条对角线互相平分。两条对角线交于O时，$OA=OC$且$OB=OD$；沿每条对角线看，交点都是两端点的中点。例如$AC=4$，则$AO=OC=2$。



填空：①$-\boldsymbol{y}$　②2　③$\frac{1}{3}$

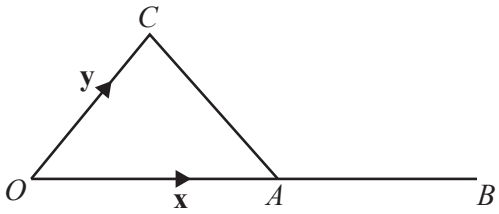
反向向量与首尾相接的路径

	图像	数量关系
同一关系		$\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{CO}+\boldsymbol{OB}=-y+2x$。

点石成金　题目出现已知向量、中点或分点比例，并要求另一向量时，先把目标向量写成沿路径相加的形式。

例 1　[2023 · May/June 0580/21 Q16(b)]

(b)



NOT TO SCALE

The diagram shows a triangle OAC.
A is the midpoint of the straight line OB.
$\overrightarrow{OA}=\mathbf{x}$ and $\overrightarrow{OC}=\mathbf{y}$.

Find $\overrightarrow{CB}$ in terms of $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$.

(b) 图示三角形 OAC。图形不按比例绘制。
A 是线段 OB 的中点。
$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{x}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{y}$。
求 $\overrightarrow{CB}$，用 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 表示。

解答　由 A 是线段 OB 的中点，得
$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{x}$。
反向取负，得
$\overrightarrow{CO}=-\overrightarrow{OC}=-\boldsymbol{y}$。
沿路径 COB 相加，得
$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$。
答：$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$。

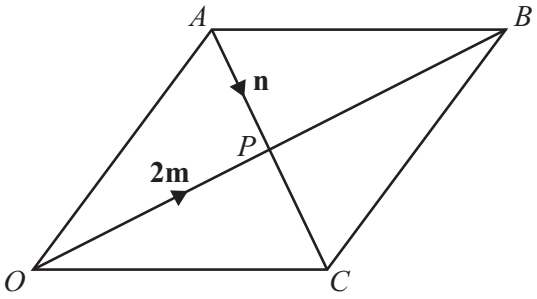
方法：先看 A 的中点标记，再沿 C、O、B 拆出两段向量。

辨析：向量 OC 是从 O 到 C，向量 CO 是从 C 到 O，方向相反。

针对练习

1. [2025 · May/June 0580/21 Q21(a)(ii)]

提示：先由菱形的对角线性质确定交点在对角线上的位置。



NOT TO SCALE

$OABC$ is a rhombus and O is the origin.
The diagonals of the rhombus intersect at P.
$\overrightarrow{OP} = 2\mathbf{m}$ and $\overrightarrow{AP} = \mathbf{n}$.

(a) Find, in terms of **m** and **n**, in its simplest form

(ii) $\overrightarrow{OC}$.

图示菱形 $OABC$，O 为原点。菱形的两条对角线 OB 与 AC 相交于点 P。图形不按比例绘制。

$$\overrightarrow{OP} = 2\boldsymbol{m},\quad \overrightarrow{AP} = \boldsymbol{n}$$

(a)(ii) 用 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$，结果写成最简形式。

✓ **答案**

$$2\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$$

解析 菱形的对角线互相平分，所以 P 是 AC 的中点。

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AP} = \boldsymbol{n}$$

沿路径 OPC 相加，得

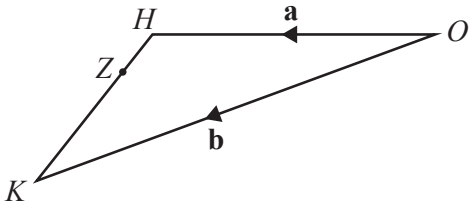
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} = 2\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$$

答：$\overrightarrow{OC} = 2\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$。

2. [2023 · February/March 0580/42 Q4(b)]

提示：先把分段比换成占整段的比例，再沿 O、H、Z 相加。

(b)



NOT TO SCALE

The diagram shows triangle OHK, where O is the origin.
The position vector of H is **a** and the position vector of K is **b**.
Z is the point on HK such that $HZ : ZK = 2 : 5$.

Find the position vector of Z, in terms of **a** and **b**.
Give your answer in its simplest form.

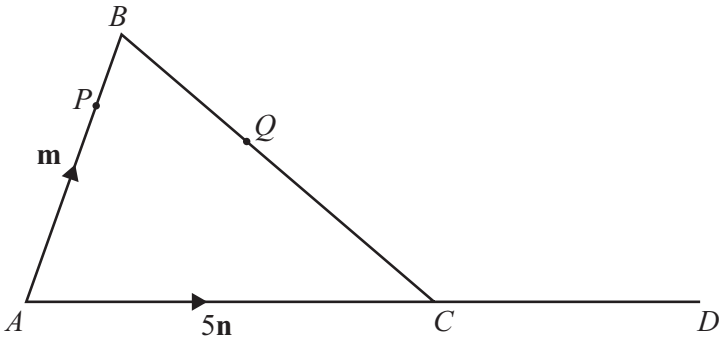
(b) 图示三角形 OHK，其中 O 是原点。图形不按比例绘制。
H 的位置向量为 $\boldsymbol{a}$，K 的位置向量为 $\boldsymbol{b}$。
Z 是线段 HK 上的一点，且 $HZ : ZK = 2 : 5$。
求 Z 的位置向量，用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示。答案写成最简形式。

✓ **答案**

$$\frac{5}{7}\boldsymbol{a} + \frac{2}{7}\boldsymbol{b}$$

解析 由 H, K 的位置向量，得
$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$。
由 $HZ : ZK = 2 : 5$，得
$\overrightarrow{HZ} = \frac{2}{2+5}\overrightarrow{HK} = \frac{2}{7}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$。
沿路径 OHZ 相加，得
$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HZ} = \boldsymbol{a} + \frac{2}{7}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$。
$\overrightarrow{OZ} = \frac{5}{7}\boldsymbol{a} + \frac{2}{7}\boldsymbol{b}$。
答：Z 的位置向量为 $\frac{5}{7}\boldsymbol{a} + \frac{2}{7}\boldsymbol{b}$。

3. [2026 · May/June 0580/21 Q25(a)(ii)]
提示：沿路径 P B Q，分别表示两段向量。



NOT TO SCALE

The diagram shows triangle ABC and straight line ACD.
P lies on AB and $AP : PB = 4 : 1$.
Q lies on BC and $BQ = \frac{2}{5}BC$.
$\overrightarrow{AB} = \mathbf{m}$ and $\overrightarrow{AC} = 5\mathbf{n}$.

(a) In each part, give your answer in terms of **m** and **n** in its simplest form.

(i) Find $\overrightarrow{BC}$.

(ii) Find $\overrightarrow{PQ}$.

图示三角形 ABC，A, C, D 在同一直线上。图形不按比例绘制。
P 在线段 AB 上，且 $AP : PB = 4 : 1$。
Q 在线段 BC 上，且 $BQ = \frac{2}{5}BC$。
$\overrightarrow{AB} = m$，$\overrightarrow{AC} = 5n$

(a) 各小问的答案均用 m 和 n 表示，并写成最简形式。
(i) 求 $\overrightarrow{BC}$。
(ii) 求 $\overrightarrow{PQ}$。

✓ **答案**

$$2\boldsymbol{n} - \frac{1}{5}\boldsymbol{m}$$

解析 由 $AP:PB=4:1$，得

$$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{4+1}\overrightarrow{AB}=\frac{4}{5}\boldsymbol{m}$$

$$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{m}-\frac{4}{5}\boldsymbol{m}=\frac{1}{5}\boldsymbol{m}$$

沿路径 BAC 相加，得

$$\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}$$

由 $BQ=\frac{2}{5}BC$，且两向量同向，得

$$\overrightarrow{BQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{5}(5\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})=2\boldsymbol{n}-\frac{2}{5}\boldsymbol{m}$$

沿路径 PBQ 相加，得

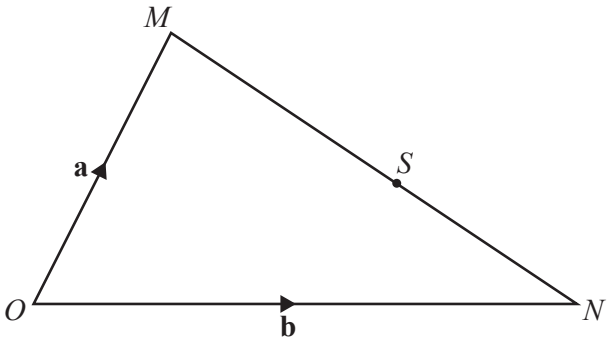
$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{5}\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}-\frac{2}{5}\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{n}-\frac{1}{5}\boldsymbol{m}$$

答：$\overrightarrow{PQ}=2\boldsymbol{n}-\frac{1}{5}\boldsymbol{m}$。

4. [2024 · February/March 0580/42 Q7(b)]

提示：先表示整段 对应，再由分点比例表示 对应。

(b)



NOT TO SCALE

In triangle OMN, O is the origin, $\overrightarrow{OM}=\mathbf{a}$ and $\overrightarrow{ON}=\mathbf{b}$.
S is a point on MN such that $MS:SN=5:3$.

Find, in terms of **a** and/or **b**, the position vector of S.
Give your answer in its simplest form.

(b) 在三角形 OMN 中，O 是原点。图形不按比例绘制。

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$$

S 是线段 MN 上的一点，且 $MS:SN=5:3$。
求 S 的位置向量，用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 中的一个或两个表示。答案写成最简形式。

✓ **答案**

$$\frac{3}{8}\boldsymbol{a}+\frac{5}{8}\boldsymbol{b}$$

解析 由两点的位置向量，得

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

由 $MS:SN=5:3$，得

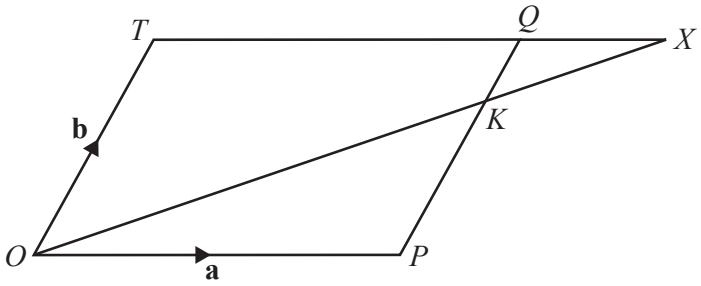
$$\overrightarrow{MS}=\frac{5}{5+3}\overrightarrow{MN}=\frac{5}{8}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

沿路径 OMS 相加，得

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MS}=\boldsymbol{a}+\frac{5}{8}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{3}{8}\boldsymbol{a}+\frac{5}{8}\boldsymbol{b}$$

答：S 的位置向量为 $\frac{3}{8}\boldsymbol{a}+\frac{5}{8}\boldsymbol{b}$。

5. [2023 · October/November 0580/22 Q26]
提示：沿 OK 与 TX 两条直线表示交点，再比同名向量的系数。



NOT TO SCALE

The diagram shows a parallelogram $OPQT$.
The position vector of P is **a** and the position vector of T is **b**.

K is on PQ so that $PK:KQ=3:1$.
The lines OK and TQ are extended to meet at X.

Find the position vector of X in terms of **a** and **b**.
Give your answer in its simplest form.

图示平行四边形 $OPQT$。图形不按比例绘制。
P 的位置向量为 $\boldsymbol{a}$，T 的位置向量为 $\boldsymbol{b}$。
K 在线段 PQ 上，且 $PK:KQ=3:1$。
直线 OK 与 TQ 延长后相交于点 X。
求 X 的位置向量，用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示。答案写成最简形式。

✓ **答案**

$$\boldsymbol{b}+\frac{4}{3}\boldsymbol{a}$$

解析 由 $OPQT$ 是平行四边形，得
$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OT}=\boldsymbol{b}$，
$\overrightarrow{TQ}=\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$。
由 $PK:KQ=3:1$，得
$\overrightarrow{PK}=\frac{3}{3+1}\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$。
$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PK}=\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$。
由 O,K,X 共线，设 $\overrightarrow{OX}=k\overrightarrow{OK}$，得
$\overrightarrow{OX}=k\boldsymbol{a}+\frac{3k}{4}\boldsymbol{b}$。
由 T,Q,X 共线，设 $\overrightarrow{TX}=t\boldsymbol{a}$，得
$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TX}=\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}$。
$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不平行，比较系数得
$k=t$，　$\frac{3k}{4}=1$。

$k=\frac{4}{3},\quad t=\frac{4}{3}$。

因此

$\overrightarrow{OX}=\boldsymbol{b}+\frac{4}{3}\boldsymbol{a}$。

答：X 的位置向量为 $\boldsymbol{b}+\frac{4}{3}\boldsymbol{a}$。

第八章 概率

Chapter 8

8.1 有利结果数除以所有等可能结果数，求概率

题型 1 有利结果数除以所有等可能结果数，求概率（Core）

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **确定有利结果：**本例中，符合“喜欢谜题书”的学生有 18 人，这些是有利结果。若按质数筛选，质数须大于 1，且仅有两个正因数。2 的正因数是 1, 2，故为质数；1 仅有一个正因数，不是质数。

② **等可能求概率：**随机选一名学生，每人被选中的可能性相同。用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率。符合条件的人数作_____，全部人数作分母。

$$P(A)=\frac{\text{有利结果数}}{\text{所有等可能结果数}}$$

$$P(\text{喜欢谜题书})=\frac{18}{30}=\frac{18\div 6}{30\div 6}=\frac{3}{5}=0.6$$

$$0.6\times 100\%=60\%$$

③ **按条件合频数：**频数表中，先筛选符合条件的行，再合计这些行的频数。用 N 表示总频数，它是各行频数的和。本例也可按各类书的选择人数筛选。

$$N=8+18+4=30$$

人数超过 5，不含 5
笑话书、谜题书符合条件
$P=\frac{8+18}{30}=\frac{13}{15}$

人数不超过 5，包含 5
诗歌书符合条件
$P=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

④ **减去不符人数：**本例求不喜欢谜题书的概率，可从总数中减去喜欢谜题书的人数。两件事互为对立事件，也可先求相反事件的概率，再用 1 减去。韦恩图某圈有 8 人，其中交集有 3 人，求只在该圈内的人数也用减法。

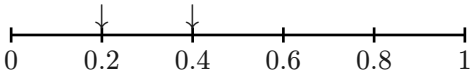
$$P(\text{不喜欢谜题书})=\frac{30-18}{30}=\frac{2}{5}$$

$$P(\text{不喜欢谜题书})=1-P(\text{喜欢谜题书})=1-\frac{3}{5}=0.4$$

$$\text{只在该圈内的人数}=8-3=5$$

⑤ **标尺对应位置：**将概率标尺从 0 到 1 五等分，每格的大小如下。0.2 标在第一格，本例所得的 0.4 标在第二格。同一标尺若分成 10 格，每格的大小也用全长除以格数求得。

$$1\div 5=\frac{1}{5}=_____$$



$$1 \div 10 = 0.1$$

⑥ **没有有利结果：**卡片题的七张卡片上没有数字 8，抽到 8 的有利结果数为 0。没有有利结果的事件称为不可能事件。

$$P(\text{抽到 } 8) = \frac{0}{7} = \underline{\qquad}$$

填空：①分子　②0.2　③0

点石成金　题目出现随机选取及人数、卡片、频数表或韦恩图时，先数符合所求条件的个数，再除以总数。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q2(a)(iii)]

(a) Manjit asks 30 students whether they prefer joke books, puzzle books or poetry books. The results are shown in the table.

Type of book	Number of students	Pie chart sector angle
Joke	8	
Puzzle	18	
Poetry	4	

(iii) One of the students is chosen at random.

Find the probability that this student prefers puzzle books.

(a) 曼吉特询问 30 名学生更喜欢笑话书、谜题书还是诗歌书，结果如下表所示。

书籍种类	学生人数	饼图扇形圆心角
笑话书	8	
谜题书	18	
诗歌书	4	

(iii) 从这些学生中随机选取一人。
求这名学生更喜欢谜题书的概率。

解答　每名学生被选中的可能性相同，喜欢谜题书的有 18 人。

$$P(\text{喜欢谜题书}) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

答：所求概率为 $\frac{3}{5}$。

方法：看各类书的选择人数，先圈出谜题书人数，再核对总人数。

辨析：有利结果数是符合条件的人数，总结果数是全体可选学生的人数。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/13 Q19(a)]
提示：逐张比较卡片数字与门槛，等于门槛的不计入。

(a) A bag contains these cards.

1	7	3	9	4	5	2

One of these cards is picked at random.

Find the probability that the number on the card is greater than 3.

(a) 一个袋子里装有以下卡片：

$1, 7, 3, 9, 4, 5, 2$

从中随机抽取一张卡片。求卡片上的数字大于 3 的概率。

✓ **答案** $\frac{4}{7}$

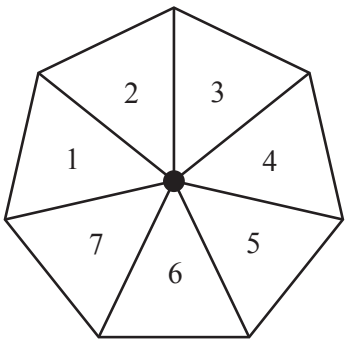
解析 大于 3 的卡片数字为 $7, 9, 4, 5$，共 4 个。每张卡片被抽到的可能性相同，共有 7 张卡片。

$$P(\text{数字大于 } 3) = \frac{4}{7}$$

答：所求概率为 $\frac{4}{7}$。

2. [2023 · May/June 0580/31 Q9(a)]
提示：看转盘上的数，按正因数的个数筛选质数。

(a) Maria spins a fair 7-sided spinner numbered 1 to 7.



Explain why the probability that the spinner lands on a prime number is $\frac{4}{7}$.

(a) 玛丽亚转动一个公平的七边形转盘，转盘标有数字 1 至 7。图中七个区域分别标有 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$。说明转盘停在质数上的概率为什么是 $\frac{4}{7}$。

✓ **答案** 共有 7 个等可能结果，其中质数为 $2, 3, 5, 7$，所以概率为 $\frac{4}{7}$。

解析 转盘公平，标有 1 至 7，因此共有 7 个等可能结果。其中质数为 $2, 3, 5, 7$，共 4 个。

$$P(\text{落在质数上}) = \frac{4}{7}$$

答：7 个等可能结果中有 4 个是质数，故所求概率为 $\frac{4}{7}$。

3. [2023 · May/June 0580/41 Q3(a)(ii)]
提示：对照质量分组的边界，合计超过门槛的频数。

(a) The table shows information about the mass of each of 1000 eggs.

Mass (m grams)	$40 < m \leqslant 50$	$50 < m \leqslant 56$	$56 < m \leqslant 64$	$64 < m \leqslant 70$
Frequency	126	520	154	200

(ii) An egg is picked at random from the 1000 eggs.

Find the probability that this egg has a mass greater than 56 g.
Give your answer as a fraction in its simplest form.

3（a）下表给出了 1000 个鸡蛋各自质量的信息，其中 m 表示质量，单位为克。

质量（m 克）	$40 < m \leq 50$	$50 < m \leq 56$	$56 < m \leq 64$	$64 < m \leq 70$
频数	126	520	154	200

（ii）从这 1000 个鸡蛋中随机选取一个。
求这个鸡蛋的质量大于 56 g 的概率。答案用最简分数表示。

✓ **答案** $\frac{177}{500}$

解析 质量大于 56 g 的鸡蛋在后两组中，其数量为

$$154 + 200 = 354$$

从 1000 个鸡蛋中随机选取一个，得

$$P(m > 56) = \frac{354}{1000} = \frac{177}{500}$$

答：所求概率为 $\frac{177}{500}$。

4. [2023 · May/June 0580/32 Q2(b)(ii)]
提示：比较字母数与门槛，分清字母数和单词数量。

(b) Grace also counts the number of letters in each word of another paragraph.
Her results are shown in the table.

Number of letters	1	2	3	4	5	6
Frequency	10	18	9	6	5	2

(ii) She picks one of these words at random.

Find the probability that it has more than three letters.

（b）格蕾丝还统计了另一段文字中每个单词的字母数，结果如下表所示。

字母数	1	2	3	4	5	6
频数	10	18	9	6	5	2

（ii）她从这些单词中随机选取一个。
求这个单词的字母数多于 3 的概率。

✓ **答案** $\frac{13}{50}$

解析 字母数多于 3 的单词，其字母数为 $4, 5, 6$，数量为

$$6 + 5 + 2 = 13$$

单词总数为

$$10+18+9+6+5+2=50$$

所以

$$P(\text{字母数多于 3})=\frac{13}{50}$$

答：所求概率为 $\frac{13}{50}$。

5. [2023 · May/June 0580/42 Q4(b)(i)]
提示：看身高分组的端点，核对哪组包含指定上限。

The table shows information about the heights of 80 children.

Height (h metres)	$1.2 < h \leqslant 1.4$	$1.4 < h \leqslant 1.5$	$1.5 < h \leqslant 1.65$	$1.65 < h \leqslant 1.8$	$1.8 < h \leqslant 1.9$
Frequency	2	13	24	32	9

(b) (i) One of these children is chosen at random.
Calculate the probability that they have a height of 1.4 m or less.

4 下表给出了 80 名儿童的身高信息，其中 h 表示身高，单位为米。

身高（h 米）	$1.2 < h \leq 1.4$	$1.4 < h \leq 1.5$	$1.5 < h \leq 1.65$	$1.65 < h$	
频数	2	13	24	32	9

(b)（i）从这些儿童中随机选取一人。
计算这名儿童的身高为 1.4 m 或以下的概率。

✓ **答案** $\frac{1}{40}$

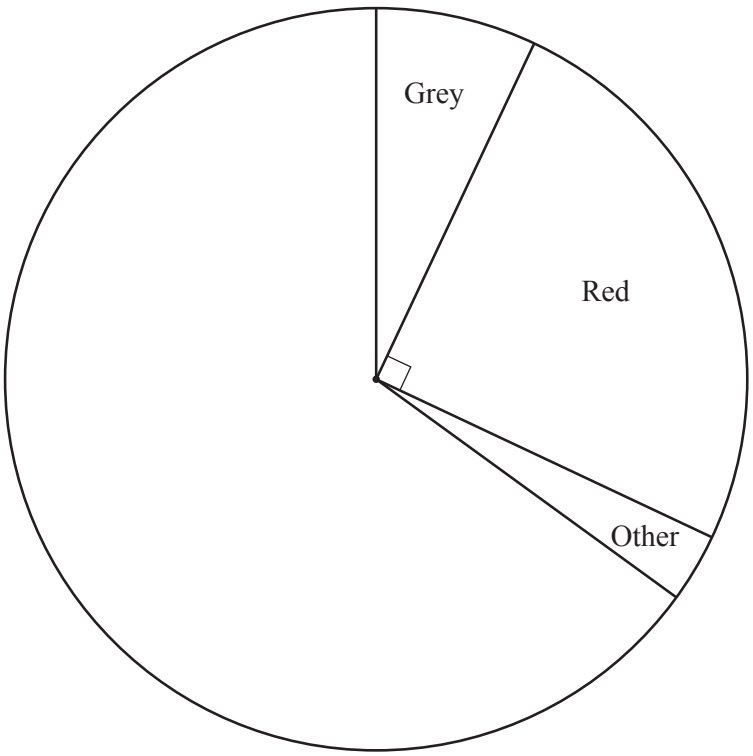
解析 身高不超过 1.4 m 的儿童属于第一组，共有 2 人。儿童总数为 80，所以

$$P(h \leq 1.4)=\frac{2}{80}=\frac{1}{40}$$

答：所求概率为 $\frac{1}{40}$。

6. [2023 · October/November 0580/32 Q5(d)]
提示：先用总数减去灰色汽车数，得到有利结果数。

Heidi records the colour of each of 500 cars crossing a bridge.
The pie chart shows some of this information.



(b) 35 cars are grey.

(d) Find the probability that a car chosen at random is **not** grey.

Give your answer as a fraction in its simplest form.

Heidi 记录经过一座桥的 500 辆汽车的颜色。饼图显示部分信息，标有灰色、红色和其它。35 辆汽车是灰色。（d）随机选出一辆汽车，求它不是灰色的概率。答案写成最简分数。

✓ **答案** $\frac{93}{100}$

解析 非灰色汽车共有 $500-35=465$辆。因此概率为 $\frac{465}{500}=\frac{93}{100}$ 答：$\frac{93}{100}$。

7. [2023 · October/November 0580/32 Q7(b)(i)(a)]
提示：先比黄色卷数与总卷数，再对照标尺每格大小。

Elize, Lily and Marco start a business.

(b) (i) Lily buys 20 rolls of ribbon.
8 are red, 6 are blue, 4 are yellow and 2 are pink.
A roll of ribbon is chosen at random.

On the probability scale, draw an arrow (↓) to show the probability that this roll is

(a) yellow



伊莱兹、莉莉和马尔科合伙创业。
（b）（i）莉莉买了 20 卷丝带，其中 8 卷是红色，6 卷是蓝色，4 卷是黄色，2 卷是粉红色。
随机选取一卷丝带。在概率标尺上画一个向下的箭头，表示选中以下颜色丝带的概率：

(a) 黄色。
标尺标有 0, 0.5, 1，从 0 到 1 分成 10 个相等的小格。

✓ **答案** 在 0.2 处画向下的箭头。

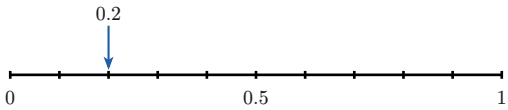
解析 黄色丝带有 4 卷，丝带总数为 20 卷。

$$P(\text{黄色}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0.2$$

标尺从 0 到 1 分成 10 个相等的小格，每格为 0.1。

$$0.2 \div 0.1 = 2$$

答：在 0.2 处画向下的箭头，即从 0 起的第 2 格处。



8. [2023 · October/November 0580/32 Q7(b)(i)(b)]
提示：先看红色占比，求其补集后再对照标尺格距。

Elize, Lily and Marco start a business.

(b) (i) Lily buys 20 rolls of ribbon.
8 are red, 6 are blue, 4 are yellow and 2 are pink.
A roll of ribbon is chosen at random.

On the probability scale, draw an arrow (↓) to show the probability that this roll is

(b) not red



伊莱兹、莉莉和马尔科合伙创业。
(b) (i) 莉莉买了 20 卷丝带，其中 8 卷是红色，6 卷是蓝色，4 卷是黄色，2 卷是粉红色。
随机选取一卷丝带。在概率标尺上画一个向下的箭头，表示选中以下颜色丝带的概率：
(b) 不是红色。
标尺标有 0, 0.5, 1，从 0 到 1 分成 10 个相等的小格。

✓ **答案** 在 0.6 处画向下的箭头。

解析 红色丝带有 8 卷，丝带总数为 20 卷。

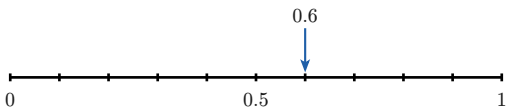
$$P(\text{红色}) = \frac{8}{20} = 0.4$$

$$P(\text{不是红色}) = 1 - 0.4 = 0.6$$

标尺每个小格为 0.1。

$$0.6 \div 0.1 = 6$$

答：在 0.6 处画向下的箭头，即从 0 起的第 6 格处。



9. [2023 · October/November 0580/11 Q23]
提示：核对左手人数与调查总人数，比较两数的公因数。

The table shows the number of people in a town who are left-handed and the number who are right-handed.

	Left-handed	Right-handed	Total
Number of people	8400	48600	57000

Write down the probability that a person, chosen at random, is left-handed.

下表给出了某镇惯用左手和惯用右手的人数。

	惯用左手	惯用右手	合计
人数	8400	48600	57000

写出从该镇随机选取一人，此人惯用左手的概率。

✓ **答案** $\frac{14}{95}$

解析 惯用左手的有 8400 人，总人数为 57000。

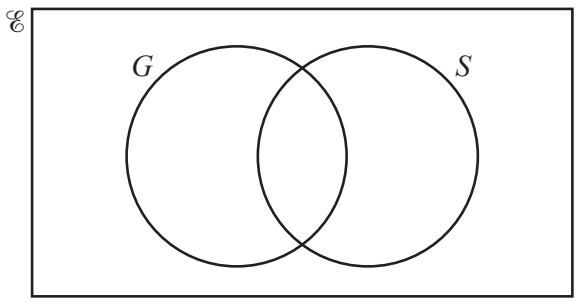
$$P(\text{惯用左手}) = \frac{8400}{57000} = \frac{14}{95}$$

答：所求概率为 $\frac{14}{95}$。

10. [2023 · October/November 0580/31 Q9(c)(iii)]
提示：看金首饰圈与交集，先排除同时拥有两种的人。

(c) There are 110 people in a group.
$G = \{$ people who own gold jewellery $\}$
$S = \{$ people who own silver jewellery $\}$

18 people own both gold jewellery and silver jewellery.
46 people own gold jewellery.
11 people own no gold jewellery and no silver jewellery.



(iii) One of the 110 people is chosen at random.

Write down the probability that this person owns gold jewellery but not silver jewellery.

(c) 一个群体中有 110 人。集合 G 表示拥有金首饰的人，集合 S 表示拥有银首饰的人。
有 18 人同时拥有金首饰和银首饰，有 46 人拥有金首饰，有 11 人既没有金首饰，也没有银首饰。
韦恩图中，矩形表示全集 $\mathcal{E}$，左圆标为 G，右圆标为 S，两圆相交。
(iii) 从这 110 人中随机选取一人。
写出此人拥有金首饰但没有银首饰的概率。

✓ **答案** $\frac{14}{55}$

解析 拥有金首饰的 46 人中，包含同时拥有银首饰的 18 人。因此，拥有金首饰但没有银首饰的人数为

$$46 - 18 = 28$$

从 110 人中随机选取一人，得

$$P(\text{有金首饰但没有银首饰}) = \frac{28}{110} = \frac{14}{55}$$

答：所求概率为 $\frac{14}{55}$。

11. [2025 · May/June 0580/22 Q4(a)]

提示：先列出七张卡片上的奇数。

1	2	3	4	5	6	7

Samira picks one of these cards at random and replaces it.

(a) Find the probability that she picks an odd number.

七张卡片上的数字分别为 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$。
萨米拉从这些卡片中随机抽取一张，然后放回。
(a) 求她抽到奇数的概率。

✓ **答案**

$$\frac{4}{7}$$

解析 七张卡片被抽到的可能性相同，其中奇数为 $1, 3, 5, 7$，共 4 个。

$$P(\text{抽到奇数}) = \frac{4}{7}$$

答：所求概率为 $\frac{4}{7}$。

8.2 完备事件的概率

题型 1 用所有结果的概率和为 1 补出缺失概率（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **表中全部结果：** 埃里克有红、蓝、绿、黄四种油漆。每次使用其中一种，四种结果互斥。

② **全部概率之和：** 表中列出了全部可能结果，概率和为_____。表中的 x 表示使用黄色的概率。

$$0.3 + 0.35 + 0.13 + x = 1$$

③ **补出缺失概率：** 把已知概率相加，小数点对齐。用 1 减去_____，得到缺失概率。

$$0.3 + 0.35 + 0.13 = 0.30 + 0.35 + 0.13 = 0.78$$

$$x = 1 - 0.78 = 0.22$$

填空：①1　②已知概率的和

点石成金　题目出现列有全部结果的概率表，且只有一项概率空缺时，先把已知概率相加，再用 1 减去所得的和。

例 1　[2023 · May/June 0580/11 Q15]

Eric has four colours of paint.
The table shows the probability that he uses each colour.

Colour	Red	Blue	Green	Yellow
Probability	0.3	0.35	0.13	x

Find the value of x.

埃里克有四种颜色的油漆。
表中给出了他使用每种颜色的概率。

颜色	红色	蓝色	绿色	黄色
概率	0.3	0.35	0.13	x

求 x 的值。

解答　由全部结果的概率和为 1，得

$$0.3 + 0.35 + 0.13 + x = 1$$

$$0.3 + 0.35 + 0.13 = 0.78$$

$$x = 1 - 0.78 = 0.22$$

答：$x = 0.22$。

方法：先核对表中是否列全结果，再合计已知概率。

辨析：互斥是一次不能同时发生，完备是涵盖全部可能结果。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/12 Q12]

提示：看三个已知概率，比较它们的总和与 1 相差多少。

A spinner is spun.
The possible outcomes are A, B, C or D.
The probability of spinning A, C or D is shown in the table.

Letter on spinner	A	B	C	D
Probability	0.2		0.05	0.35

Complete the table.

转动一个转盘。
可能的结果是 A、B、C 或 D。
表中给出了转到 A、C 或 D 的概率。

转盘上的字母	A	B	C	D
概率	0.2		0.05	0.35

补全表格。

✓ **答案**　0.4

解析　由全部结果的概率和为 1，得

$$0.2 + 0.05 + 0.35 = 0.60$$

$$1 - 0.60 = 0.4$$

答：表中 B 对应的概率为 0.4。

2. [2023 · May/June 0580/13 Q21(a)]
提示：看四个已知概率，小数点对齐求和后与 1 比较。

A spinner has five sides.
Each side is painted red, blue, green, yellow or orange.
The table shows some of the probabilities of the spinner landing on each colour.

Colour	Red	Blue	Green	Yellow	Orange
Probability	0.3	0.16	0.18	0.25	

(a) Complete the table.

一个转盘有五个面。
每个面涂成红色、蓝色、绿色、黄色或橙色。
表中给出了转盘停在各颜色上的部分概率。

颜色	红色	蓝色	绿色	黄色	橙色
概率	0.3	0.16	0.18	0.25	

(a) 补全表格。

✓ **答案** 0.11

解析 由全部结果的概率和为 1，得

$$0.3 + 0.16 + 0.18 + 0.25 = 0.89$$

$$1 - 0.89 = 0.11$$

答：表中橙色对应的概率为 0.11。

3. [2024 · May/June 0580/11 Q11(a)]
提示：把取出的玩具分为木制和非木制两种结果。

Geetha has a box of toys.
She picks a toy at random from the box.
The probability that she picks a wooden toy is 0.6 .

(a) Work out the probability that she does not pick a wooden toy.

吉塔有一盒玩具。
她从盒中随机取出一个玩具。
她取到木制玩具的概率为 0.6。
(a) 求她取到的玩具不是木制玩具的概率。

✓ **答案**

0.4

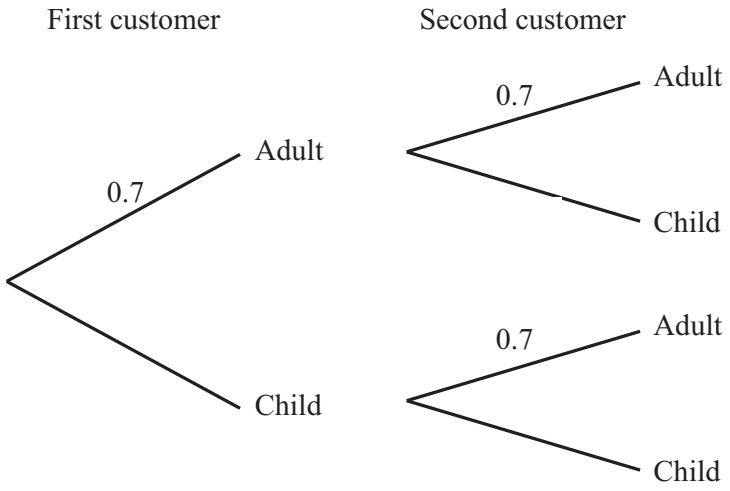
解析 取到木制玩具与取到非木制玩具的概率之和为 1。

$$P(\text{非木制玩具}) = 1 - P(\text{木制玩具}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

答：所求概率为 0.4。

4. [2024 · October/November 0580/31 Q6(c)(iii)(a)]
提示：分别看每个分叉处的成人、儿童两条分支。

(iii) The probability that any customer is an adult is 0.7 .



(a) Complete the tree diagram.

(iii) 任意一位顾客是成人的概率为 0.7。
树状图分为第一位顾客和第二位顾客两层。第一位顾客分为成人、儿童两条分支；这两条分支之后，第二位顾客也各分为成人、儿童两条分支。三条成人分支均标有概率 0.7，三条儿童分支的概率未填写。
(a) 补全树状图。

✓ **答案** 三条儿童分支的概率均填 0.3。

解析 每个分叉处，成人与儿童两条分支的概率之和为 1。

$$P(\text{儿童}) = 1 - P(\text{成人}) = 1 - 0.7 = 0.3$$

三个分叉处的成人分支概率均为 0.7。

答：三条儿童分支的概率均填 0.3。

5. [2024 · October/November 0580/33 Q3(d)]
提示：用全部结果的概率减去下雨的概率。

(d) The probability that it will rain at the wedding is 0.12 .

Find the probability that it will not rain.

(d) 婚礼时下雨的概率为 0.12。
求婚礼时不下雨的概率。

✓ **答案**

0.88

解析 婚礼时下雨与不下雨的概率之和为 1。

$$P(\text{不下雨}) = 1 - P(\text{下雨}) = 1 - 0.12 = 0.88$$

答：所求概率为 0.88。

8.3 用总次数乘概率求预计次数

题型 1 用总次数乘概率求预计次数（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **预计人数：** 600 人参加驾驶考试，通过概率为 0.36。总人数乘通过概率，得到预计通过人数。 $600 \times 0.36 =$ _____（人）

② **通用算式：** 用 n 表示总人数或总次数，p 表示事件发生的概率。预计数量按下式计算，单位与总数量相同。

$$\text{预计数量} = np$$

预计数量是估计结果，实际数量可能不同。

③ **样本比例：** 如记录的 25 辆汽车中有 9 辆白车。用白车数量除以记录总数，估计白车的概率。

$$p = \frac{9}{25} = _____$$

④ **比例估计：** 沿用上述白车比例，估计另一批 200 辆汽车中的白车数量。用另一批总数乘白车比例。$200 \times 0.36 = 72$（辆）

⑤ **扇形比例：** 若白车对应的扇形圆心角为 90°。用该角除以周角，得到白车所占的比例。

$$\frac{90°}{360°} = _____$$

再用这一比例乘另一批汽车总数。

填空：①216　②0.36　③0.25

点石成金　题目出现发生概率、总人数或总次数，并求预计数量时，先将总数量乘相应概率。

例 1 [2023 · February/March 0580/12 Q22]

The probability of passing a driving test is 0.36 .
600 people take this driving test.

Work out the expected number of these people that will pass.

通过驾驶考试的概率为 0.36。
有 600 人参加这次驾驶考试。
求这些人中预计通过考试的人数。

解答　预计通过人数等于总人数乘通过概率。

$$600 \times 0.36 = 216$$

答：预计有 216 人通过驾驶考试。

方法：先找总人数和通过概率，再列乘法算式。

辨析：预计人数是概率估计，实际人数是考试后的统计。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/13 Q18]

提示：圈出上学总天数与迟到概率，核对所求单位。

The probability that Tom is late for school is 0.12 .
There are 200 school days this year.

Work out the expected number of times that Tom is late for school this year.

汤姆上学迟到的概率为 0.12。
今年共有 200 天需要上学。
求汤姆今年上学预计迟到的次数。

✓ **答案** 24 次

解析 预计迟到次数等于上学总天数乘迟到概率。

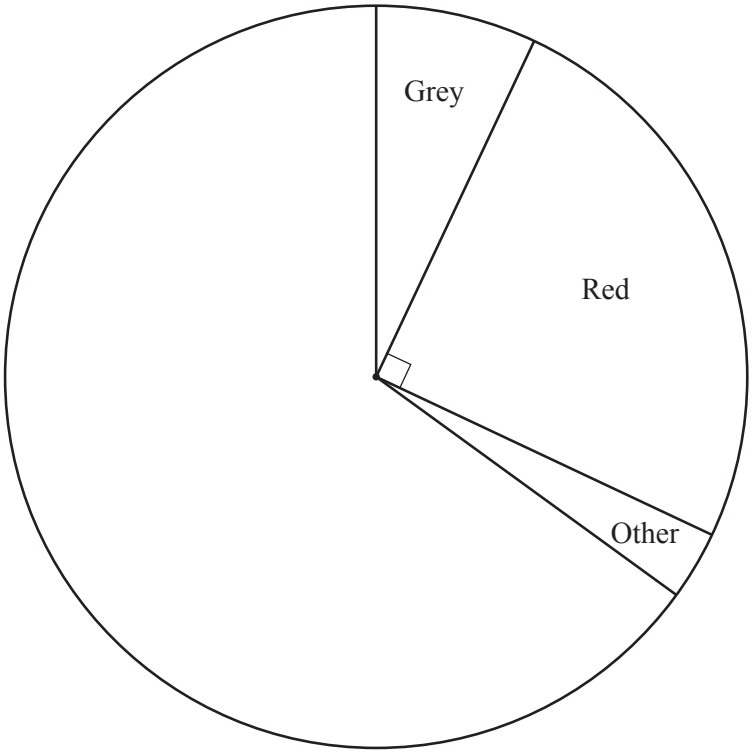
$$200 \times 0.12 = 24$$

答：汤姆今年预计迟到 24 次。

2. [2023 · October/November 0580/32 Q5(e)]

提示：先用已有记录估计白色的比例，再乘随后经过的汽车总数。

Heidi records the colour of each of 500 cars crossing a bridge.
The pie chart shows some of this information.



(c) 175 cars are white and 150 cars are black.

(e) Another 320 cars cross the bridge.

How many of these 320 cars are expected to be white?

Heidi 记录经过一座桥的 500 辆汽车的颜色。饼图显示部分信息，其中 175 辆为白色、150 辆为黑色。（e）另有 320 辆汽车经过这座桥。预计其中多少辆是白色?

✓ **答案** 112

解析 用已记录汽车的白色比例估计随后汽车为白色的概率。$p = \frac{175}{500}$ 预计白色汽车数 $= 320 \times \frac{175}{500} = 112$ 答：预计 112 辆。

3. [2023 · October/November 0580/13 Q12(b)]

提示：从表中找步行概率，再找对应的学生总人数。

Rama asks a group of students how they travel to school.
The table shows the probability of how a student, chosen at random, travels to school.

	Bus	Walk	Car	Other
Probability	0.4	0.32	0.17	

(b) There are 1800 students at the school.

Find the expected number of students that walk to school.

拉马询问了一组学生的上学出行方式。
下表给出了随机选取一名学生时，该学生以各种方式上学的概率。

出行方式	公共汽车	步行	汽车	其他
概率	0.4	0.32	0.17	

(b) 这所学校共有 1800 名学生。
求步行上学的预计学生人数。

✓ **答案** 576 人

解析 由表可知，学生步行上学的概率为 0.32。预计步行人数为

$$1800 \times 0.32 = 576$$

答：预计有 576 名学生步行上学。

4. [2025 · May/June 0580/22 Q4(b)]

提示：先数出奇数卡片，再求每次抽到奇数的概率。

1	2	3	4	5	6	7

Samira picks one of these cards at random and replaces it.

(a) Find the probability that she picks an odd number.

(b) Samira repeats this 35 times.

Calculate the number of times Samira is expected to pick an odd number.

有 7 张卡片，分别标有数字 1、2、3、4、5、6、7。
萨米拉从中随机抽取一张卡片，然后放回。
(a) 求她抽到奇数的概率。
(b) 萨米拉重复这一操作 35 次。
求她预计抽到奇数的次数。

✓ **答案** 20 次

解析 奇数有 1、3、5、7，共 4 个。每张卡片被抽到的可能性相同，抽到奇数的概率为 $\frac{4}{7}$。

预计次数等于总次数乘抽到奇数的概率。

$$35 \times \frac{4}{7} = 20$$

答：预计抽到奇数 20 次。

5. [2024 · February/March 0580/22 Q12]
提示：用转动总次数乘落在所求面上的概率。

Farid spins a three-sided spinner with sides labelled A, B and C.
The probability that the spinner lands on C is 0.35 .
Farid spins the spinner 40 times.

Calculate the number of times he expects the spinner to land on C.

法里德转动一个三面转盘，三个面分别标有 A、B、C。
转盘落在 C 上的概率为 0.35。
法里德转动转盘 40 次。
求他预计转盘落在 C 上的次数。

✓ **答案** 14 次

解析 预计次数等于转动总次数乘落在 C 上的概率。

$$40 \times 0.35 = 14$$

答：预计转盘落在 C 上 14 次。

8.4 用独立性沿树枝相乘，并合并目标路径

题型 1 用独立性沿树枝相乘，并合并目标路径（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **同叉概率互补：** 转盘第一次得质数的概率为 $\frac{4}{7}$。同一分叉的两条分支概率和为 1。非质数分支的概率为 $1-\frac{4}{7}=$ _____。

② **独立分支不变：** 两次转动互不影响，称为独立。前一次的结果不改变后一次的分支概率。第二次的每个分叉均填

质数分支	非质数分支
$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

③ **沿枝概率相乘：** 两次都得非质数，对应一条完整路径。沿这条路径，将两次概率_____。
$\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{49}$。

④ **目标路径相加：** 恰有一次得质数，对应两条路径。分别求出路径概率，再将结果_____。

先质数，后非质数	先非质数，后质数
$\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{12}{49}$	$\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{49}$

$\frac{12}{49}+\frac{12}{49}=\frac{24}{49}$。

⑤ **乘积方程反求：** 两袋各取一颗糖，抽取结果互不影响。甲袋取红糖的概率为 $\frac{1}{2}$，两袋都取黄糖的概率为 $\frac{1}{6}$。设 p 为乙袋取黄糖的概率，列式得
$(1-\frac{1}{2})p=\frac{1}{6}$，
$p=(\frac{1}{6})\div(\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$。

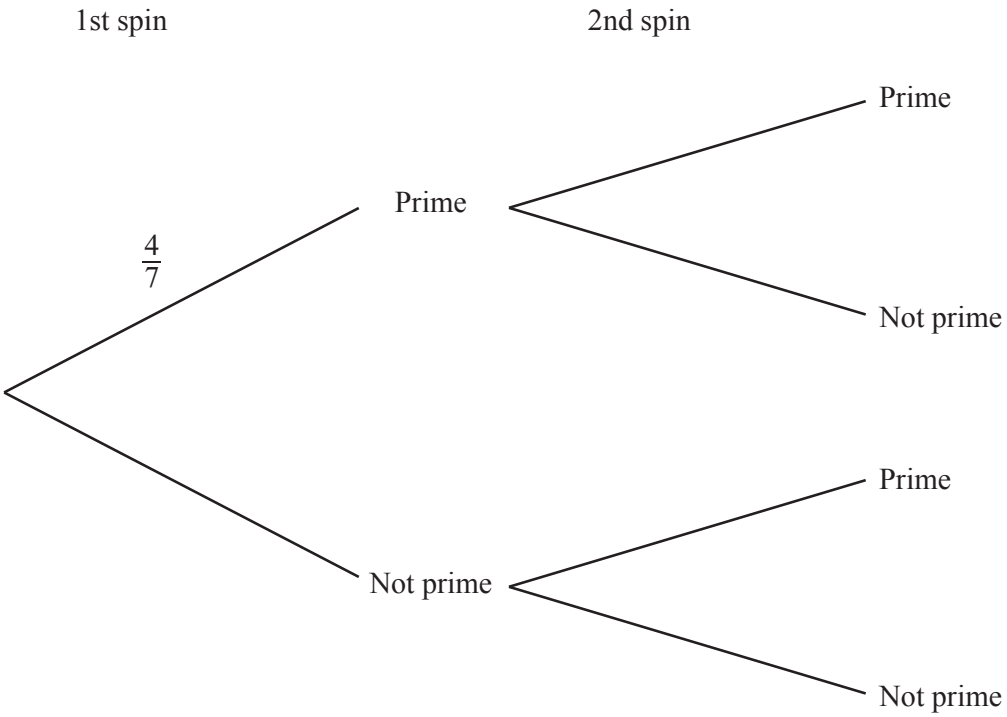
⑥ **补事件求目标：** 续上例，乙袋取红糖的概率为 $1-p$。求两袋都取红糖的概率，沿对应路径相乘。
$1-p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，
$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$。

填空：①$\frac{3}{7}$　②相乘　③相加

点石成金　题目出现独立转动或放回抽取的树状图时，先补全各分支概率，再沿目标路径相乘，多条目标路径相加。

例 1　[2023 · May/June 0580/31 Q9(b)(i)]

(b) Maria spins the spinner a 2nd time.



(i) Complete the tree diagram.

(b) 玛丽亚第二次转动转盘。

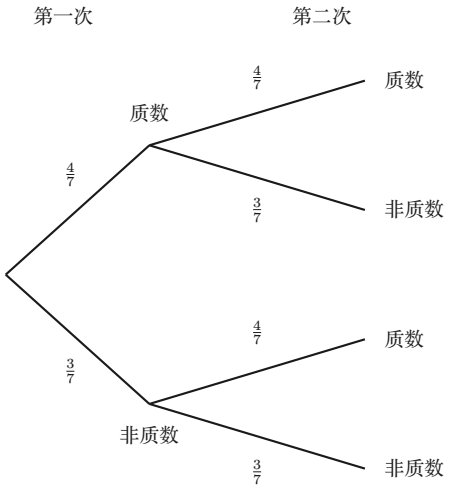
树状图第一层表示第一次转动，第二层表示第二次转动。第一次转动的两条分支分别为质数、非质数，其中质数分支标有概率 $\frac{4}{7}$。第一次为质数后，第二次分为质数、非质数两条分支；第一次为非质数后，第二次也分为质数、非质数两条分支。

(i) 补全树状图。

解答　同一分叉的两条分支概率之和为 1，第一次非质数分支的概率为 $1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$。

两次转动互不影响，第二次各分叉的质数概率均为 $\frac{4}{7}$，非质数概率均为 $\frac{3}{7}$。

答：第一次非质数分支填 $\frac{3}{7}$；第二次两条质数分支均填 $\frac{4}{7}$，两条非质数分支均填 $\frac{3}{7}$。



方法：先看第一次分叉，用总和为一补空，再填第二次各分叉。

辨析：互补是同叉概率相加为一，独立是前次结果不改变后次概率。

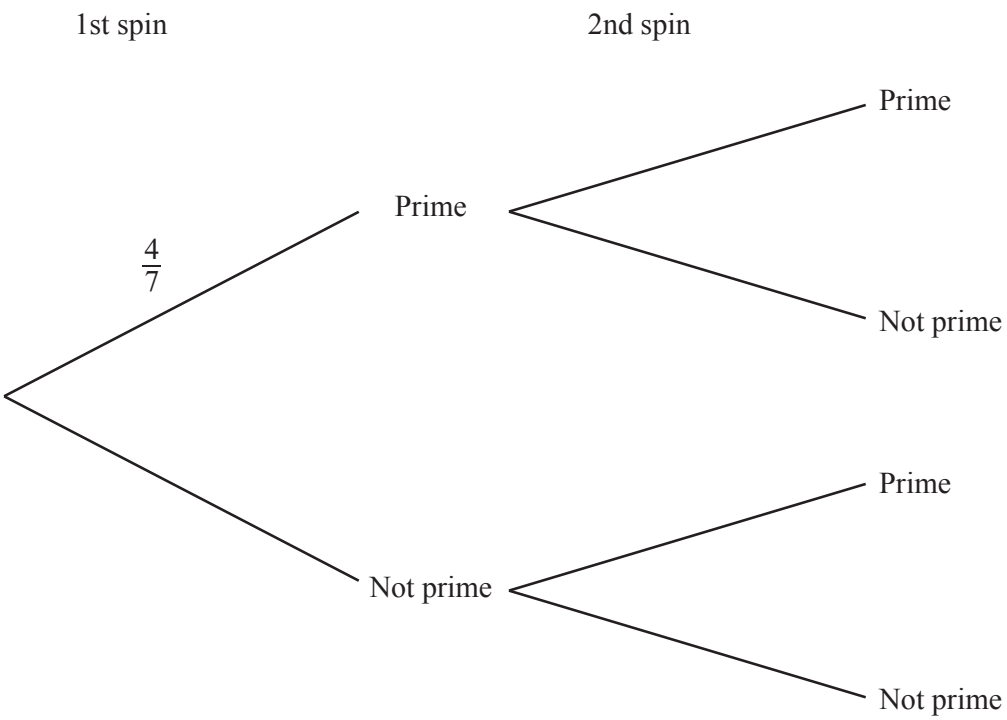
拓展：树上不同完整路径互斥，合并目标路径时将各路径概率相加。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/31 Q9(b)(ii)]

提示：沿连续两次质数的路径，查看两段分支概率。

(b) Maria spins the spinner a 2nd time.



(ii) Work out the probability that the spinner lands on a prime number both times.

(b) 玛丽亚第二次转动转盘。

树状图第一层表示第一次转动，第二层表示第二次转动。第一次转动的两条分支分别为质数、非质数，其中质数分支标有概率 $\frac{4}{7}$。第一次为质数后，第二次分为质数、非质数两条分支；第一次为非质数后，第二次也分为质数、非质数两条分支。

(ii) 求转盘两次都落在质数上的概率。

✓ **答案** $\frac{16}{49}$

解析 两次转动互不影响，每次得质数的概率均为 $\frac{4}{7}$。两次都得质数对应质数、质数这条路径，其概率为 $\frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$。

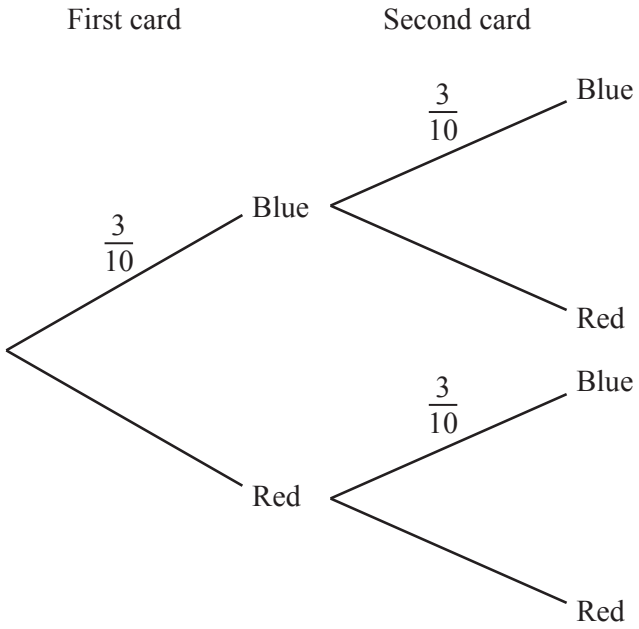
答：两次都落在质数上的概率为 $\frac{16}{49}$。

2. [2023 · October/November 0580/13 Q19(b)(i)]

提示：看放回前后红卡张数与总张数是否改变。

(b) A box contains 3 blue cards and 7 red cards.
Kim picks one card at random, notes its colour and then replaces it in the box.
She then picks another card at random.

(i) Complete the tree diagram.



(b) 一个盒子里有 3 张蓝色卡片和 7 张红色卡片。金随机抽取一张卡片，记下它的颜色，然后将它放回盒中。随后，她再随机抽取一张卡片。

(i) 补全树状图。

树状图第一层表示第一张卡片，第二层表示第二张卡片。第一张卡片的两条分支分别为蓝色、红色，其中蓝色分支标有概率 $\frac{3}{10}$。第一张为蓝色后，第二张分为蓝色、红色两条分支，其中蓝色分支标有概率 $\frac{3}{10}$；第一张为红色后，第二张也分为蓝色、红色两条分支，其中蓝色分支标有概率 $\frac{3}{10}$。

✓ **答案** 三个空均填 $\frac{7}{10}$。

解析 盒中共有卡片

$3+7=10$（张）。

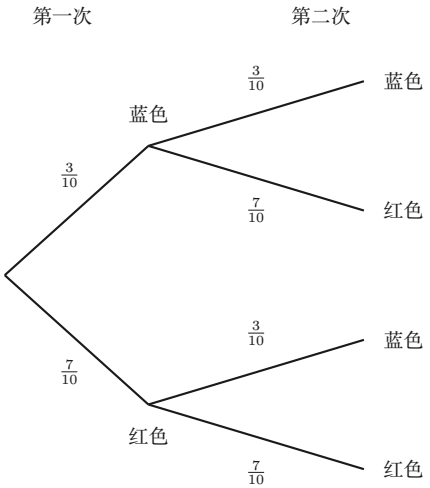
第一次抽到红色卡片的概率为

$\frac{7}{10}$。

抽出的卡片放回后，盒中仍有 3 张蓝色卡片和 7 张红色卡片，第二次各分叉抽到红色卡片的概率均为

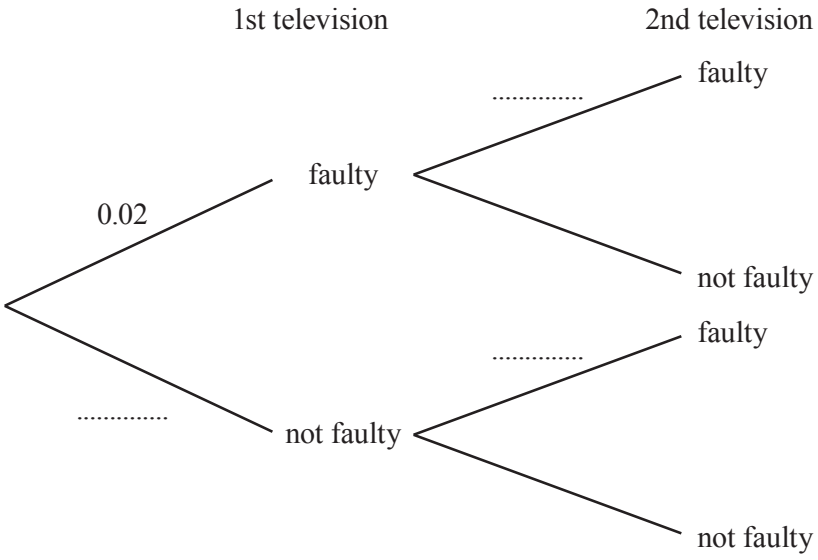
$\frac{7}{10}$。

答：三个空均填 $\frac{7}{10}$。



3. [2024 · February/March 0580/32 Q4(d)(ii)]
提示：在树状图中找出两台均有故障的路径。

(d) Hemang buys two televisions.
The probability that a television is faulty is 0.02 .



(ii) Find the probability that Hemang buys two faulty televisions.

(d) 赫芒购买两台电视机。
一台电视机有故障的概率为 0.02。
树状图第一层表示第一台电视机，第二层表示第二台电视机。第一层的两条分支分别为有故障、无故障，有故障分支标有概率 0.02，无故障分支的概率留空。第一台有故障和无故障后，第二台均分为有故障、无故障两条分支，其中两条有故障分支的概率留空。
(ii) 求赫芒购买的两台电视机均有故障的概率。

✓ **答案**

0.0004

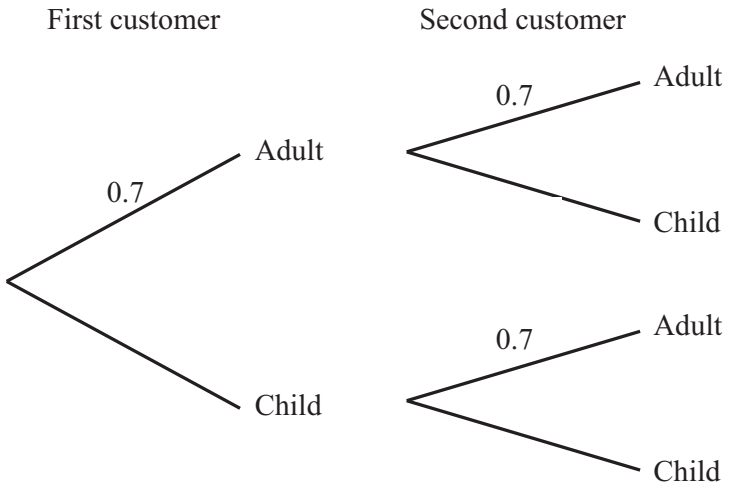
解析 两台电视机均有故障，对应树状图中先有故障、后有故障的路径。沿这条路径将两次概率相乘。

$$0.02 \times 0.02 = 0.0004$$

答：两台电视机均有故障的概率为 0.0004。

4. [2024 · October/November 0580/31 Q6(c)(iii)(b)]
提示：沿两位顾客均为成年人的路径列乘法算式。

(iii) The probability that any customer is an adult is 0.7 .



(a) Complete the tree diagram.

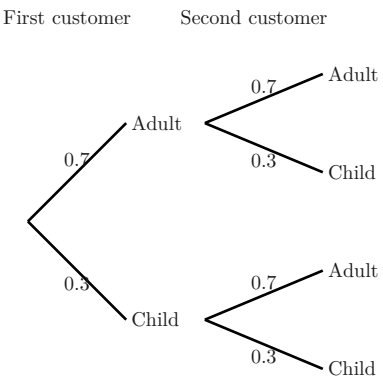
(b) Find the probability that the first two customers are adults.

(iii) 任意一位顾客是成年人的概率为 0.7。
树状图第一层表示第一位顾客，第二层表示第二位顾客。第一层的两条分支分别为成年人、儿童，其中成年人分支标有概率 0.7。第一位是成年人和儿童后，第二位均分为成年人、儿童两条分支，其中两条成年人分支均标有概率 0.7，三条儿童分支均未标概率。
(a) 补全树状图。
(b) 求前两位顾客均为成年人的概率。

✓ **答案**

0.49

解析 (a) 每处分支的概率和为 1，三个空白均填 0.3。补全后的树状图如下。



解：前两位顾客均为成年人，对应树状图中先成年人、后成年人的路径。沿这条路径将两次概率相乘。

$$0.7 \times 0.7 = 0.49$$

答：前两位顾客均为成年人的概率为 0.49。

5. [2023 · October/November 0580/13 Q19(b)(ii)]
提示：找连续两次蓝色的路径，比较放回前后的分支概率。

(b) A box contains 3 blue cards and 7 red cards.
Kim picks one card at random, notes its colour and then replaces it in the box.
She then picks another card at random.

(ii) Work out the probability that both of the cards Kim picks are blue.

(b) 一个盒子里有 3 张蓝色卡片和 7 张红色卡片。金随机抽取一张卡片，记下它的颜色，然后将它放回盒中。随后，她再随机抽取一张卡片。
(ii) 求金抽出的两张卡片都是蓝色的概率。

✓ **答案** $\frac{9}{100}$

解析 盒中卡片总数为
$3+7=10$。
第一次抽到蓝色卡片的概率为 $\frac{3}{10}$。卡片放回后，第二次抽到蓝色卡片的概率仍为 $\frac{3}{10}$。两张都是蓝色的概率为 $\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$。
答：两张卡片都是蓝色的概率为 $\frac{9}{100}$。

6. [2023 · May/June 0580/22 Q23]
提示：从两人都取黄糖的概率起手，反求本的黄糖概率。

Bag A and bag B each contain red sweets and yellow sweets.
Anna picks a sweet at random from bag A.
Ben picks a sweet at random from bag B.
The probability that Anna picks a red sweet is $\frac{2}{5}$.
The probability Anna and Ben both pick a yellow sweet is $\frac{1}{10}$.

Find the probability that Anna and Ben both pick a red sweet.

袋子 A 和袋子 B 中都装有红色糖果和黄色糖果。
安娜从袋子 A 中随机取出一颗糖果。
本从袋子 B 中随机取出一颗糖果。
安娜取到红色糖果的概率为 $\frac{2}{5}$。
安娜和本都取到黄色糖果的概率为 $\frac{1}{10}$。
求安娜和本都取到红色糖果的概率。

✓ **答案** $\frac{1}{3}$

解析 安娜取到黄色糖果的概率为
$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$。
设本取到黄色糖果的概率为 p，则 $0<p<1$。两人从不同袋中随机取糖，结果互不影响，由两人都取到黄色糖果的概率得
$\frac{3}{5}p=\frac{1}{10}$，
$p=\left(\frac{1}{10}\right)\div\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{6}$。
所以本取到红色糖果的概率为
$1-p=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$。
两人都取到红色糖果的概率为
$\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$。
答：安娜和本都取到红色糖果的概率为 $\frac{1}{3}$。

7. [2024 · October/November 0580/41 Q5(b)(ii)]
提示：把同色分为两支均为蓝色和两支均为红色。

A box contains 3 blue pens and 5 red pens.

(b) Mia puts the pen back into the box.
She then picks a pen at random and replaces it.
She then picks a second pen at random.

(ii) Find the probability that Mia picks two pens that have the same colour.

一个盒子里有 3 支蓝色笔和 5 支红色笔。
(b) 米娅将那支笔放回盒中。
随后，她随机抽取一支笔，然后放回。
接着，她再随机抽取第二支笔。
(ii) 求米娅抽到的两支笔颜色相同的概率。

✓ **答案**

$$\frac{17}{32}$$

解析 盒中笔的总数为
$3+5=8$。
每次抽到蓝色笔的概率为 $\frac{3}{8}$，红色笔的概率为 $\frac{5}{8}$。第一次抽取后放回，第二次的概率不变。
两支笔颜色相同，包括两支均为蓝色和两支均为红色，两种情况互不重叠。所求概率为
$\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{9}{64}+\frac{25}{64}=\frac{34}{64}=\frac{17}{32}$。
答：两支笔颜色相同的概率为 $\frac{17}{32}$。

8.5 不放回时更新数量，逐次相乘并分顺序相加

题型 1 不放回时更新数量，逐次相乘并分顺序相加（Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **符合人数统计：** 反应时间不少于 9 s，包括 9 s、10 s、11 s 三组。将三组人数相加，得到符合条件的人数。$29+11+6=$ _____

② **不放回抽取：** 选出的学生不再参加抽取，称为不放回。先选中一名符合条件者，总人数与符合人数各减一。两人均符合，须将两次概率相乘。 剩余总人数：$100-1=$ _____
剩余符合人数：$46-1=$ _____
$\frac{46}{100}\times\frac{45}{99}=\frac{46\times45}{100\times99}=\frac{23}{110}$

③ **限定抽取人群：** 若仅从反应时间不少于 8 s 的学生中抽取，先求这部分人数。两人均不少于 9 s，仍用其中的 46 人计算。分母采用指定人群的人数。 $19+29+11+6=$ _____
$\frac{46}{65}\times\frac{45}{64}=\frac{207}{416}$

④ **不同类别各取：** 反应时间为 9 s 的有 29 人，不少于 10 s 的有 17 人。两类各取一人，须计入两种顺序。每种顺序内相乘，两种顺序间相加。 $11+6=17$

先取 9 s，后取不少于 10 s	先取不少于 10 s，后取 9 s
$\frac{29}{100}\times\frac{17}{99}$	$\frac{17}{100}\times\frac{29}{99}$

$\frac{29}{100}\times\frac{17}{99}+\frac{17}{100}\times\frac{29}{99}=\frac{493}{4950}$

⑤ **集合人数换算：** P、C 分别表示学物理、学化学的学生组成的集合。$P\cap C$ 表示两科都学者，$n(X)$ 表示集合 X 的人数。化学共 14 人，其中两科都学者 9 人，作差得仅学化学的人数。$n(C)-n(P\cap C)=14-9=$ _____

⑥ **复合条件拆分：** 两人均不少于 8 s，且仅一人不少于 10 s，可拆成下列两类。两类互不重叠，各取一人后，将两种顺序的概率相加。

甲类：不少于 8 s，小于 10 s

$19+29=48$ 人

乙类：不少于 10 s

$11+6=17$ 人

$\frac{48}{100}\times\frac{17}{99}+\frac{17}{100}\times\frac{48}{99}=\frac{136}{825}$

⑦ **读取茎叶图：**茎表示十位，叶表示个位；一个叶对应一个数据。例如

茎	叶		
1	2	2	8
2	1	4	4

键为$1|2=12$。两行依次表示$12,12,18,21,24,24$。重复的叶各算一次，因此共有6个数据，其中至少为20的有3个。

填空：①46　②99　③45　④65　⑤5

点石成金　题目出现随机选取两人或两件物品，且抽后不放回时，先确定抽取范围，再更新人数并区分顺序。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q2(a)(iv)]

(a) 100 students take part in a reaction test.
The table shows the results.

Reaction time (seconds)	6	7	8	9	10	11
Number of students	3	32	19	29	11	6

(iv) Two students are chosen at random.

Find the probability that both their reaction times are greater than or equal to 9 seconds.

(a) 100 名学生参加一项反应测试。下表给出了测试结果。

反应时间（s）	6	7	8	9	10	11
学生人数	3	32	19	29	11	6

(iv) 随机选取两名学生。
求这两人的反应时间都大于或等于 9 s 的概率。

解答　反应时间不少于 9 s 的学生人数为
$29+11+6=46$。
选出一名符合条件的学生后，余下 99 人，其中符合条件的有 45 人。
所求概率为
$\frac{46}{100}\times\frac{45}{99}=\frac{23}{110}$。
答：概率为 $\frac{23}{110}$。

方法：先看反应时间各组人数，合并达标组，再列两次抽取的概率。

辨析：不少于是包含端点，大于是排除端点。

拓展：不放回抽取中，第二次抽中的概率随第一次的结果而变。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/43 Q2(b)]

提示：看灰色手机与全部手机的数量，核算取走一部后各剩多少。

(b) In a shop, there are 4 red and 8 grey phones.
Anna and Pete each pick one of these phones at random.

Work out the probability that they both pick a grey phone.

(b) 一家商店有 4 部红色手机和 8 部灰色手机。安娜和皮特各从这些手机中随机选取一部。
求两人都选中灰色手机的概率。

✓ **答案** $\frac{14}{33}$

解析 手机总数为
$4+8=12$。
安娜选中灰色手机后，余下 11 部手机，其中灰色手机有 7 部。
所求概率为
$\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}=\frac{14}{33}$。
答：概率为 $\frac{14}{33}$。

2. [2023 · February/March 0580/42 Q7(d)]

提示：先看抽取范围，再比较两科都学者与范围内的总人数。

$\mathscr{E}$= {students in a class}　　P = {students who study Physics}　　C = {students who study Chemistry}

$\mathrm{n}(\mathscr{E})=24$　　$\mathrm{n}(P)=17$　　$\mathrm{n}(C)=14$　　$\mathrm{n}(P\cap C)=9$

(d) Two of the students who study Physics are picked at random.

Find the probability that they both study Chemistry.

$\mathcal{E}$ 为班级中所有学生组成的集合，P 为学习物理的学生组成的集合，C 为学习化学的学生组成的集合。
$n(\mathcal{E})=24$，$n(P)=17$，$n(C)=14$，$n(P\cap C)=9$。
(d) 从学习物理的学生中随机选取两人。
求这两人都学习化学的概率。

✓ **答案** $\frac{9}{34}$

解析 从学物理的 17 名学生中选取，其中两科都学的有 9 人。
选出一名两科都学的学生后，余下 16 人，其中两科都学的有 8 人。
所求概率为
$\frac{9}{17}\times\frac{8}{16}=\frac{9}{34}$。
答：概率为 $\frac{9}{34}$。

3. [2023 · February/March 0580/42 Q7(c)]

提示：看化学人数中是否含两科都学者，再分两种抽取顺序。

$\mathscr{E}$= {students in a class}　　P = {students who study Physics}　　C = {students who study Chemistry}

$\mathrm{n}(\mathscr{E})=24$　　$\mathrm{n}(P)=17$　　$\mathrm{n}(C)=14$　　$\mathrm{n}(P\cap C)=9$

(c) Two students are picked from the class at random.

Find the probability that one student studies both subjects and one student studies Chemistry but not Physics.

$\mathcal{E}$ 为班级中所有学生组成的集合，P 为学习物理的学生组成的集合，C 为学习化学的学生组成的集合。
$n(\mathcal{E})=24$，$n(P)=17$，$n(C)=14$，$n(P\cap C)=9$。
(c) 从这个班级中随机选取两名学生。
求其中一人两科都学，另一人学化学但不学物理的概率。

✓ **答案** $\frac{15}{92}$

解析 两科都学的有 9 人，仅学化学的人数为

$14-9=5$。

这两类学生互不重叠，先选哪一类均符合题意。

所求概率为

$\frac{9}{24}\times\frac{5}{23}+\frac{5}{24}\times\frac{9}{23}=\frac{90}{552}=\frac{15}{92}$。

答：概率为 $\frac{15}{92}$。

4. [2023 · May/June 0580/21 Q15]

提示：先合并非绿色的数量，再核算两种先后顺序。

A bag contains 5 green buttons, 2 blue buttons and 6 white buttons.
Maya takes two buttons at random from the bag, without replacement.

Calculate the probability that one button is green and the other button is not green.

一个袋子中有 5 颗绿色纽扣、2 颗蓝色纽扣和 6 颗白色纽扣。
玛雅从袋中随机取出两颗纽扣，取出后不放回。
求一颗纽扣为绿色、另一颗纽扣不是绿色的概率。

✓ **答案** $\frac{20}{39}$

解析 纽扣总数为

$5+2+6=13$。

非绿色纽扣数为

$2+6=8$。

先取绿色后取非绿色，或先取非绿色后取绿色，均符合题意。

所求概率为

$\frac{5}{13}\times\frac{8}{12}+\frac{8}{13}\times\frac{5}{12}=\frac{80}{156}=\frac{20}{39}$。

答：概率为 $\frac{20}{39}$。

5. [2025 · February/March 0580/22 Q16(b)]

提示：先从茎叶图中分别数出大于和小于指定质量的包数。

The stem-and-leaf diagram shows the mass of each of 13 packets.

3	1 2 8
4	0 1 2 3 3 8
5	1 2 3 4

Key: 3 | 1 represents 31 g

(b) Two of these packets are chosen at random.

Find the probability that the one packet has a mass of more than 50 g and the other packet has a mass of less than 50 g.

茎叶图给出了 13 包物品中每包的质量。

茎	叶
3	1 2 8
4	0 1 2 3 3 8
5	1 2 3 4

键：茎为 3、叶为 1 表示 31 g。
(b) 从这些物品中随机选取两包。
求其中一包的质量大于 50 g，另一包的质量小于 50 g 的概率。

✓ **答案**

$$\frac{6}{13}$$

解析 由茎叶图，质量大于 50 g 的为 51 g、52 g、53 g、54 g，共 4 包。质量小于 50 g 的包数为 $3+6=9$。

选出一包后，余下 12 包，另一类的包数不变。两类各选一包，包括先选较重的一包和先选较轻的一包，两种顺序互不重叠。所求概率为

$\frac{4}{13}\times\frac{9}{12}+\frac{9}{13}\times\frac{4}{12}=\frac{36}{156}+\frac{36}{156}=\frac{72}{156}=\frac{6}{13}$。

答：所求概率为 $\frac{6}{13}$。

6. [2023 · May/June 0580/42 Q4(b)(ii)]

提示：先按对后两组组界，再分清两类人数及抽取顺序。

The table shows information about the heights of 80 children.

Height (h metres)	$1.2 < h \leqslant 1.4$	$1.4 < h \leqslant 1.5$	$1.5 < h \leqslant 1.65$	$1.65 < h \leqslant 1.8$	$1.8 < h \leqslant 1.9$
Frequency	2	13	24	32	9

(ii) Two of these children are chosen at random.
Calculate the probability that both children are taller than 1.5 m but only one of them is taller than 1.8 m.

下表给出 80 名儿童的身高 h（米）。

身高 h	$1.2 < h \leq 1.4$	$1.4 < h \leq 1.5$	$1.5 < h \leq 1.65$	$1.65 < h \leq 1.8$	$1.8 < h \leq 1.9$
频数	2	13	24	32	9

（b）（ii）从这些儿童中随机选出两人。求两人都高于 1.5m，但恰好只有一人高于 1.8m 的概率。

✓ **答案** $\frac{63}{395}$

解析 身高在 1.5m 以上且不超过 1.8m 的有 $24+32=56$人。 高于 1.8m 的有 9 人。选出一名后不放回，因此第二次的总人数变为 79。

先选较高组，再选中间组：

$\frac{9}{80}\times\frac{56}{79}$

两种顺序互斥，相加得 $2\times\frac{9\times56}{80\times79}=\frac{63}{395}$ 答：$\frac{63}{395}$。

先选中间组，再选较高组：

$\frac{56}{80}\times\frac{9}{79}$

第九章 统计

Chapter 9

9.1 按茎分组，把叶从小到大排列

题型 1 按茎分组，把叶从小到大排列（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **分清十位个位：** 斯特凡记录了 10 天的等车时间。12 分钟分成 1 个十和 2 个一。十位作为_____，个位作为_____。

$$12 = 10 \times 1 + 2$$

② **按茎分组填写：** 等车 5 分钟，十位为 0，个位为 5。在茎为 0 的行内写叶 5。

$$5 = 10 \times 0 + 5$$

③ **同行叶按序排：** 茎为 0 的叶有 1, 3, 5, 4, 5, 8。各叶按_____排列，重复值须_____。

0	1 3 4 5 5 8

④ **补写图键读法：** 茎为 1、叶为 2，表示 12 分钟。图键写明茎叶的读法和数据单位。可写为：

图键：1 mid 2 表示 12 分钟。

填空：①茎 ②叶 ③从小到大 ④保留

点石成金 题目出现一组数据，要求补全茎叶图时，先按十位分组，再把每行的个位从小到大排列。

例 1 [2023 · May/June 0580/12 Q8(a)]

On ten days, Stefan records the number of minutes he has to wait for a train.

1 3 12 5 4 23 5 24 11 8

(a) Complete the stem-and-leaf diagram to show this information.

0	1 3
1	
2	

Key: 0 | 1 represents 1 minute

斯特凡记录了 10 天中每天等候火车的时间，单位为分钟。

1, 3, 12, 5, 4, 23, 5, 24, 11, 8

(a) 补全茎叶图，表示这些数据。

0	1 3
1	
2	

图键：0 mid 1 表示 1 分钟。

解答　十位作茎，个位作叶，同一茎的叶从小到大排列，得

0	1　3　4　5　5　8
1	1　2
2	3　4

图键：0 mid 1 表示 1 分钟。

答：补全的茎叶图如上。

方法：先看图键中的数位关系，再按每个数据的十位找行。

辨析：茎是分组所用的十位数字，叶是组内逐个记录的个位数字。

拓展：叶的总数等于数据总数，数值重复也各占一个叶。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/31 Q3(a)]

提示：对照图键看一位数的归组，再比较同行叶的大小。

These are the test scores of 16 students.

15　26　9　45　36　20　41　39

40　23　32　18　41　34　37　31

(a) Complete the stem-and-leaf diagram.

0	
1	
2	
3	
4	

Key: 1|5 represents 15

以下是 16 名学生的测验成绩。

15, 26, 9, 45, 36, 20, 41, 39

40, 23, 32, 18, 41, 34, 37, 31

(a) 补全茎叶图。

0	
1	
2	
3	
4	

图键：1 mid 5 表示 15。

答案

0	9
1	5　8
2	0　3　6
3	1　2　4　6　7　9
4	0　1　1　5

图键：1 mid 5 表示 15。

解析 由图键，十位作茎，个位作叶。9 的十位为 0，归入茎为 0 的行。各行的叶从小到大排列，得

0	9
1	5 8
2	0 3 6
3	1 2 4 6 7 9
4	0 1 1 5

图键：1 mid 5 表示 15。

答：补全的茎叶图如上。

2. [2024 · October/November 0580/32 Q5(b)(i)]

提示：按十位分组，同一行的个位从小到大排列。

(b) In another puzzle each student gets a score.
These are the scores for 12 students.

17	21	24	32	27	11
26	18	10	29	14	24

(i) Complete the stem-and-leaf diagram for these scores.

1	
2	
3	

Key : 1 | 7 represents 17

(b) 在另一道益智题中，每名学生都会得到一个分数。以下是 12 名学生的得分。

$$17, 21, 24, 32, 27, 11$$

$$26, 18, 10, 29, 14, 24$$

(i) 补全表示这些得分的茎叶图。

1	
2	
3	

图键：1 mid 7 表示 17。

✓ **答案**

1	0 1 4 7 8
2	1 4 4 6 7 9
3	2

图键：1 mid 7 表示 17。

解析 由图键知，十位作茎，个位作叶。各组得分从小到大排列为

$$10, 11, 14, 17, 18$$

$$21, 24, 24, 26, 27, 29$$

$$32$$

得分 24 出现两次，在茎为 2 的行内保留两个叶 4，得

1	0 1 4 7 8
2	1 4 4 6 7 9
3	2

图键：1 mid 7 表示 17。

答：补全的茎叶图如上。

3. [2025 · October/November 0580/11 Q14(a)]

提示：不足 10 个月的年龄填在茎为 0 的行内。

These are the ages, in **months**, of each of 12 children.

11	27	8	10	26	17	28	12	9	13	22	12

(a) Complete the stem-and-leaf diagram to show this information.

0	
1	
2	

Key: 1 | 7 represents 17 months

以下是 12 名儿童各自的年龄，单位为月。

11, 27, 8, 10, 26, 17, 28, 12, 9, 13, 22, 12

(a) 补全茎叶图，表示这些数据。

0	
1	
2	

图键：1 mid 7 表示 17 个月。

✓ **答案**

0	8 9
1	0 1 2 2 3 7
2	2 6 7 8

图键：1 mid 7 表示 17 个月。

解析 由图键知，十位作茎，个位作叶。各组年龄从小到大排列为

$$8, 9$$

$$10, 11, 12, 12, 13, 17$$

$$22, 26, 27, 28$$

年龄 8 个月和 9 个月的十位均为 0，填在茎为 0 的行内，得

0	8 9
1	0 1 2 2 3 7
2	2 6 7 8

图键：1 mid 7 表示 17 个月。

答：补全的茎叶图如上。

4. [2023 · October/November 0580/12 Q7(a)]

提示：看重复数据的出现次数，与对应叶的个数比较。

For 16 days, Safia records the number of dresses she sells.

24	6	18	14	27	37	9	16
22	17	16	16	24	20	15	32

(a) Complete the stem-and-leaf diagram.

0	
1	
2	
3	

Key: 2|4 represents 24 dresses

萨菲娅记录了 16 天中每天售出的连衣裙数量。

24, 6, 18, 14, 27, 37, 9, 16

22, 17, 16, 16, 24, 20, 15, 32

(a) 补全茎叶图。

0	
1	
2	
3	

图键：2 mid 4 表示 24 条连衣裙。

✓ **答案**

0	6 9
1	4 5 6 6 6 7 8
2	0 2 4 4 7
3	2 7

图键：2 mid 4 表示 24 条连衣裙。

解析 由图键，十位作茎，个位作叶。16 出现 3 次，在茎为 1 的行内写 3 个叶 6；24 出现 2 次，在茎为 2 的行内写 2 个叶 4。各行的叶从小到大排列，得

0	6 9
1	4 5 6 6 6 7 8
2	0 2 4 4 7
3	2 7

图键：2 mid 4 表示 24 条连衣裙。

答：补全的茎叶图如上。

5. [2023 · May/June 0580/43 Q2(a)(i)]
提示：逐行比较叶的大小，再看图键的读法与单位是否齐全。

(a) Anna records the number of text messages she receives for 14 days.

17	15	31	38	31	22	13
18	21	27	28	21	31	29

(i) Complete the stem-and-leaf diagram.

1	
2	
3	

Key: .....

(a) 安娜记录了 14 天中每天收到的短信数量。

$17, 15, 31, 38, 31, 22, 13$

$18, 21, 27, 28, 21, 31, 29$

(i) 补全茎叶图。

1	
2	
3	

图键：

✓ **答案**

1	3 5 7 8
2	1 1 2 7 8 9
3	1 1 1 8

图键：1 mid 7 表示 17 条短信。

解析 十位作茎，个位作叶，各行的叶从小到大排列，得

1	3 5 7 8
2	1 1 2 7 8 9
3	1 1 1 8

茎为 1、叶为 7，表示收到 17 条短信，故填写图键：1 mid 7 表示 17 条短信。

答：补全的茎叶图及图键如上。

9.2 先计数求频数，再按频数补全条形图

题型 1 先计数求频数，再按频数补全条形图（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **逐类统计：**原记录中，奶酪在两行分别出现 4 次和 3 次。某类出现的总次数叫_____。

$$4 + 3 = 7$$

② **五笔计数：**奶酪共 7 根，计数符号每满五笔合成一组。四竖加一斜表示_____次，余下两次记两竖。

$$7 = 5 + 2$$

③ **总数补缺：**例如共有 12 件，已知两类频数为 4 和 5。余下一类的频数等于总数减去已知频数之和。

$$12-(4+5)=\underline{\qquad}$$

④ **频数画柱：**奶酪频数为 7，在奶酪位置把柱顶画到 7。若纵轴每大格表示 2，柱高占大格数为：

$$\frac{7}{2}=3.5$$

各柱从 0 起画，柱宽相等、间隔一致。

⑤ **分组统计：**如分数为 8、12、16、23，按各组上下限归类。再按表中频数确定各柱高度。

分数组	组内分数	频数
0 至 9	8	1
10 至 19	12、16	2
20 至 29	23	1

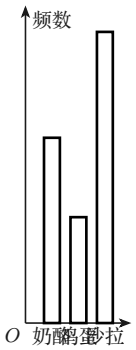
⑥ **双柱区分：**图键中，阴影柱表示目标率，空白柱表示实际率。两柱排在同一类别处，横轴数值确定柱长。例如目标率为 30%、实际率为 40%，画法为：

目标率柱涂阴影，从 0 画至 30%

实际率柱留空白，从 0 画至 40%

填空：①频数　②5　③3

柱高表示各类的频数

	图像	数量关系
同一关系		三类频数分别为 $7,4,11$，柱宽相同、柱间留有间隔。

点石成金　题目出现分类记录、计数表或需要补全的条形图时，先按类别确定频数，再把频数画成柱高或柱长。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q1(d)(i)]

(d) The chef records the types of baguettes the café sells in one day.

salad	cheese	salad	salad	egg	cheese	cheese	salad	cheese	egg	salad
cheese	salad	salad	egg	cheese	salad	salad	egg	salad	cheese	salad

(i) Complete the frequency table to show this information.
You may use the tally column to help you.

Type of baguette	Tally	Frequency
Cheese		
Egg		
Salad		

(d) 厨师记录了咖啡馆一天内售出的法棍面包种类。

沙拉	奶酪	沙拉	沙拉	鸡蛋	奶酪	奶酪	沙拉	奶酪	鸡蛋	沙拉
奶酪	沙拉	沙拉	鸡蛋	奶酪	沙拉	沙拉	鸡蛋	沙拉	奶酪	沙拉

(i) 补全频数表，表示这些信息。可用计数栏辅助填写。

法棍面包种类	计数	频数
奶酪		
鸡蛋		
沙拉		

解答 逐行统计各类法棍面包的根数，得

奶酪的频数为

$$4+3=7$$

鸡蛋的频数为

$$2+2=4$$

沙拉的频数为

$$5+6=11$$

答：奶酪、鸡蛋、沙拉的频数依次填 7、4、11。计数栏可依次记一组五笔加两竖、四竖、两组五笔加一竖。

方法：先看原记录的类别，逐行计数，再把同类次数相加。

! 辨析：频数是某类出现的总次数，计数符号是记录次数的记号。

针对练习

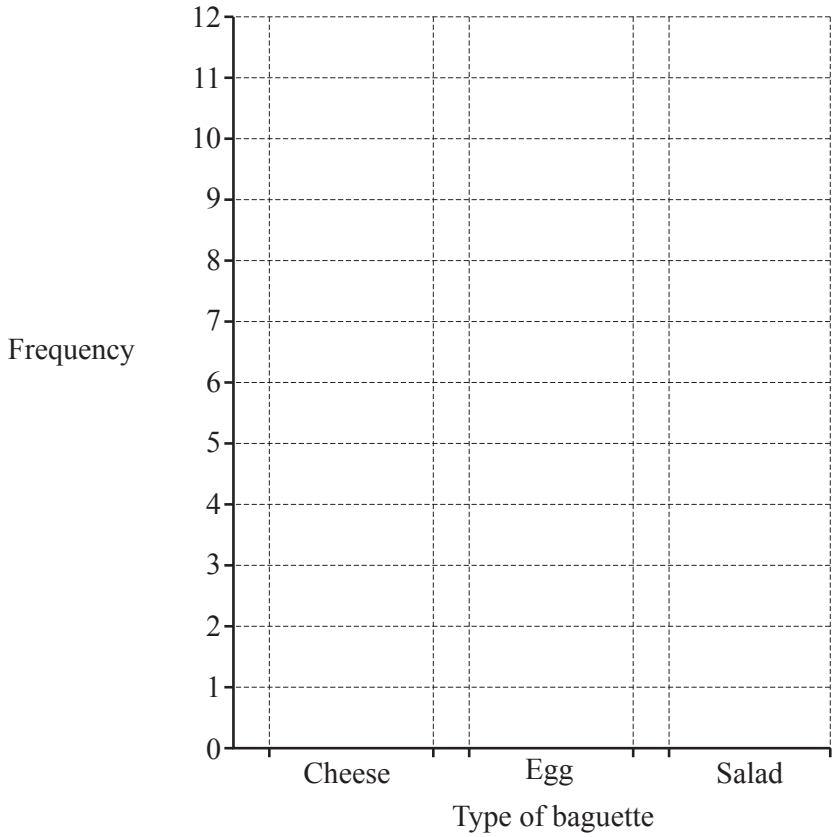
1. [2023 · February/March 0580/32 Q1(d)(ii)]

提示：看各类频数和纵轴刻度，逐柱核对柱顶位置。

(d) The chef records the types of baguettes the café sells in one day.

salad	cheese	salad	salad	egg	cheese	cheese	salad	cheese	egg	salad
cheese	salad	salad	egg	cheese	salad	salad	egg	salad	cheese	salad

(ii) On the grid, draw a bar chart to show this information.



(d) 厨师记录了咖啡馆一天内售出的法棍面包种类。

沙拉	奶酪	沙拉	沙拉	鸡蛋	奶酪	奶酪	沙拉	奶酪	鸡蛋	沙拉
奶酪	沙拉	沙拉	鸡蛋	奶酪	沙拉	沙拉	鸡蛋	沙拉	奶酪	沙拉

(ii) 在方格纸上画条形图，表示这些信息。图中横轴为法棍面包种类，依次为奶酪、鸡蛋、沙拉；纵轴为频数，从 0 到 12，每格表示 1。

✓ **答案** 奶酪、鸡蛋、沙拉三根柱的高度依次为 7、4、11。

解析 由记录得，奶酪、鸡蛋、沙拉的频数分别为

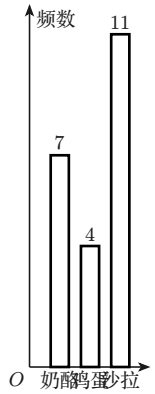
$$4+3=7$$

$$2+2=4$$

$$5+6=11$$

在三个类别对应的位置，从横轴向上画柱，柱顶依次对准 7、4、11。三根柱的宽度相等，间隔一致。

答：奶酪柱高为 7，鸡蛋柱高为 4，沙拉柱高为 11。



2. [2023 · May/June 0580/13 Q4]
提示：看开门栏的五笔组与余笔，再用总天数补缺。

Bobby records the number of days a shop is open during 30 days.

	Tally	Frequency
Days open	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | | |	
Days not open		

Complete the table.

博比记录了一家商店在 30 天内开门的天数。

	计数	频数
开门的天数	四组五笔和三竖	
不开门的天数		

补全表格。

✓ **答案** 开门的天数为 23，不开门的天数为 7；不开门的计数栏记一组五笔加两竖。

解析 开门的计数符号有四组五笔和三竖，故开门的天数为

$$5+5+5+5+3=23$$

这 30 天分为开门和不开门两类，故不开门的天数为

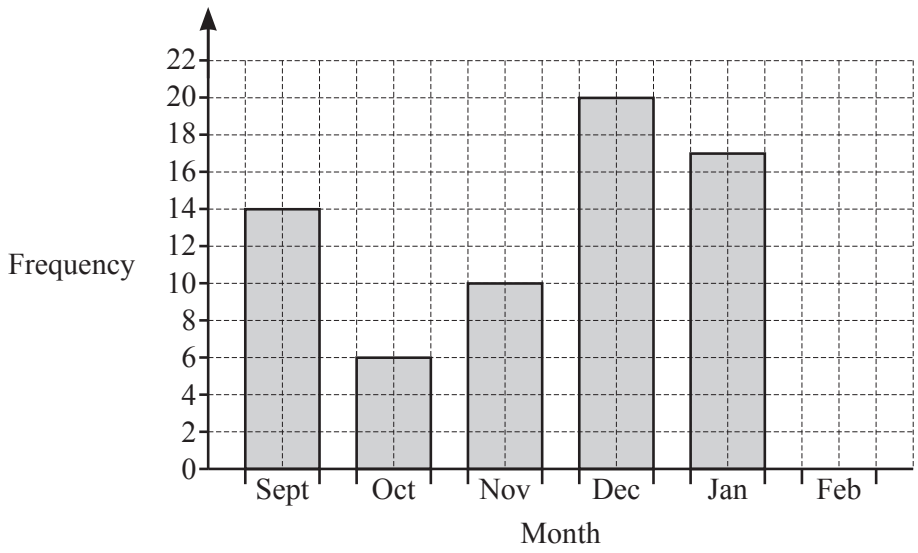
$$30-23=7$$

$$7=5+2$$

答：开门的频数填 23，不开门的频数填 7；不开门的计数栏记一组五笔加两竖。

3. [2023 · October/November 0580/32 Q1(a)(i)]
提示：看二月进球数与纵轴刻度，参照邻柱的宽度和间隔。

(a) The bar chart shows the number of goals scored by a team in each of 5 months.



(i) In February, 12 goals are scored.

Complete the bar chart.

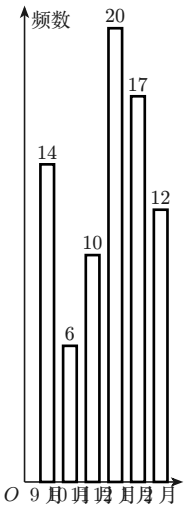
(a) 条形图表示一支球队在 5 个月中每月的进球数。图中横轴为月份，依次为九月、十月、十一月、十二月、一月、二月；纵轴为频数，标数依次为 0、2、4、6、8、10、12、14、16、18、20、22。九月、十月、十一月、十二月、一月已有柱的高度依次为 14、6、10、20、17。(i) 二月进了 12 个球。补全条形图。

✓ **答案** 在二月对应的位置画一根高度为 12 的柱。

解析 二月进球数为 12，故二月柱顶应对准纵轴的 12。

在二月对应的位置，从 0 起画柱，柱宽及与相邻柱的间隔均与原图一致。

答：补画二月的柱，柱高为 12。



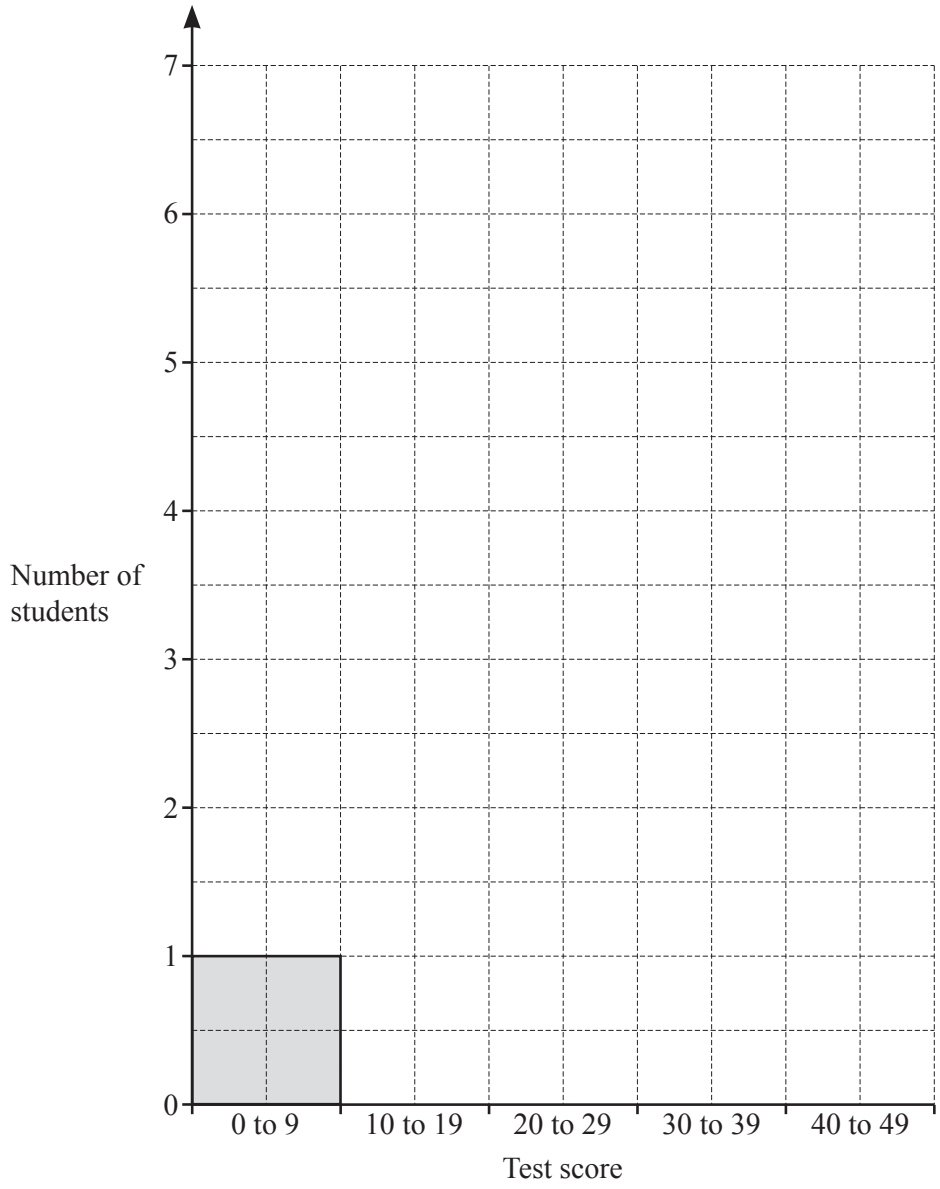
4. [2023 · May/June 0580/31 Q3(e)]

提示：把每个分数与组的上下限比较，归组后再计数。

These are the test scores of 16 students.

15	26	9	45	36	20	41	39
40	23	32	18	41	34	37	31

(e) Complete the bar chart for the test scores of the 16 students.



以下是 16 名学生的测验分数。

15	26	9	45	36	20	41	39
40	23	32	18	41	34	37	31

(e) 补全表示这 16 名学生测验分数的条形图。图中横轴为测验分数，依次分为 0 至 9、10 至 19、20 至 29、30 至 39、40 至 49；纵轴为学生人数，标数从 0 到 7，相邻标数相差 1。0 至 9 分这一组的柱已画出，柱高为 1。

✓ **答案** 从 0 至 9 分到 40 至 49 分，各组柱高依次为 1、2、3、6、4。

解析 按各分数组的上下限归类。

0 至 9 分有 9，共 1 人。

10 至 19 分有 15、18，共 2 人。

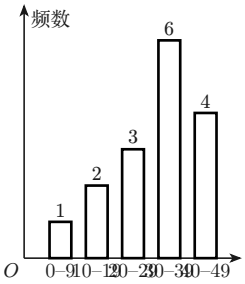
20 至 29 分有 26、20、23，共 3 人。

30 至 39 分有 36、39、32、34、37、31，共 6 人。

40 至 49 分有 45、41、40、41，共 4 人。

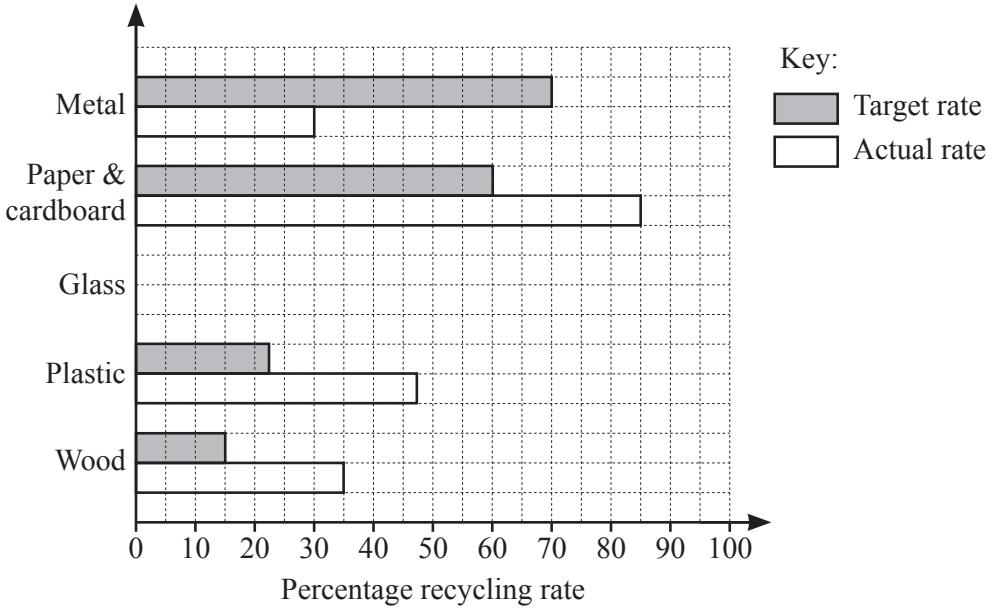
保留第一组高度为 1 的柱，在其余四组的位置分别补画高度为 2、3、6、4 的柱，柱宽与原图一致。

答：五组柱高依次为 1、2、3、6、4。



5. [2023 · October/November 0580/33 Q4(d)(i)]
提示：先看图键分清两种柱，再将玻璃两项比率对齐横轴刻度。

(d) The company sets targets to recycle its waste materials.
The bar chart shows the target rate and the actual rate for some of its recycling.



(i) The target rate for recycling glass was 55%.
The actual rate for recycling glass was 70%.

Complete the bar chart.

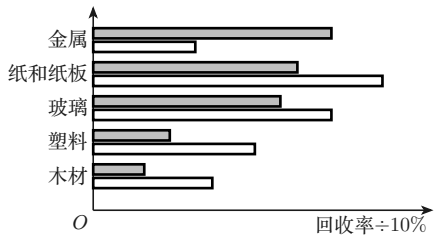
(d) 公司为废弃材料的回收设定目标。条形图表示部分材料回收的目标率和实际率。图中横轴为回收率（百分比），标数从 0 到 100，相邻标数相差 10；纵向类别从上到下依次为金属、纸和纸板、玻璃、塑料、木材。图键：阴影柱表示目标率，空白柱表示实际率。图中已有数据如下。

材料	目标率	实际率
金属	70%	30%
纸和纸板	60%	85%
玻璃		
塑料	22.5%	47.5%
木材	15%	35%

(i) 玻璃的目标回收率为 55%。玻璃的实际回收率为 70%。补全条形图。

✓ **答案** 玻璃一栏的阴影柱画至 55%，空白柱画至 70%。

解析 由图键知，阴影柱表示目标率，空白柱表示实际率。
玻璃的目标回收率为 55%，在玻璃一栏上方画阴影柱，从 0 延伸至 55%，右端位于 50% 与 60% 的中间。
玻璃的实际回收率为 70%，在同栏下方画空白柱，从 0 延伸至 70%，柱宽与原图一致。
答：玻璃的阴影柱长为 55%，空白柱长为 70%。

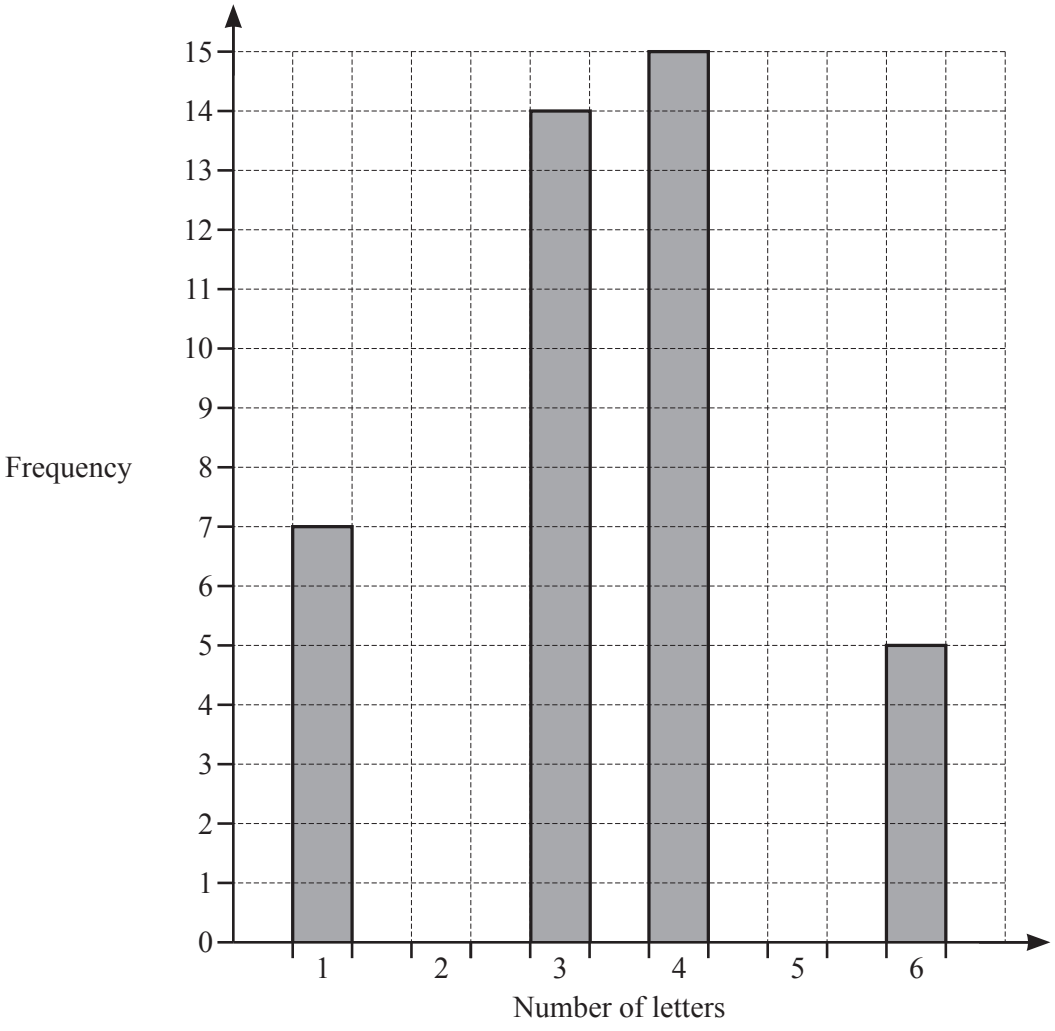


6. [2023 · May/June 0580/32 Q2(a)(i)]

提示：对照表与图补齐已知频数，再比较频数之和与总数。

(a) Mika counts the number of letters in each of the 61 words in a paragraph.
Some of his results are shown in the table and bar chart.

Number of letters	1	2	3	4	5	6
Frequency	7	12		15		5



(i) Complete the table and the bar chart.

(a) 米卡统计一段文字中 61 个单词各自含有的字母个数。表格和条形图给出了他的部分统计结果。

字母个数	1	2	3	4	5	6
频数	7	12		15		5

条形图的横轴为字母个数，依次标有 1、2、3、4、5、6；纵轴为频数，标数从 0 到 15，相邻标数相差 1。图中已画出字母个数为 1、3、4、6 的柱，柱高依次为 7、14、15、5。 (i) 补全表格和条形图。

✓ **答案** 表中 3 个字母、5 个字母的频数依次填 14、8；补画 2 个字母、5 个字母的柱，柱高依次为 12、8。

解析 由已有条形图得，含 3 个字母的单词频数为 14。

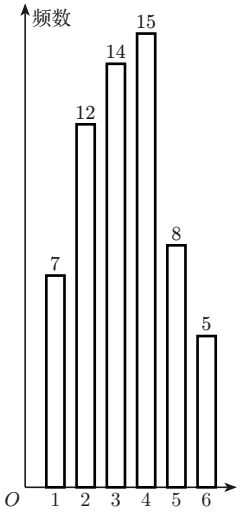
共有 61 个单词，故含 5 个字母的单词频数为

$$61-(7+12+14+15+5)=8$$

表中 3 个字母、5 个字母对应的频数分别填 14、8。

由表中频数，在横轴 2 和 5 的位置分别补画高度为 12 和 8 的柱，柱宽及间隔均与原图一致。

答：表中填 14、8；补画的两根柱高分别为 12、8。



9.3 找出现次数最多的数据或类别，求众数

题型 1 找出现次数最多的数据或类别，求众数（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **茎叶还原分数：** 例题记录了 24 名学生的分数。茎表示十位，叶表示个位，图例中 4 | 2 表示 42 分。

$$10\times4+2=42$$

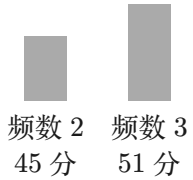
$$10\times5+1=51$$

② **比较重复次数：** 例题中 51 分出现 3 次，45 分出现 2 次，其余分数各出现 1 次。出现次数_____的数据称为众数（mode），所以本例的众数为 51 分。

③ **频数对应数据：** 一个数据出现的次数称为频数。例题中两个重复分数的频数如下，最大频数 3 对应的分数为_____分。

分数	45	51
频数	2	3

④ **柱高对应数据：** 将上表两项的频数画成柱，柱高分别为 2 和 3。较高柱对应 51 分，故众数为 51 分；柱下标注类别名称时，答案写对应的类别。



⑤ **补全缺失频数：** 图表不完整时，用总频数减去其余频数。例题共 24 人，除 51 分外共有 21 人，故 51 分的频数为

$$24-21=3$$

填空：①最多　②51

点石成金　题目出现求众数或人数最多的类别时，先比较重复次数、表中频数或柱高。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q2(b)(i)]

(b) The stem-and-leaf diagram shows the test scores for 24 students.

2	2 5 6 9
3	3 7 8
4	2 3 5 5 7 8
5	1 1 1 5 6 8 9
6	0 2 5 7

Key : 4 | 2 represents 42

(i) Write down the mode.

(b) 茎叶图表示 24 名学生的测验分数。

茎	叶
2	2, 5, 6, 9
3	3, 7, 8
4	2, 3, 5, 5, 7, 8
5	1, 1, 1, 5, 6, 8, 9
6	0, 2, 5, 7

图例：4 | 2 表示 42 分。 (i) 写出众数。

解答　由茎表示十位、叶表示个位，得茎为 5、叶为 1 的分数为

$$10 \times 5 + 1 = 51$$

51 出现 3 次，45 出现 2 次，其余分数各出现 1 次。 ∴ 出现次数最多的分数为 51。

答：众数为 51 分。

方法：先看茎叶图的图例，还原分数后逐个数重复次数。

辨析：众数是出现最多的数据，频数是数据出现的次数。

术语：mode：众数，指出现次数最多的数据。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/11 Q9(a)]

提示：先按图例还原时间，再比较各时间出现的次数。

The stem-and-leaf diagram shows the time, in minutes, it takes each of 15 people to complete a race.

1	6 6 7
2	1 3 3 4 5 6 7 7 7
3	0 1 1

Key: 1|6 represents 16 minutes

Find

(a) the mode

茎叶图表示 15 人各自完成一场比赛所用的时间，单位为分钟。

茎	叶
1	6, 6, 7
2	1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7
3	0, 1, 1

图例：1 | 6 表示 16 分钟。求：(a) 众数。

✓ **答案** 27 分钟

解析 由图例，茎为 2、叶为 7 表示的时间为

$$10 \times 2 + 7 = 27$$

27 分钟出现 3 次，16、23、31 分钟各出现 2 次，其余时间各出现 1 次。∴ 出现次数最多的时间为 27 分钟。

答：众数为 27 分钟。

2. [2023 · May/June 0580/31 Q3(b)]

提示：逐个统计分数的重复次数，比较哪个次数最多。

These are the test scores of 16 students.

15　26　9　45　36　20　41　39

40　23　32　18　41　34　37　31

(b) Find the mode.

以下是 16 名学生的测验分数。

15　26　9　45　36　20　41　39

40　23　32　18　41　34　37　31

(b) 求众数。

✓ **答案** 41

解析 41 出现 2 次，其余分数各出现 1 次。∴ 出现次数最多的分数为 41。答：众数为 41 分。

3. [2023 · October/November 0580/33 Q5(a)(i)]
提示：看各数据重复了几次，比较次数而非数据大小。

(a) Zena records the number of letters she posts on each of 12 days.

3　7　3　8　7　1　0　6　5　1　7　2

(i) Write down the mode.

(a) 泽娜记录了 12 天中每天寄出的信件数量。
3, 7, 3, 8, 7, 1, 0, 6, 5, 1, 7, 2

(i) 写出众数。

✓ **答案** 7

解析 7 出现 3 次，1 和 3 各出现 2 次，其余数据各出现 1 次。∴ 出现次数最多的数据为 7。答：众数为 7。

4. [2023 · October/November 0580/12 Q7(b)]
提示：把相同数据归在一起，再比较每组的个数。

For 16 days, Safia records the number of dresses she sells.

24　6　18　14　27　37　9　16
22　17　16　16　24　20　15　32

(b) Write down the mode.

萨菲娅记录了 16 天中每天售出的连衣裙数量。

24　6　18　14　27　37　9　16
22　17　16　16　24　20　15　32

(b) 写出众数。

✓ **答案** 16

解析 16 出现 3 次，24 出现 2 次，其余数据各出现 1 次。∴ 出现次数最多的数据为 16。答：众数为 16。

5. [2023 · February/March 0580/42 Q2(a)(i)]
提示：先比较表中频数，再看最大频数对应哪项时间。

(a) 100 students take part in a reaction test.
The table shows the results.

Reaction time (seconds)	6	7	8	9	10	11
Number of students	3	32	19	29	11	6

(i) Write down the mode.

(a) 100 名学生参加了一项反应测试。表中列出了测试结果。

反应时间（秒）	6	7	8	9	10	11
学生人数	3	32	19	29	11	6

(i) 写出众数。

✓ **答案** 7 秒

解析 表中最大的频数为 32，对应的反应时间为 7 秒。∴ 出现次数最多的反应时间为 7 秒。答：众数为 7 秒。

6. [2023 · May/June 0580/43 Q2(a)(iii)]
提示：逐项数重复次数，再比较各项的计数。

(a) Anna records the number of text messages she receives for 14 days.

17	15	31	38	31	22	13
18	21	27	28	21	31	29

(iii) Find the mode.

(a) 安娜记录了 14 天中每天收到的短信数量。

17	15	31	38	31	22	13
18	21	27	28	21	31	29

(iii) 求众数。

✓ **答案** 31

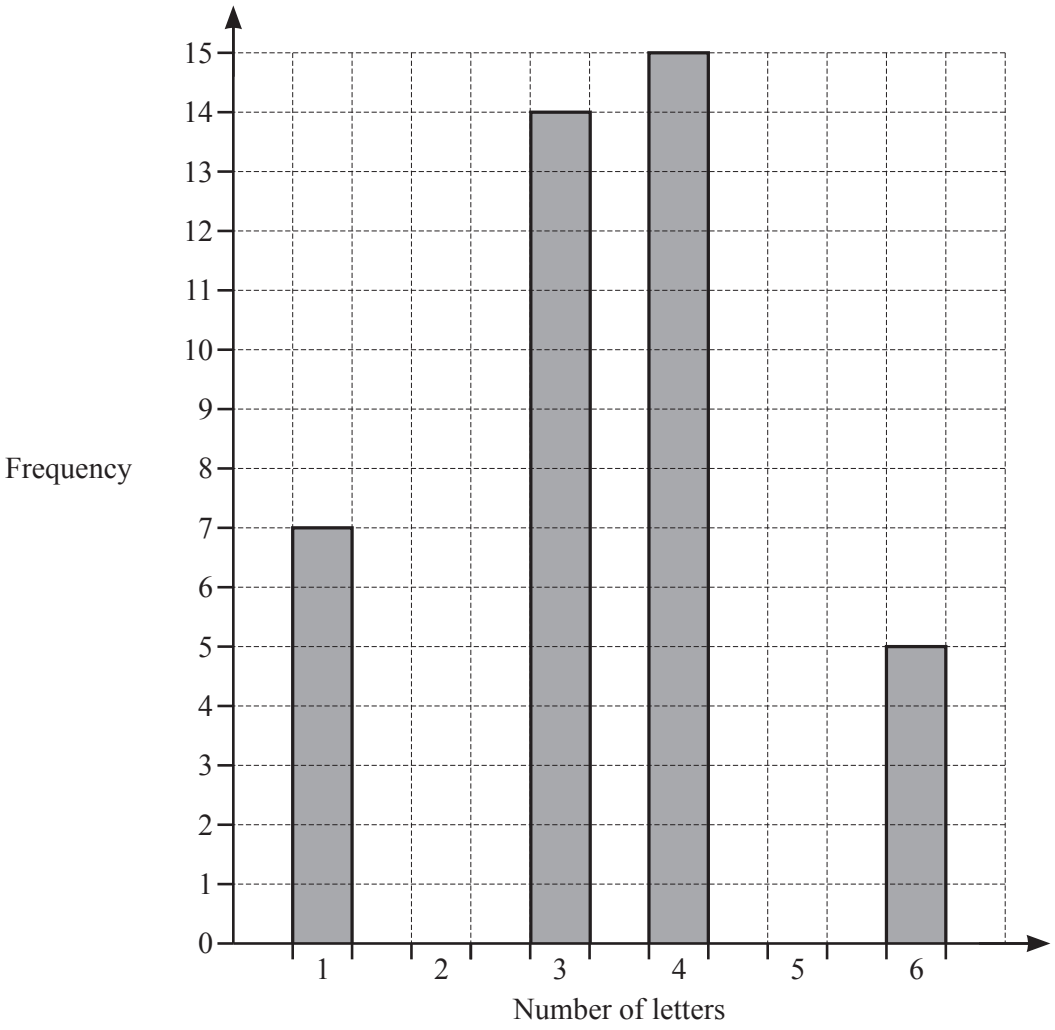
解析 31 出现 3 次，21 出现 2 次，其余数据各出现 1 次。∴ 出现次数最多的数据为 31。答：众数为 31。

7. [2023 · May/June 0580/32 Q2(a)(ii)]

提示：先用总数补全缺失频数，再比较各柱对应的频数。

(a) Mika counts the number of letters in each of the 61 words in a paragraph.
Some of his results are shown in the table and bar chart.

Number of letters	1	2	3	4	5	6
Frequency	7	12		15		5



(ii) Write down the mode.

2 (a) 一段文字共有 61 个词，米卡统计了每个词的字母个数。 表格和柱形图显示了他的部分统计结果。

字母个数	1	2	3	4	5	6
频数	7	12		15		5

柱形图的横轴为字母个数，标有 $1, 2, 3, 4, 5, 6$。 纵轴为频数，从 0 到 15，每隔 1 标一个刻度。 已画出的柱中，字母个数 $1, 3, 4, 6$ 对应的频数分别为 $7, 14, 15, 5$。 字母个数为 2 和 5 的柱尚未画出。 (ii) 写出众数。

✓ **答案** 4

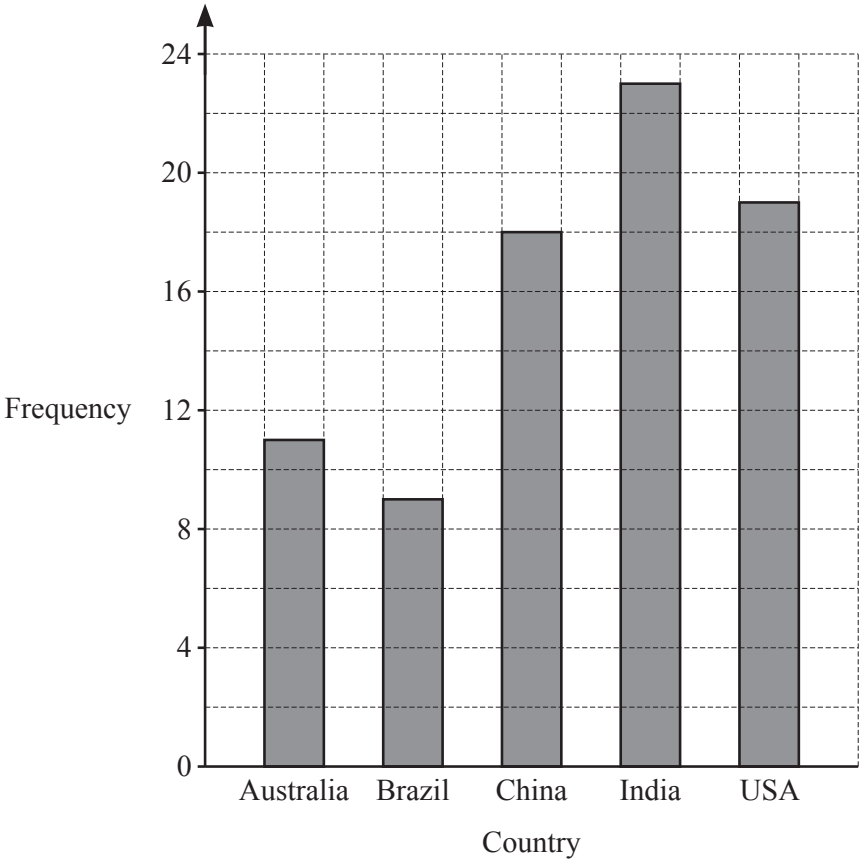
解析 由柱形图，含 3 个字母的词的频数为 14。 含 5 个字母的词的频数为

$$61 - (7 + 12 + 14 + 15 + 5) = 8$$

各频数中最大的是 15，对应的字母个数为 4。 答：众数为 4。

8. [2023 · October/November 0580/31 Q3(a)(ii)]
提示：比较各柱高度，再读最高柱下方的国家名称。

(a) The bar chart shows the country in which each of 80 students live.



(ii) In which country do the largest number of these students live?

(a) 柱形图表示 80 名学生各自居住的国家。横轴为国家，依次标有澳大利亚、巴西、中国、印度、美国。纵轴为频数，标出的刻度为 $0, 4, 8, 12, 16, 20, 24$。各柱表示的人数如下。

国家	澳大利亚	巴西	中国	印度	美国
频数	11	9	18	23	19

(ii) 这些学生中，居住在哪个国家的人数最多？

✓ **答案** 印度

解析 印度对应的柱最高，频数为 23。∴ 居住在印度的学生人数最多。答：印度。

9.4 把各数乘频数后求和，再除以总频数

题型 1 把各数乘频数后求和，再除以总频数（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **数据逐项计数：**这组数据中，8 出现两次，两次都要计入。共有 _____ 个数据。

② **平均数的计算：**将这组数据逐项相加，得到总和。总和除以数据个数，得到平均数。

$$21 + 8 + 15 + 32 + 3 + 29 + 19 + 45 + 8 = 180$$

$$\text{平均数} = \frac{\text{数据总和}}{\text{数据个数}} = \frac{180}{9} = 20$$

③ **频数还原总和：**某个数值出现的次数称为频数。数值 8 的频数为 2，它对总和的贡献如下。

$$8 \times 2 = 16$$

将相同数值合并后，总和为

$$21\times1+8\times2+15\times1+32\times1+3\times1+29\times1+19\times1+45\times1=180$$

④ **频数相加计数：**合并后的各个频数相加，得到数据个数。各数乘对应频数后求和，再除以 _____。

$$1+2+1+1+1+1+1+1=9$$

$$\text{平均数}=\frac{\text{各数与对应频数的乘积之和}}{\text{总频数}}=\frac{180}{9}=20$$

⑤ **零值与零频数：**数值为 0 和频数为 0 时，计数方法如下。

数值 0 出现 3 次：

$$0\times3=0$$

总和加 0，总频数加 3。

数值 4 的频数为 0：

$$4\times0=0$$

总和加 0，总频数加 0。

⑥ **茎叶还原数据：**植物高度图的图例规定，10 | 4 表示 10.4 cm。每片叶与所在行的茎合成一个高度。首行有两片叶，这两株植物的平均高度为

$$\frac{10.4+10.8}{2}=\frac{21.2}{2}=10.6\text{ cm}$$

填空：①9　②总频数

点石成金　题目出现一组数、频数表或茎叶图并求平均数时，先求数据总和与数据个数。

例 1　[2023 · May/June 0580/11 Q5]

21　8　15　32　3　29　19　45　8

Calculate the mean of these numbers.

21, 8, 15, 32, 3, 29, 19, 45, 8

计算这些数的平均数。

解答　这组数据共有 9 个。

$$21+8+15+32+3+29+19+45+8=180$$

$$\text{平均数}=\frac{180}{9}=20$$

答：平均数为 20。

方法：先数清整组数据，两个 8 分别计数，再累加并除以个数。

辨析：不同数值的个数是类别数，总频数是全部数据的个数。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/23 Q3(b)]

提示：先看图例确定小数点位置，再按叶片计数并累加高度。

The stem-and-leaf diagram shows the heights, in centimetres, of some plants.

10	4　8
11	1　3　4　6
12	2　3　6　9
13	2　6　9

Key: 10 | 4 represents 10.4 cm

(b) Work out the mean height.

茎叶图表示一些植物的高度，单位为厘米。茎 10：叶 4, 8。
茎 11：叶 1, 3, 4, 6。
茎 12：叶 2, 3, 6, 9。
茎 13：叶 2, 6, 9。
图例：10 | 4 表示 10.4 cm。（b）求这些植物的平均高度。

✓ **答案** 12.1 cm

解析 由图例，将每片叶与所在行的茎合成高度，得

$$\text{高度总和} = 10.4 + 10.8 + 11.1 + 11.3 + 11.4 + 11.6 + 12.2 + 12.3 + 12.6 + 12.9 + 13.2 + 13.6 + 13.9 = 157.3 \text{ cm}$$

每片叶对应一株植物，故

$$\text{植物总株数} = 2 + 4 + 4 + 3 = 13$$

$$\text{平均高度} = \frac{157.3}{13} = 12.1 \text{ cm}$$

答：平均高度为 12.1 cm。

2. [2023 · February/March 0580/42 Q2(a)(iii)]

提示：对照反应时间与学生人数，逐项相乘后核对总人数。

(a) 100 students take part in a reaction test.
The table shows the results.

Reaction time (seconds)	6	7	8	9	10	11
Number of students	3	32	19	29	11	6

(iii) Calculate the mean.

（a）100 名学生参加一项反应测试。下表给出了测试结果。反应时间（s）：6, 7, 8, 9, 10, 11。
对应的学生人数：3, 32, 19, 29, 11, 6。（iii）计算平均反应时间。

✓ **答案** 8.31 s

解析 各反应时间乘对应学生人数，得

$$\text{反应时间总和} = 6 \times 3 + 7 \times 32 + 8 \times 19 + 9 \times 29 + 10 \times 11 + 11 \times 6 = 831 \text{ s}$$

共有 100 名学生，故

$$\text{平均反应时间} = \frac{831}{100} = 8.31\ \text{s}$$

答：平均反应时间为 8.31 s。

3. [2023 · May/June 0580/32 Q2(b)(i)]
提示：看清字母数与单词数两栏，分清累计量与计数单位。

(b) Grace also counts the number of letters in each word of another paragraph.
Her results are shown in the table.

Number of letters	1	2	3	4	5	6
Frequency	10	18	9	6	5	2

(i) Work out the mean.

(b) 格蕾丝还统计了另一段文字中每个单词的字母数。下表给出了她的统计结果。 字母数：$1, 2, 3, 4, 5, 6$。对应的频数：$10, 18, 9, 6, 5, 2$。 (i) 求每个单词的平均字母数。

✓ **答案** 2.68

解析 由频数表，得

$$\text{单词总数} = 10 + 18 + 9 + 6 + 5 + 2 = 50$$

$$\text{字母总数} = 1 \times 10 + 2 \times 18 + 3 \times 9 + 4 \times 6 + 5 \times 5 + 6 \times 2 = 134$$

$$\text{平均字母数} = \frac{134}{50} = 2.68$$

答：每个单词的平均字母数为 2.68。

4. [2023 · February/March 0580/12 Q17]
提示：对照售出量与周数，检查零售出量对应的周数是否计入。

A school records how many calculators it sells each week for 40 weeks.
The results are shown in the table.

Number of calculators	Frequency
0	14
1	12
2	6
3	5
4	0
5	2
6	1

Work out the mean number of calculators the school sells each week.

一所学校连续 40 周记录每周售出的计算器台数。下表给出了记录结果。 计算器台数：$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$。对应的频数：$14, 12, 6, 5, 0, 2, 1$。 求这所学校每周平均售出的计算器台数。

✓ **答案** 1.375 台

解析 每周售出量乘对应周数，得

$$\text{售出总台数} = 0\times 14 + 1\times 12 + 2\times 6 + 3\times 5 + 4\times 0 + 5\times 2 + 6\times 1 = 55$$

记录共持续 40 周，故

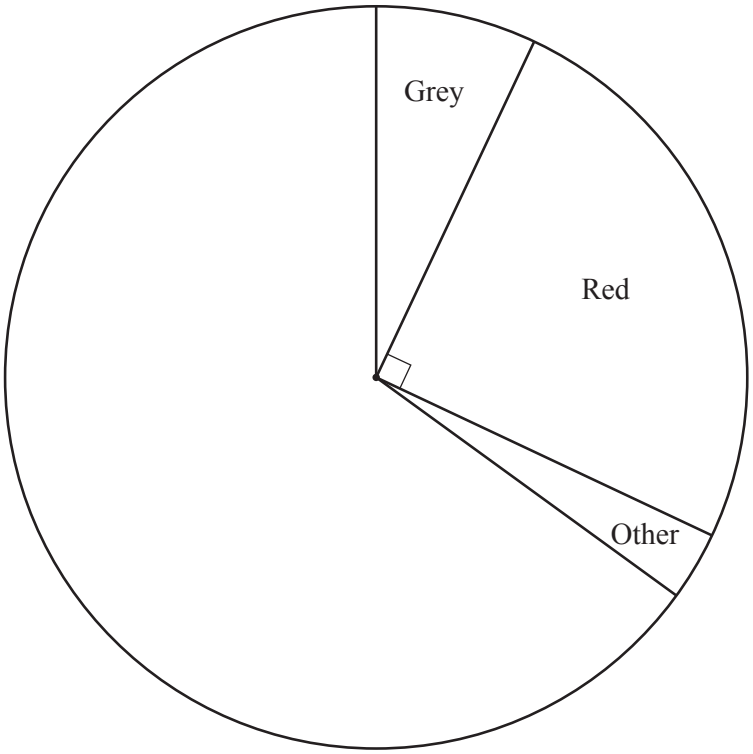
$$\text{每周平均售出台数} = \frac{55}{40} = 1.375$$

答：学校每周平均售出 1.375 台计算器。

5. [2023 · October/November 0580/32 Q5(f)]

提示：对照每车人数与车辆数，分别累计人数和车辆数。

Heidi records the colour of each of 500 cars crossing a bridge.
The pie chart shows some of this information.



(f) Heidi also records the number of people in each car crossing the bridge for one hour.

Number of people	Frequency
1	20
2	6
3	0
4	15
5	8
6	12

Calculate the mean.

海蒂记录了通过一座桥的 500 辆汽车中每辆车的颜色。扇形统计图给出了其中的部分信息。 图中标签：灰色、红色、其他。红色扇形的圆心角标有直角记号。 (f) 海蒂还在一小时内记录了通过这座桥的每辆车内的人数。 人数：$1,2,3,4,5,6$。
对应的频数：$20,6,0,15,8,12$。 计算每辆车的平均人数。

✓ **答案** 3.34 人

解析 由人数频数表，得

$$\text{车辆总数} = 20+6+0+15+8+12 = 61$$

$$\text{总人数} = 1\times 20+2\times 6+3\times 0+4\times 15+5\times 8+6\times 12 = 204$$

$$\text{每辆车的平均人数} = \frac{204}{61} \approx 3.34$$

答：每辆车平均有 3.34 人。

9.5 中位数

题型 1 从原始数据或茎叶图找中位数（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **数据排序：** 斯特凡记录了 10 天的候车时间。将这些时间按_____排列，重复的数各占一项。

$$1,3,4,5,5,8,11,12,23,24$$

② **数据计数：** 排好后的候车时间共有 10 项。用 n 表示数据项数，本例中 $n=10$。

③ **中间位置：** 数据有序后，根据项数确定中间位置。

项数为奇数	项数为偶数
取第 $\frac{n+1}{2}$ 项	取第 $\frac{n}{2}$ 项和第 $\frac{n}{2}+1$ 项
如共有 5 项：	本例共有 10 项：
$\frac{5+1}{2}=3$	$\frac{10}{2}=5$
	$\frac{10}{2}+1=6$

④ **中位数取值：** 中位数由排在中间的数据确定。

中间有一个数	中间有两个数
取这个数	取这两个数的_____
如 $2,4,7,9,12$ 的中位数为 7	用 a,b 表示中间两数：
	中位数 $=\frac{a+b}{2}$

⑤ **茎叶图读数：** 图中的键 $1\mid 6$ 表示 16 岁，茎表示十位，叶表示个位。按茎和叶从小到大读取，每片叶计一项。首行还原为 $16,19$，共 2 项。

填空：①从小到大　②平均数

点石成金　题目出现一组数据或茎叶图，并要求中位数时，先确认数据从小到大排列并数清项数。

例 1　[2023 · May/June 0580/12 Q8(b)]

On ten days, Stefan records the number of minutes he has to wait for a train.

1　3　12　5　4　23　5　24　11　8

(b) Find the median.

在 10 天中，斯特凡记录了每天等候火车所需的分钟数。

1, 3, 12, 5, 4, 23, 5, 24, 11, 8

(b) 求中位数。

解答　将候车时间从小到大排列，得

$$1, 3, 4, 5, 5, 8, 11, 12, 23, 24$$

共有 10 项，中间位置为

$$\frac{10}{2} = 5$$

$$\frac{10}{2} + 1 = 6$$

第 5 项为 5，第 6 项为 8，所以

$$\text{中位数} = \frac{5+8}{2} = 6.5$$

答：中位数为 6.5 分钟。

方法：先看原始数据，排序时保留每个重复值，再数项数定中间位置。

辨析：中间位置是排序后的序号，中位数是由中间数据确定的数值。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/31 Q3(c)]

提示：先数总项数判断奇偶，再找排序后居中的两项。

These are the test scores of 16 students.

15　26　9　45　36　20　41　39

40　23　32　18　41　34　37　31

(c) Find the median.

以下是 16 名学生的测试成绩。

15, 26, 9, 45, 36, 20, 41, 39

40, 23, 32, 18, 41, 34, 37, 31

(c) 求中位数。

✓ **答案**

33

解析　将测试成绩从小到大排列，得

$$9, 15, 18, 20, 23, 26, 31, 32, 34, 36, 37, 39, 40, 41, 41, 45$$

共有 16 项，中间位置为

$$\frac{16}{2}=8$$

$$\frac{16}{2}+1=9$$

第 8 项为 32，第 9 项为 34，所以

$$\text{中位数}=\frac{32+34}{2}=33$$

答：中位数为 33。

2. [2023 · May/June 0580/13 Q7(c)]
提示：先数叶片定中间位置，再逐行累计定位，结合键读数。

The stem-and-leaf diagram shows the ages of 21 people.

1	6 9
2	1 4 4 5 8
3	2 6 7 9
4	0 2 4 6 8 9
5	3 4 5 7

Key : 1|6 represents 16 years

(c) Find the median.

该茎叶图表示 21 人的年龄。
茎 1：叶 6, 9
茎 2：叶 1, 4, 4, 5, 8
茎 3：叶 2, 6, 7, 9
茎 4：叶 0, 2, 4, 6, 8, 9
茎 5：叶 3, 4, 5, 7
键：1 | 6 表示 16 岁。
(c) 求中位数。

✓ **答案** 39 岁

解析 茎和各行的叶均已从小到大排列。每片叶表示一人的年龄，共有

$$n=2+5+4+6+4=21$$

项数为奇数，中间位置为

$$\frac{21+1}{2}=11$$

前两行的数据项数为

$$2+5=7$$

因此，第 11 项位于第三行，其叶的位置为

$$11-7=4$$

第三行的叶为 $2,6,7,9$，第 4 片叶为 9。由键可得对应年龄为

$$10\times 3+9=39$$

答：中位数为 39 岁。

3. [2024 · February/March 0580/12 Q11(b)]

提示：将人数排序，再确定中间两项的位置。

Sarah records the number of people who play golf on each of 14 days.

28	46	54	71	70	65	49
50	64	77	68	72	45	58

(a) Complete the stem-and-leaf diagram.

2	
3	
4	
5	
6	
7	

Key: 2 | 8 represents 28

(b) Find the median.

萨拉记录了 14 天中每天打高尔夫球的人数。

$28,46,54,71,70,65,49$

$50,64,77,68,72,45,58$

(a) 补全茎叶图。

2	
3	
4	
5	
6	
7	

图键：2 mid 8 表示 28。

(b) 求中位数。

✓ **答案** 61 人

解析 (a) 将各个茎的叶按从小到大排列。

茎	叶
2	8
3	
4	5 6 9
5	0 4 8
6	4 5 8
7	0 1 2 7

键：2 | 8 表示 28 人。 解：将每天打高尔夫球的人数从小到大排列，得

$$28, 45, 46, 49, 50, 54, 58, 64, 65, 68, 70, 71, 72, 77$$

共有 14 项，中间位置为

$$\frac{14}{2} = 7$$

$$\frac{14}{2} + 1 = 8$$

第 7 项为 58，第 8 项为 64，所以

$$\text{中位数} = \frac{58 + 64}{2} = 61$$

答：中位数为 61 人。

4. [2024 · October/November 0580/32 Q5(b)(ii)]

提示：排序时保留重复得分，再找中间两项。

(b) In another puzzle each student gets a score.
These are the scores for 12 students.

17	21	24	32	27	11
26	18	10	29	14	24

(i) Complete the stem-and-leaf diagram for these scores.

1	
2	
3	

Key : 1 | 7 represents 17

(ii) Find the median.

(b) 在另一道益智题中，每名学生都会得到一个分数。以下是 12 名学生的得分。

$$17, 21, 24, 32, 27, 11$$

$$26, 18, 10, 29, 14, 24$$

(i) 补全表示这些得分的茎叶图。

1	
2	

3 |

图键：1 mid 7 表示 17。

(ii) 求中位数。

✓ **答案** 22.5

解析 (b) (i) 将各个茎的叶按从小到大排列。

茎	叶
1	0 1 4 7 8
2	1 4 4 6 7 9
3	2

键：1 | 7 表示 17 分。 解：将得分从小到大排列，得

$$10, 11, 14, 17, 18, 21, 24, 24, 26, 27, 29, 32$$

共有 12 项，中间位置为

$$\frac{12}{2} = 6$$

$$\frac{12}{2} + 1 = 7$$

第 6 项为 21，第 7 项为 24，所以

$$\text{中位数} = \frac{21 + 24}{2} = 22.5$$

答：中位数为 22.5。

5. [2025 · May/June 0580/13 Q6(a)(i)]

提示：将通话时长排序，奇数项数据取中间一项。

These are the lengths of time, in minutes, of seven phone calls.

10 22 5 7 35 8 75

(a) (i) Find the median.

以下是七次通话各自的时长，单位为分钟。

$$10, 22, 5, 7, 35, 8, 75$$

(a) (i) 求中位数。

✓ **答案** 10 分钟

解析 将通话时长从小到大排列，得

$$5, 7, 8, 10, 22, 35, 75$$

共有 7 项，中间位置为

$$\frac{7 + 1}{2} = 4$$

第 4 项为 10。

答：中位数为 10 分钟。

9.6 用组中值代表组内数据，估计平均数

题型 1　用组中值代表组内数据，估计平均数（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **读取分组条件：** 200 个马铃薯按质量分组。表中的频数表示各组的个数。组内各个质量未知，需估计平均数。

② **求出组中值：** 第一组的质量范围是 $50 < m \leq 110$。取上下限的平均数，作为这一组的组中值，单位为克。

$$\frac{50+110}{2} = _____$$

③ **求小数组中值：** 区间端点为小数时，同样相加后除以 2。例如，身高区间两端为 1.1 米与 1.4 米时，组中值为

$$\frac{1.1+1.4}{2} = 1.25 \text{ m}$$

④ **估计每组总量：** 第一组有 60 个马铃薯，用组中值代表每个马铃薯的质量。组中值乘频数，得到该组总质量的估计值。

$$80 \times 60 = _____ \text{ g}$$

⑤ **计算平均估计：** 各组总质量的估计值相加，再除以总个数 200。记 x 为组中值，f 为频数，$|x|$ 为平均数。$\sum$ 表示对所有组求和，结果单位与原数据相同。

$$|x| \approx \frac{\sum fx}{\sum f}$$

填空：①80　②4800

点石成金　题目出现分组区间、频数，并要求估计平均数时，先求各组的组中值。

例 1　[2023 · February/March 0580/42 Q2(c)(i)]

(c) The mass of each of 200 potatoes is measured.
The table shows the results.

Mass (m grams)	$50 < m \leqslant 110$	$110 < m \leqslant 200$	$200 < m \leqslant 300$
Frequency	60	99	41

(i) Calculate an estimate of the mean.

(c) 测量 200 个马铃薯中每个马铃薯的质量。下表给出了测量结果。

质量 m（克）	$50 < m \leq 110$	$110 < m \leq 200$	$200 < m \leq 300$
频数	60	99	41

(i) 计算平均质量的估计值。

解答　各组的组中值分别为

$$\frac{50+110}{2} = 80$$

$$\frac{110+200}{2} = 155$$

$$\frac{200+300}{2} = 250$$

方法：先看各组上下限，求组中值，再按频数加权求平均。

辨析：组中值是区间两端的平均数，频数是落在该区间的数据个数。

拓展：组内数据的具体取值未知，用组中值计

算所得的是平均数的估计值。

用组中值代表该组内每个马铃薯的质量，得总质量的估计值为

$$80 \times 60 + 155 \times 99 + 250 \times 41 = 30395 \text{ g}$$

平均质量的估计值为

$$\frac{30395}{200} = 151.975 \text{ g}$$

答：平均质量的估计值为 151.975 克。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/42 Q4(a)(ii)]

提示：先核对后两组的区间端点，再看各组频数。

The table shows information about the heights of 80 children.

Height (h metres)	$1.2 < h \leqslant 1.4$	$1.4 < h \leqslant 1.5$	$1.5 < h \leqslant 1.65$	$1.65 < h \leqslant 1.8$	$1.8 < h \leqslant 1.9$
Frequency	2	13	24	32	9

(ii) Calculate an estimate of the mean height.

下表给出 80 名儿童的身高 h（米）。

身高 h	$1.2 < h \leq 1.4$	$1.4 < h \leq 1.5$	$1.5 < h \leq 1.65$	$1.65 < h \leq 1.8$	$1.8 < h \leq 1.9$
频数	2	13	24	32	9

(a)（ii）计算平均身高的估计值。

✓ **答案** 1.64 m

解析 用各组中值代表该组身高。五个中值为 1.3、1.45、1.575、1.725、1.85 米。 平均身高估计值 $= \frac{2\times1.3+13\times1.45+24\times1.575+32\times1.725+9\times1.85}{80} = \frac{131.1}{80} = 1.63875$ m 答：约 1.64m。

2. [2023 · May/June 0580/41 Q3(a)(i)]

提示：看各组质量上下限，组中值须与本组频数配对。

(a) The table shows information about the mass of each of 1000 eggs.

Mass (m grams)	$40 < m \leqslant 50$	$50 < m \leqslant 56$	$56 < m \leqslant 64$	$64 < m \leqslant 70$
Frequency	126	520	154	200

(i) Calculate an estimate of the mean.

3 (a) 下表给出了 1000 个鸡蛋中每个鸡蛋的质量信息。

质量 m（克）	$40 < m \leq 50$	$50 < m \leq 56$	$56 < m \leq 64$	$64 < m \leq 70$
频数	126	520	154	200

(i) 计算平均质量的估计值。

✓ **答案**

55.87 g

解析 各组的组中值分别为

$$\frac{40 + 50}{2} = 45$$

$$\frac{50+56}{2}=53$$

$$\frac{56+64}{2}=60$$

$$\frac{64+70}{2}=67$$

用组中值代表该组内每个鸡蛋的质量，得总质量的估计值为

$$45\times126+53\times520+60\times154+67\times200=55870\ \text{g}$$

平均质量的估计值为

$$\frac{55870}{1000}=55.87\ \text{g}$$

答：平均质量的估计值为 55.87 克。

3. [2023 · May/June 0580/43 Q6(b)(i)]

提示：看质量区间求组中值，比较各组车辆数以确定权重。

(b) The frequency table shows information about the mass of each of 50 trucks.

Mass (m kg)	$2000 < m \leqslant 2600$	$2600 < m \leqslant 3500$	$3500 < m \leqslant 5000$	$5000 < m \leqslant 5700$
Frequency	12	15	16	7

(i) Calculate an estimate for the mean mass of the trucks.

(b) 下列频数表给出了 50 辆卡车中每辆卡车的质量信息。

质量 m（千克）	$2000 < m \leq 2600$	$2600 < m \leq 3500$	$3500 < m \leq 5000$	$5000 < m \leq 5700$
频数	12	15	16	7

(i) 计算这些卡车平均质量的估计值。

✓ **答案**

$$3576\ \text{kg}$$

解析 各组的组中值分别为

$$\frac{2000+2600}{2}=2300$$

$$\frac{2600+3500}{2}=3050$$

$$\frac{3500+5000}{2}=4250$$

$$\frac{5000+5700}{2}=5350$$

用组中值代表该组内每辆卡车的质量，得总质量的估计值为

$$2300 \times 12 + 3050 \times 15 + 4250 \times 16 + 5350 \times 7 = 178800 \text{ kg}$$

平均质量的估计值为

$$\frac{178800}{50} = 3576 \text{ kg}$$

答：卡车平均质量的估计值为 3576 千克。

4. [2024 · February/March 0580/22 Q17]

提示：先求各组的组中值，再分别乘相应频数。

The height of each of 200 people is measured.
The table shows the results.

Height (h cm)	$100 < h \leqslant 120$	$120 < h \leqslant 130$	$130 < h \leqslant 150$	$150 < h \leqslant 190$
Frequency	32	55	64	49

Calculate an estimate of the mean height.

测量 200 人中每个人的身高。下表给出了测量结果，身高 h 的单位为厘米。

身高 h（厘米）	$100 < h \leq 120$	$120 < h \leq 130$	$130 < h \leq 150$	$150 < h \leq 190$
频数	32	55	64	49

计算平均身高的估计值。

✓ **答案** 138.425 cm

解析 各组的组中值分别为

$$\frac{100 + 120}{2} = 110$$

$$\frac{120 + 130}{2} = 125$$

$$\frac{130 + 150}{2} = 140$$

$$\frac{150 + 190}{2} = 170$$

用组中值代表该组内每个人的身高，得总身高的估计值为

$$110 \times 32 + 125 \times 55 + 140 \times 64 + 170 \times 49 = 27685 \text{ cm}$$

平均身高的估计值为

$$\frac{27685}{200} = 138.425 \text{ cm}$$

答：平均身高的估计值为 138.425 厘米。

5. [2024 · May/June 0580/41 Q4(b)(ii)]
提示：先求各组上下限的平均数，作为组中值。

(b) Matilda records the distances that 80 different cars can travel with a full tank of fuel. The table shows this information.

Distance (d km)	$250 < d \leqslant 300$	$300 < d \leqslant 400$	$400 < d \leqslant 420$	$420 < d \leqslant 450$	$450 < d \leqslant 500$
Frequency	7	13	19	21	20

(ii) Calculate an estimate of the mean.

(b) 玛蒂尔达记录了 80 辆不同汽车加满一箱燃油后能够行驶的距离。下表给出了这些信息。

距离 d（千米）	$250 < d \leq 300$	$300 < d \leq 400$	$400 < d \leq 420$	$420 < d \leq 450$	$450 < d \leq 500$
频数	7	13	19	21	20

(ii) 计算平均行驶距离的估计值。

✓ **答案**

411.25 km

解析 各组的组中值分别为

$$\frac{250+300}{2}=275$$

$$\frac{300+400}{2}=350$$

$$\frac{400+420}{2}=410$$

$$\frac{420+450}{2}=435$$

$$\frac{450+500}{2}=475$$

用组中值代表该组内每辆汽车的行驶距离，得总行驶距离的估计值为

$$275\times 7+350\times 13+410\times 19+435\times 21+475\times 20=32900 \text{ km}$$

平均行驶距离的估计值为

$$\frac{32900}{80}=411.25 \text{ km}$$

答：平均行驶距离的估计值为 411.25 千米。

9.7 用最大值减最小值求极差

题型 1 用最大值减最小值求极差（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **成绩的极差：** 图中记录了 24 名学生的成绩。比较最高分与最低分，用极差表示两者的差。

极差 = _____ − _____

② **茎叶还原数值：** 图示说明中，4 | 2 表示 42。竖线左侧为茎，右侧为叶，茎乘 10 后加叶。

$$10 \times 4 + 2 = 42$$

③ **读取图中两端：** 图中各行的叶已从小到大排列。首行最小的数为 22，末行最大的数为 67。

$$\text{极差} = 67 - 22 = _____$$

④ **散列数据比较：** 数据未排序时，逐个比较，确定最大值和最小值。例如数据 8, 3, 12, 5，最小值为 3，最大值为 12。

$$\text{极差} = 12 - 3 = 9$$

⑤ **多位茎的读法：** 图示说明为 12 | 4 表示 124 克。茎有两位数时，仍将茎乘 10 后加叶。若全图两端为 12 | 4 与 15 | 7，则

$$\text{最小值} = 10 \times 12 + 4 = 124 \text{ g}$$

$$\text{最大值} = 10 \times 15 + 7 = 157 \text{ g}$$

$$\text{极差} = 157 - 124 = 33 \text{ g}$$

⑥ **极差增加求值：** 续用图中成绩，使极差增加 2 分。新极差为 47 分。新成绩须低于原最低分，或高于原最高分。

最低分下移 2 分：

$$22 - 2 = 20$$

$$67 - 20 = 47$$

最高分上移 2 分：

$$67 + 2 = 69$$

$$69 - 22 = 47$$

填空：①最大值　②最小值　③45

点石成金　题目出现一组数据或统计图，并要求极差时，先找出全部数据的最大值和最小值。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q2(b)(iii)]

(b) The stem-and-leaf diagram shows the test scores for 24 students.

2	2 5 6 9
3	3 7 8
4	2 3 5 5 7 8
5	1 1 1 5 6 8 9
6	0 2 5 7

Key : 4 | 2 represents 42

(iii) Work out the range.

(b) 茎叶图表示 24 名学生的测验成绩。

2 | 2 5 6 9

3 | 3 7 8

4 | 2 3 5 5 7 8

5 | 1 1 1 5 6 8 9

6 | 0 2 5 7

图示说明：4 | 2 表示 42。

(iii) 求极差。

解答 由图示说明，最低分为 22，最高分为 67。

$$\text{极差} = 67 - 22 = 45$$

答：极差为 45 分。

方法：先看图示说明，再找两端的叶，还原数值后用大数减小数。

辨析：叶是个位上的数字，数据值是茎和叶合起来表示的完整数值。

拓展：最大值与最小值不变时，中间数据的变化不影响极差。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/13 Q7(b)]

提示：看图示说明还原年龄，再比较全图的最大与最小年龄。

The stem-and-leaf diagram shows the ages of 21 people.

1	6　9
2	1　4　4　5　8
3	2　6　7　9
4	0　2　4　6　8　9
5	3　4　5　7

Key : 1 | 6 represents 16 years

(b) Work out the range.

茎叶图表示 21 个人的年龄。

1 | 6　9

2 | 1　4　4　5　8

3 | 2　6　7　9

4 | 0　2　4　6　8　9

5 | 3　4　5　7

图示说明：1 | 6 表示 16 岁。

(b) 求极差。

✓ **答案** 41 岁

解析 由茎叶图，最小年龄为 16 岁，最大年龄为 57 岁。

$$\text{极差} = 57 - 16 = 41$$

答：年龄的极差为 41 岁。

2. [2023 · October/November 0580/11 Q9(b)]
提示：从茎叶图找用时的两端，比较完整用时而非叶的大小。

The stem-and-leaf diagram shows the time, in minutes, it takes each of 15 people to complete a race.

1	6 6 7
2	1 3 3 4 5 6 7 7 7
3	0 1 1

Key: 1|6 represents 16 minutes

Find

(b) the range

茎叶图表示 15 个人各自完成一场比赛所需的时间，单位为分钟。

1 | 6 6 7
2 | 1 3 3 4 5 6 7 7 7
3 | 0 1 1

图示说明：1 | 6 表示 16 分钟。
求：
(b) 极差。

✓ **答案** 15 分钟

解析 由茎叶图，最短用时为 16 分钟，最长用时为 31 分钟。

$$\text{极差} = 31 - 16 = 15$$

答：用时的极差为 15 分钟。

3. [2023 · May/June 0580/31 Q3(d)]
提示：逐个比较全部成绩，圈出最高分与最低分。

These are the test scores of 16 students.

15 26 9 45 36 20 41 39
40 23 32 18 41 34 37 31

(d) Find the range.

以下是 16 名学生的测验成绩。
15 26 9 45 36 20 41 39
40 23 32 18 41 34 37 31

(d) 求极差。

✓ **答案** 36 分

解析 比较全部成绩，最低分为 9，最高分为 45。

$$\text{极差} = 45 - 9 = 36$$

答：成绩的极差为 36 分。

4. [2023 · May/June 0580/43 Q2(a)(iv)]
提示：比较全部短信条数，找出最多与最少的记录。

(a) Anna records the number of text messages she receives for 14 days.

17	15	31	38	31	22	13
18	21	27	28	21	31	29

(iv) Find the range.

(a) 安娜记录了 14 天中每天收到的短信条数。

17 15 31 38 31 22 13
18 21 27 28 21 31 29

(iv) 求极差。

✓ **答案** 25 条

解析 比较全部数据，收到短信的最少条数为 13，最多条数为 38。

$$\text{极差} = 38 - 13 = 25$$

答：短信条数的极差为 25 条。

5. [2023 · May/June 0580/32 Q2(c)(ii)]
提示：查看全部字母个数，比较最大的计数与最小的计数。

(c) She counts the number of letters in each word in the next sentence.
These are her results.

3	4	1	7	9	2	6	5	4	2	3	2

(ii) Find the range.

(c) 她统计了下一个句子中每个单词的字母个数。结果如下。

3 4 1 7 9 2 6 5 4 2 3 2

(ii) 求极差。

✓ **答案**

8

解析 比较全部数据，字母个数的最小值为 1，最大值为 9。

$$\text{极差} = 9 - 1 = 8$$

答：极差为 8。

6. [2023 · October/November 0580/13 Q6(a)]

提示：先看图示说明确定茎的位值，再比较完整质量。

Jamie records the masses of two samples of oranges, type A and type B.
The stem-and-leaf diagram shows the mass, in grams, of each of 30 oranges of type A.

17	6 8 8 9
18	0 1 2 2 4 7
19	1 2 2 3 6 7 8
20	0 2 5 5 5 6 7 7 8
21	1 5 6 8

Key: 17|6 represents 176 grams

(a) Complete the table to show the range for type A oranges.

	Type A	Type B
Mean (g)	195.7	215.8
Range (g)		35

杰米记录了 A 类和 B 类两组橙子样本的质量。茎叶图表示 30 个 A 类橙子各自的质量，单位为克。

17 | 6 8 8 9
18 | 0 1 2 2 4 7
19 | 1 2 2 3 6 7 8
20 | 0 2 5 5 5 6 7 7 8
21 | 1 5 6 8

图示说明：17 | 6 表示 176 克。
(a) 完成表格，填出 A 类橙子质量的极差。

	A 类	B 类
平均质量（克）	195.7	215.8
极差（克）		35

✓ **答案**

42 g

解析 由图示说明，17 | 6 表示 176 克。

$$\text{最小质量} = 10 \times 17 + 6 = 176 \text{ g}$$

$$\text{最大质量} = 10 \times 21 + 8 = 218 \text{ g}$$

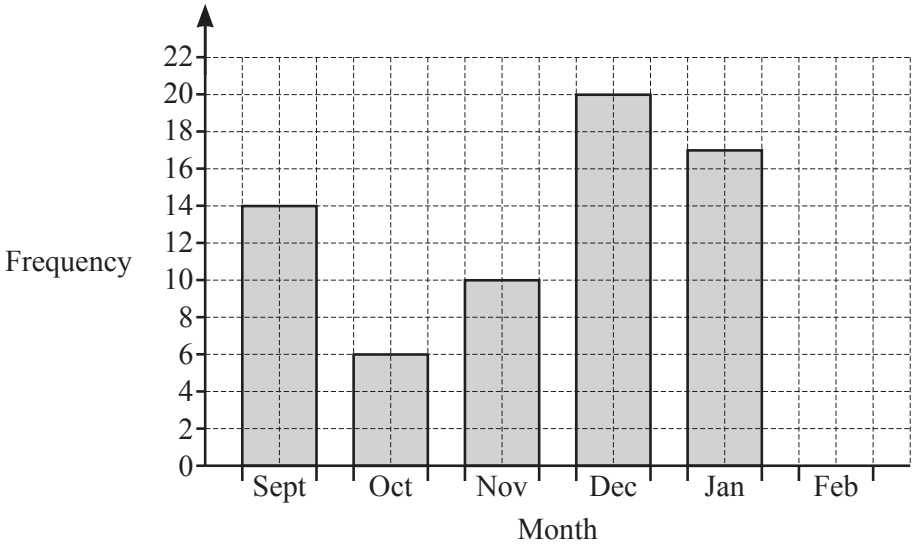
$$\text{极差} = 218 - 176 = 42 \text{ g}$$

答：表中 A 类橙子的极差应填 42。

7. [2023 · October/November 0580/32 Q1(b)]

提示：查看进球数记录，比较最多进球数与最少进球数。

(a) The bar chart shows the number of goals scored by a team in each of 5 months.



(i) In February, 12 goals are scored.

Complete the bar chart.

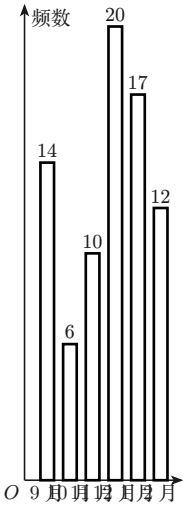
(ii) How many more goals were scored in January than in October?

(b) Find the range of the number of goals scored.

(a) 柱形图显示球队在 5 个月中每月的进球数。(i) 2 月进了 12 球，补全柱形图。(ii) 1 月比 10 月多进多少球？ (b) 求进球数的极差。

✓ **答案** 14

解析 由柱形图，最多进 20 球，最少进 6 球。 极差 $= 20 - 6 = 14$ 答：14。



8. [2023 · February/March 0580/32 Q2(b)(iv)]
提示：看新增成绩能否改变两端，分低于最低分和高于最高分比较。

(b) The stem-and-leaf diagram shows the test scores for 24 students.

2	2 5 6 9
3	3 7 8
4	2 3 5 5 7 8
5	1 1 1 5 6 8 9
6	0 2 5 7

Key : 4 | 2 represents 42

(iv) Frankie was absent on the day of the test.
His score is not on the stem-and-leaf diagram.
When he takes the test, his score increases the range by 3 marks.

Write down the two possible values of Frankie's score.

(b) 茎叶图表示 24 名学生的测验成绩。

2	2 5 6 9
3	3 7 8
4	2 3 5 5 7 8
5	1 1 1 5 6 8 9
6	0 2 5 7

图示说明：4 | 2 表示 42。

(iv) 弗兰基在测验当天缺席。他的成绩未列在茎叶图中。他参加测验后，他的成绩使极差增加了 3 分。写出弗兰基成绩的两个可能值。

✓ **答案** 19 分或 70 分

解析 由茎叶图，原最低分为 22，最高分为 67。

$$\text{原极差} = 67 - 22 = 45$$

$$\text{新极差} = 45 + 3 = 48$$

弗兰基的成绩若在 22 分至 67 分之间，极差不变，故须低于 22 分或高于 67 分。

若低于 22 分，最高分仍为 67，则

$$\text{弗兰基的成绩} = 67 - 48 = 19$$

若高于 67 分，最低分仍为 22，则

$$\text{弗兰基的成绩} = 22 + 48 = 70$$

答：弗兰基的成绩可能为 19 分或 70 分。

9.8 用数量占总数的比例换算饼图角度

题型 1 用数量占总数的比例换算饼图角度（Core）

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **比例换成角度：**30 名学生对应整圆，选笑话书的有 8 人。整圆为_____，直角为_____。人数占比或百分数乘整圆角度，得到扇形圆心角。

由人数求角度

$\frac{8}{30}\times 360^\circ = 96^\circ$

由百分数求角度

$\frac{18}{30}\times 100\% = 60\%$

$60\%\times 360^\circ = 216^\circ$

② **角度换成占比：**诗歌书的扇形角等于整圆角减去另两角。扇形角除以 360° 得所占比例，分数要约分。益智书占总数的_____，写成百分数为_____。

$$360^\circ - 96^\circ - 216^\circ = 48^\circ$$

写成分数

$\frac{216}{360} = \frac{216\div 72}{360\div 72} = \frac{3}{5}$

写成百分数

$\frac{216}{360}\times 100\% = 60\%$

③ **比例换成人数：**某饼图总数为 20，甲、乙扇形角分别为 72°、108°。已知总数，乘甲的角度占比；已知甲人数，乘乙与甲的角度比。用百分数表示时，乙与甲的比值也相等。

已知总数

$20\times 72\frac{^\circ}{360^\circ} = 4$（人）

已知甲有 4 人

$4\times 108\frac{^\circ}{72^\circ} = 6$（人）

$$108\frac{^\circ}{72^\circ} = \frac{30\%}{20\%} = \frac{3}{2}$$

$4\times\frac{30\%}{20\%} = 6$（人）

④ **人数比的化简：**笑话书、益智书、诗歌书的人数比等于扇形角之比。比的各项同除以公因数 24，得到最简整数比。

$$96 : 216 : 48 = (96\div 24) : (216\div 24) : (48\div 24) = 4 : 9 : 2$$

⑤ **人数的奇偶性：**笑话书与诗歌书的人数比为 2 : 1。设诗歌书人数为 n，n 为整数，则笑话书人数为 $2n$。整数的 2 倍是_____。

$$96 : 48 = 2 : 1$$

⑥ **部分中的部分：**某类占整体的 20%，其中甲、乙的数量比为 2 : 3。乙占该类的比例，用乙的份数除以总份数。两层比例相乘，得乙占整体的_____。

$$\frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$$

$$20\%\times\frac{3}{5} = 12\%$$

填空：①360°　②90°　③$\frac{3}{5}$　④60%　⑤偶数　⑥12%

点石成金　题目出现类别人数、百分数或饼图扇形角时，先把该类数量或角度写成占整体的比例。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q2(a)(i)]

(a) Manjit asks 30 students whether they prefer joke books, puzzle books or poetry books. The results are shown in the table.

Type of book	Number of students	Pie chart sector angle
Joke	8	
Puzzle	18	
Poetry	4	

(i) Complete the table.

(a) 曼吉特询问 30 名学生更喜欢笑话书、益智书还是诗歌书。结果如下表所示。

书籍种类	学生人数	饼图扇形圆心角
笑话书	8	
益智书	18	
诗歌书	4	

(i) 完成表格。

解答　30 名学生对应 360°，各扇形角按人数所占比例计算。

$$\frac{8}{30} \times 360° = 96°$$

$$\frac{18}{30} \times 360° = 216°$$

$$\frac{4}{30} \times 360° = 48°$$

答：笑话书、益智书、诗歌书的扇形角依次为 96°、216°、48°。

方法：先看各类人数与总人数，列出占比，再乘整圆角度。

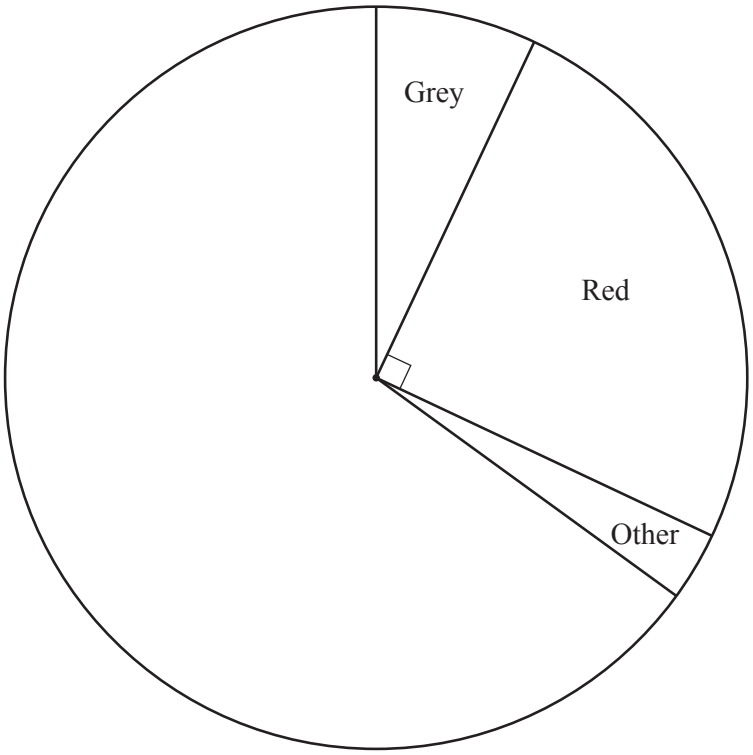
! 辨析：人数比是类别间的比较，占比是某类与总人数的比较。

针对练习

1. [2023 · October/November 0580/32 Q5(a)]

提示：看红色扇形的直角标记，将角度占比乘总车数。

Heidi records the colour of each of 500 cars crossing a bridge.
The pie chart shows some of this information.



(a) How many cars are red?

海迪记录了经过一座桥的 500 辆汽车中每辆汽车的颜色。饼图显示了其中的部分信息。图中标有灰色、红色、其他，红色扇形标有直角。

(a) 红色汽车有多少辆?

✓ **答案** 125 辆

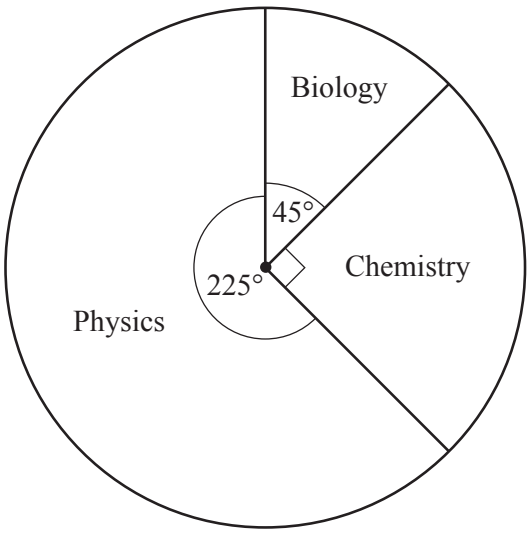
解析 图中红色扇形标有直角，其圆心角为 90°。

$$500 \times 90\frac{^\circ}{360^\circ} = 125$$

答：红色汽车有 125 辆。

2. [2023 · May/June 0580/33 Q1(a)(i)]
提示：先从整圆中扣去已知角，再将剩余角换成百分数。

(a) Claudia asks some students to choose their favourite science from biology, chemistry and physics. The pie chart shows the results.



(i) Find the percentage of students who choose chemistry.

(a) 克劳迪娅请一些学生从生物、化学和物理中选出最喜欢的科学学科。饼图显示了调查结果。图中生物扇形的圆心角为 45°，化学扇形标有直角，物理扇形的圆心角为 225°。
(i) 求选择化学的学生所占的百分数。

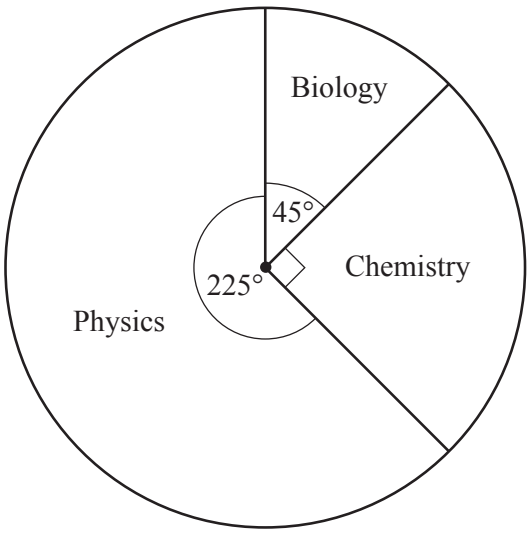
✓ **答案**

25%

解析 由整圆的角度为 360°，得化学扇形的圆心角为
$360° - 45° - 225° = 90°$。
选择化学的学生所占的百分数为
$90\frac{°}{360°} \times 100\% = 25\%$。
答：选择化学的学生占 25%。

3. [2023 · May/June 0580/33 Q1(a)(ii)]
提示：将物理扇形角与整圆角写成分数，再约分。

(a) Claudia asks some students to choose their favourite science from biology, chemistry and physics.
The pie chart shows the results.



(ii) Find the fraction of students who choose physics.
Give your answer in its simplest form.

(a) 克劳迪娅请一些学生从生物、化学和物理中选出最喜欢的科学学科。饼图显示了调查结果。图中生物扇形的圆心角为 45°，化学扇形标有直角，物理扇形的圆心角为 225°。
(ii) 求选择物理的学生占总人数的几分之几。答案用最简分数表示。

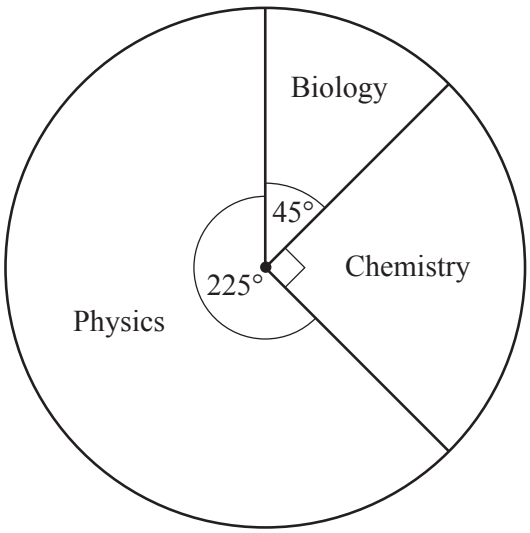
✓ **答案**

$$\frac{5}{8}$$

解析 物理扇形的圆心角为 225°，所占比例为
$\frac{225}{360} = \frac{225\div45}{360\div45} = \frac{5}{8}$。
答：选择物理的学生占总人数的 $\frac{5}{8}$。

4. [2023 · May/June 0580/33 Q1(a)(v)]
提示：先补出化学扇形角，再比较物理与化学的角度。

(a) Claudia asks some students to choose their favourite science from biology, chemistry and physics.
The pie chart shows the results.



(v) Claudia now tells Marcus that 26 students choose chemistry.

Work out how many students choose physics.

(a) 克劳迪娅请一些学生从生物、化学和物理中选出最喜欢的科学学科。饼图显示了调查结果。图中生物扇形的圆心角为 45°，化学扇形标有直角，物理扇形的圆心角为 225°。
(v) 克劳迪娅现在告诉马库斯，有 26 名学生选择化学。求有多少名学生选择物理。

✓ **答案** 65 人
解析 化学扇形的圆心角为
$360° - 45° - 225° = 90°$。
由人数比等于扇形角之比，得选择物理的人数为
$26 \times 225\frac{°}{90}° = 65$。
答：选择物理的学生有 65 人。

5. [2023 · October/November 0580/33 Q4(a)(i)]
提示：看各部分占总质量的百分数，分别乘整圆角度。

(a) A company makes glass using silica, soda, lime and magnesia.
The table gives information about the proportions used.

	Percentage of total mass	Pie chart sector angle
Silica	75	270°
Soda	15	
Lime and magnesia	10	

(i) Complete the table.

(a) 一家公司使用二氧化硅、纯碱、石灰和氧化镁制造玻璃。表中给出了所用材料的比例信息。

	占总质量的百分数	饼图扇形圆心角
二氧化硅	75	270°
纯碱	15	
石灰和氧化镁	10	

(i) 完成表格。

✓ **答案** 纯碱：54°；石灰和氧化镁：36°

解析 纯碱占总质量的 15%，其扇形角为 $\frac{15}{100} \times 360° = 54°$。

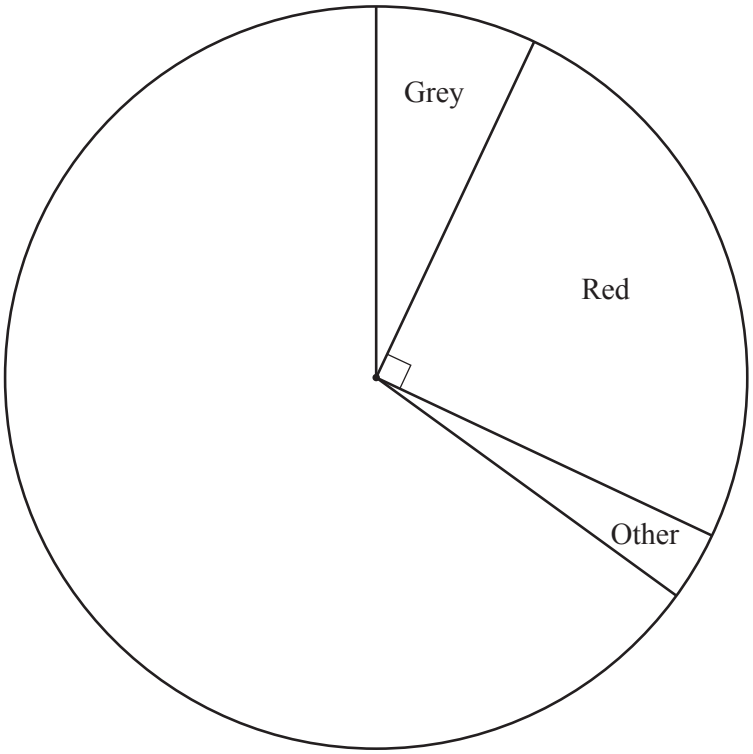
石灰和氧化镁共占总质量的 10%，其扇形角为 $\frac{10}{100} \times 360° = 36°$。

答：纯碱、石灰和氧化镁对应的扇形角依次为 54°、36°。

6. [2023 · October/November 0580/32 Q5(b)]

提示：先比灰色车数与总车数，再将占比换成角度。

Heidi records the colour of each of 500 cars crossing a bridge.
The pie chart shows some of this information.



(b) 35 cars are grey.

Show, by calculation, that the sector angle for grey is 25.2°.

海迪记录了经过一座桥的 500 辆汽车中每辆汽车的颜色。饼图显示了其中的部分信息。图中标有灰色、红色、其他，红色扇形标有直角。

(b) 有 35 辆汽车是灰色的。通过计算说明，灰色扇形的圆心角为 25.2°。

✓ **答案**

25.2°

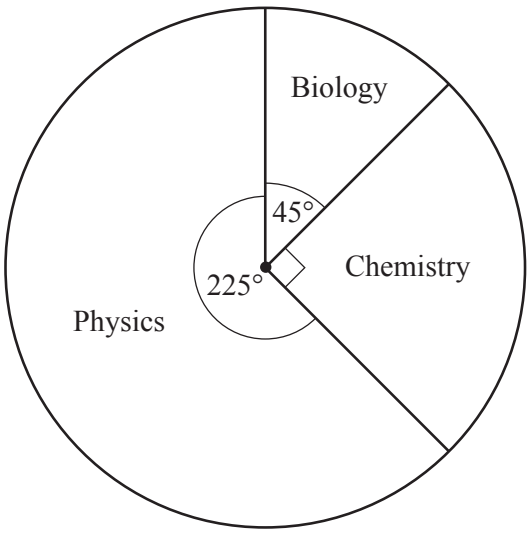
解析 灰色汽车有 35 辆，共有 500 辆汽车，故灰色扇形的圆心角为 $\frac{35}{500} \times 360° = 25.2°$。

答：灰色扇形的圆心角为 25.2°。

7. [2023 · May/June 0580/33 Q1(a)(iii)]

提示：补齐缺角，按所求类别顺序列角度比并化简。

(a) Claudia asks some students to choose their favourite science from biology, chemistry and physics. The pie chart shows the results.



(iii) For the number of students choosing each subject, find the ratio biology : chemistry : physics. Give your answer in its simplest form.

(a) 克劳迪娅请一些学生从生物、化学和物理中选出最喜欢的科学学科。饼图显示了调查结果。图中生物扇形的圆心角为 45°，化学扇形标有直角，物理扇形的圆心角为 225°。

(iii) 求选择各学科的学生人数比，按生物、化学、物理的顺序写出。答案用最简整数比表示。

✓ **答案**

$1 : 2 : 5$

解析 化学扇形的圆心角为

$360° - 45° - 225° = 90°$。

由人数比等于扇形角之比，得

$45 : 90 : 225 = (45 \div 45) : (90 \div 45) : (225 \div 45) = 1 : 2 : 5$。

答：选择生物、化学、物理的学生人数比为 $1 : 2 : 5$。

8. [2024 · February/March 0580/12 Q13(a)]

提示：先写出蓝色汽车占全部汽车的比例。

There are 20 cars in a car park and 3 of the cars are blue.

(a) James wants to draw a pie chart to show this information.

Find the angle of the sector for the blue cars in this pie chart.

一个停车场内有 20 辆汽车，其中 3 辆是蓝色的。

(a) 詹姆斯想画一个饼图来表示这些信息。求饼图中蓝色汽车所对应扇形的圆心角。

✓ **答案**

$54°$

解析 蓝色汽车占全部汽车的 $\frac{3}{20}$，对应的扇形圆心角为

$$\frac{3}{20} \times 360° = 54°$$

答：蓝色汽车所对应扇形的圆心角为 $54°$。

9. [2024 · May/June 0580/32 Q4(b)(i)]
提示：用每类宠物的数量除以总数，再乘整圆角度。

(b) 80 of the pets owned by the families are cats, rabbits or hamsters.
The table shows the number of each pet.

Type of pet	Number of each pet	Pie chart sector angle
Cat	38	
Rabbit	28	
Hamster	14	

(i) Complete the table.

(b) 这些家庭饲养的宠物中，有 80 只是猫、兔子或仓鼠。下表给出了每种宠物的数量。

宠物种类	每种宠物的数量	饼图扇形圆心角
猫	38	
兔子	28	
仓鼠	14	

(i) 完成表格。

✓ **答案** 猫：171°；兔子：126°；仓鼠：63°。

解析 这三类宠物共 80 只，各类扇形圆心角为

$$\text{猫：}\frac{38}{80}\times 360^\circ = 171^\circ$$

$$\text{兔子：}\frac{28}{80}\times 360^\circ = 126^\circ$$

$$\text{仓鼠：}\frac{14}{80}\times 360^\circ = 63^\circ$$

答：猫、兔子、仓鼠所在行依次填入 171°、126°、63°。

10. [2024 · October/November 0580/31 Q3(c)(i)]
提示：以总人数为分母，分别写出三个地点的人数占比。

Jack does a survey about cycling.

(c) The table shows where 240 people cycle the most.

	Number of people	Pie chart sector angle
Roads	84	126°
Cycle paths	72	
Parks	48	
Other	36	

(i) Complete the table.

杰克开展了一项关于骑自行车的调查。
(c) 下表给出了 240 人最常骑自行车的地点。

	人数	饼图扇形圆心角
道路	84	126°
自行车道	72	
公园	48	
其他地点	36	

(i) 完成表格。

✓ **答案** 自行车道：108°；公园：72°；其他地点：54°。

解析 总人数为 240，各空缺的扇形圆心角为

$$\text{自行车道：}\frac{72}{240}\times 360^\circ = 108^\circ$$

$$\text{公园：}\frac{48}{240}\times 360^\circ = 72^\circ$$

$$\text{其他地点：}\frac{36}{240}\times 360^\circ = 54^\circ$$

答：自行车道、公园、其他地点所在行依次填入 108°、72°、54°。

11. [2025 · October/November 0580/32 Q12(a)]

提示：先求每种颜色的汽车占总数的比例。

The table shows the results of a survey about the colour of 90 cars in a car park.

Colour of car	Frequency	Pie chart sector angle
Black	16	
White	34	
Other	40	

(a) Complete the table.

下表给出了对一个停车场内 90 辆汽车颜色的调查结果。

汽车颜色	频数	饼图扇形圆心角
黑色	16	
白色	34	
其他颜色	40	

(a) 完成表格。

✓ **答案** 黑色：64°；白色：136°；其他颜色：160°。

解析 90 辆汽车对应一整圆，各类扇形圆心角为

$$\text{黑色：}\frac{16}{90}\times 360^\circ = 64^\circ$$

$$\text{白色：}\frac{34}{90}\times 360^\circ = 136^\circ$$

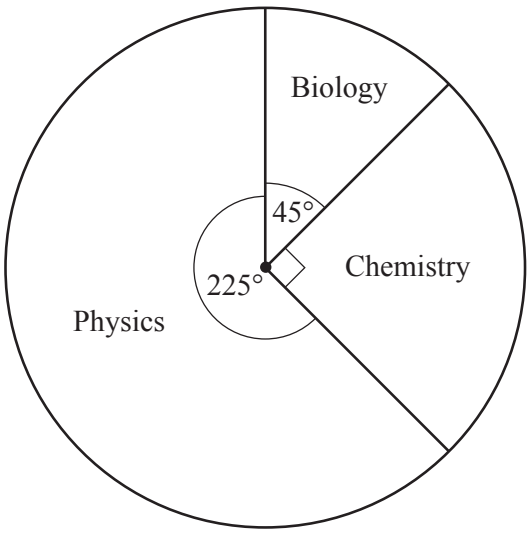
$$\text{其他颜色：}\frac{40}{90}\times 360^\circ = 160^\circ$$

答：黑色、白色、其他颜色所在行依次填入 64°、136°、160°。

12. [2023 · May/June 0580/33 Q1(a)(iv)]

提示：比较化学与生物的角度倍数，结合人数为整数判断。

(a) Claudia asks some students to choose their favourite science from biology, chemistry and physics.
The pie chart shows the results.



(iv) Marcus says:

'I do not know how many people choose chemistry, but I do know it is an even number.'

Explain how Marcus knows this.

(a) 克劳迪娅请一些学生从生物、化学和物理中选出最喜欢的科学学科。饼图显示了调查结果。图中生物扇形的圆心角为 45°，化学扇形标有直角，物理扇形的圆心角为 225°。
(iv) 马库斯说："我不知道有多少人选择化学，但我知道这个人数是偶数。"
解释马库斯是如何知道这一点的。

✓ **答案** 选择化学的人数是选择生物人数的 2 倍，因此是偶数。

解析 化学扇形的圆心角为
$360° - 45° - 225° = 90°$。
化学与生物的人数比为
$90 : 45 = 2 : 1$。
设选择生物的有 n 人，n 为整数，则选择化学的有 $2n$ 人。
答：选择化学的人数是整数的 2 倍，因此是偶数。

13. [2023 · October/November 0580/33 Q4(a)(iv)]

提示：比较二氧化硅与纯碱的百分数，用倍数联系质量。

(a) A company makes glass using silica, soda, lime and magnesia.
The table gives information about the proportions used.

	Percentage of total mass	Pie chart sector angle
Silica	75	270°
Soda	15	
Lime and magnesia	10	

(iv) The company uses 8.25 kg of soda to make some glass.

Work out how many kilograms of silica they use.

(a) 一家公司使用二氧化硅、纯碱、石灰和氧化镁制造玻璃。表中给出了所用材料的比例信息。

	占总质量的百分数	饼图扇形圆心角
二氧化硅	75	270°
纯碱	15	
石灰和氧化镁	10	

(iv) 这家公司用 8.25 kg 纯碱制造一些玻璃。求所用二氧化硅的质量，单位为千克。

✓ **答案**

41.25 kg

解析 二氧化硅与纯碱的质量比等于所占百分数之比。

$$75 : 15 = 5 : 1$$

二氧化硅的质量为

$8.25 \times 5 = 41.25$（千克）。

答：所用二氧化硅的质量为 41.25 kg。

14. [2023 · October/November 0580/33 Q4(a)(iii)]

提示：先看氧化镁占两者几份，再联系两者占玻璃的比例。

(a) A company makes glass using silica, soda, lime and magnesia.
The table gives information about the proportions used.

	Percentage of total mass	Pie chart sector angle
Silica	75	270°
Soda	15	
Lime and magnesia	10	

(iii) The masses of lime and magnesia used are in the ratio lime : magnesia = 3 : 2.

Find the percentage of the total mass of glass that is magnesia.

(a) 一家公司使用二氧化硅、纯碱、石灰和氧化镁制造玻璃。表中给出了所用材料的比例信息。

	占总质量的百分数	饼图扇形圆心角
二氧化硅	75	270°
纯碱	15	
石灰和氧化镁	10	

(iii) 所用石灰与氧化镁的质量比为 石灰 : 氧化镁 = 3 : 2。求氧化镁占玻璃总质量的百分数。

✓ **答案**

4%

解析 石灰与氧化镁的质量比为 3 : 2，氧化镁占两者总质量的 $\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$。

两者共占玻璃总质量的 10%，故氧化镁占玻璃总质量的

$10\% \times \frac{2}{5} = 4\%$。

答：氧化镁占玻璃总质量的 4%。

15. [2021 · May/June 0580/31 Q2(a)(i)]
提示：每类频数除以总人数，再乘整圆角度。

(a) Anika asks 15 friends how many marbles they have.
The results are shown in the table.

Number of marbles	Frequency	Pie chart sector angle
0	2	
1 to 10	8	
11 to 50	4	
More than 50	1	

(i) Complete the table.

(a) 阿妮卡询问 15 位朋友各有多少颗弹珠。结果如下表所示。

弹珠数量	频数	饼图扇形圆心角
0	2	
1 至 10	8	
11 至 50	4	
多于 50	1	

(i) 完成表格。

✓ **答案** 按表格从上到下依次填 48°、192°、96°、24°。

解析 15 位朋友对应整圆的 360°，各扇形圆心角按频数所占比例计算。

$$\frac{2}{15} \times 360° = 48°$$

$$\frac{8}{15} \times 360° = 192°$$

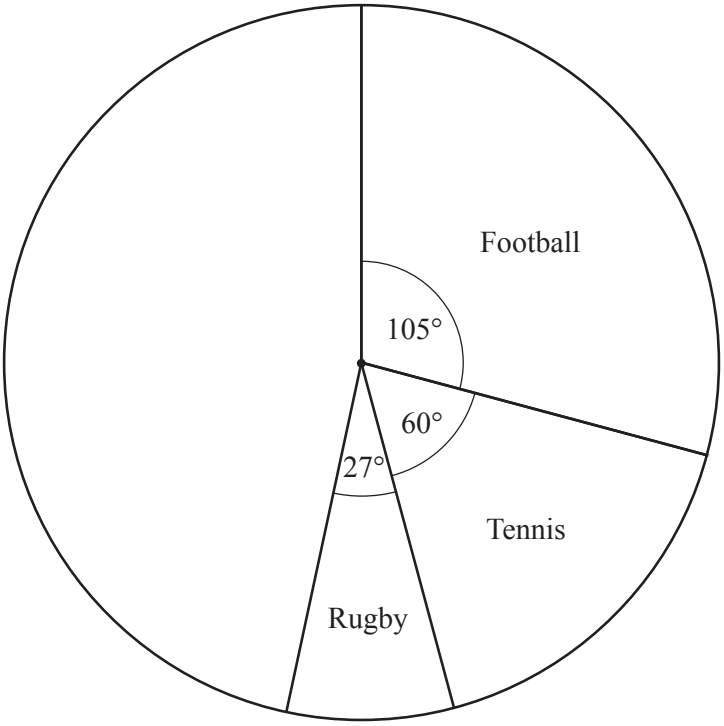
$$\frac{4}{15} \times 360° = 96°$$

$$\frac{1}{15} \times 360° = 24°$$

答：四个空格从上到下依次填 48°、192°、96°、24°。

16. [2021 · October/November 0580/33 Q6(a)(iii)]
提示：先由板球人数求扇形角，再求游泳所对应的剩余角。

(a) Jean asks 600 people to choose their favourite sport.
The pie chart shows some of this information.



(iii) 125 people choose cricket and the rest choose swimming.

Complete the pie chart to show this information.

(a) 琼请 600 人选出各自最喜欢的运动。饼图显示了其中的部分信息。图中足球、网球、橄榄球扇形的圆心角分别为 105°、60°、27°。
(iii) 有 125 人选择板球，其余人选择游泳。
补全饼图，表示这些信息。

✓ **答案** 在空白部分画出圆心角为 75° 的板球扇形和圆心角为 93° 的游泳扇形，并标明名称。

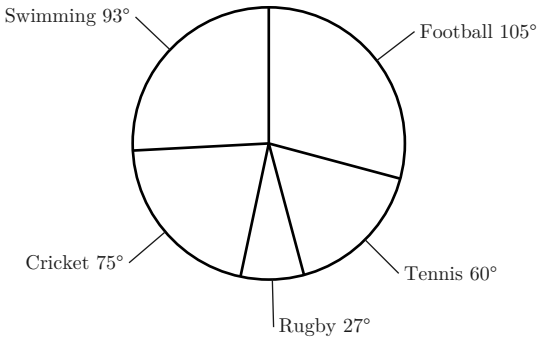
解析 选择板球的人数占总人数的 $\frac{125}{600}$，故板球扇形的圆心角为

$$\frac{125}{600}\times 360^\circ = 75^\circ$$

游泳扇形的圆心角为整圆减去其余各扇形的圆心角，得

$$360^\circ - 105^\circ - 60^\circ - 27^\circ - 75^\circ = 93^\circ$$

以橄榄球扇形与空白部分的公共半径为起始边，向空白部分量取 75°，画出一条半径。
在新画出的 75° 扇形内标注板球，在余下的 93° 扇形内标注游泳。
答：板球扇形的圆心角为 75°，游泳扇形的圆心角为 93°，按上述方法补全饼图。



17. [2022 · May/June 0580/33 Q6(c)(i)]
提示：分别求两类餐食的订购数量占总数的比例。

(c) 270 meals are ordered one day at the restaurant.
The table shows the number of each type of meal.

Meal	Number ordered	Pie chart sector angle
Meat	117	
Fish	99	
Vegetarian	54	72°

(i) Complete the table.

(c) 某餐馆一天共收到 270 份餐食订单。下表给出了各类餐食的订购数量。

餐食种类	订购数量	饼图扇形圆心角
肉类餐	117	
鱼类餐	99	
素食餐	54	72°

(i) 完成表格。

✓ **答案** 肉类餐：156°；鱼类餐：132°。

解析 270 份餐食对应整圆的 360°，肉类餐扇形的圆心角为

$$\frac{117}{270}\times 360^\circ = 156^\circ$$

鱼类餐扇形的圆心角为

$$\frac{99}{270}\times 360^\circ = 132^\circ$$

答：肉类餐一行填 156°，鱼类餐一行填 132°。

9.9 先求每类圆心角，再画出饼图各扇形

题型 1 先求每类圆心角，再画出饼图各扇形（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **整圆对应人数：** 表中 30 名学生对应一整圆，圆心角为_____。每名学生对应的角度为

$$360^\circ\div 30 = 12^\circ$$

② **数据换成角度：** 人数或百分数先写成占总数的分数。

笑话书有 8 人，占全部学生的 $\frac{8}{30}$。

$\frac{8}{30}\times 360^\circ = 96^\circ$

若某类占总数的 20%，先把百分数化成分数。

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$\frac{1}{5}\times 360^\circ =$ _____

各类的圆心角按下式计算。

圆心角 = 该类所占比例 × 360°

③ **沿半径量角：** 图中已有向上的半径，将量角器中心对准圆心。零刻度线与这条半径重合，顺时针量出 96°。在圆周上标点，连接圆心，扇区内标注笑话书。

④ **大角分段量取：**益智书有 18 人，对应的角超过半圆。

$$\frac{18}{30}\times 360^\circ = 216^\circ = 180^\circ + 36^\circ$$

从笑话书末端半径起，顺时针作对向辅助半径。再沿同一方向量 36°，画出分界半径，擦去辅助线。

⑤ **已有扇区补全：**已有笑话书扇区，保留其半径和标签。空白部分分出益智书后，余下扇区标注诗歌书。

$$360^\circ - 96^\circ - 216^\circ = 48^\circ$$

填空：①$360^\circ$　②$72^\circ$

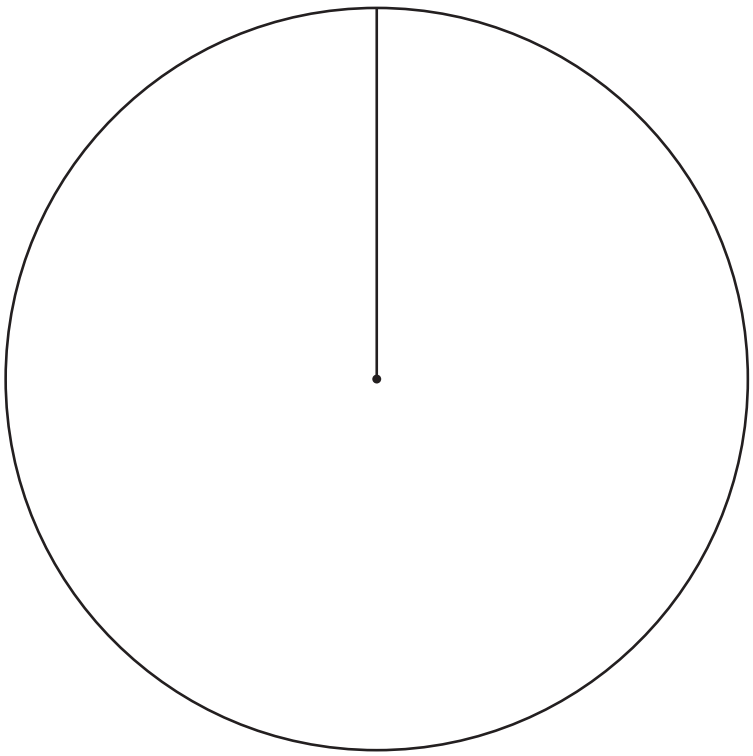
点石成金　题目出现人数表、百分数表并要求补全饼图时，先求各类圆心角，再从已有半径起量角、画半径并标注类别。

例 1　[2023 · February/March 0580/32 Q2(a)(ii)]

(a) Manjit asks 30 students whether they prefer joke books, puzzle books or poetry books. The results are shown in the table.

Type of book	Number of students	Pie chart sector angle
Joke	8	
Puzzle	18	
Poetry	4	

(ii) Complete the pie chart.



(a) 曼吉特询问 30 名学生更喜欢笑话书、益智书还是诗歌书。结果如下表所示。

书籍种类	学生人数	饼图扇形圆心角
笑话书	8	
益智书	18	
诗歌书	4	

(ii) 补全饼图。

解答　由整圆的圆心角为 360°，得各类圆心角为

$$\text{笑话书：}\frac{8}{30}\times 360^\circ = 96^\circ$$

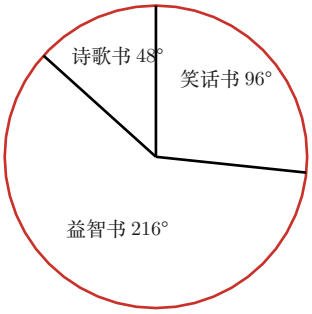
$$\text{益智书：}\frac{18}{30}\times 360^\circ = 216^\circ$$

$$\text{诗歌书：}\frac{4}{30}\times 360^\circ = 48^\circ$$

从向上的已有半径起，顺时针量 96°，画出半径，标注笑话书。
从新画的半径起，沿同一方向量 216°，画出半径，标注益智书。量角时先作对向辅助半径，再沿同一方向量 36°，画完后擦去辅助线。
余下扇区标注诗歌书，其圆心角为

$$360^\circ - 96^\circ - 216^\circ = 48^\circ$$

答：笑话书、益智书、诗歌书的扇形圆心角依次为 96°、216°、48°，按上述角度分区并标注。



方法：先看人数表与已有半径，从各类人数占总数的比例起算。

辨析：人数是各类的数量，圆心角是各类占整圆的角度。

拓展：同一饼图中，人数之比等于对应圆心角之比。

针对练习

1. [2024 · May/June 0580/32 Q4(b)(ii)]

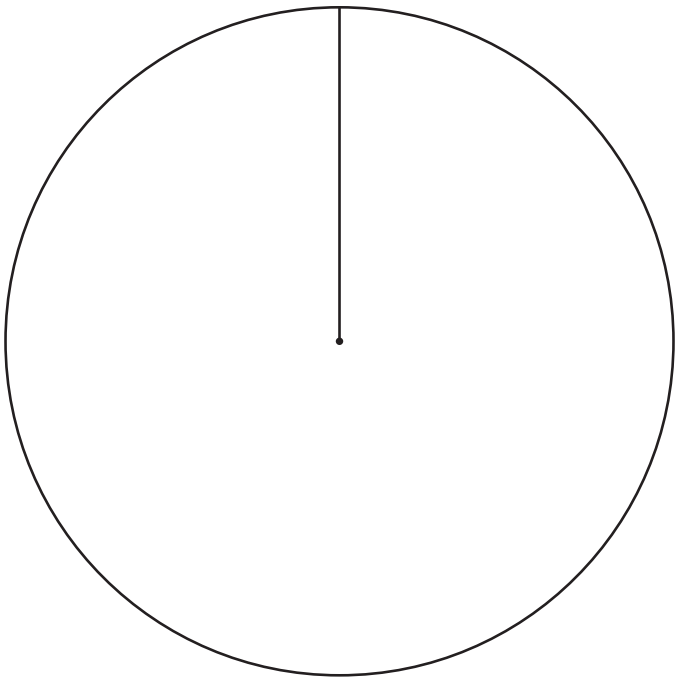
提示：先求各类圆心角，再从已有半径起沿同一方向量角。

(b) 80 of the pets owned by the families are cats, rabbits or hamsters.
The table shows the number of each pet.

Type of pet	Number of each pet	Pie chart sector angle
Cat	38	
Rabbit	28	
Hamster	14	

(i) Complete the table.

(ii) Complete the pie chart.



(b) 这些家庭饲养的宠物中，有 80 只是猫、兔子或仓鼠。下表给出了每种宠物的数量。

宠物种类	每种宠物的数量	饼图扇形圆心角
猫	38	
兔子	28	
仓鼠	14	

(i) 完成表格。
(ii) 补全饼图。图中已画出一条从圆心竖直向上的半径。

✓ **答案** 猫、兔子、仓鼠的扇形圆心角依次为 $171°$、$126°$、$63°$；按此分区并标注类别。

解析 由各类宠物所占的比例，得扇形圆心角为

$$\text{猫：}\frac{38}{80}\times 360°=171°$$

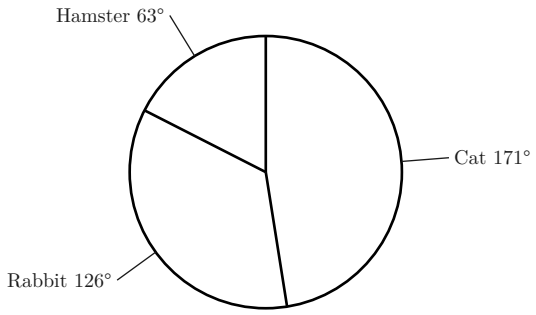
$$\text{兔子：}\frac{28}{80}\times 360°=126°$$

$$\text{仓鼠：}\frac{14}{80}\times 360°=63°$$

从已有的向上半径起，顺时针量 $171°$，画出分界半径，扇区内标注猫。
从新画的半径起，顺时针量 $126°$，画出分界半径，扇区内标注兔子。
余下扇区标注仓鼠，其圆心角为

$$360°-171°-126°=63°$$

答：补全的饼图如下。



2. [2024 · October/November 0580/31 Q3(c)(ii)]
提示：先求每类人数占总人数的比例，再换成圆心角。

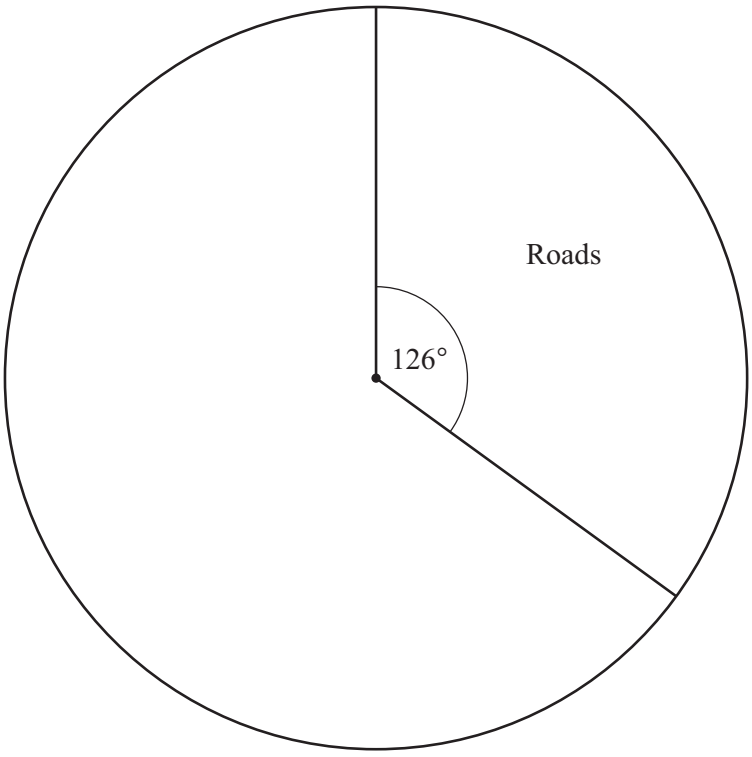
Jack does a survey about cycling.

(c) The table shows where 240 people cycle the most.

	Number of people	Pie chart sector angle
Roads	84	126°
Cycle paths	72	
Parks	48	
Other	36	

(i) Complete the table.

(ii) Complete the pie chart to show this information.



杰克进行了一项关于骑自行车的调查。
(c) 下表列出了 240 人最常骑自行车的地点。

地点	人数	饼图扇形圆心角

道路	84	126°
自行车道	72	
公园	48	
其他地点	36	

(i) 补全表格。
(ii) 补全饼图，表示这些信息。
图中已画出道路扇形，标有道路及圆心角 126°。

✓ **答案** 自行车道 108°，公园 72°，其他地点 54°；在空白部分依次画出扇形并标注地点。

解析 各类人数占总人数的比例乘整圆圆心角，得

$$\text{自行车道：}\frac{72}{240}\times 360^\circ = 108^\circ$$

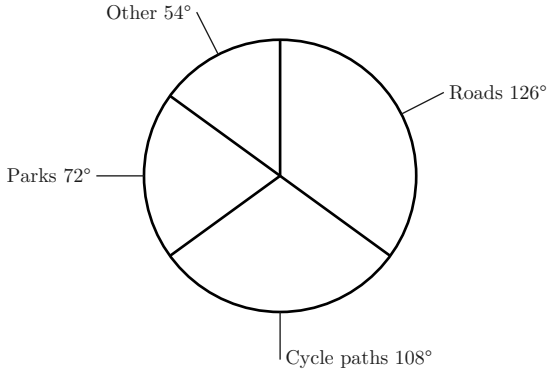
$$\text{公园：}\frac{48}{240}\times 360^\circ = 72^\circ$$

$$\text{其他地点：}\frac{36}{240}\times 360^\circ = 54^\circ$$

保留已有的道路扇形。
从道路扇形右下方的边界半径起，顺时针量 108°，画出分界半径，标注自行车道。
从新画的半径起，顺时针量 72°，画出分界半径，标注公园。
余下扇形的圆心角为

$$360^\circ - 126^\circ - 108^\circ - 72^\circ = 54^\circ$$

答：在余下扇形内标注其他地点，三个新增扇形的圆心角依次为 108°、72°、54°。

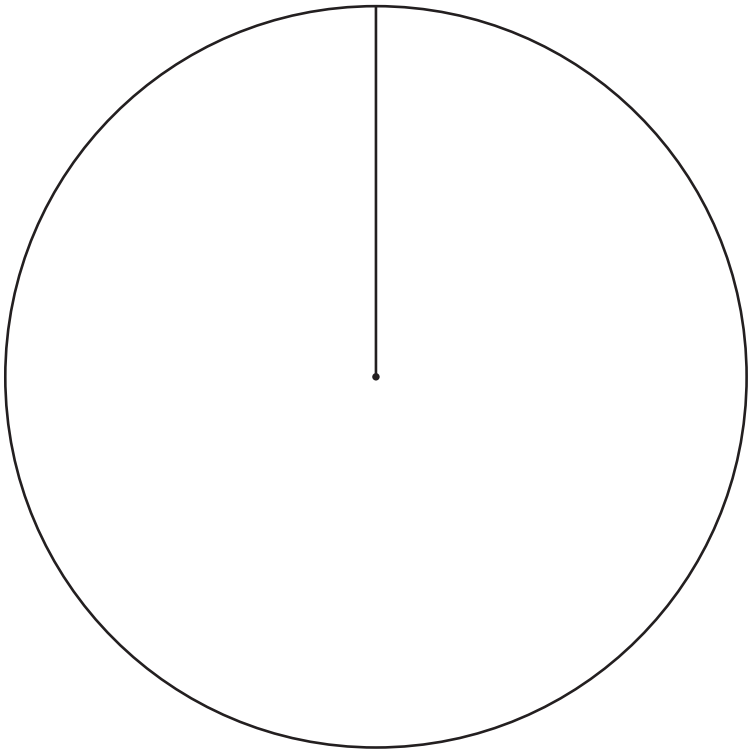


3. [2023 · October/November 0580/31 Q3(c)]
提示：看各语言人数占总数的比例，核对扇形大小顺序。

(c) The table shows the favourite language that each of 80 students studies.

Language	Frequency
French	12
Spanish	26
English	42
Total	80

Complete the pie chart to show this information.



(c) 下表列出了 80 名学生各自最喜欢学习的语言。

语言	频数
法语	$80-68$
西班牙语	26
英语	42
总计	80

补全饼图，表示这些信息。

✓ **答案** 法语 $54°$，西班牙语 $117°$，英语 $189°$；依次画出扇形并标注类别。

解析 总人数为 80，各类圆心角为

$$\text{法语：}\frac{12}{80}\times 360°=54°$$

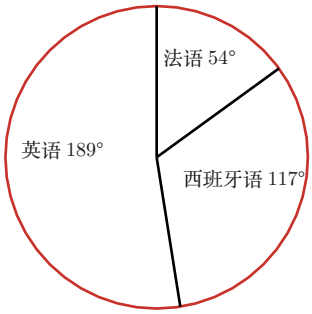
$$\text{西班牙语：}\frac{26}{80}\times 360°=117°$$

$$\text{英语：}\frac{42}{80}\times 360°=189°$$

从向上的已有半径起，顺时针量 $54°$，画出半径，标注法语。
从新画的半径起，沿同一方向量 $117°$，画出半径，标注西班牙语。
余下扇区的圆心角为

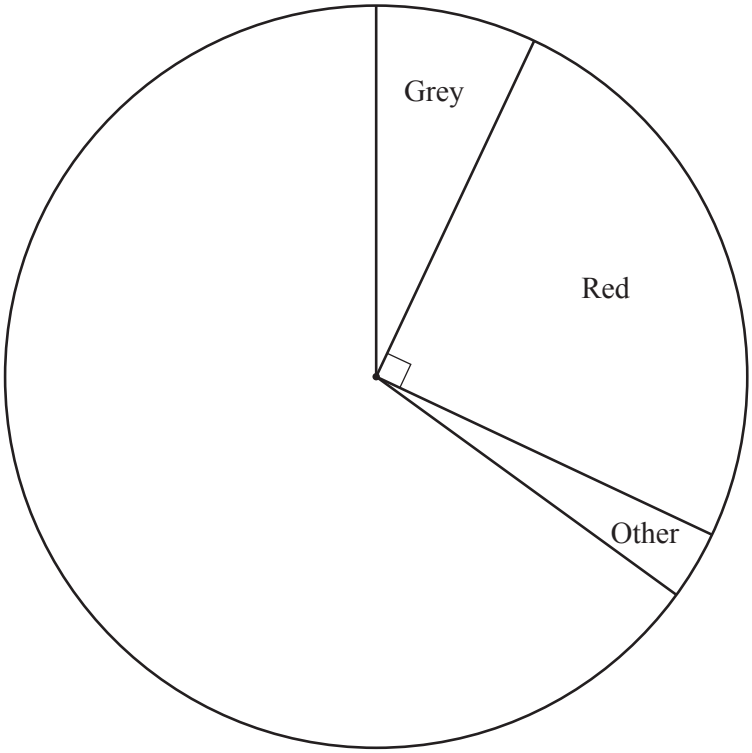
$$360°-54°-117°=189°$$

在余下扇区内标注英语。
答：法语、西班牙语、英语的扇形圆心角依次为 $54°$、$117°$、$189°$。



4. [2023 · October/November 0580/32 Q5(c)]
提示：看空白部分的位置，比较待画两角之和与空白角度。

Heidi records the colour of each of 500 cars crossing a bridge.
The pie chart shows some of this information.



(c) 175 cars are white and 150 cars are black.

Complete the pie chart to show this information.

海迪记录了经过一座桥的 500 辆汽车各自的颜色。饼图显示了其中一部分信息。
图中标签为灰色、红色、其他颜色，红色扇形的圆心角标有直角。
(c) 175 辆汽车是白色的，150 辆汽车是黑色的。
补全饼图，表示这些信息。

✓ **答案** 白色 126°，黑色 108°；在空白部分画出两个扇形并标注类别。

解析 共记录 500 辆汽车，白色和黑色对应的圆心角为

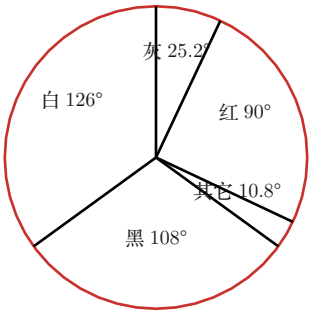
$$\text{白色：}\frac{175}{500}\times 360^\circ = 126^\circ$$

$$\text{黑色：}\frac{150}{500}\times 360^\circ = 108^\circ$$

两个扇形的圆心角之和为

$$126° + 108° = 234°$$

保留图中已有的灰色、红色和其他颜色扇区。
从向上的已有半径起，向空白部分逆时针量 126°，画出半径，标注白色。
余下的空白扇区为 108°，标注黑色。
答：补画白色 126°、黑色 108° 的扇形，并标注类别。

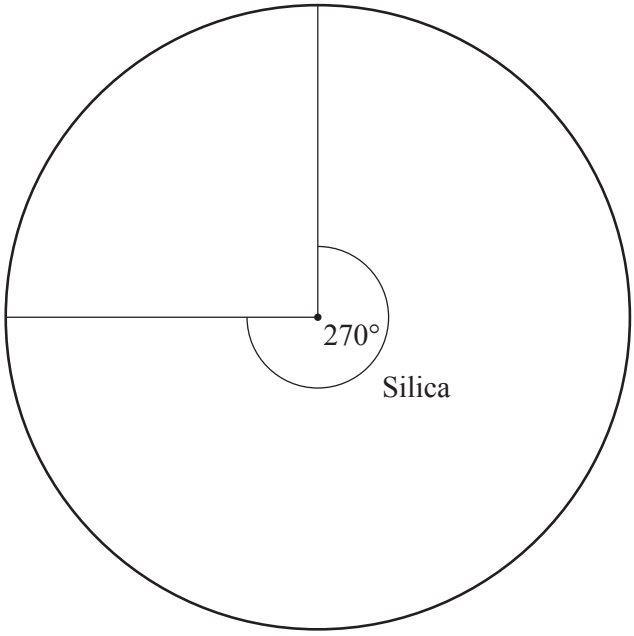


5. [2023 · October/November 0580/33 Q4(a)(ii)]
提示：看左上方空白区域，比较两类百分数与扇形大小。

(a) A company makes glass using silica, soda, lime and magnesia.
The table gives information about the proportions used.

	Percentage of total mass	Pie chart sector angle
Silica	75	270°
Soda	15	
Lime and magnesia	10	

(ii) Complete the pie chart to show this information.



(a) 一家公司使用二氧化硅、纯碱、石灰和氧化镁制造玻璃。下表给出了所用材料的比例。

材料	占总质量的百分比	饼图扇形圆心角
二氧化硅	75	270°
纯碱	15	
石灰和氧化镁	10	

(ii) 补全饼图，表示这些信息。

图中已标出二氧化硅扇形，其圆心角为 270°。

✓ **答案** 纯碱 54°，石灰和氧化镁 36°；在左上方空白部分分区并标注类别。

解析 将百分数化成占总质量的分数，得

$$\text{纯碱：}\frac{15}{100}\times 360^\circ = 54^\circ$$

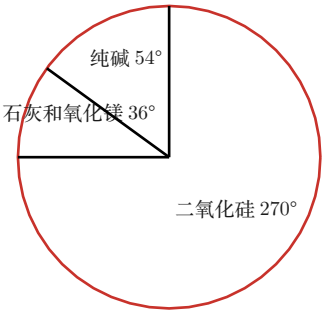
$$\text{石灰和氧化镁：}\frac{10}{100}\times 360^\circ = 36^\circ$$

图中二氧化硅扇形为 270°，空白部分的圆心角为

$$360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

$$54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$$

在左上方空白部分，从向上的半径起逆时针量 54°，画出半径，标注纯碱。
余下 36° 的扇区标注石灰和氧化镁。
答：补画纯碱 54°、石灰和氧化镁 36° 的扇形，并标注类别。



9.10 逐组累加频数，在组上限处描点连线

题型 1 逐组累加频数，在组上限处描点连线（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **累计含义：** 80 名儿童按身高分组。累计频数是不超过某身高的人数。前两组累计人数是两组频数的_____。

② **逐组累加：** 前两组频数相加，得到第二列累计频数。再加第三组频数，得到下一列累计频数。

$$2 + 13 = 15$$

$$15 + 24 = 39$$

③ **上限配点：** 身高不超过 1.5 米的有 15 人。取_____为横坐标，累计频数为纵坐标。

$$(1.5, 15)$$

④ **读取累计表：** 填好的累计表中，$h \le 1.65$ 对应 39 人。将同一列的身高与累计人数配成一个点。

$$(1.65, 39)$$

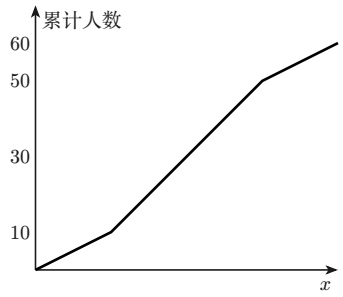
⑤ **补画起点：** 首组为 $1.2 < h \le 1.4$。在首组下限 1.2 米处，累计人数为 0。

$$(1.2, 0)$$

⑥ **依次连线：** 将各点按横坐标从小到大排列。连成合理的递增光滑曲线。末点累计频数等于总人数_____。

填空：①总和　②组上限　③80

累计频数在每一组上限处定位

	图像	数量关系
同一关系		x 的组上限 $2,4,6,8$，对应累计人数 $10,30,50,60$。

点石成金　题目出现频数表或累计频数表，要求填累计频数或画累计频数图时，先确定各组上限对应的累计人数。

例 1　[2023 · May/June 0580/42 Q4(c)(i)]

The table shows information about the heights of 80 children.

Height (h metres)	$1.2 < h \leqslant 1.4$	$1.4 < h \leqslant 1.5$	$1.5 < h \leqslant 1.65$	$1.65 < h \leqslant 1.8$	$1.8 < h \leqslant 1.9$
Frequency	2	13	24	32	9

(c) (i) Complete the cumulative frequency table for the heights.

Height (h metres)	$h \leqslant 1.4$	$h \leqslant 1.5$	$h \leqslant 1.65$	$h \leqslant 1.8$	$h \leqslant 1.9$
Cumulative frequency	2				

下表给出 80 名儿童的身高 h（米）。

身高 h	$1.2 < h \leq 1.4$	$1.4 < h \leq 1.5$	$1.5 < h \leq 1.65$	$1.65 < h \leq 1.8$	$1.8 < h \leq 1.9$
频数	2	13	24	32	9

(c)（i）补全累计频数表。

身高 h	$h \leq 1.4$	$h \leq 1.5$	$h \leq 1.65$	$h \leq 1.8$	$h \leq 1.9$
累计频数	2				

解答　将各组频数依次相加，得

$$2 + 13 = 15$$

$$15 + 24 = 39$$

$$39 + 32 = 71$$

$$71 + 9 = 80$$

答：四个空格依次填 15、39、71、80。

方法：先看各组频数，从首组起逐组相加，再把累计数填入对应列。

辨析：频数是某一组的人数，累计频数是截至该组上限的人数。

拓展：累计频数图随横坐标增大不会下降，末点纵坐标等于总人数。

针对练习

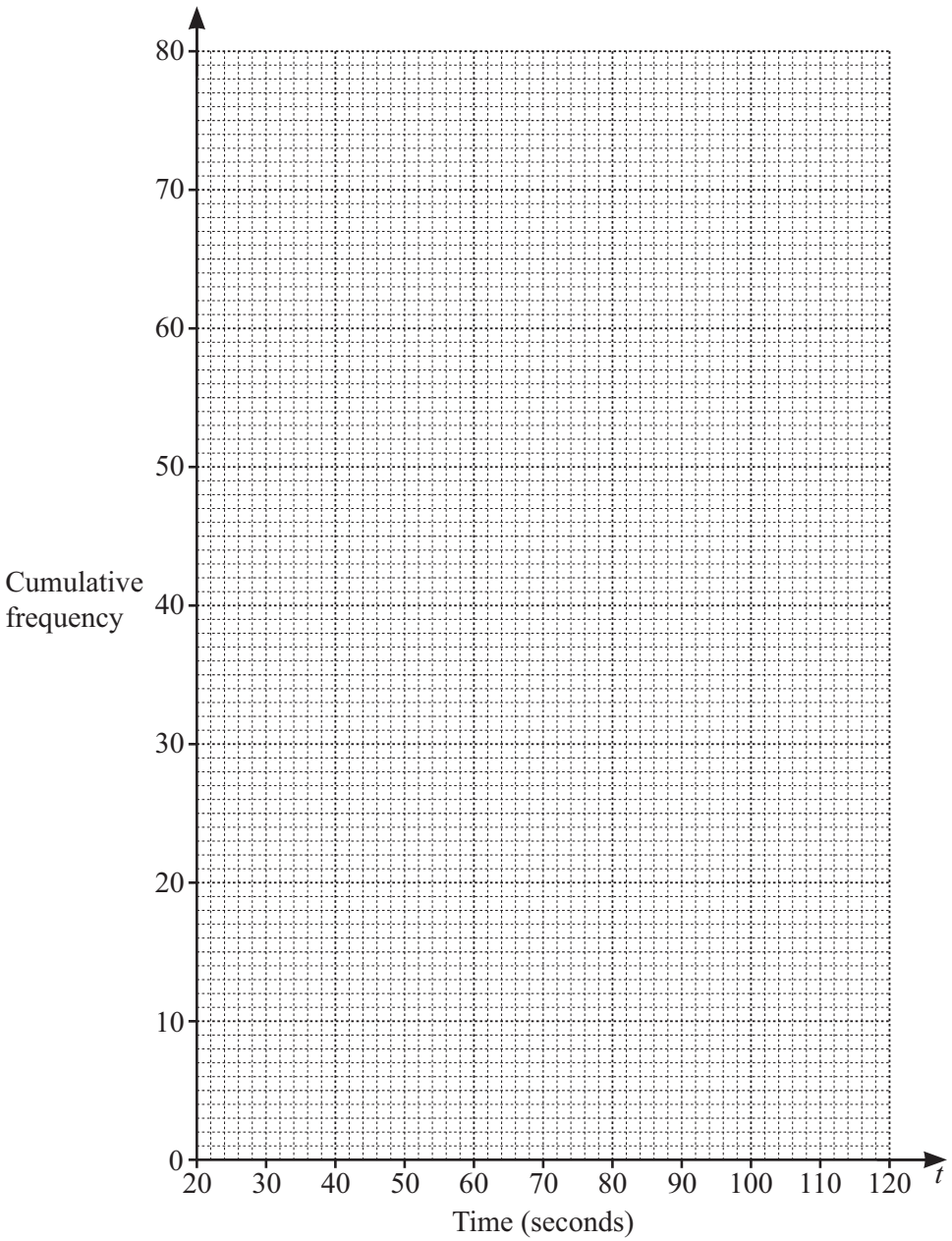
1. [2025 · May/June 0580/22 Q13(b)(i)]

提示：将每个时间上限与同列的累计频数配成一个点。

(b) 80 adults solve the same puzzle as the students.
The cumulative frequency table shows information about the time taken by each adult to solve the puzzle.

Time (t seconds)	$t \leqslant 20$	$t \leqslant 40$	$t \leqslant 60$	$t \leqslant 80$	$t \leqslant 100$	$t \leqslant 120$
Cumulative frequency	0	12	36	60	74	80

(i) On the grid, draw a cumulative frequency diagram.



(b) 80 名成年人解答与学生相同的一道谜题。累计频数表给出了每名成年人解答这道谜题所用时间的信息，时间记为 t，单位为 s。

时间（t，单位为 s）	$t \leq 20$	$t \leq 40$	$t \leq 60$	$t \leq 80$	$t \leq 100$	$t \leq 120$
累计频数	0	12	36	60	74	80

(i) 在网格上画出累计频数图。

横轴为时间，单位为 s，变量为 t，标出的刻度从 20 到 120，每隔 10 标注一次。纵轴为累计频数，标出的刻度从 0 到 80，每隔 10 标注一次。

✓ **答案** 描出 $(20,0)$、$(40,12)$、$(60,36)$、$(80,60)$、$(100,74)$、$(120,80)$，按横坐标递增的顺序连成合理的递增光滑曲线。

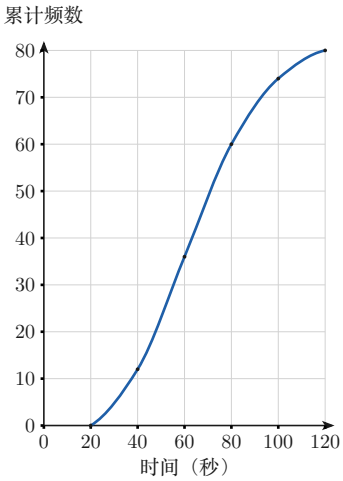
解析 表中时间上限作横坐标，对应的累计频数作纵坐标，得

$$(20,0),(40,12),(60,36),(80,60),(100,74),(120,80)$$

在网格上描出这六个点，按横坐标从小到大的顺序连接。

曲线从 $(20,0)$ 起，经过其余各点，至 $(120,80)$ 止。

答：将上述六点连成合理的递增光滑曲线。



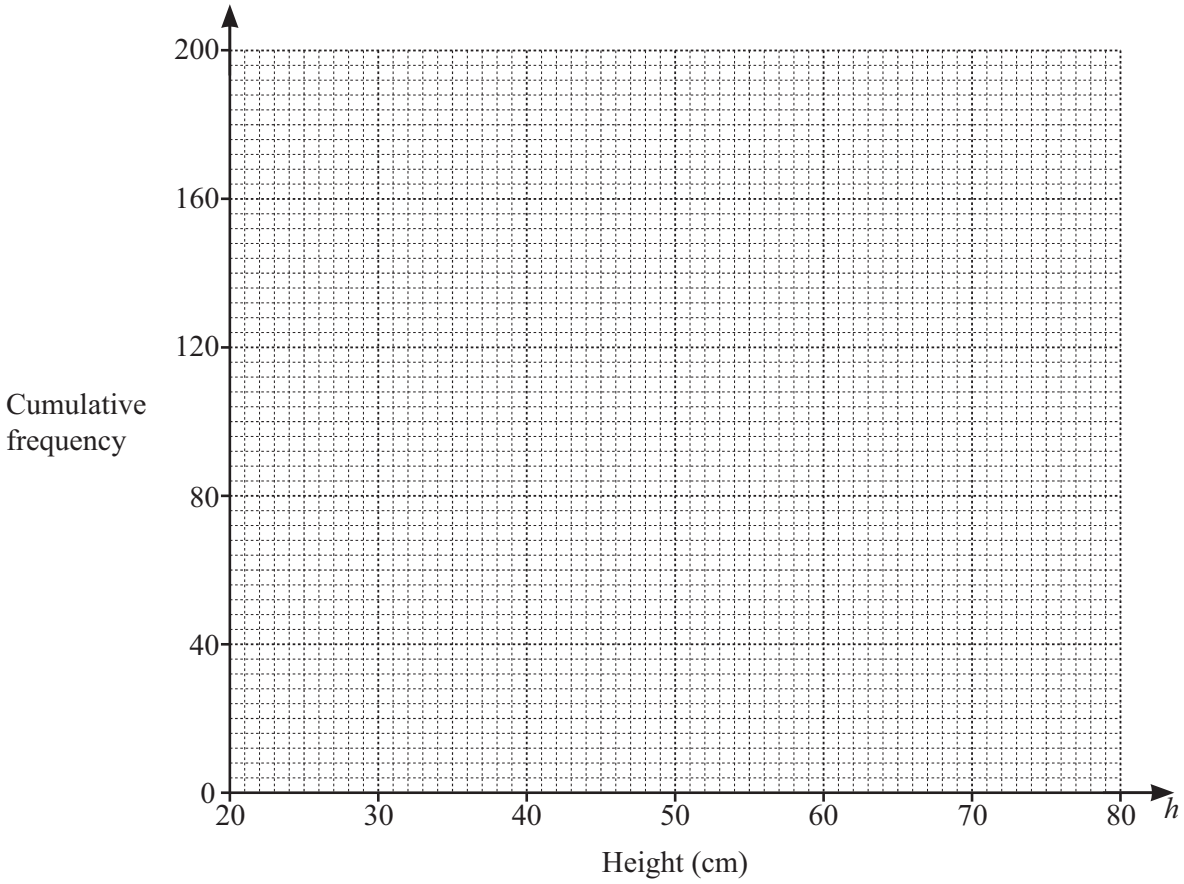
2. [2025 · May/June 0580/43 Q19(a)]

提示：表中给出的已经是累计频数，无须再次累加。

The table shows some information about the heights of 200 plants.

Height (h cm)	Cumulative frequency
$h \leqslant 30$	6
$h \leqslant 40$	42
$h \leqslant 50$	76
$h \leqslant 60$	170
$h \leqslant 70$	190
$h \leqslant 80$	200

(a) Draw a cumulative frequency diagram to show this information.



下表给出了 200 株植物高度的部分信息。高度记为 h，单位为 cm。

高度（h，单位为 cm）	累计频数
$h \leq 30$	6
$h \leq 40$	42
$h \leq 50$	76
$h \leq 60$	170
$h \leq 70$	190
$h \leq 80$	200

(a) 画出累计频数图，表示这些信息。

横轴为高度，单位为 cm，变量为 h，标出的刻度从 20 到 80，每隔 10 标注一次。纵轴为累计频数，标出的刻度从 0 到 200，每隔 40 标注一次。

✓ **答案** 描出 $(30,6)$、$(40,42)$、$(50,76)$、$(60,170)$、$(70,190)$、$(80,200)$，按横坐标递增的顺序连成合理的递增光滑曲线。

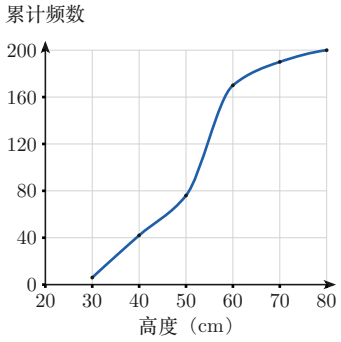
解析 各高度上限与对应的累计频数配成的点为

$$(30,6),(40,42),(50,76),(60,170),(70,190),(80,200)$$

在网格上描出这六个点，按高度从小到大的顺序连接。

末点的累计频数为 200，等于植物总株数。

答：将上述六点连成合理的递增光滑曲线。

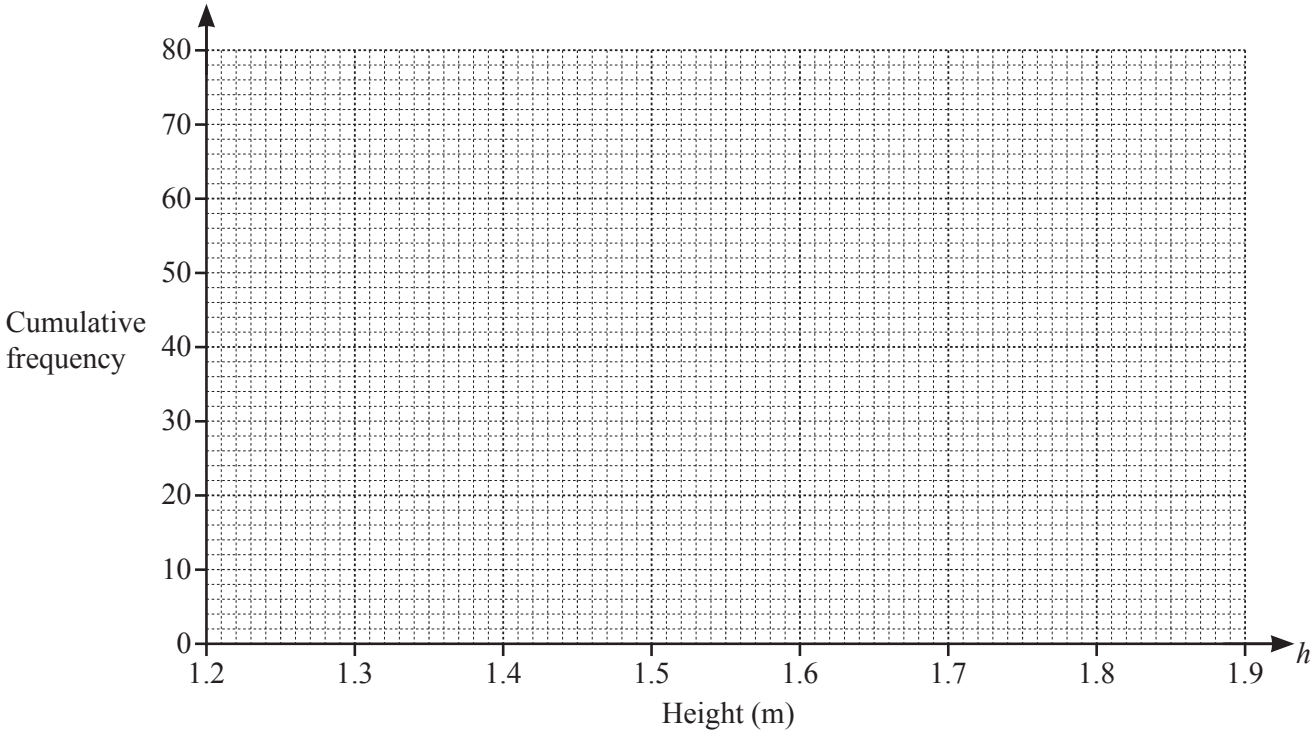


3. [2023 · May/June 0580/42 Q4(c)(ii)]
提示：核对各组上限是否齐全，再将上限与对应累计人数配对。

The table shows information about the heights of 80 children.

Height (h metres)	$1.2 < h \leqslant 1.4$	$1.4 < h \leqslant 1.5$	$1.5 < h \leqslant 1.65$	$1.65 < h \leqslant 1.8$	$1.8 < h \leqslant 1.9$
Frequency	2	13	24	32	9

(ii) On the grid, draw the cumulative frequency diagram.



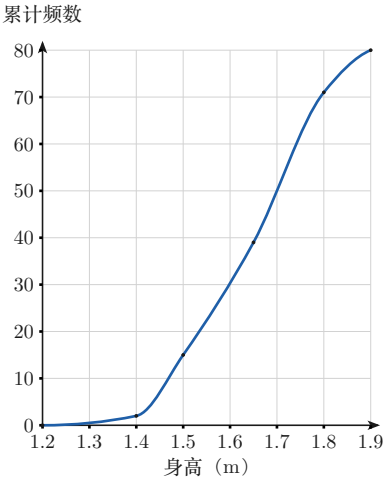
下表给出 80 名儿童的身高 h（米）。

身高 h	$1.2 < h \leq 1.4$	$1.4 < h \leq 1.5$	$1.5 < h \leq 1.65$	$1.65 < h \leq 1.8$	$1.8 < h \leq 1.9$
频数	2	13	24	32	9

(c)（ii）在给出的网格上画出累计频数图。横轴为身高 h（米），纵轴为累计频数。

✓ **答案** 累计点为$(1.4, 2), (1.5, 15), (1.65, 39), (1.8, 71), (1.9, 80)$。

解析 累计频数依次为 2、15、39、71、80。把每组上限与对应累计频数组成坐标：$(1.4, 2), (1.5, 15), (1.65, 39), (1.8, 71), (1.9, 80)$。首组下限可补起点$(1.2, 0)$。按身高递增的顺序描点、连接。



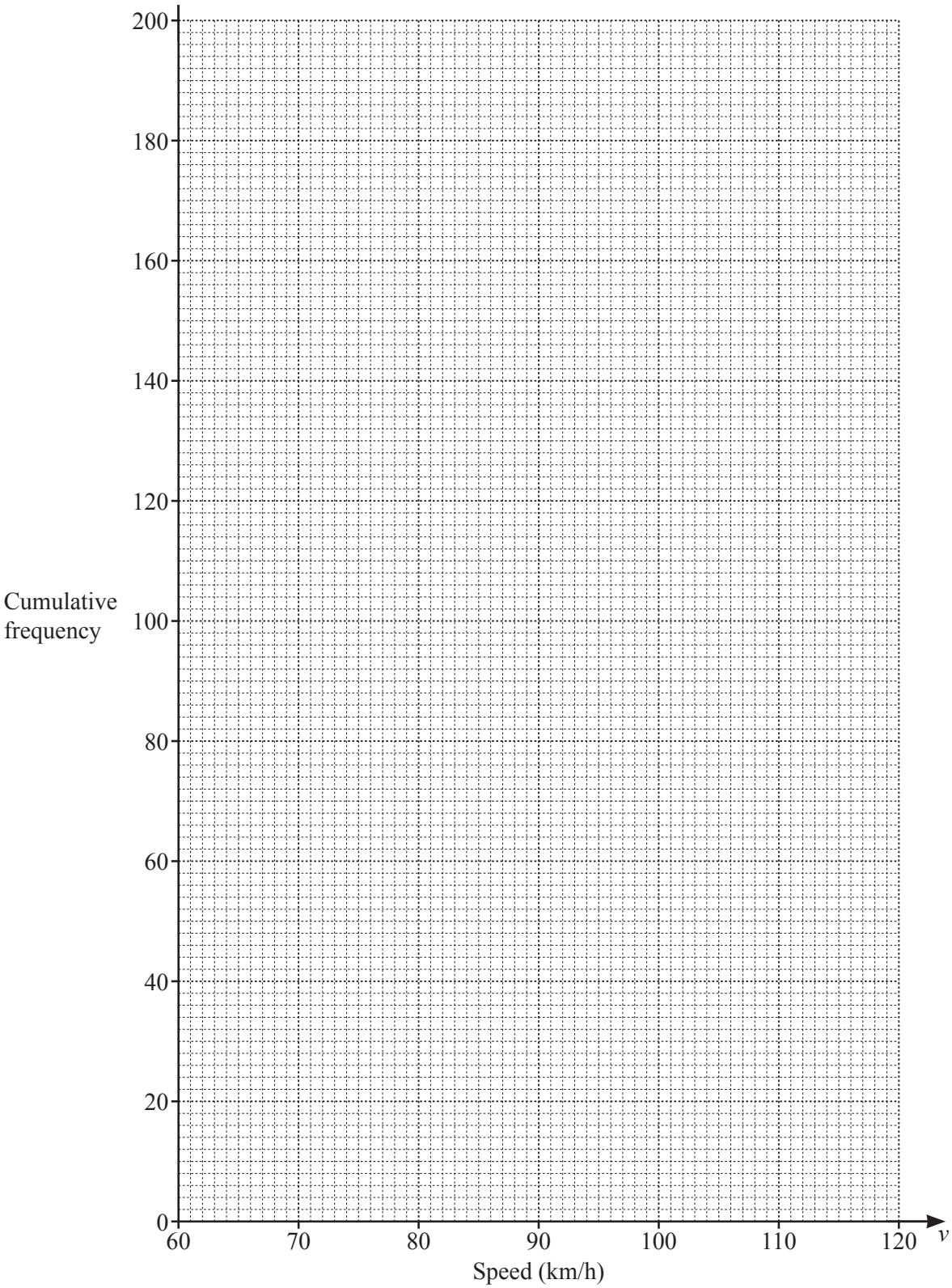
4. [2023 · May/June 0580/43 Q6(a)(i)]

提示：看表头确认是否已累计，再将每列速度上限与人数配对。

(a) The cumulative frequency table shows information about the speed of each of 200 cars as they pass a speed camera.

Speed (v km/h)	$v \leqslant 70$	$v \leqslant 80$	$v \leqslant 90$	$v \leqslant 95$	$v \leqslant 100$	$v \leqslant 120$
Cumulative frequency	12	46	115	155	177	200

(i) On the grid, draw the cumulative frequency diagram.



(a) 下列累计频数表给出了 200 辆汽车经过测速摄像机时各自的速度信息。

速度（v 千米/时）	$v \le 70$	$v \le 80$	$v \le 90$	$v \le 95$	$v \le 100$	$v \le 120$
累计频数	12	46	115	155	177	200

(i) 在方格纸上画出累计频数图。横轴为速度（千米/时），变量为 v，标出的刻度为 60、70、80、90、100、110、120。纵轴为累计频数，标出的刻度为 0、20、40、60、80、100、120、140、160、180、200。

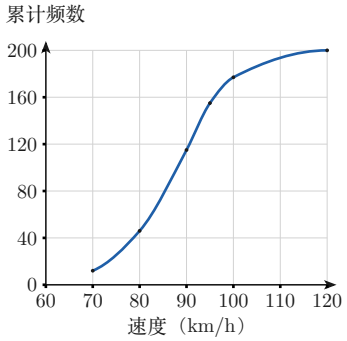
✓ **答案** 描出 $(70,12)$、$(80,46)$、$(90,115)$、$(95,155)$、$(100,177)$、$(120,200)$，按横坐标递增的顺序连成合理的递增曲线。

解析 表中已给出累计频数。以速度上限为横坐标，累计频数为纵坐标，依次描出六点

$$(70,12),\quad (80,46),\quad (90,115)$$

$$(95, 155),\quad (100, 177),\quad (120, 200)$$

将六点按速度从小到大的顺序连成合理的递增曲线，末点的累计频数为 200。答：累计频数图为依次经过上述六点的递增曲线。



5. [2022 · February/March 0580/42 Q5(c),(d)]

提示：从首组起累加频数，再把各组上限与累计频数配成坐标。

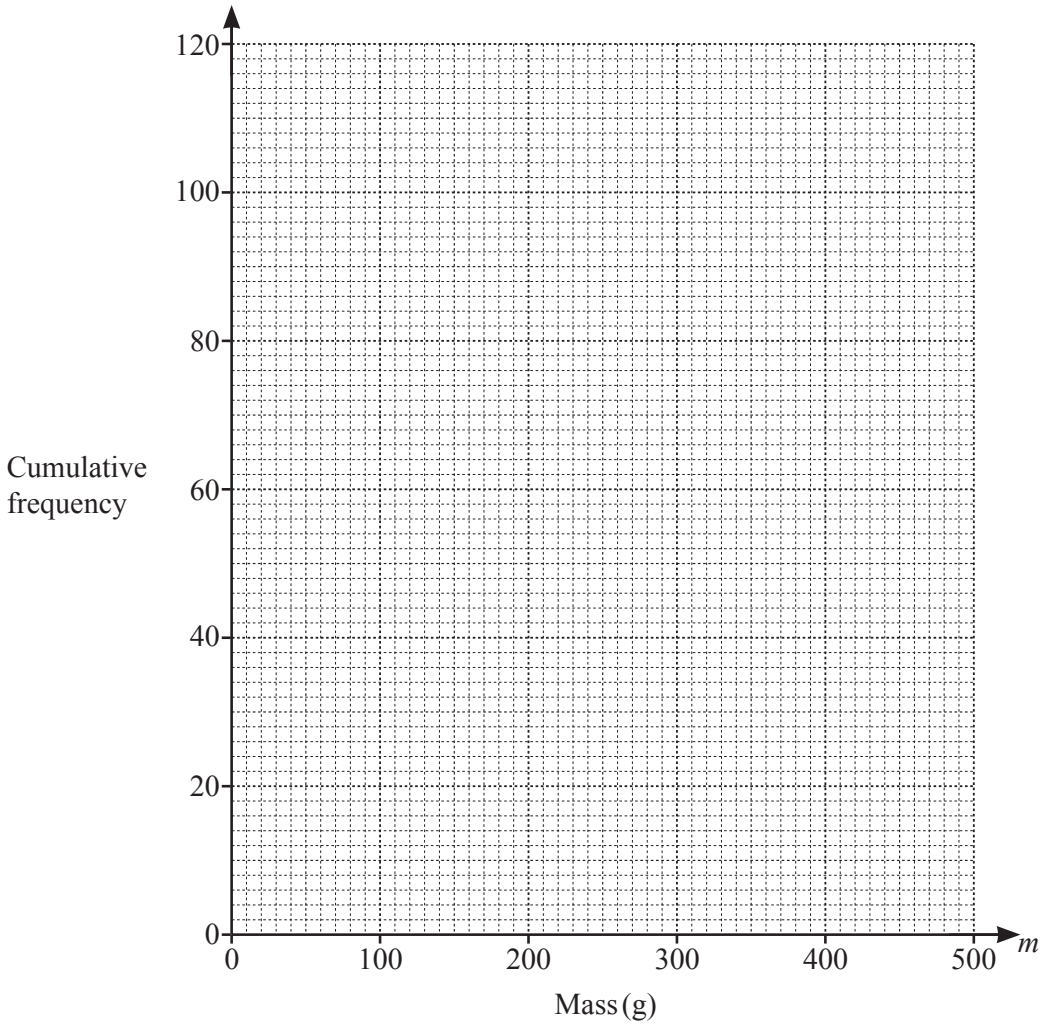
The table shows information about the mass, m grams, of each of 120 letters.

Mass (m grams)	$0 < m \leqslant 50$	$50 < m \leqslant 100$	$100 < m \leqslant 200$	$200 < m \leqslant 500$
Frequency	43	31	25	21

(c) Complete the cumulative frequency table.

Mass (m grams)	$m \leqslant 50$	$m \leqslant 100$	$m \leqslant 200$	$m \leqslant 500$
Cumulative frequency				

(d) Draw a cumulative frequency diagram.



下表给出了 120 封信中每封信的质量信息，m 表示质量，单位为克。

质量（m 克）	$0 < m \leq 50$	$50 < m \leq 100$	$100 < m \leq 200$	$200 < m \leq 500$
频数	43	31	25	21

（c）完成累计频数表。

质量（m 克）	$m \leq 50$	$m \leq 100$	$m \leq 200$	$m \leq 500$
累计频数				

（d）画出累计频数图。

给出的网格中，横轴为质量，单位为克，变量为 m，标出的刻度为 0、100、200、300、400、500；纵轴为累计频数，标出的刻度为 0、20、40、60、80、100、120。

✓ **答案**　（c）依次填 43、74、99、120。

（d）描出 $(0,0)$、$(50,43)$、$(100,74)$、$(200,99)$、$(500,120)$，按横坐标递增的顺序连成合理的递增光滑曲线。

解析　（c）将各组频数从首组起依次相加，得

$$43+31=74$$

$$74+25=99$$

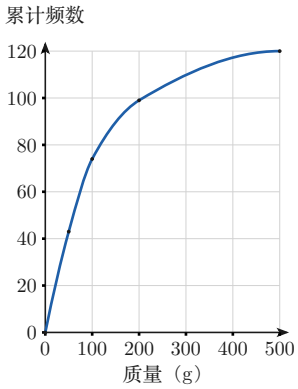
$$99+21=120$$

答：累计频数表从左到右依次填 43、74、99、120。

（d）首组下限为 0，在此处累计频数为 0，故起点为 $(0,0)$。
各组上限作横坐标，对应的累计频数作纵坐标，得到

$$(50,43),\quad (100,74),\quad (200,99),\quad (500,120)$$

在网格上描出起点和上述四点，按质量从小到大的顺序连成合理的递增光滑曲线。
答：累计频数图经过上述五点，末点为 $(500,120)$。



6. [2022 · May/June 0580/43 Q5(c)(i),(ii)]
提示：从首组起逐组相加，再将组上限与累计人数配成点。

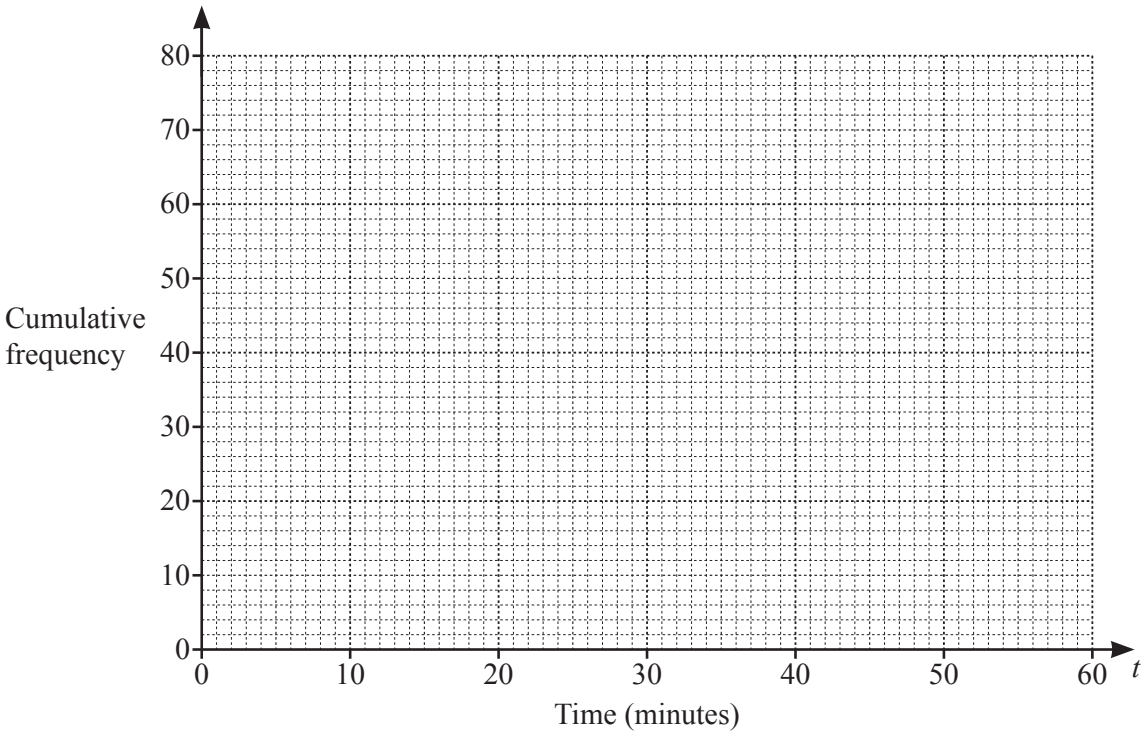
The time, t minutes, taken by each of 80 people to travel to work is recorded.
The table shows information about these times.

Time (t minutes)	$0 < t \leqslant 5$	$5 < t \leqslant 10$	$10 < t \leqslant 20$	$20 < t \leqslant 35$	$35 < t \leqslant 60$
Frequency	3	7	18	28	24

(c) (i) Use the frequency table on page 8 to complete the cumulative frequency table.

Time (t minutes)	$t \leqslant 5$	$t \leqslant 10$	$t \leqslant 20$	$t \leqslant 35$	$t \leqslant 60$
Cumulative frequency	3	10			80

(ii) On the grid, draw a cumulative frequency diagram to show this information.



记录 80 人各自上班所用的时间 t，单位为分钟。下表给出了这些时间的信息。

时间 t（分钟）	$0 < t \leq 5$	$5 < t \leq 10$	$10 < t \leq 20$	$20 < t \leq 35$	$35 < t \leq 60$
频数	3	7	18	28	24

(c)（i）利用上方的频数表，补全下列累计频数表。

时间 t（分钟）	$t \leq 5$	$t \leq 10$	$t \leq 20$	$t \leq 35$	$t \leq 60$
累计频数	3	10			80

(ii)在给出的网格上画出累计频数图，表示这些信息。横轴为时间（分钟），变量为 t，标出的刻度为 0、10、20、30、40、50、60。纵轴为累计频数，标出的刻度为 0、10、20、30、40、50、60、70、80。

✓ **答案** （i）两个空格依次填 28、56。（ii）描出 $(0,0)$、$(5,3)$、$(10,10)$、$(20,28)$、$(35,56)$、$(60,80)$，按横坐标递增的顺序连成合理的递增光滑曲线。

解析 从首组起逐组累加频数，得

$$3+7=10$$

$$10+18=28$$

$$28+28=56$$

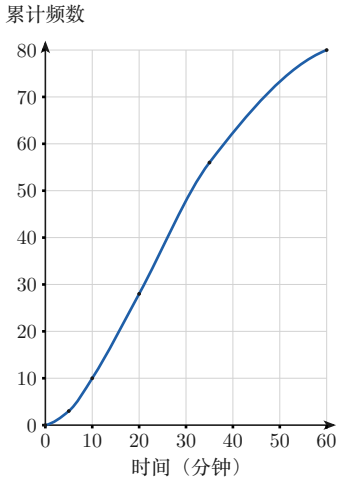
$$56+24=80$$

取各组上限为横坐标，累计频数为纵坐标，得

$$(5,3),(10,10),(20,28),(35,56),(60,80)$$

首组下限为 0 分钟，在此处累计人数为 0，补画起点 $(0,0)$。将各点按横坐标从小到大的顺序连成合理的递增光滑曲线。

答：(i) 两个空格依次填 28、56；(ii) 累计频数图从 $(0,0)$ 起，依次经过上述五点，末点为 $(60,80)$。



9.11　按累计人数读分位数，再求间距或阈值人数

题型 1　按累计人数读分位数，再求间距或阈值人数（Extended）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **累计频数含义：**村中共有 160 人，纵轴记录截至某年龄的人数。累计频数由各组频数依次相加。身高表前两组的累计频数为：

$$2+13=\underline{\qquad}$$

② **中位数读法：**160 人的年龄排好后，中位数位于人数的一半处。先算对应的累计频数，再水平移至曲线，向下读年龄。

$$160\times\frac{1}{2}=\underline{\qquad}$$

从纵轴的 80 处读图，得中位年龄约为 25 岁。

③ **四分位数读法：**四分位数分别在总人数的四分之一和四分之三处读取。沿用村民年龄图，读法如下。

下四分位数记为 Q_1。

$$160\times\frac{1}{4}=40$$

从累计频数 40 处读得：

$Q_1\approx 17.5$ 岁。

上四分位数记为 Q_3。

$$160\times\frac{3}{4}=120$$

从累计频数 120 处读得：

$Q_3\approx 34$ 岁。

④ **四分位距计算：**读出两个四分位数后，上四分位数减下四分位数，得四分位距。所得间距与原数据的单位相同。

$$\text{四分位距}=Q_3-Q_1$$

村民年龄的四分位距约为：

$34-17.5=\underline{\qquad}$ 岁。

⑤ **百分位数读法：** 第 p 百分位数表示约有 $p\%$ 的数据不超过它，p 为百分数的数值。总数记为 N，先求对应的累计频数。

$$\text{累计频数} = N \times \frac{p}{100}$$

村民年龄的第 50 百分位数对应：

$$160 \times \frac{50}{100} = 80$$

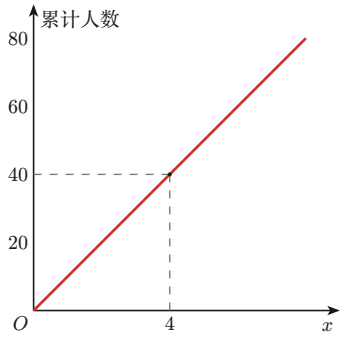
从累计频数 80 处读得，第 50 百分位数约为 25 岁。

⑥ **界限以上人数：** 求超过某数值的人数，先从横轴该值向上移至曲线，再向左读累计频数。总数减去该累计频数，人数按要求取整数。村民年龄图在 25 岁处的累计频数约为 80，超过 25 岁的人数约为：

$$160 - 80 = \underline{\qquad}$$

填空：①15　②80　③16.5　④80

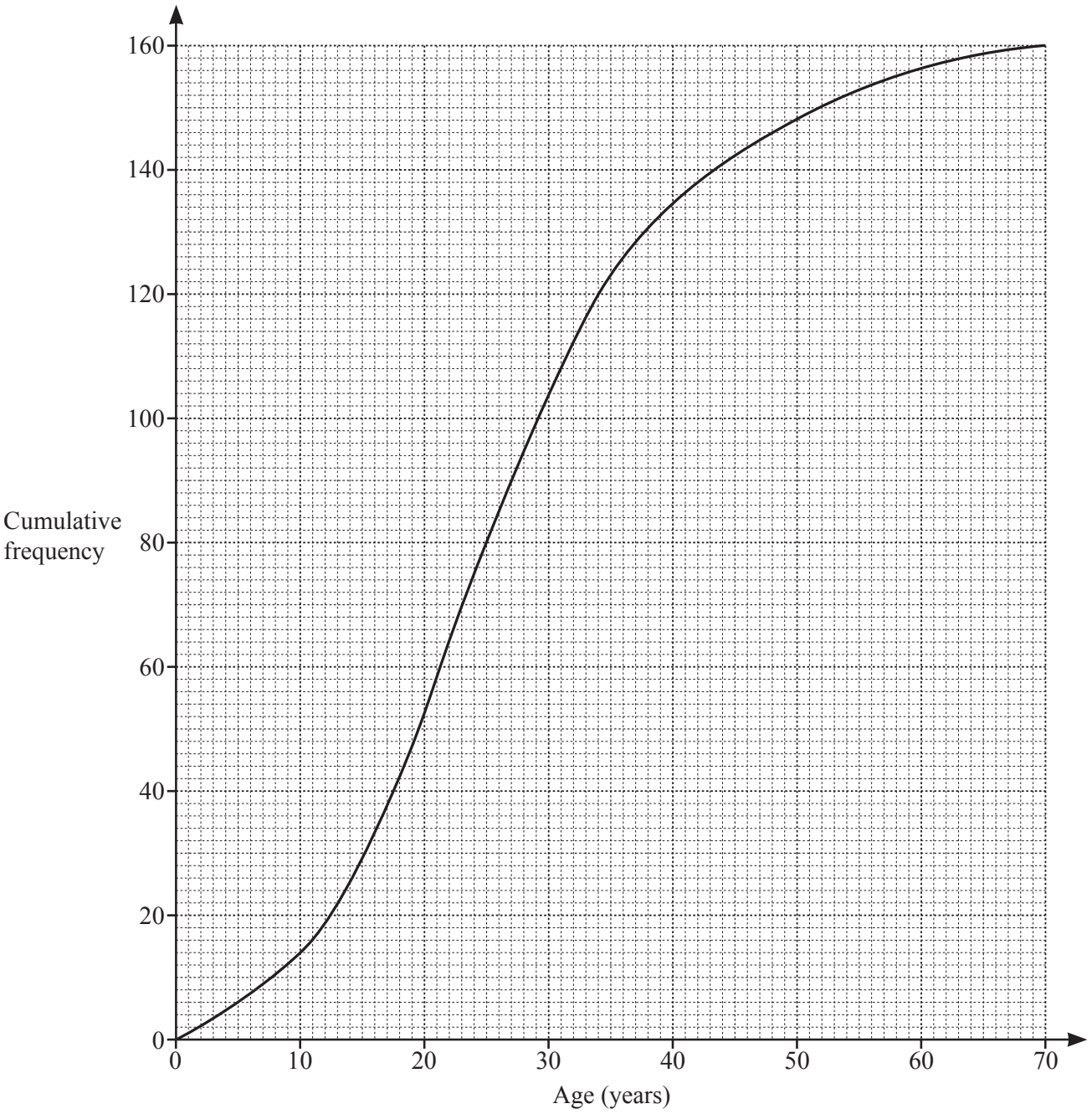
先找累计人数，再读对应的横坐标

	图像	数量关系
同一关系		演示曲线 $F(x) = 10x$，总数 80；中位数从 $F = \frac{80}{2} = 40$ 处读得 $x = 4$。

点石成金　题目出现累计频数图，要求分位数、四分位距或超过某界限的人数时，先确定应从纵轴还是横轴开始读图。

例 1　[2023 · May/June 0580/41 Q5(a)(i)(a)]

(a) There are 160 people in a village.
The cumulative frequency diagram shows information about their ages.



(i) Find an estimate for

(a) the median age

5 (a) 一个村庄有 160 人。累计频数图给出了这些人的年龄信息。图中横轴为年龄（岁），纵轴为累计频数。
(i) 估计：
(a) 年龄的中位数。

解答 共有 160 人，中位数对应的累计频数为

$$160 \times \frac{1}{2} = 80$$

从纵轴的 80 处水平移至曲线，再向下读年龄，得

$$\text{中位年龄} \approx 25 \text{ 岁}$$

答：中位年龄约为 25 岁。

方法：先看纵轴人数刻度，以总人数的一半定位，再沿曲线找年龄。

辨析：累计频数是截至某年龄的人数，中位数是排序后居中的年龄。

拓展：中位数也是第 50 百分位数，读图所得数值通常为估计值。

针对练习

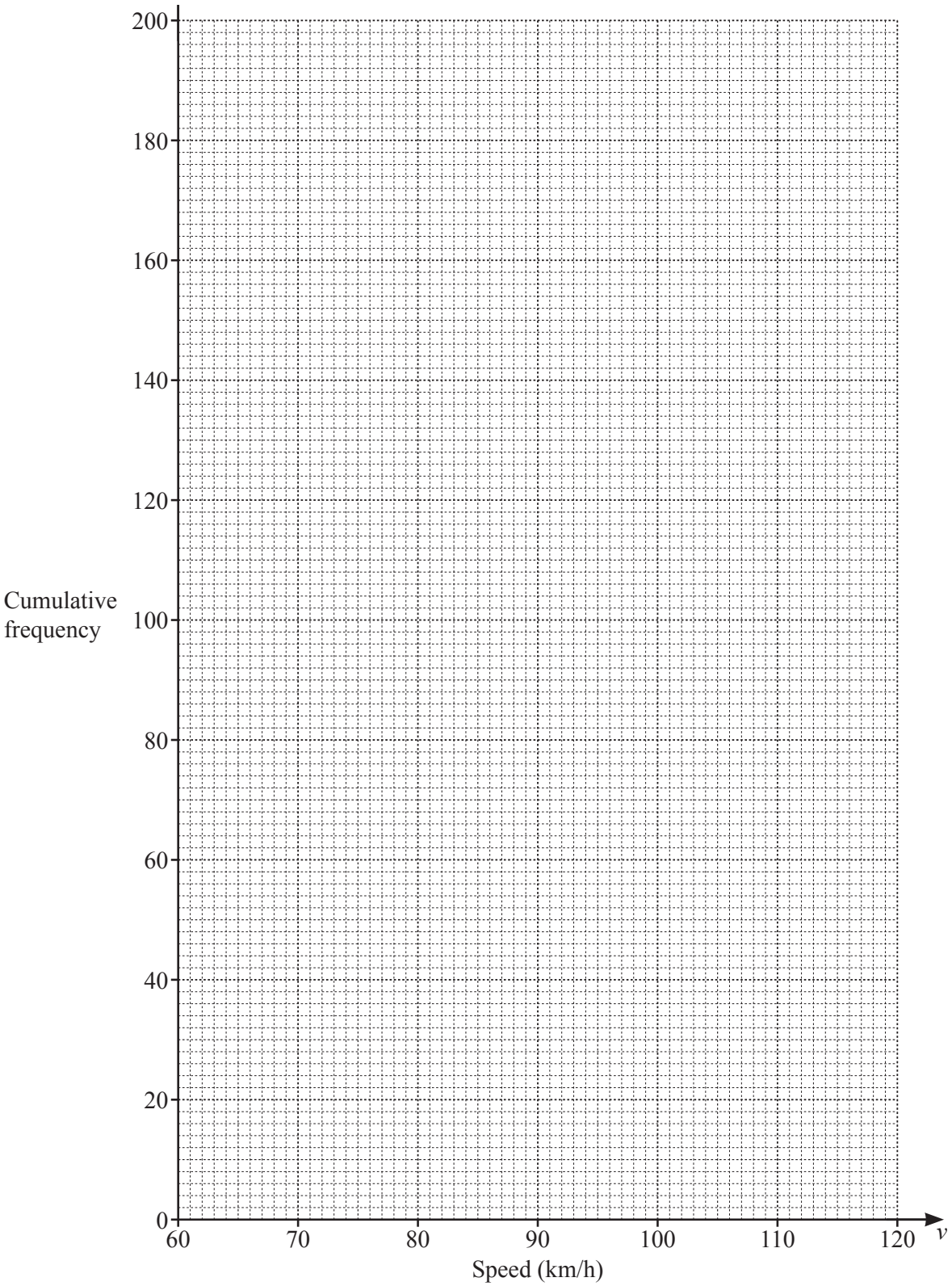
1. [2023 · May/June 0580/43 Q6(a)(ii)(a)]

提示：以总车辆数的一半定位纵轴，再找横轴速度。

(a) The cumulative frequency table shows information about the speed of each of 200 cars as they pass a speed camera.

Speed (v km/h)	$v \leqslant 70$	$v \leqslant 80$	$v \leqslant 90$	$v \leqslant 95$	$v \leqslant 100$	$v \leqslant 120$
Cumulative frequency	12	46	115	155	177	200

(i) On the grid, draw the cumulative frequency diagram.



(ii) Use your cumulative frequency diagram to find an estimate of

(a) the median

(a) 累计频数表给出了 200 辆汽车分别经过测速摄像机时的速度信息。速度记为 v，单位为千米/时。

速度 v（千米/时）	$v \leq 70$	$v \leq 80$	$v \leq 90$	$v \leq 95$	$v \leq 100$	$v \leq 120$
累计频数	12	46	115	155	177	200

(ii) 利用所画的累计频数图，估计：

(a) 速度的中位数。

✓ **答案** 约 88 千米/时。

解析 将表中各点描在坐标系中，连接相邻点，得到累计频数图。共有 200 辆汽车，中位数对应的累计频数为

$$200 \times \frac{1}{2} = 100$$

从纵轴的 100 处水平移至图线，再向下读速度，得

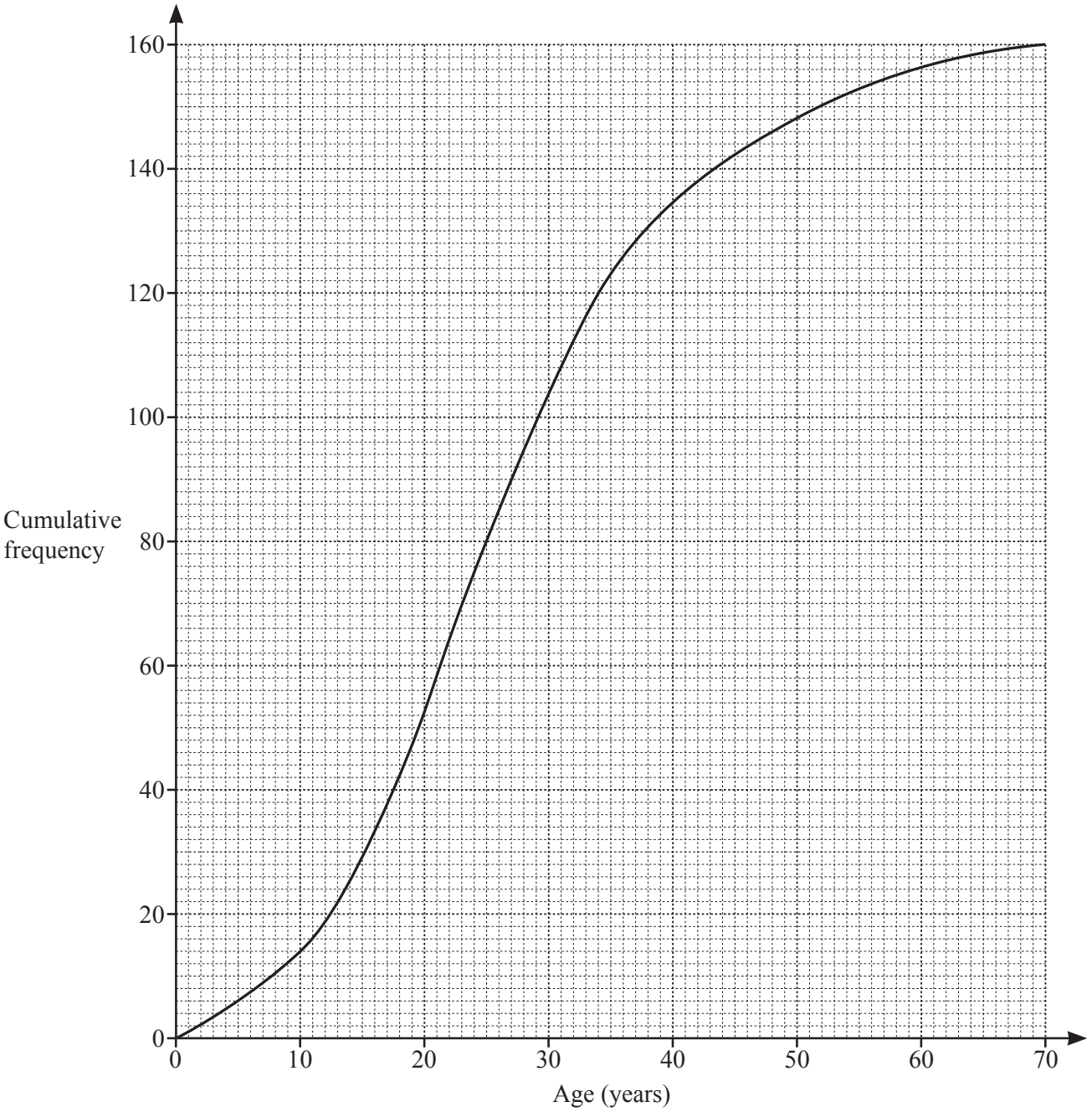
速度中位数 $\approx$ 88 千米/时

答：速度中位数约为 88 千米/时。

2. [2023 · May/June 0580/41 Q5(a)(i)(b)]

提示：在纵轴定位总人数的四分之一，再读年龄。

(a) There are 160 people in a village.
The cumulative frequency diagram shows information about their ages.



(b) the lower quartile

5 (a) 一个村庄有 160 人。累计频数图给出了这些人的年龄信息。图中横轴为年龄（岁），纵轴为累计频数。
(i) 估计：
(b) 年龄的下四分位数。

✓ **答案** 约 17.5 岁。

解析 共有 160 人，下四分位数对应的累计频数为

$$160 \times \frac{1}{4} = 40$$

从纵轴的 40 处水平移至曲线，再向下读年龄，得

$$Q_1 \approx 17.5 \text{ 岁}$$

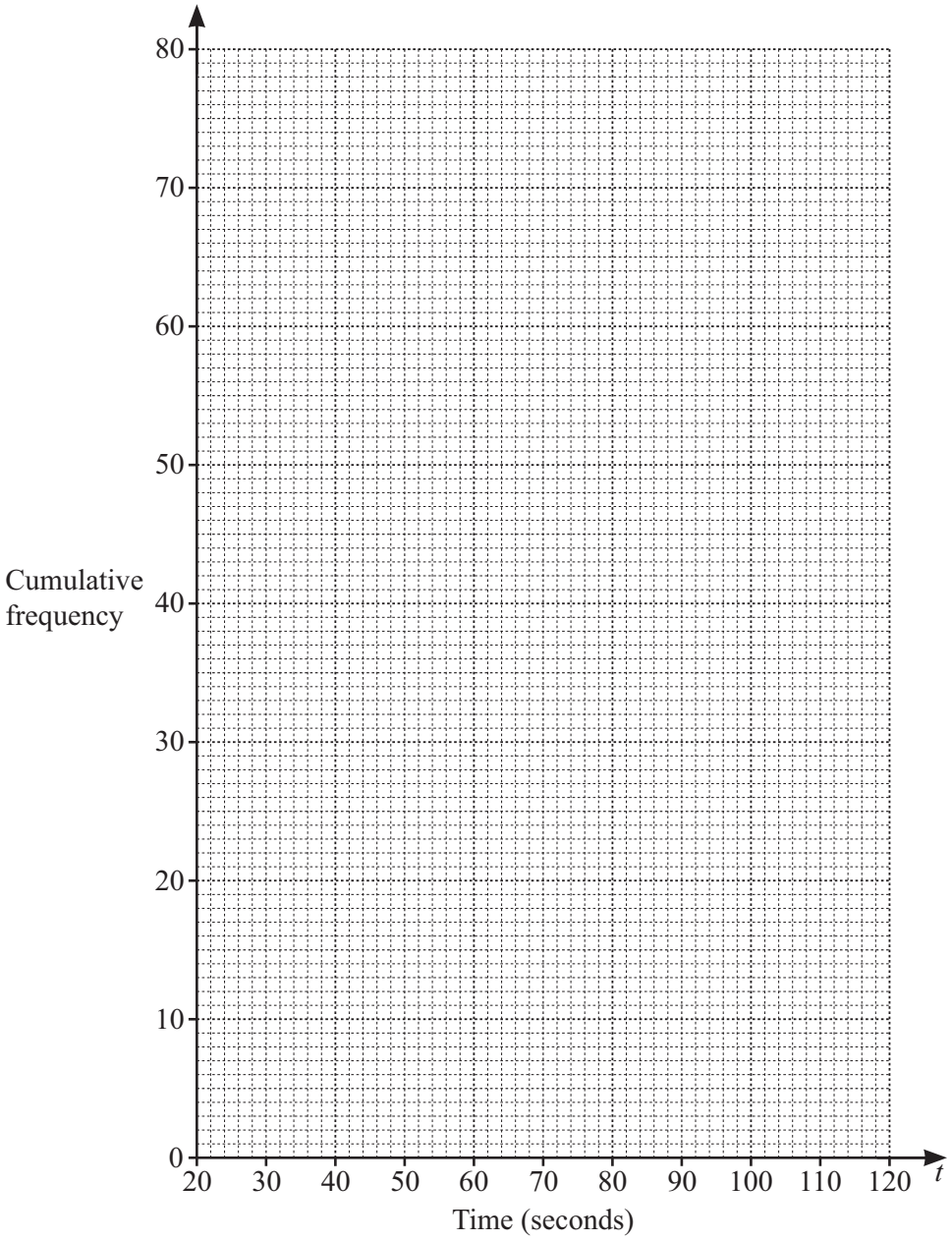
答：年龄的下四分位数约为 17.5 岁。

3. [2025 · May/June 0580/22 Q13(b)(ii)(a)]
← 提示：先求总人数的一半，再从相应的累计频数处读时间。

(b) 80 adults solve the same puzzle as the students.
The cumulative frequency table shows information about the time taken by each adult to solve the puzzle.

Time (t seconds)	$t \leqslant 20$	$t \leqslant 40$	$t \leqslant 60$	$t \leqslant 80$	$t \leqslant 100$	$t \leqslant 120$
Cumulative frequency	0	12	36	60	74	80

(i) On the grid, draw a cumulative frequency diagram.



(ii) Use your cumulative frequency diagram to find an estimate for

(a) the median

(b) 80 名成年人解答与学生相同的一道谜题。累计频数表给出了每名成年人解答这道谜题所用时间的信息，时间记为 t，单位为 s。

时间（t，单位为 s）	$t \leq 20$	$t \leq 40$	$t \leq 60$	$t \leq 80$	$t \leq 100$	$t \leq 120$
累计频数	0	12	36	60	74	80

(i) 在网格上画出累计频数图。

横轴为时间，单位为 s，变量为 t，标出的刻度从 20 到 120，每隔 10 标注一次。纵轴为累计频数，标出的刻度从 0 到 80，每隔 10 标注一次。

(ii) 利用所画的累计频数图，估计：

(a) 所用时间的中位数。

✓ **答案** 约 63 s。

解析 由表中数据描出

$$(20,0),(40,12),(60,36),(80,60),(100,74),(120,80)$$

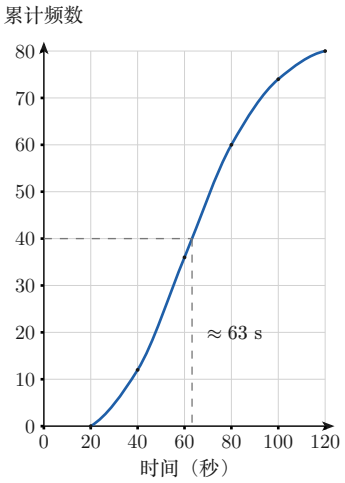
按横坐标递增的顺序连接各点，得到累计频数图。
共有 80 名成年人，中位数对应的累计频数为

$$80 \times \frac{1}{2} = 40$$

从纵轴的 40 处水平移至曲线，再向下读时间，得

$$\text{中位数} \approx 63\ \text{s}$$

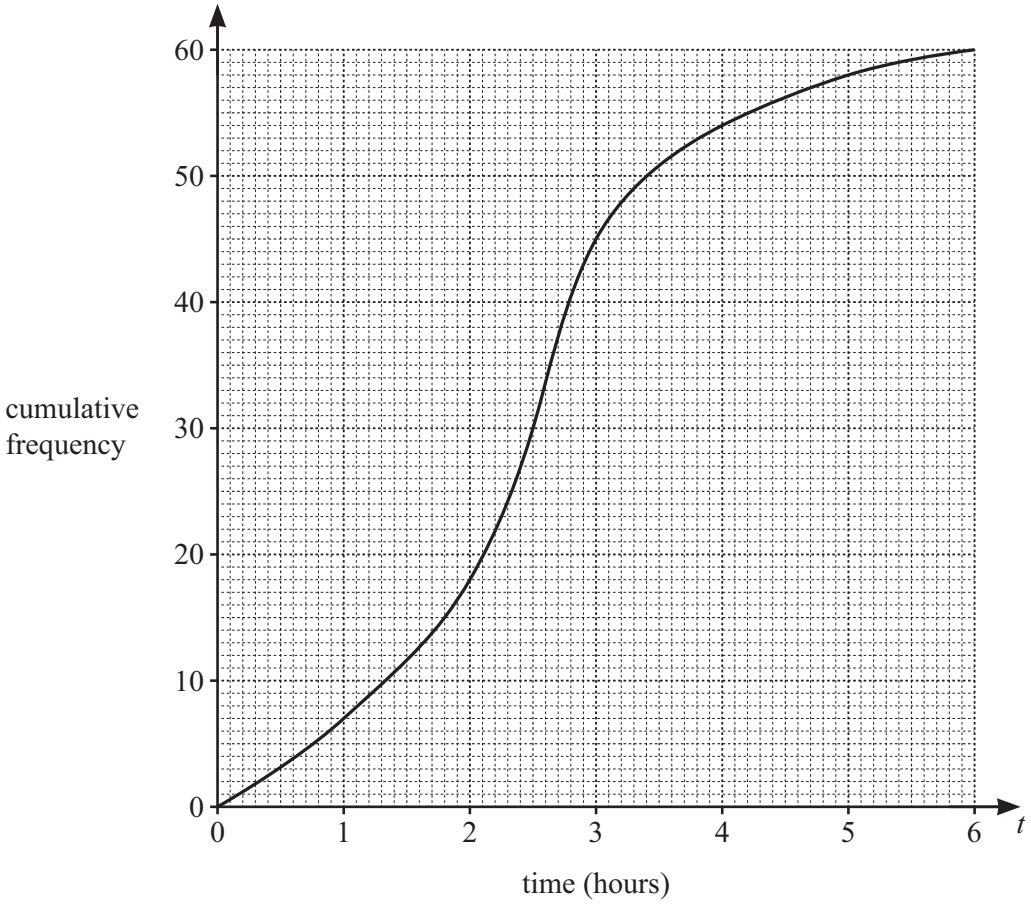
答：所用时间的中位数约为 63 s。



4. [2026 · May/June 0580/21 Q14(a)(i)]

提示：中位数应从总人数一半所对应的纵轴位置读取。

The cumulative frequency diagram shows information about the amount of time 60 students spend watching television on one day.



(a) Find an estimate for

(i) the median

累计频数图给出了 60 名学生在某一天看电视所用时间的信息。

横轴为时间，单位为小时，变量为 t，标出的刻度从 0 到 6，每隔 1 标注一次。纵轴为累计频数，标出的刻度从 0 到 60，每隔 10 标注一次。

(a) 估计：

(i) 看电视所用时间的中位数。

✓ **答案** 约 2.5 小时。

解析 共有 60 名学生，中位数对应的累计频数为

$$60 \times \frac{1}{2} = 30$$

从纵轴的 30 处水平移至曲线，再向下读时间，得

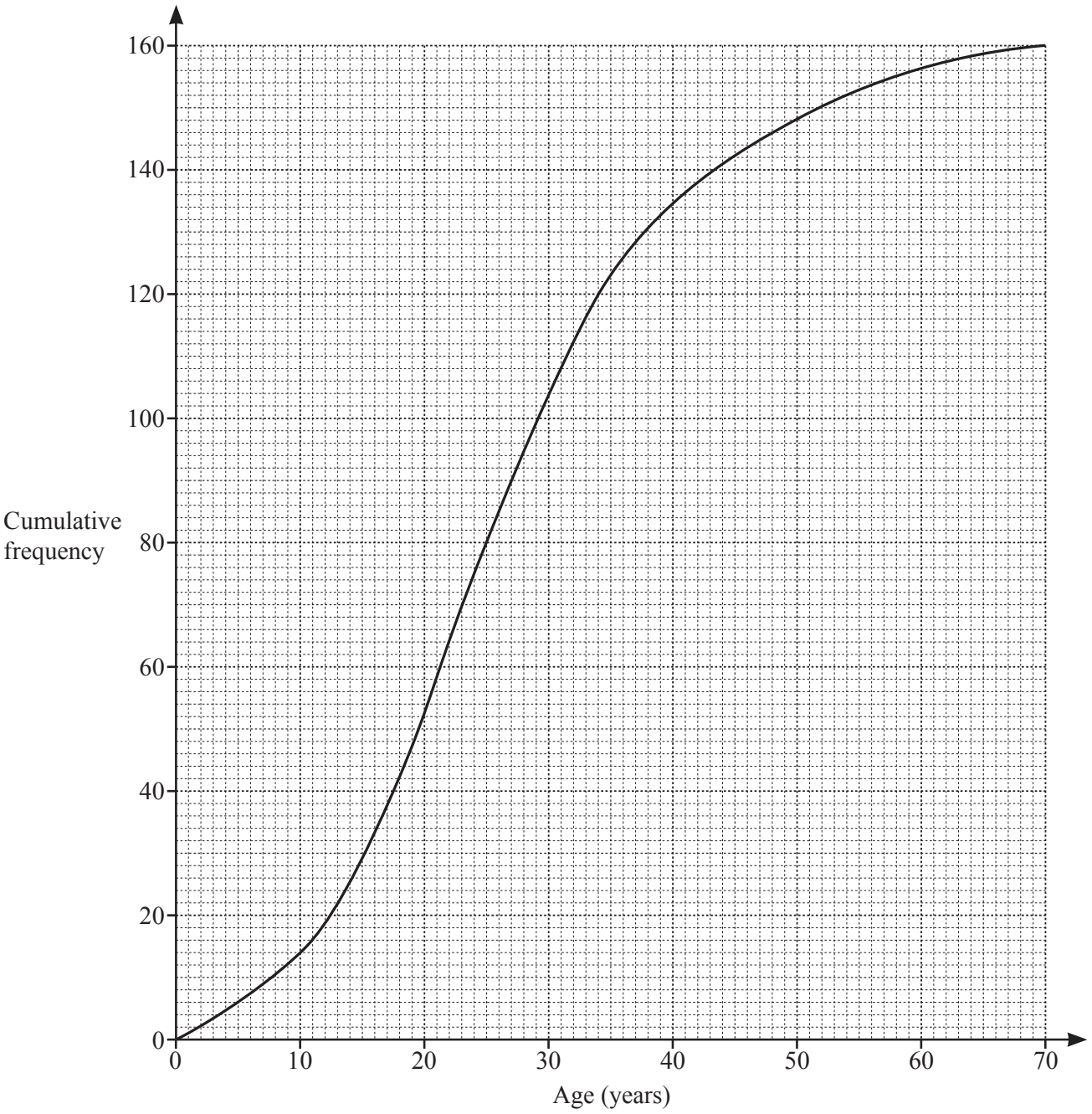
$$\text{中位数} \approx 2.5 \text{ 小时}$$

答：看电视所用时间的中位数约为 2.5 小时。

5. [2023 · May/June 0580/41 Q5(a)(i)(c)]

提示：从横轴年龄界限读累计人数，再与总人数作差。

(a) There are 160 people in a village.
The cumulative frequency diagram shows information about their ages.



(c) the number of people who are 50 or more years of age

5 (a) 一个村庄有 160 人。累计频数图给出了这些人的年龄信息。图中横轴为年龄（岁），纵轴为累计频数。

(i) 估计：

(c) 年龄为 50 岁及以上的人数。

✓ **答案** 12 人。

解析 从横轴的 50 岁处向上移至曲线，再向左读得累计频数约为 148。

年龄为 50 岁及以上的人数 $\approx 160 - 148 = 12$

答：约有 12 人。

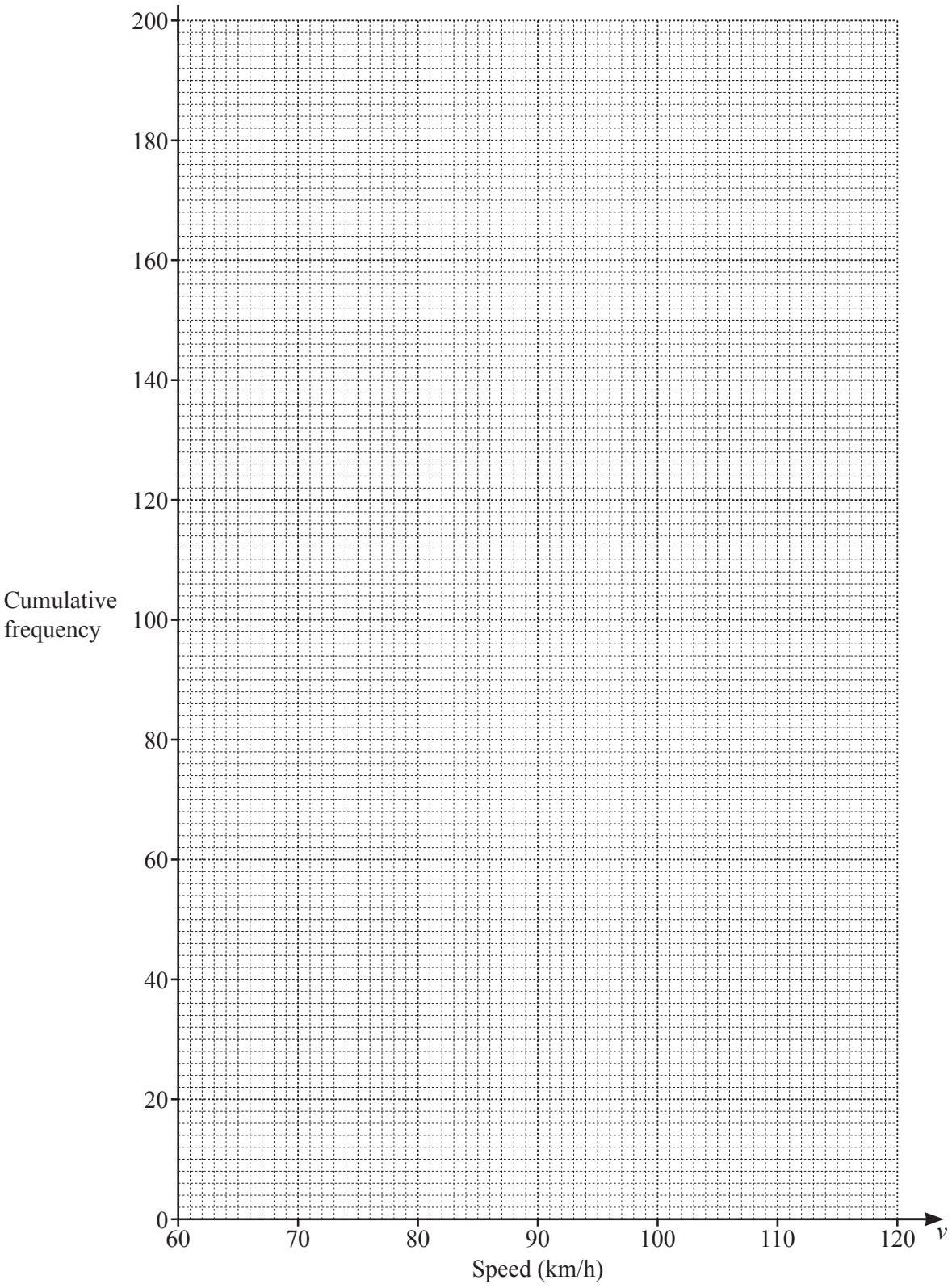
6. [2023 · May/June 0580/43 Q6(a)(ii)(b)]

提示：从纵轴两个四分位位置读速度，再求两者之差。

(a) The cumulative frequency table shows information about the speed of each of 200 cars as they pass a speed camera.

Speed (v km/h)	$v \leqslant 70$	$v \leqslant 80$	$v \leqslant 90$	$v \leqslant 95$	$v \leqslant 100$	$v \leqslant 120$
Cumulative frequency	12	46	115	155	177	200

(i) On the grid, draw the cumulative frequency diagram.



(b) the interquartile range

(a) 累计频数表给出了 200 辆汽车分别经过测速摄像机时的速度信息。速度记为 v，单位为千米/时。

速度 v（千米/时）	$v \leq 70$	$v \leq 80$	$v \leq 90$	$v \leq 95$	$v \leq 100$	$v \leq 120$
累计频数	12	46	115	155	177	200

(ii) 利用所画的累计频数图，估计：

(b) 速度的四分位距。

✓ **答案** 约 13.4 千米/时。

解析 将表中各点描在坐标系中，连接相邻点，得到累计频数图。下四分位数与上四分位数对应的累计频数分别为

$$200 \times \frac{1}{4} = 50$$

$$200 \times \frac{3}{4} = 150$$

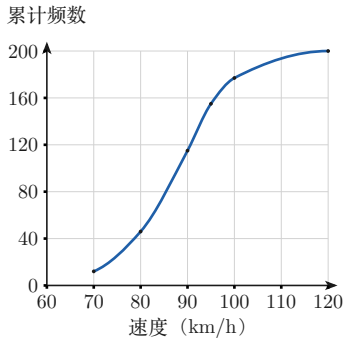
从纵轴的 50 和 150 处分别水平移至图线，再向下读速度，得

$$Q_1 \approx 80.8 \text{ 千米/时}$$

$$Q_3 \approx 94.2 \text{ 千米/时}$$

$$\text{四分位距} = Q_3 - Q_1 \approx 94.2 - 80.8 = 13.4 \text{ 千米/时}$$

答：速度的四分位距约为 13.4 千米/时。



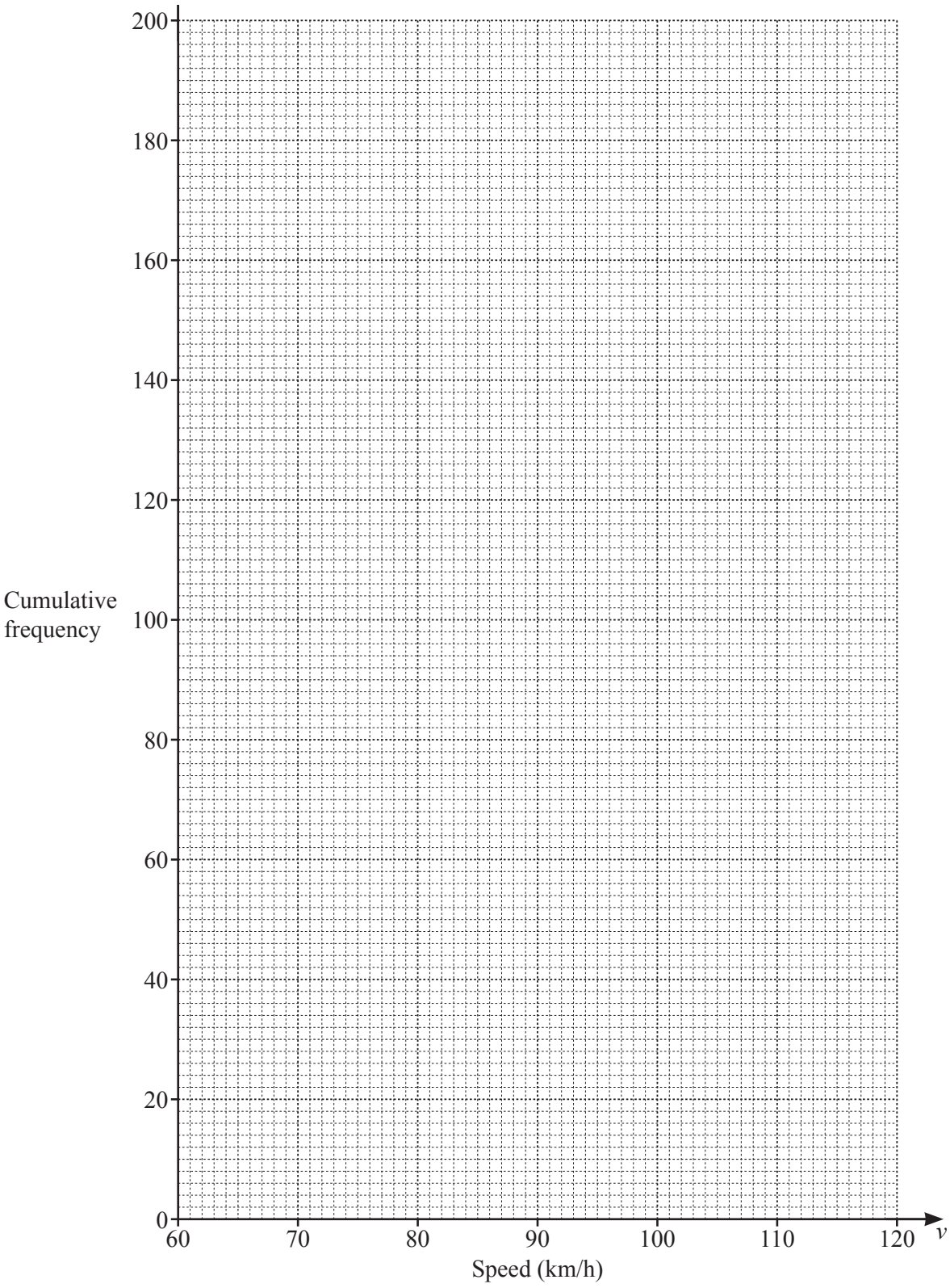
7. [2023 · May/June 0580/43 Q6(a)(ii)(c)]

提示：从横轴速度界限读累计辆数，求余量后取整。

(a) The cumulative frequency table shows information about the speed of each of 200 cars as they pass a speed camera.

Speed ($v$km/h)	$v \leqslant 70$	$v \leqslant 80$	$v \leqslant 90$	$v \leqslant 95$	$v \leqslant 100$	$v \leqslant 120$
Cumulative frequency	12	46	115	155	177	200

(i) On the grid, draw the cumulative frequency diagram.



(c) the number of cars with a speed greater than 110 km/h.

(a) 累计频数表给出了 200 辆汽车分别经过测速摄像机时的速度信息。速度记为 v，单位为千米/时。

速度 v（千米/时）	$v \leq 70$	$v \leq 80$	$v \leq 90$	$v \leq 95$	$v \leq 100$	$v \leq 120$
累计频数	12	46	115	155	177	200

(ii) 利用所画的累计频数图，估计：

(c) 速度大于 110 千米/时的汽车数量。

✓ **答案** 约 6 辆。

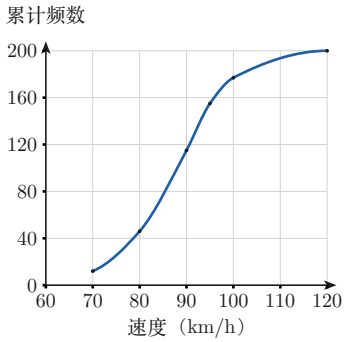
解析 将表中各点描在坐标系中，连接相邻点，得到累计频数图。从横轴的 110 千米/时处向上移至图线，再向左读得累计频数约为 193.7。

$$\text{速度大于 110 千米/时的车辆数} \approx 200 - 193.7 = 6.3$$

人数以外的计数同样取整数，车辆数取最接近的整数，得

$$6.3 \approx 6$$

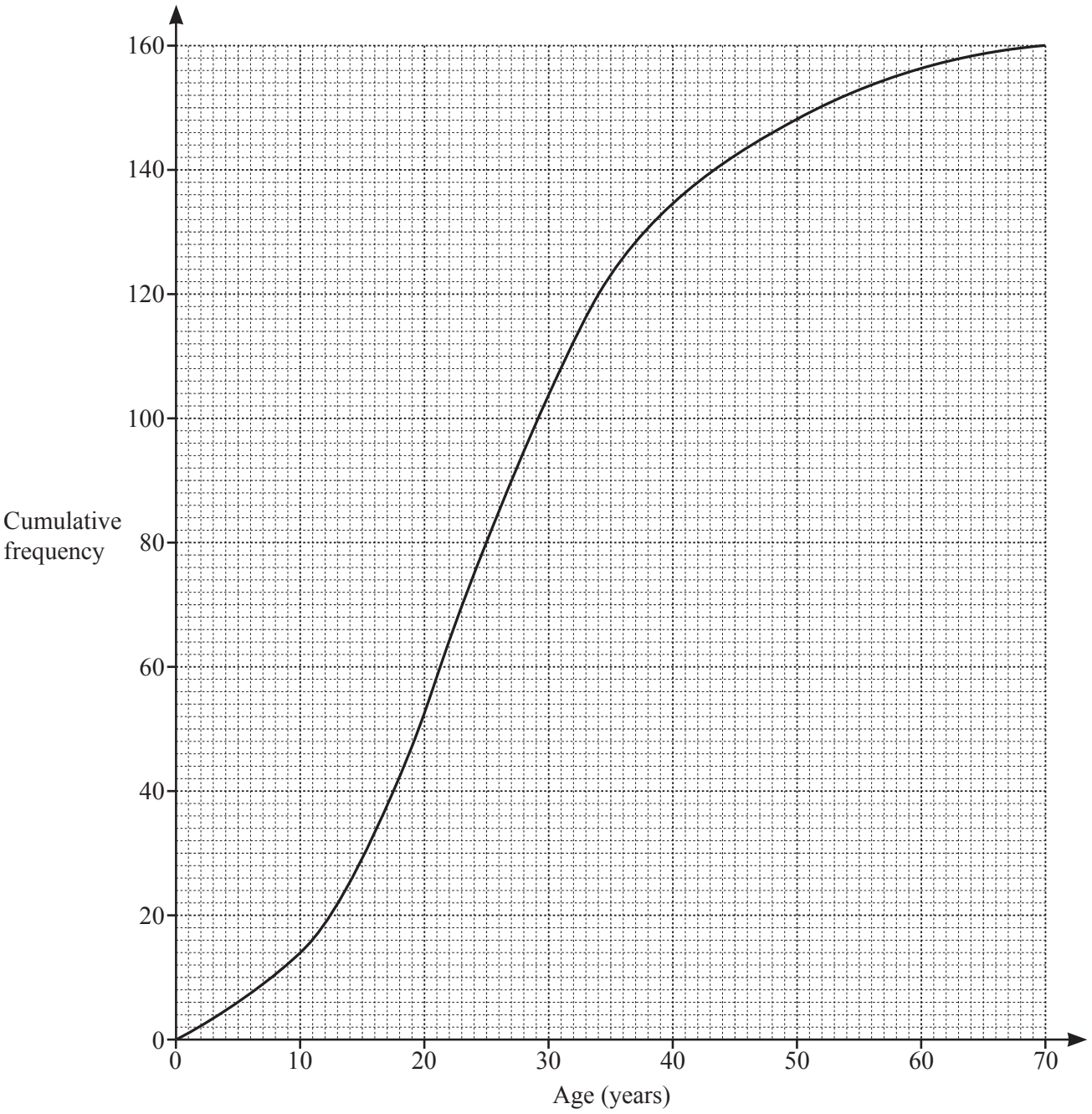
答：约有 6 辆。



8. [2023 · May/June 0580/41 Q5(a)(i)(d)]

提示：先将所求百分比换成人数，再从纵轴找年龄。

(a) There are 160 people in a village.
The cumulative frequency diagram shows information about their ages.



(d) the 65th percentile.

5 (a) 一个村庄有 160 人。累计频数图给出了这些人的年龄信息。图中横轴为年龄（岁），纵轴为累计频数。

(i) 估计：

(d) 年龄的第 65 百分位数。

✓ **答案** 约 30 岁。

解析 共有 160 人，第 65 百分位数对应的累计频数为

$$160 \times \frac{65}{100} = 104$$

从纵轴的 104 处水平移至曲线，再向下读年龄，得

$$\text{第 65 百分位数} \approx 30 \text{ 岁}$$

答：年龄的第 65 百分位数约为 30 岁。

9. [2023 · May/June 0580/42 Q4(d)(i)]

提示：先定位两个四分位所在组，再核查组界是否完整。

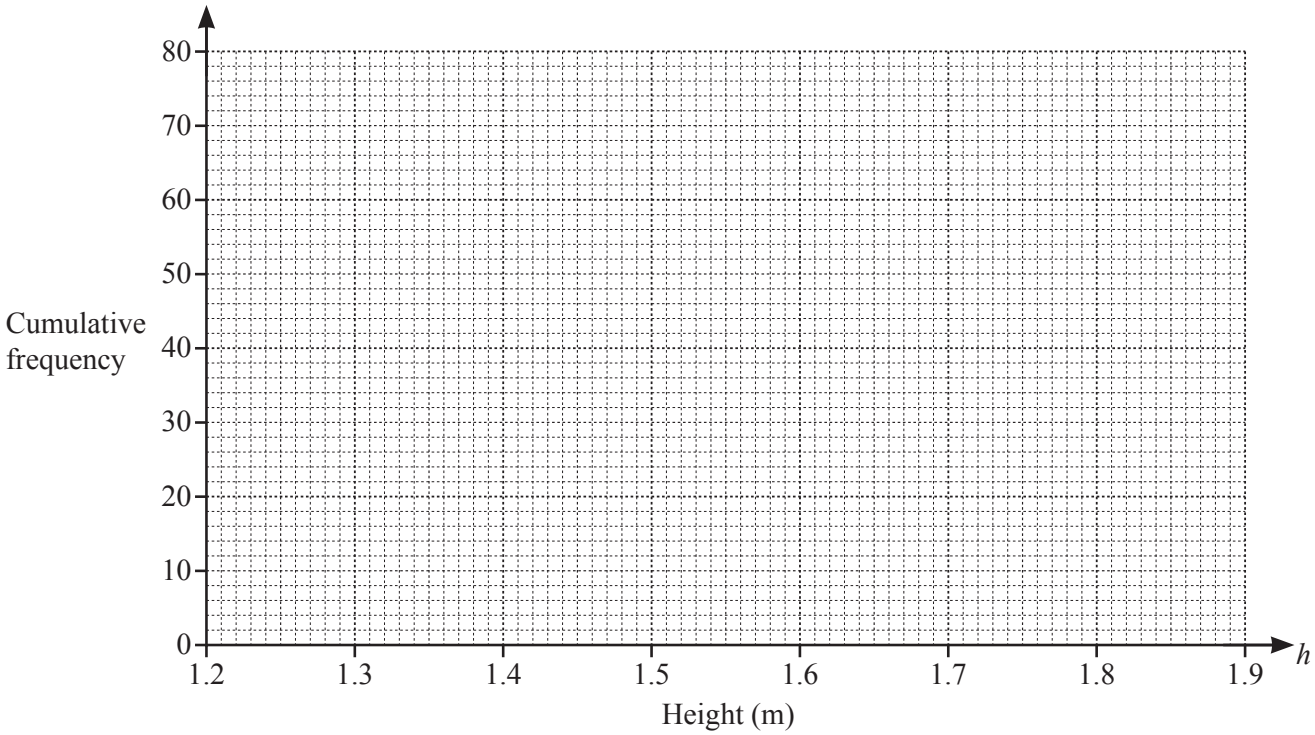
The table shows information about the heights of 80 children.

Height (h metres)	$1.2 < h \leqslant 1.4$	$1.4 < h \leqslant 1.5$	$1.5 < h \leqslant 1.65$	$1.65 < h \leqslant 1.8$	$1.8 < h \leqslant 1.9$
Frequency	2	13	24	32	9

(c) (i) Complete the cumulative frequency table for the heights.

Height (h metres)	$h \leqslant 1.4$	$h \leqslant 1.5$	$h \leqslant 1.65$	$h \leqslant 1.8$	$h \leqslant 1.9$
Cumulative frequency	2				

(ii) On the grid, draw the cumulative frequency diagram.



(d) Use your diagram to find an estimate of

(i) the interquartile range

下表给出 80 名儿童的身高 h（米）。

身高 h	$1.2 < h \leq 1.4$	$1.4 < h \leq 1.5$	$1.5 < h \leq 1.65$	$1.65 < h \leq 1.8$	$1.8 < h \leq 1.9$
频数	2	13	24	32	9

(c)（i）补全累计频数表。

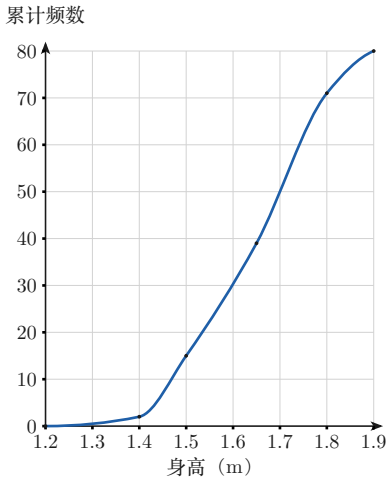
身高 h	$h \leq 1.4$	$h \leq 1.5$	$h \leq 1.65$	$h \leq 1.8$	$h \leq 1.9$
累计频数	2				

(ii）在网格上画出累计频数图。 (d）利用图象估计：(i）身高的四分位距。

✓ **答案** 约0.22 m

解析 (c)(i) 累计频数表四个空格依次为 15, 39, 71, 80。解：总人数为 80，下、上四分位数对应累计人数 20、

60。$\frac{80}{4}=20$，$3\times\frac{80}{4}=60$ 在累计频数图上由 20 与 60 水平读到曲线，再竖直读出身高，约为 1.53m 和 1.75m。四分位距 $\approx 1.75-1.53=0.22$ m 答：约 0.22m；图象读数有合理误差。



10. [2023 · May/June 0580/42 Q4(d)(ii)]

提示：将目标累计人数与各组累计数比较，再核查组界。

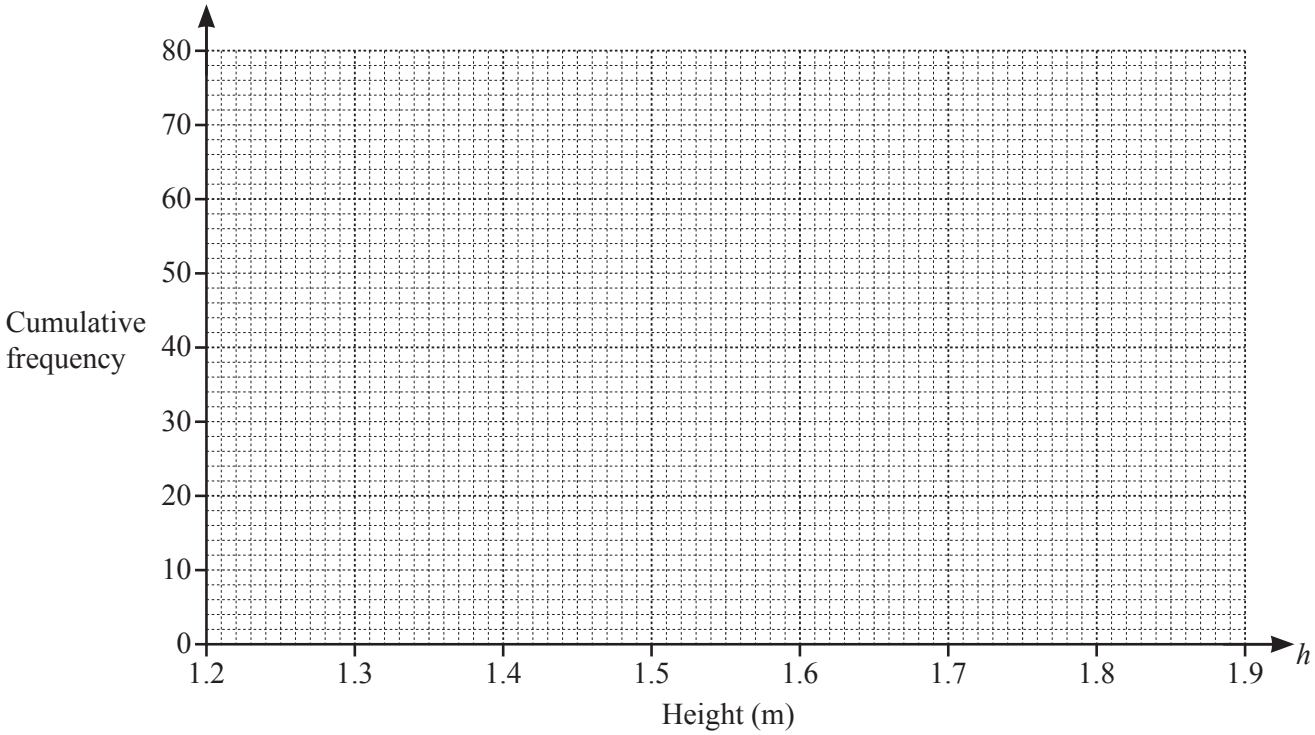
The table shows information about the heights of 80 children.

Height (h metres)	$1.2 < h \leqslant 1.4$	$1.4 < h \leqslant 1.5$	$1.5 < h \leqslant 1.65$	$1.65 < h \leqslant 1.8$	$1.8 < h \leqslant 1.9$
Frequency	2	13	24	32	9

(c) (i) Complete the cumulative frequency table for the heights.

Height (h metres)	$h \leqslant 1.4$	$h \leqslant 1.5$	$h \leqslant 1.65$	$h \leqslant 1.8$	$h \leqslant 1.9$
Cumulative frequency	2				

(ii) On the grid, draw the cumulative frequency diagram.



(d) Use your diagram to find an estimate of

(ii) the 60th percentile.

下表给出 80 名儿童的身高 h（米）。

身高 h	$1.2 < h \leq 1.4$	$1.4 < h \leq 1.5$	$1.5 < h \leq 1.65$	$1.65 < h \leq 1.8$	$1.8 < h \leq 1.9$
频数	2	13	24	32	9

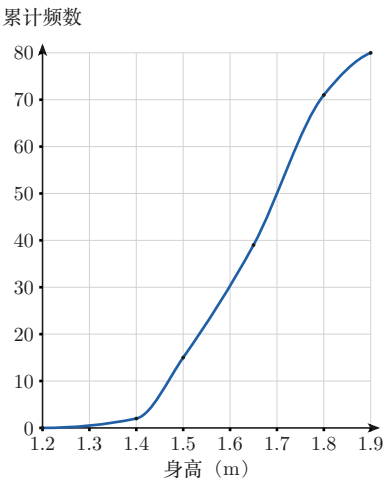
(c)（i）补全累计频数表。

身高 h	$h \leq 1.4$	$h \leq 1.5$	$h \leq 1.65$	$h \leq 1.8$	$h \leq 1.9$
累计频数	2				

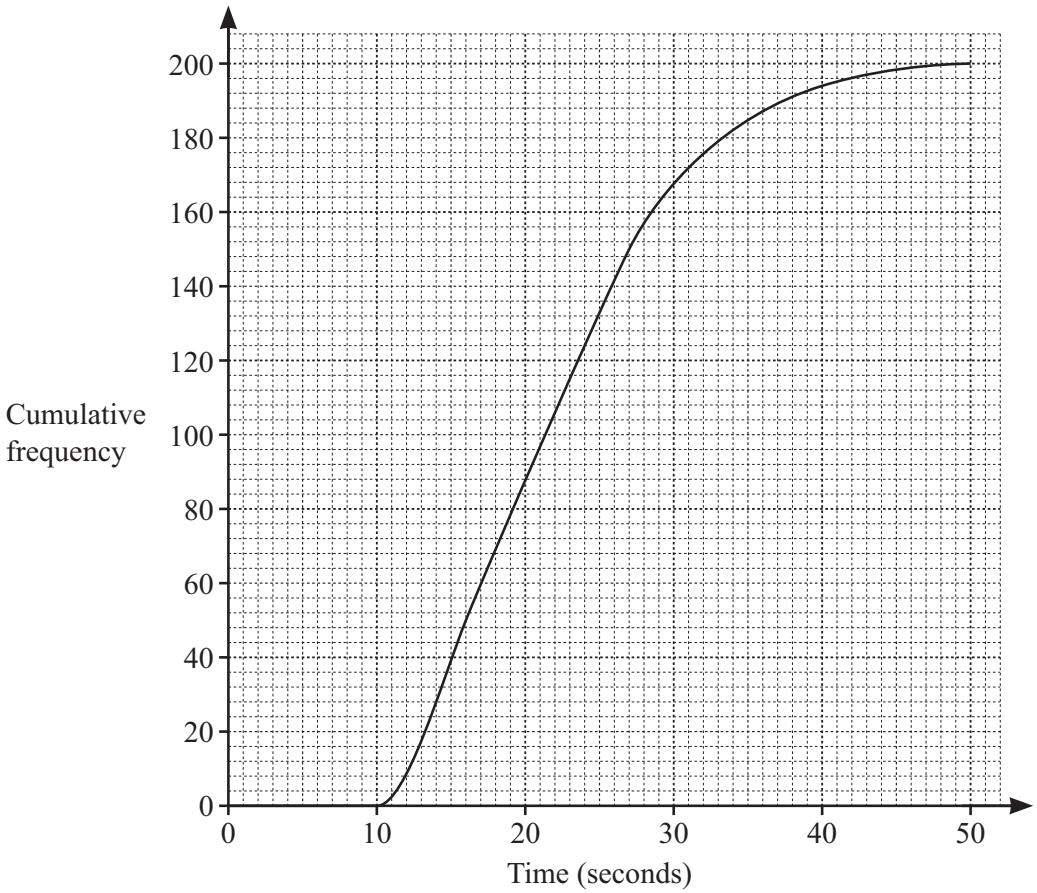
(ii）在网格上画出累计频数图。 (d）利用图象估计：(ii）身高的第 60 百分位数。

✓ **答案** 约1.69 m

解析 (c)(i) 累计频数表四个空格依次为 15, 39, 71, 80。解：第 60 百分位数对应累计人数 $80 \times \frac{60}{100} = 48$。从累计频数 48 处水平读到曲线，再竖直读出身高，约为 1.69m。答：约 1.69m；图象读数有合理误差。



11. [2024 · May/June 0580/23 Q15(a)]
提示：分别求总人数的四分之一和四分之三，再读出两个时间。



The time taken for each of 200 students to complete a calculation is measured.
The cumulative frequency diagram shows the results.

Use the diagram to find an estimate for

(a) the interquartile range

测量 200 名学生各自完成一道计算题所用的时间。累计频数图显示了测量结果。
横轴为时间，单位为 s，标出的刻度从 0 到 50，每隔 10 标注一次。纵轴为累计频数，标出的刻度从 0 到 200，每隔 20 标注一次。
利用图象估计：
(a) 所用时间的四分位距。

✓ **答案** 约 11 s。

解析 共有 200 名学生，下四分位数对应的累计频数为

$$200 \times \frac{1}{4} = 50$$

上四分位数对应的累计频数为

$$200 \times \frac{3}{4} = 150$$

从纵轴的 50、150 处分别水平移至曲线，再向下读时间。下四分位数记为 Q_1，上四分位数记为 Q_3，得

$$Q_1 \approx 16 \text{ s}$$

$$Q_3 \approx 27 \text{ s}$$

上四分位数减下四分位数，得

$$\text{四分位距} = Q_3 - Q_1 \approx 27 - 16 = 11\ \text{s}$$

答：所用时间的四分位距约为 11 s。

9.12 用频数除以组距，确定直方图柱高

题型 1 用频数除以组距，确定直方图柱高（Extended）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **求出组距：**土豆质量第一组的组界为 50 克和 110 克。组距等于上组界减去下组界。

组距 $= 110 - 50 =$ _____ 克。

② **算频数密度：**第一组有 60 个土豆，组距为 60 克。用频数除以组距，得到频数密度。设 f 为频数，w 为组距，d 为频数密度。

$d = \frac{f}{w} = \frac{60}{60} =$ _____。

③ **画出相邻矩形：**横轴标质量，纵轴标频数密度。第一组从 50 克画到 110 克，矩形高为 1。其余各组也以组界为左右边，以频数密度为高。

④ **求柱高比例：**柱高以厘米给出时，先求柱高与频数密度的比值。设这个比值为 k。例如，某柱频数密度为 2，柱高为 3 cm。

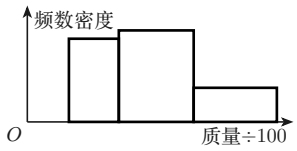
$k = \frac{3}{2} = 1.5$。

⑤ **换算实际柱高：**同一直方图中，各柱使用相同的比例。续用上面的数据，另一柱的频数密度为 4。设其柱高为 h，单位为厘米。

$h = kd = 1.5 \times 4 =$ _____。

填空：①60　②1　③6

柱子的面积表示频数

	图像	数量关系
同一关系		频数密度 $= \frac{\text{频数}}{\text{组距}}$；例如 $\frac{99}{90} = 1.1$。

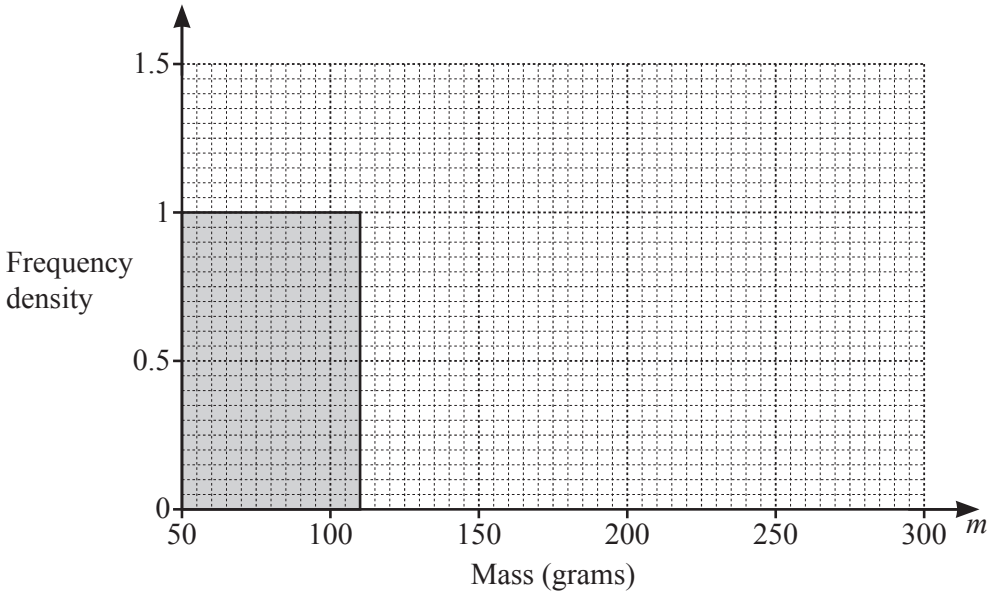
点石成金　题目出现分组频数表，要求补全直方图或计算柱高时，先用频数除以组距求频数密度。

例 1 [2023 · February/March 0580/42 Q2(c)(ii)]

(c) The mass of each of 200 potatoes is measured.
The table shows the results.

Mass (m grams)	$50 < m \leqslant 110$	$110 < m \leqslant 200$	$200 < m \leqslant 300$
Frequency	60	99	41

(ii) Complete the histogram to show the information in the table.



(c) 测量 200 个土豆中每个土豆的质量。下表给出了结果，m 表示质量，单位为克。

$50 < m \leq 110$：频数为 60；

$110 < m \leq 200$：频数为 99；

$200 < m \leq 300$：频数为 41。

(ii) 补全直方图，表示表中的信息。

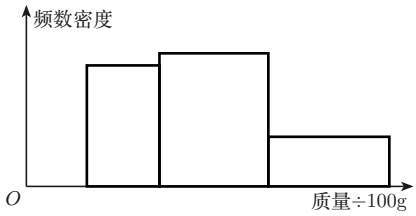
图中横轴为质量（克），变量为 m，标有 50、100、150、200、250、300；纵轴为频数密度，标有 0、0.5、1、1.5。已画矩形从 50 克延伸至 110 克，高为 1。

解答 由频数密度等于频数除以组距，得

$\frac{99}{200-110} = \frac{99}{90} = 1.1$。

$\frac{41}{300-200} = \frac{41}{100} = 0.41$。

答：在 $110 < m \leq 200$ 上画高为 1.1 的矩形，在 $200 < m \leq 300$ 上画高为 0.41 的矩形，两柱与已有柱相邻。



方法：先看频数表的上下组界，逐组相减求组距，再算柱高。

辨析：频数是组内数据的个数，频数密度是单位组距内的频数。

拓展：直方图中，矩形面积与该组频数成正比。

针对练习

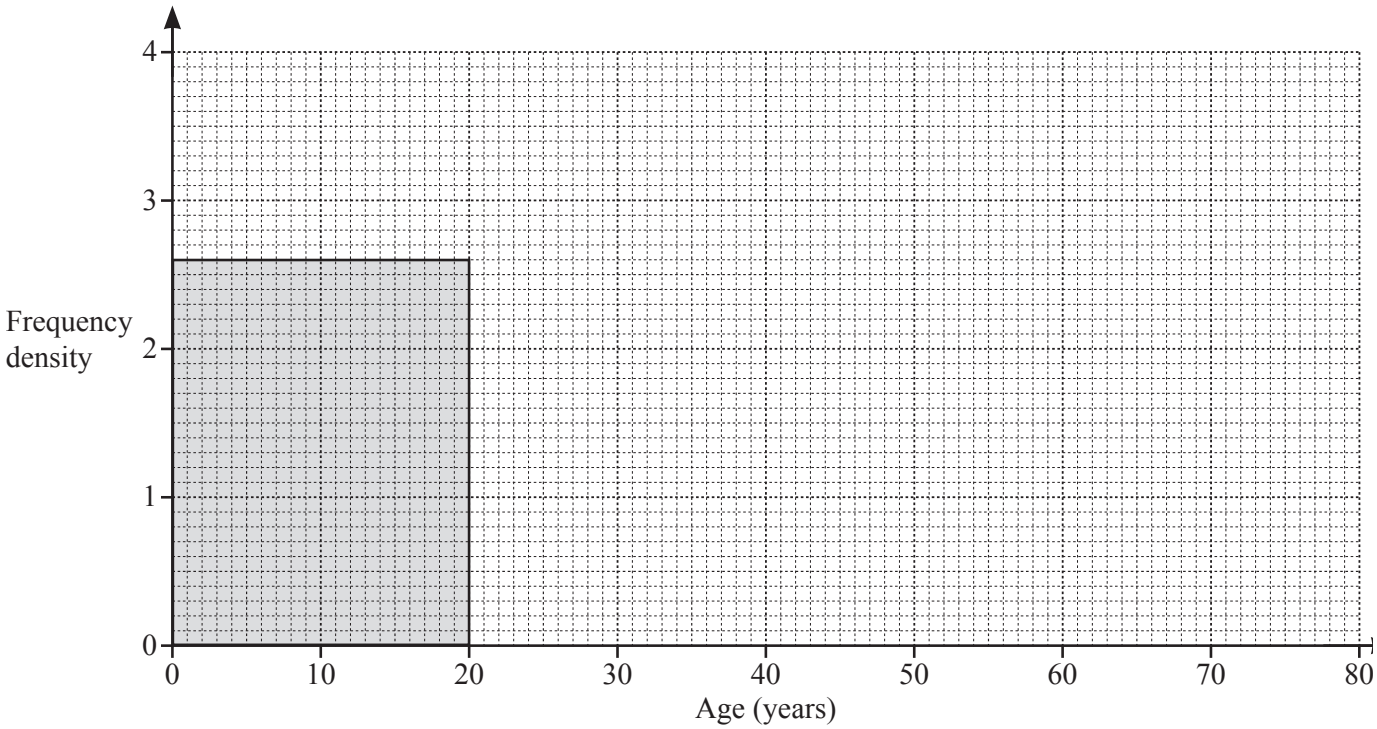
1. [2023 · May/June 0580/41 Q5(b)]

提示：看后三组的组界，分别求组距，再将频数除以组距。

(b) The frequency table shows information about the age of each person in another village.

Age (n years)	$0 < n \leqslant 20$	$20 < n \leqslant 30$	$30 < n \leqslant 50$	$50 < n \leqslant 80$
Frequency	52	37	24	60

On the grid, complete the histogram to show this information.
The first block has been drawn for you.



(b) 频数表给出了另一个村庄中每个人的年龄信息。n 表示年龄，单位为岁。

$0 < n \leq 20$：频数为 52；

$20 < n \leq 30$：频数为 37；

$30 < n \leq 50$：频数为 24；

$50 < n \leq 80$：频数为 60。

在方格纸上补全直方图，表示表中的信息。第一个矩形已画出。

图中横轴为年龄（岁），标有 0、10、20、30、40、50、60、70、80；纵轴为频数密度，标有 0、1、2、3、4。已画矩形从 0 岁延伸至 20 岁，高为 2.6。

✓ **答案** 后三个矩形的高依次为 3.7、1.2、2.0。

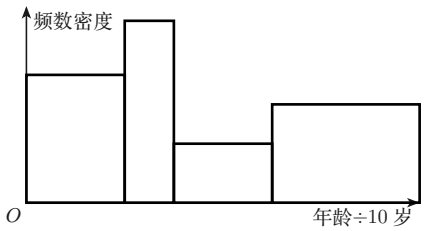
解析 由频数密度等于频数除以组距，得

$\frac{37}{30-20} = \frac{37}{10} = 3.7$。

$\frac{24}{50-30} = \frac{24}{20} = 1.2$。

$\frac{60}{80-50} = \frac{60}{30} = 2.0$。

答：在 $20 < n \leq 30$、$30 < n \leq 50$、$50 < n \leq 80$ 上，依次画高为 3.7、1.2、2.0 的相邻矩形。



2. [2023 · May/June 0580/43 Q6(b)(ii)]
提示：看第一组的频数、组距和已知柱高，求出统一换算比例。

(b) The frequency table shows information about the mass of each of 50 trucks.

Mass (m kg)	$2000 < m \leqslant 2600$	$2600 < m \leqslant 3500$	$3500 < m \leqslant 5000$	$5000 < m \leqslant 5700$
Frequency	12	15	16	7

(ii) In a histogram showing this information, the height of the first block is 6 cm.

Calculate the heights of the remaining three blocks.

Height of block for $2600 < m \leqslant 350$

Height of block for $3500 < m \leqslant 500$

Height of block for $5000 < m \leqslant 570$

(b) 频数表给出了 50 辆卡车中每辆卡车的质量信息。m 表示质量，单位为千克。

$2000 < m \leq 2600$：频数为 12；

$2600 < m \leq 3500$：频数为 15；

$3500 < m \leq 5000$：频数为 16；

$5000 < m \leq 5700$：频数为 7。

(ii) 在表示这些信息的直方图中，第一个矩形的高为 6 cm。计算其余三个矩形的高。

$2600 < m \leq 3500$ 对应矩形的高：_____ 厘米；

$3500 < m \leq 5000$ 对应矩形的高：_____ 厘米；

$5000 < m \leq 5700$ 对应矩形的高：_____ 厘米。

✓ **答案** 5 cm、3.2 cm、3 cm。

解析 第一组的频数密度为

$\frac{12}{2600-2000} = \frac{12}{600} = 0.02$。

柱高与频数密度成正比。柱高以厘米计，比例系数为

$k = \frac{6}{0.02} = 300$。

设后三柱的高依次为 h_2、h_3、h_4，单位为厘米，则

$h_2 = 300 \times \frac{15}{3500-2600} = 300 \times \frac{15}{900} = 5$。

$h_3 = 300 \times \frac{16}{5000-3500} = 300 \times \frac{16}{1500} = 3.2$。

$h_4 = 300 \times \frac{7}{5700-5000} = 300 \times \frac{7}{700} = 3$。

答：后三个矩形的高依次为 5 cm、3.2 cm、3 cm。

3. [2023 · October/November 0580/22 Q23]

提示：先比两组的频数密度，再按同一比例换算柱高。

Some students record their reaction times.
The table shows the results.

Reaction time (t seconds)	$0 < t \leqslant 6$	$6 < t \leqslant 10$
Frequency	18	16

On a histogram, the height of the block for the $0 < t \leqslant 6$ interval is 7.5 cm.

Calculate the height of the block for the $6 < t \leqslant 10$ interval.

一些学生记录了各自的反应时间。下表给出了结果，t 表示反应时间，单位为秒。
$0 < t \leq 6$：频数为 18；
$6 < t \leq 10$：频数为 16。
在直方图中，区间 $0 < t \leq 6$ 对应矩形的高为 7.5 cm。计算区间 $6 < t \leq 10$ 对应矩形的高。

✓ **答案**

10 cm

解析 两组的频数密度分别为
$\frac{18}{6-0} = \frac{18}{6} = 3$。
$\frac{16}{10-6} = \frac{16}{4} = 4$。
柱高与频数密度成正比。柱高以厘米计，比例系数为
$k = \frac{7.5}{3} = 2.5$。
设第二个矩形的高为 h 厘米，则
$h = 2.5 \times 4 = 10$。
答：$6 < t \leq 10$ 对应矩形的高为 10 cm。

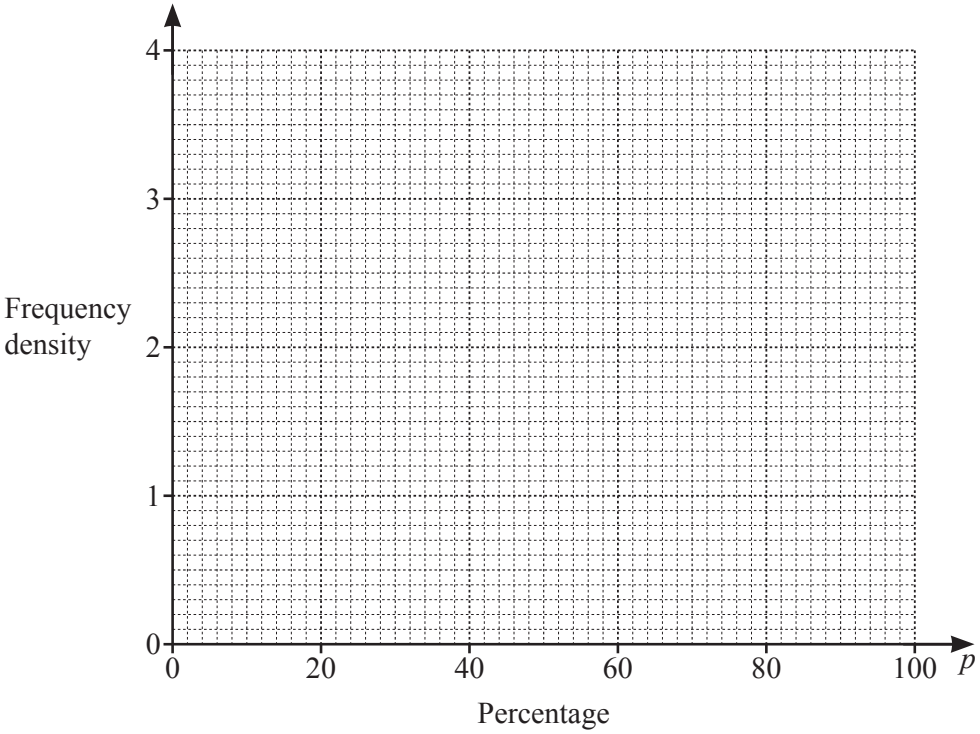
4. [2024 · February/March 0580/42 Q3(c)]

提示：先用各组的上组界减去下组界，求出组距。

(c) The table shows the percentage scored by each of 100 students in their final exam.

Percentage (p)	$0 < p \leqslant 30$	$30 < p \leqslant 50$	$50 < p \leqslant 60$	$60 < p \leqslant 70$	$70 < p \leqslant 100$
Frequency	12	18	35	20	15

On the grid, draw a histogram to show this information.



（c）下表给出了 100 名学生中每人在期末考试中的得分百分比。p 表示得分百分比。

$0 < p \leq 30$：频数为 12；

$30 < p \leq 50$：频数为 18；

$50 < p \leq 60$：频数为 35；

$60 < p \leq 70$：频数为 20；

$70 < p \leq 100$：频数为 15。

在方格纸上画直方图，表示这些信息。

横轴为得分百分比，变量为 p，标有 0、20、40、60、80、100；纵轴为频数密度，标有 0、1、2、3、4。

✓ **答案** 五个区间对应矩形的高依次为 0.4、0.9、3.5、2、0.5，各矩形以相应组界为左右边，相邻矩形相接。

解析 由频数密度等于频数除以组距，得

$\frac{12}{30-0} = \frac{12}{30} = 0.4$。

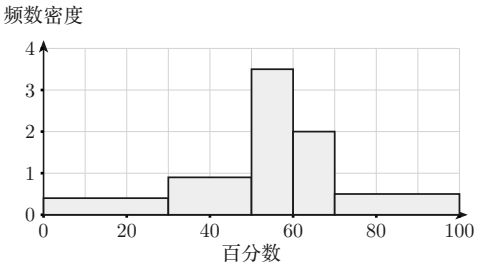
$\frac{18}{50-30} = \frac{18}{20} = 0.9$。

$\frac{35}{60-50} = \frac{35}{10} = 3.5$。

$\frac{20}{70-60} = \frac{20}{10} = 2$。

$\frac{15}{100-70} = \frac{15}{30} = 0.5$。

答：以横轴为底，在 0 至 30、30 至 50、50 至 60、60 至 70、70 至 100 上分别画高为 0.4、0.9、3.5、2、0.5 的矩形，相邻矩形相接。



5. [2024 · May/June 0580/41 Q4(b)(iii)]
提示：先求已知柱的频数密度，再求柱高与频数密度的比值。

(b) Matilda records the distances that 80 different cars can travel with a full tank of fuel.
The table shows this information.

Distance (d km)	$250 < d \leqslant 300$	$300 < d \leqslant 400$	$400 < d \leqslant 420$	$420 < d \leqslant 450$	$450 < d \leqslant 500$
Frequency	7	13	19	21	20

(iii) A histogram is drawn to show the information in the table.
The height of the bar for the interval $250 < d \leqslant 300$ is 2.8 cm.

Calculate the height of the bar for each of the following intervals.

$300 < d \leqslant 400$ cm

$400 < d \leqslant 420$ cm

$420 < d \leqslant 450$ cm

(b) 玛蒂尔达记录了 80 辆不同汽车加满一箱燃油后能够行驶的距离。下表给出了这些信息，d 表示距离，单位为千米。
$250 < d \leq 300$：频数为 7；
$300 < d \leq 400$：频数为 13；
$400 < d \leq 420$：频数为 19；
$420 < d \leq 450$：频数为 21；
$450 < d \leq 500$：频数为 20。
(iii) 用直方图表示表中的信息。区间 $250 < d \leq 300$ 对应矩形的高为 2.8 cm。
计算下列各区间对应矩形的高，单位为厘米。
$300 < d \leq 400$；
$400 < d \leq 420$；
$420 < d \leq 450$。

✓ **答案** 2.6 cm、19 cm、14 cm。

解析 区间 $250 < d \leq 300$ 的频数密度为
$\frac{7}{300-250} = \frac{7}{50} = 0.14$。
设柱高与频数密度的比值为 k，柱高以厘米计，得
$k = \frac{2.8}{0.14} = 20$。
其余三组的柱高分别为
$20 \times \frac{13}{400-300} = 20 \times 0.13 = 2.6$。
$20 \times \frac{19}{420-400} = 20 \times 0.95 = 19$。
$20 \times \frac{21}{450-420} = 20 \times 0.7 = 14$。
答：三个区间对应矩形的高依次为 2.6 cm、19 cm、14 cm。

9.13 按一对数据的横纵坐标读点或描点

题型 1 按一对数据的横纵坐标读点或描点（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **横纵对应：**植物图中，每株植物对应一个散点。横坐标表示浇水量，纵坐标表示高度。坐标写成横坐标在前、纵坐标在后的数对。

② **读取格值：**植物图两轴相邻标数都相差 5，中间分成 5 小格。每小格表示 _____ 个单位。

$$(10-5) \div 5 = 1$$

③ **半格定位：**植物图纵轴每小格表示 1 cm。半小格表示 _____ cm。

$$1 \div 2 = 0.5$$

④ **坐标描点：**浇水量为 60 ml、高度为 27 cm，对应点的坐标如下。在横坐标与纵坐标的交会处画_____。

$$(60, 27)$$

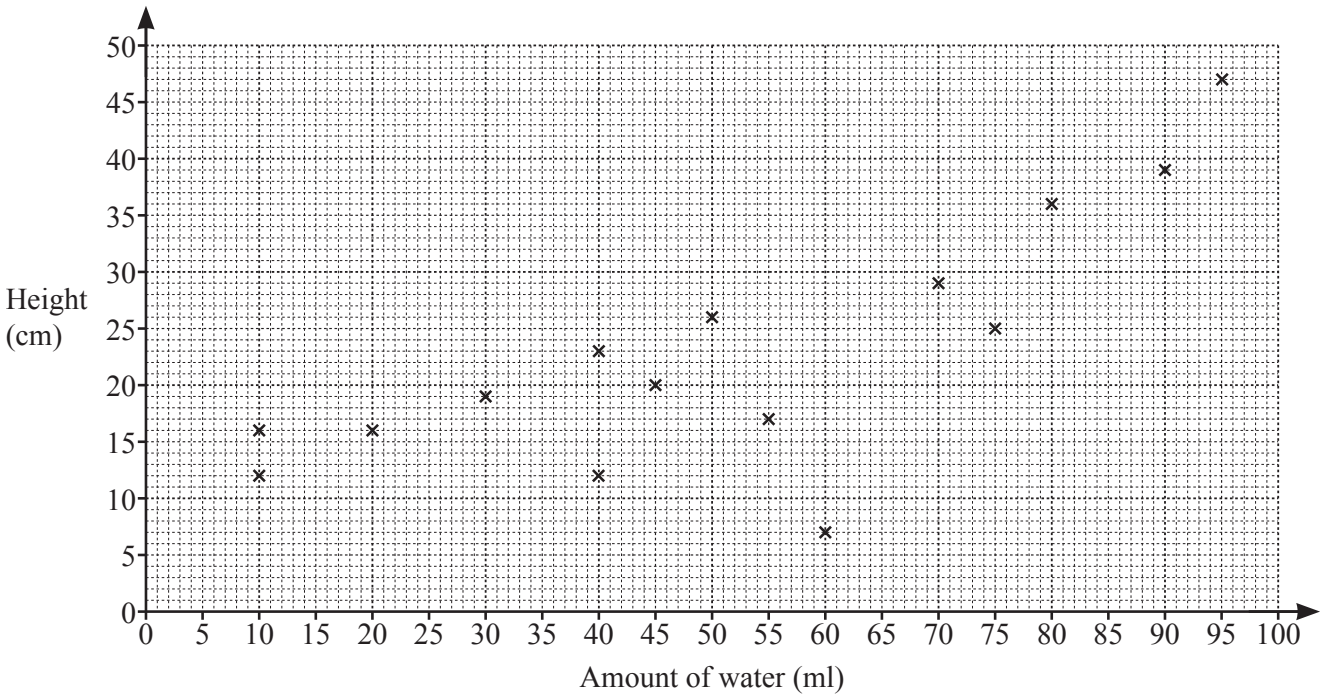
⑤ **按点读数：**在植物图横轴 50 ml 处向上找到已有散点。由该点向左对齐纵轴，读得高度为 _____ cm。

填空：①1　②0.5　③叉号　④26

点石成金　题目出现散点图，要求读数或描点时，先看横纵轴分别表示什么，再读出每小格表示的数值。

例 1　[2023 · May/June 0580/32 Q4(a)]

Fidel gives different amounts of water to some plants.
The scatter diagram shows the height (cm) and the amount of water (ml) for each of 15 plants.



(a) Plot these two results on the scatter diagram.

Amount of water (ml)	60	85
Height (cm)	27	41

菲德尔给一些植物浇不同量的水。散点图表示 15 株植物中每株的高度（cm）与浇水量（ml）。
横轴：浇水量（ml）；纵轴：高度（cm）。
(a) 在散点图上描出下表中的两组结果。

浇水量（ml）	60	85
高度（cm）	27	41

解答　横轴表示浇水量，纵轴表示高度，两组数据对应的坐标为

$$(60, 27)$$

$$(85, 41)$$

图中纵轴每小格表示 1 cm，由

$$27 = 25 + 2$$

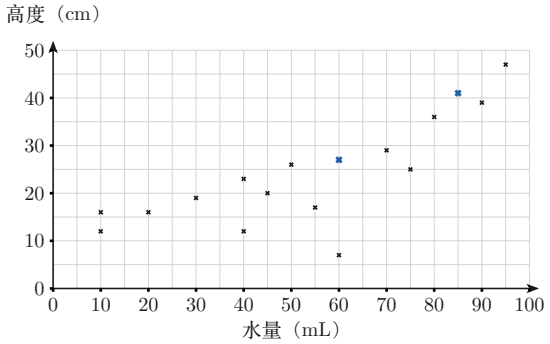
方法：先看两轴含义和每格数值，再找横纵坐标的交会处。

辨析：横坐标是数对的前一个数，纵坐标是后一个数。

$$41 = 40 + 1$$

在横坐标 60 处，取纵坐标 25 上方 2 小格的位置；在横坐标 85 处，取纵坐标 40 上方 1 小格的位置，各画一个叉号。

答：描出两点 $(60, 27)$、$(85, 41)$。

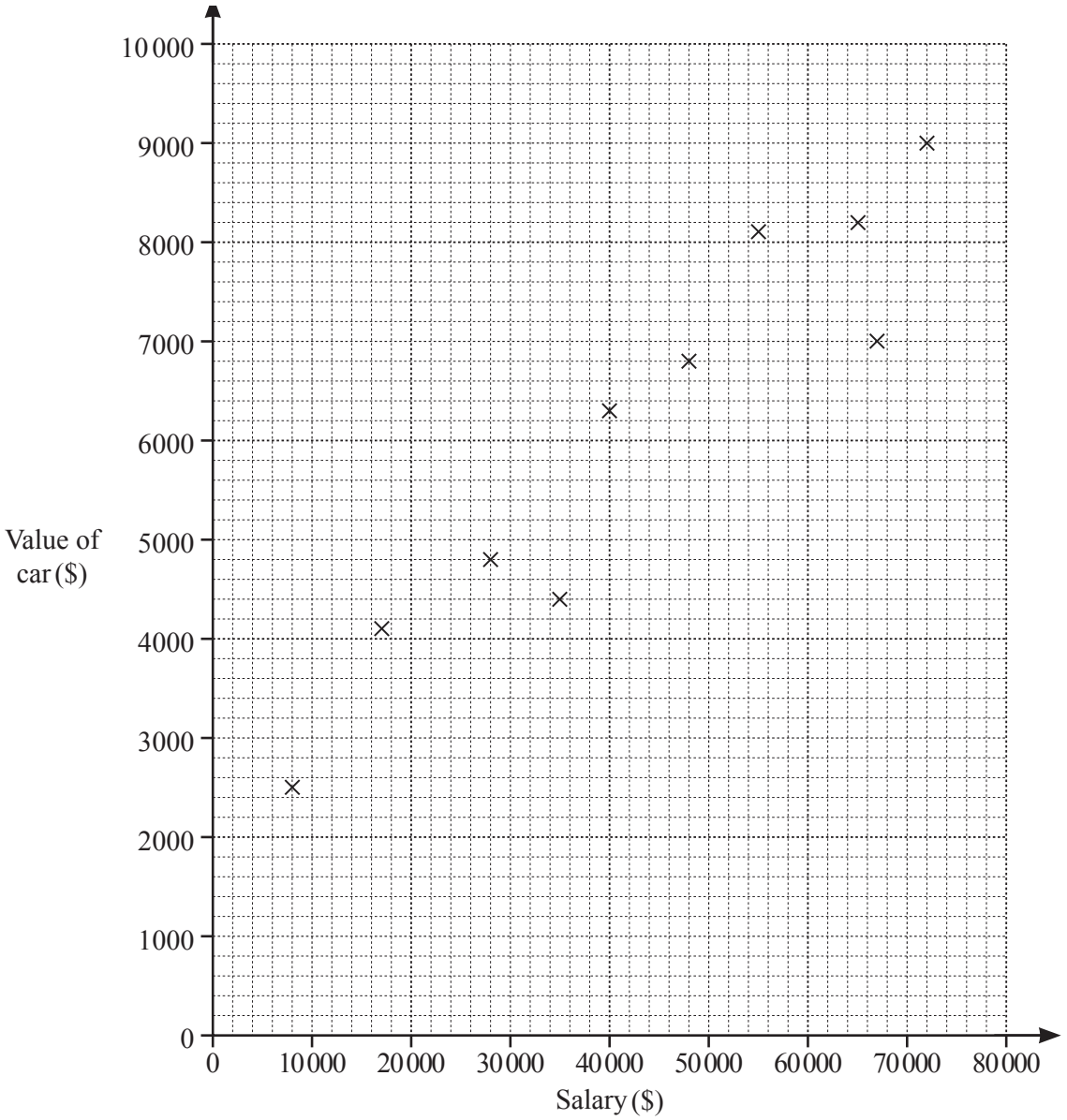


针对练习

1. [2023 · October/November 0580/11 Q13(b)]

提示：分别核算两轴每格数值，再比较所需位置与邻近刻度。

For each of 10 people working in an office, the scatter diagram shows their salary and the value of their car.



(b) Another person starts to work in the office.
Their salary is $54 000 and the value of their car is $6100.

Plot this information on the scatter diagram.

散点图表示在同一间办公室工作的 10 个人各自的薪水和汽车价值。
横轴：薪水（美元）；纵轴：汽车价值（美元）。
(b) 另一人开始在这间办公室工作。此人的薪水为 54000 美元，汽车价值为 6100 美元。
在散点图上描出这组数据。

✓ **答案** 在 $(54000, 6100)$ 处画一个叉号。

解析 横轴表示薪水，纵轴表示汽车价值，所描点的坐标为

$$(54000, 6100)$$

横轴每 10000 美元分成 5 小格，每小格表示

$$10000 \div 5 = 2000$$

由

$$(54000 - 50000) \div 2000 = 2$$

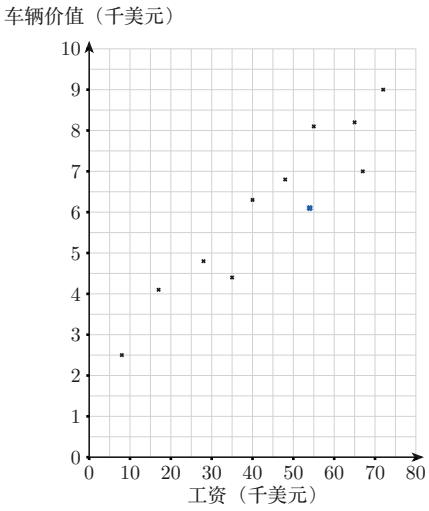
横坐标取 50000 右方 2 小格的位置。
纵轴每 1000 美元分成 5 小格，每小格表示

$$1000 \div 5 = 200$$

由

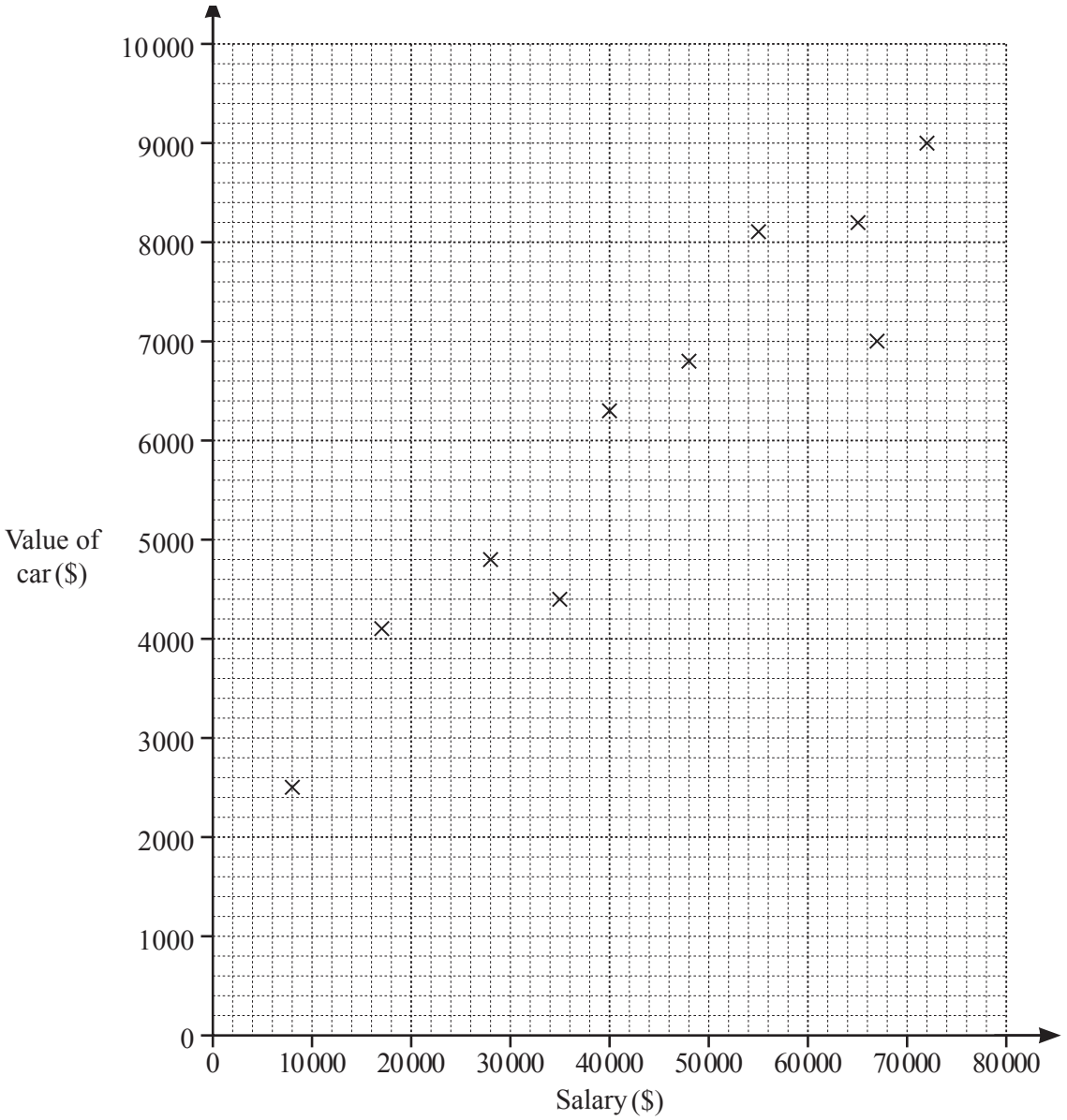
$$(6100 - 6000) \div 200 = 0.5$$

纵坐标取 6000 上方半小格的位置，在交会处画叉号。
答：描出点 $(54000, 6100)$。



2. [2023 · October/November 0580/11 Q13(a)]
提示：从给定薪水向上找点，比较点的高度与纵轴邻近刻度。

For each of 10 people working in an office, the scatter diagram shows their salary and the value of their car.



(a) One of these people has a salary of $28 000.

Find the value of their car.

散点图表示在同一间办公室工作的 10 个人各自的薪水和汽车价值。
横轴：薪水（美元）；纵轴：汽车价值（美元）。
(a) 其中一人的薪水为 28000 美元。
求此人的汽车价值。

✓ **答案** 4800 美元

解析 横轴表示薪水，在横坐标 28000 处向上找到已有散点。
纵轴表示汽车价值，每小格表示

$$1000 \div 5 = 200$$

该点位于纵坐标 5000 下方 1 小格处，汽车价值为

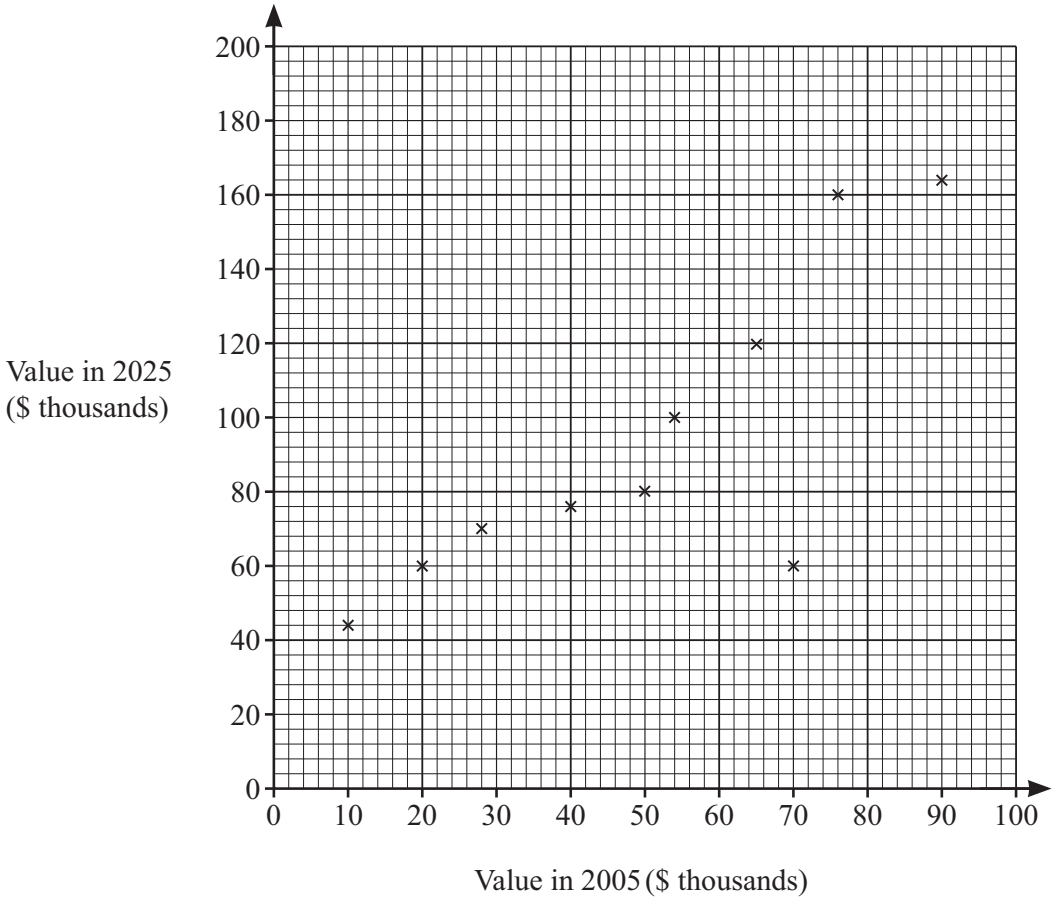
$$5000 - 200 = 4800$$

答：此人的汽车价值为 4800 美元。

3. [2025 · October/November 0580/23 Q6(b)]

提示：先把两项价值换成坐标轴所用的单位。

The scatter diagram shows the value, in thousands of dollars, of ten paintings in 2005 and the value of the same paintings in 2025.



(b) Another painting had a value of $75 000 in 2005 and $140 000 in 2025.

On the scatter diagram, plot this point.

散点图表示 10 幅画在 2005 年的价值，以及同一批画在 2025 年的价值，单位均为千美元。
横轴为 2005 年的价值（千美元），从 0 至 100，每隔 10 标一个数；纵轴为 2025 年的价值（千美元），从 0 至 200，每隔 20 标一个数。
(b) 另一幅画在 2005 年的价值为 75000 美元，在 2025 年的价值为 140000 美元。
在散点图上描出这个点。

✓ **答案** 在 $(75, 140)$ 处画一个叉号。

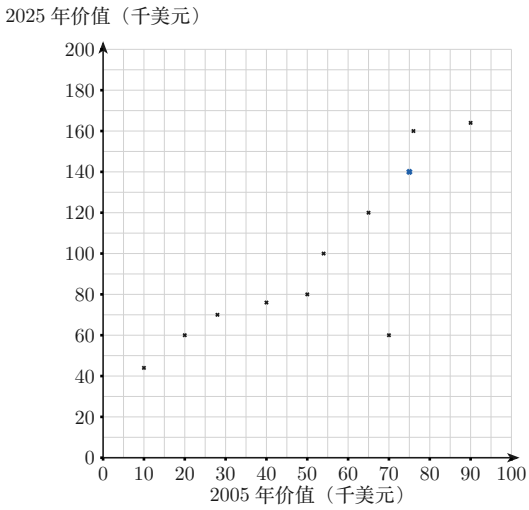
解析 两轴的单位均为千美元，将两项价值分别除以 1000，得

$\frac{75000}{1000} = 75$。

$\frac{140000}{1000} = 140$。

横轴表示 2005 年的价值，纵轴表示 2025 年的价值，故所描点的坐标为 $(75, 140)$。

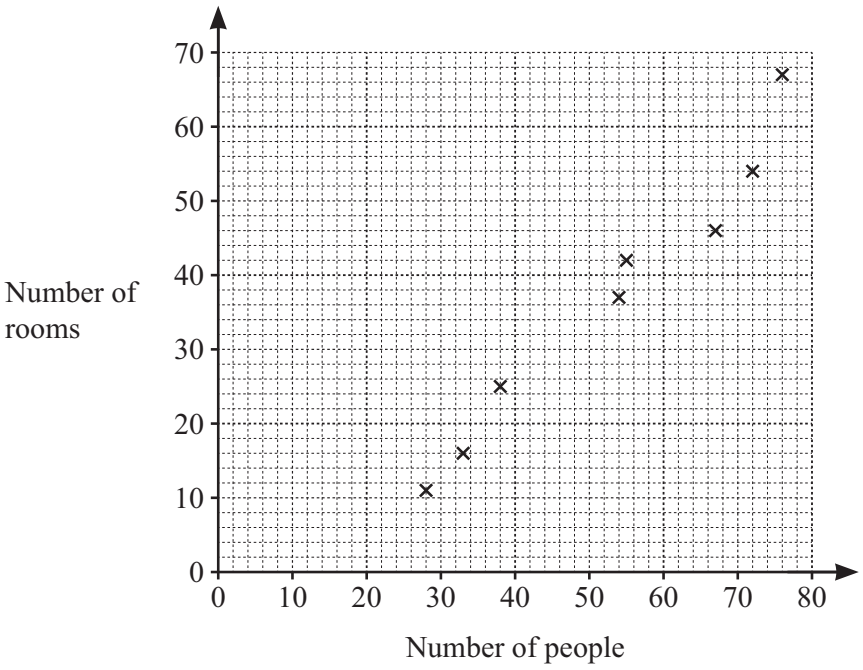
答：在横坐标 75 与纵坐标 140 的交会处画一个叉号。



4. [2024 · October/November 0580/12 Q13(a)]

提示：先在纵轴找到题目给出的房间数，再找对应散点。

The scatter diagram shows the number of rooms and the number of people in each of eight buildings.



(a) One of the buildings has 67 rooms.

Write down the number of people in this building.

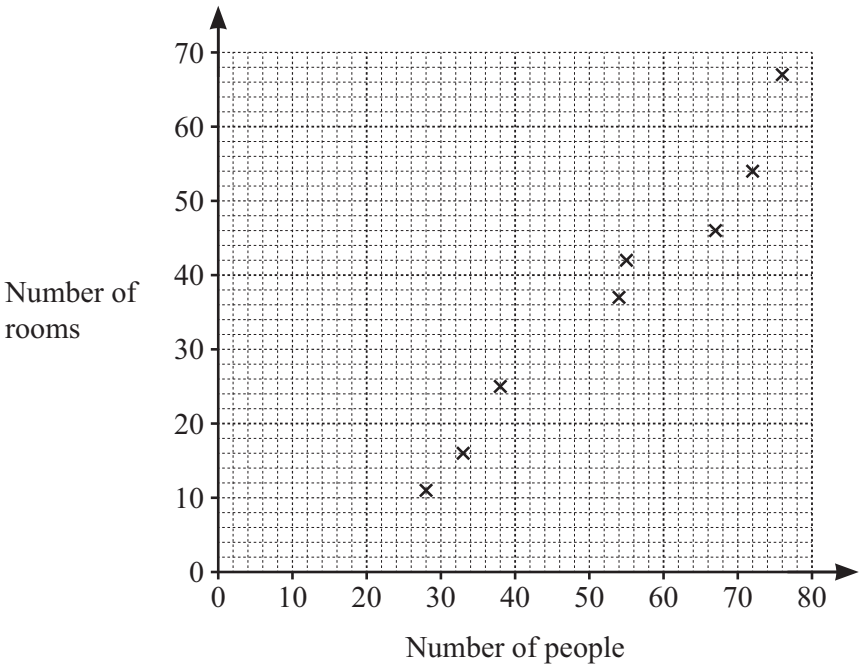
散点图表示 8 栋建筑中每栋建筑的房间数和人数。
横轴为人数，从 0 至 80，每隔 10 标一个数；纵轴为房间数，从 0 至 70，每隔 10 标一个数。
(a) 其中一栋建筑有 67 个房间。
写出这栋建筑中的人数。

✓ **答案** 76 人。

解析 纵轴表示房间数，横轴表示人数。找到纵坐标为 67 的散点，由该点向下对齐横轴，读得横坐标为 76。
答：这栋建筑中有 76 人。

5. [2024 · October/November 0580/22 Q4(b)]
提示：先按横轴和纵轴的含义，把人数与房间数写成数对。

The scatter diagram shows the number of rooms and the number of people in each of eight buildings.



(b) In another building there are 42 people and 33 rooms.

On the scatter diagram, plot this point.

散点图表示 8 栋建筑中每栋建筑的房间数和人数。
横轴为人数，从 0 至 80，每隔 10 标一个数；纵轴为房间数，从 0 至 70，每隔 10 标一个数。
(b) 另一栋建筑中有 42 人和 33 个房间。
在散点图上描出这个点。

✓ **答案** 在 $(42, 33)$ 处画一个叉号。

解析 横轴表示人数，纵轴表示房间数，故所描点的坐标为 $(42, 33)$。

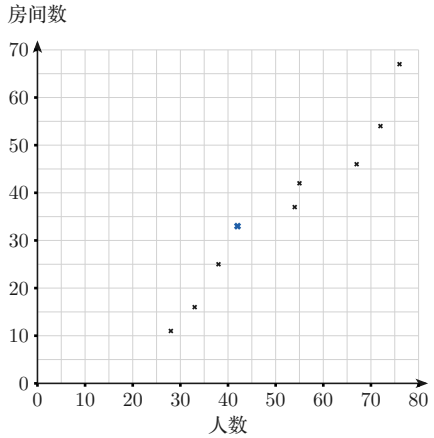
两轴每小格均表示 1 个单位，由

$42 = 40 + 2$。

$33 = 30 + 3$。

在横坐标 40 右方 2 小格、纵坐标 30 上方 3 小格的交会处画一个叉号。

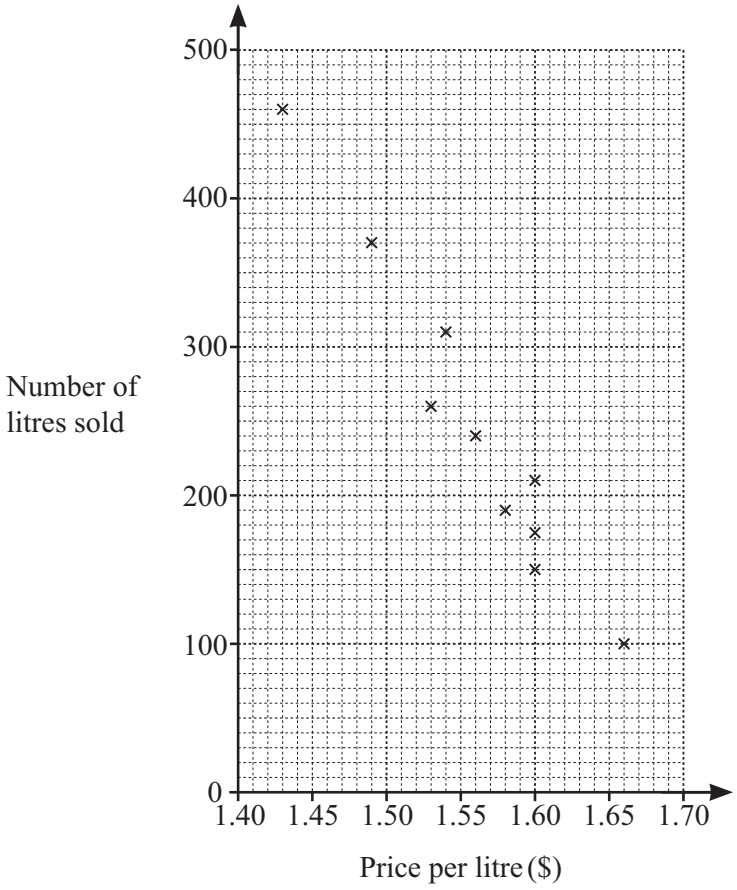
答：描出点 $(42, 33)$。



6. [2025 · May/June 0580/11 Q20(a)]

提示：先分别求出横轴、纵轴每小格表示的数值。

The scatter diagram shows the price of petrol per litre and the number of litres sold at a petrol station on each of ten days.



(a) These are the results for two more days.

Price per litre ($)	1.68	1.47
Number of litres sold	90	380

Plot this information on the scatter diagram.

散点图表示某加油站在 10 天中每天的汽油每升价格与售出升数。
横轴为每升价格（美元），标有 1.40、1.45、1.50、1.55、1.60、1.65、1.70；纵轴为售出升数，标有 0、100、200、300、400、500。
(a) 下表给出了另外两天的结果。

每升价格（美元）	1.68	1.47
售出升数	90	380

在散点图上描出这两组数据。

✓ **答案** 在 $(1.68, 90)$ 和 $(1.47, 380)$ 处各画一个叉号。

解析 横轴表示每升价格，纵轴表示售出升数，两组数据对应的坐标为 $(1.68, 90)$。

$(1.47, 380)$。

横轴相邻标数间分成 5 小格，每小格表示的价格为 $\frac{1.45-1.40}{5}=0.01$。

纵轴相邻标数间分成 10 小格，每小格表示的升数为

$\frac{100-0}{10}=10$。

由

$1.68=1.65+3\times0.01$。

$90=100-1\times10$。

在横坐标 1.65 右方 3 小格、纵坐标 100 下方 1 小格的交会处画一个叉号。

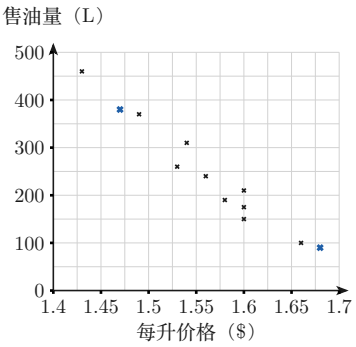
又由

$1.47=1.45+2\times0.01$。

$380=400-2\times10$。

在横坐标 1.45 右方 2 小格、纵坐标 400 下方 2 小格的交会处画一个叉号。

答：描出两点 $(1.68,90)$、$(1.47,380)$。



9.14 看点云整体走向，判断相关性和异常点

题型 1 看点云整体走向，判断相关性和异常点（Core）

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **坐标对应：**购物图的横轴表示停留时间，单位为分钟。纵轴表示购买件数，每个点对应一组记录。

② **趋势分类：**沿横轴从左向右观察，按大多数点的走向判断相关性。购物图的点云总体向右上方延伸，对应表中第一种情形。

点云整体走向	横坐标增大时的变化	相关类型
左下至右上	纵坐标总体增大	_____
左上至右下	纵坐标总体减小	_____
没有明显走向	纵坐标没有明显的增减趋势	_____

③ **文字判别：**题干用文字给出关系时，比较两个量的通常变化。

一个量增大，另一个量通常减小 $\xrightarrow{\text{比较增减方向}}$ 负相关

一个量增大，另一个量没有明显变化趋势 $\xrightarrow{\text{判断有无趋势}}$ 无相关

④ **关系表述：**把横、纵轴名称代入点云的变化方向。购物图总体向右上方延伸，说明停留时间越长，购买件数通常越多。

⑤ **局部起伏：**购物图中，约 45 分钟可买 9 件，约 60 分钟可买 7 件。个别点的下降不改变整体上升的判断。

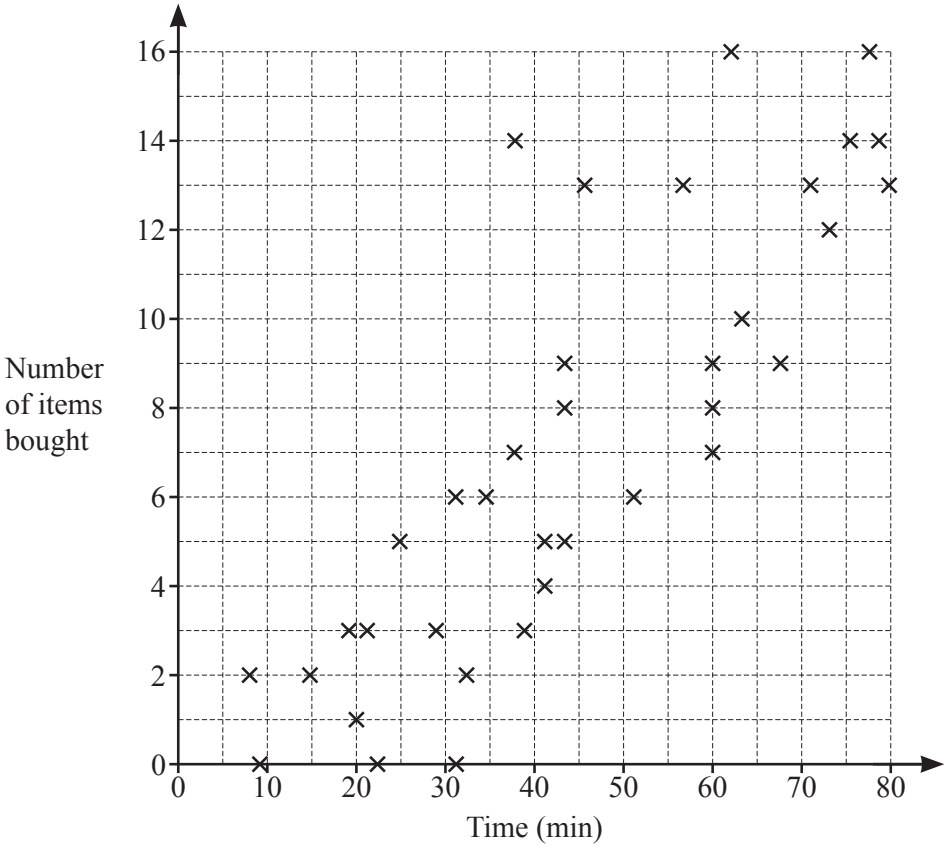
⑥ **异常识别：**先确认大多数点的走向，再比较偏离趋势的点。购物图中，约 38 分钟、购买 14 件的点明显偏高，属于_____。需要圈点时，圈出明显偏离整体趋势的散点。

填空：①正相关　②负相关　③无相关　④异常点

点石成金　题目出现散点图，要求判断相关性、描述关系或圈出异常点时，先沿横轴从左向右观察大多数点的整体走向。

例 1　[2023 · May/June 0580/13 Q14(a)]

The scatter diagram shows information about the time spent in a shop and the number of items bought.



(a) What type of correlation is shown on the scatter diagram?

散点图给出了在一家商店内停留的时间与购买件数的信息。
图中横轴：时间（分钟）；纵轴：购买件数。
(a) 该散点图呈现哪一种相关性？

解答　沿横轴从左向右观察，散点总体由左下向右上分布，购买件数随停留时间增加而总体增多。
答：正相关。

方法：先认横纵轴的量，再顺着横轴看多数点往哪边聚。

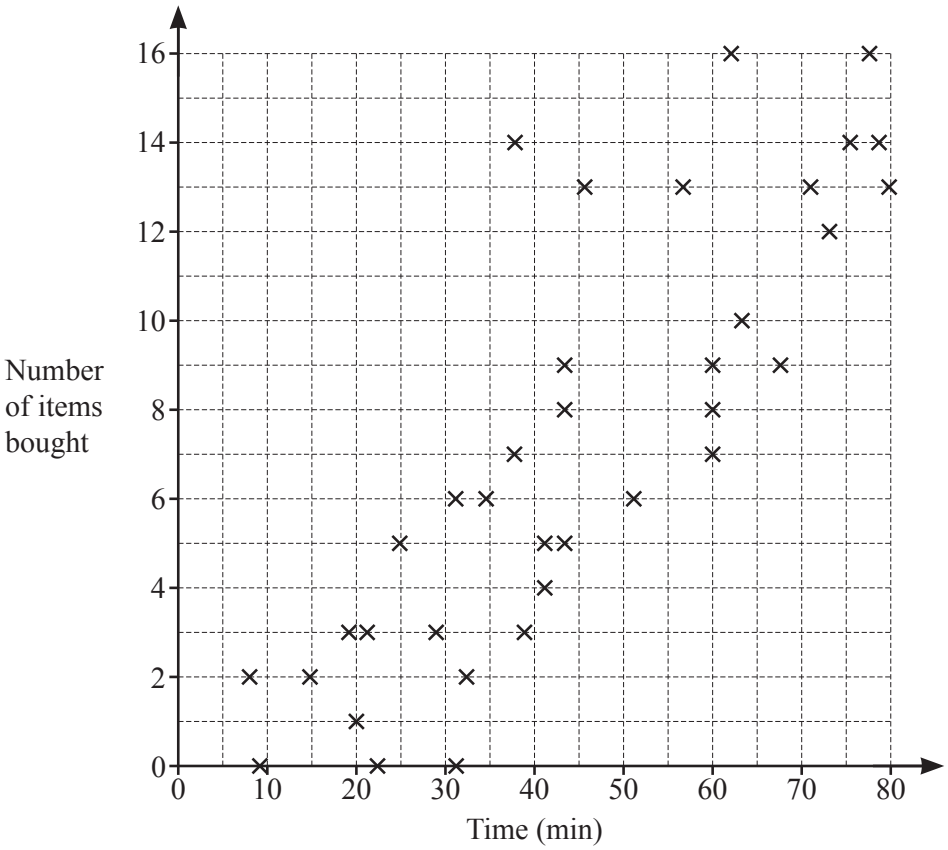
! 辨析：整体趋势是多数点的走向，局部下降是少数记录的起伏。

针对练习

1. [2023 · May/June 0580/13 Q14(b)]

提示：看两轴名称，把多数点的走向写成两个量的关系。

The scatter diagram shows information about the time spent in a shop and the number of items bought.



(b) Describe the relationship between the time spent in the shop and the number of items bought.

散点图给出了在一家商店内停留的时间与购买件数的信息。
图中横轴：时间（分钟）；纵轴：购买件数。
(b) 描述在商店内停留的时间与购买件数之间的关系。

✓ **答案** 在商店内停留的时间越长，购买件数通常越多。

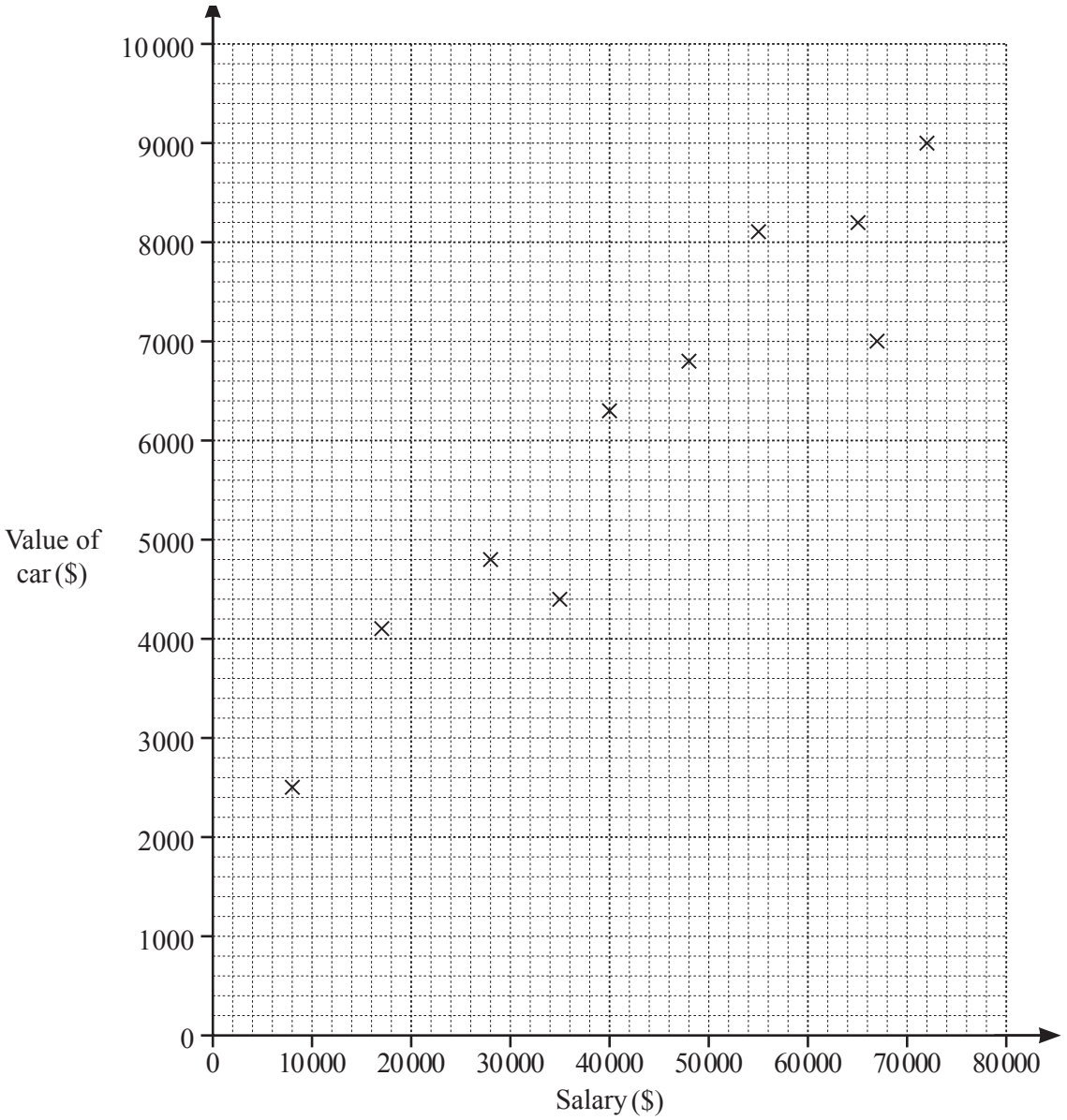
解析 横轴表示停留时间，纵轴表示购买件数，点云总体由左下向右上延伸。

答：在商店内停留的时间越长，购买件数通常越多。

2. [2023 · October/November 0580/11 Q13(c)]

提示：看工资增大时，汽车价值总体怎样变化。

For each of 10 people working in an office, the scatter diagram shows their salary and the value of their car.



(c) What type of correlation is shown in the scatter diagram?

散点图给出了在同一间办公室工作的 10 个人各自的工资与汽车价值。
图中横轴：工资（美元）；纵轴：汽车价值（美元）。
(c) 该散点图呈现哪一种相关性？

✓ **答案** 正相关

解析 随着工资增加，汽车价值总体增加，散点总体由左下向右上分布。

答：正相关。

3. [2023 · October/November 0580/12 Q14(b)]

提示：比较不同身高对应的汽车价值，看有无一致走向。

(b) Write down the type of correlation there is between the height of a driver and the value of their car.

(b) 写出驾驶员的身高与其汽车价值之间的相关类型。

✓ **答案** 无相关

解析 驾驶员的身高增加时，其汽车价值没有通常随之增加或减少的关系。

答：无相关。

4. [2023 · October/November 0580/12 Q14(a)]
提示：比较车龄与售价的增减方向是否一致。

(a) As the age of a car increases, the selling price decreases.

What type of correlation is this?

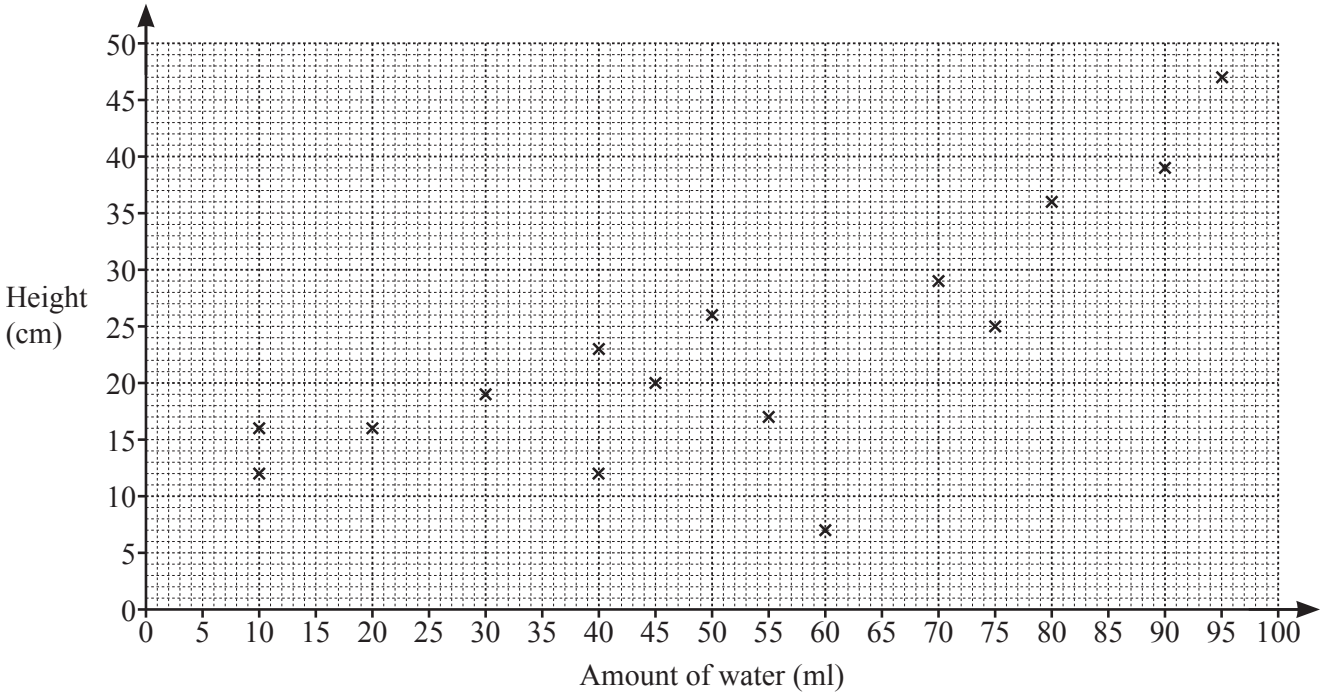
(a) 随着一辆汽车的车龄增加，它的售价降低。
这属于哪一种相关性?

✓ **答案** 负相关

解析 车龄增加时，售价降低，两个量的变化方向相反。
答：负相关。

5. [2023 · May/June 0580/32 Q4(b)]
提示：沿给水量增大的方向，看多数高度记录的走向。

Fidel gives different amounts of water to some plants.
The scatter diagram shows the height (cm) and the amount of water (ml) for each of 15 plants.



(b) What type of correlation is shown in the scatter diagram?

菲德尔给一些植物浇了不同量的水。散点图给出了 15 株植物中每株的高度（厘米）与给水量（毫升）。
图中横轴：给水量（毫升）；纵轴：高度（厘米）。
(b) 该散点图呈现哪一种相关性?

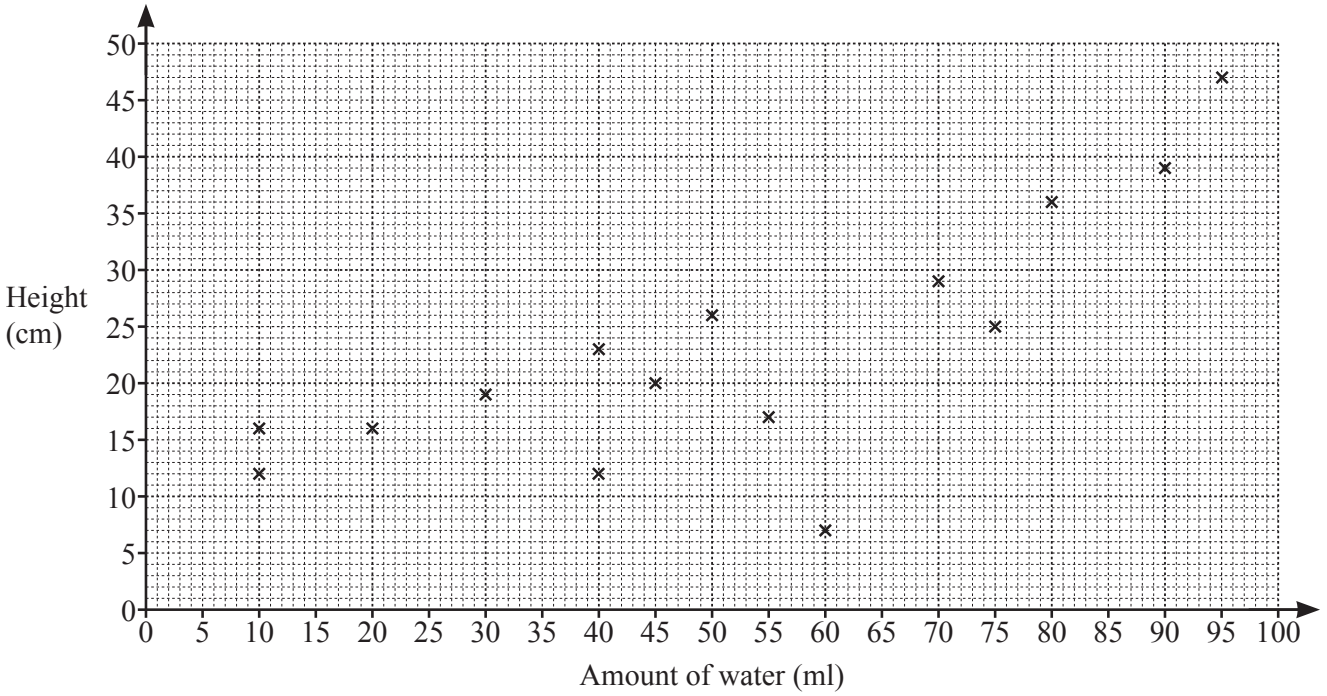
✓ **答案** 正相关

解析 沿横轴从左向右观察，大多数散点总体向右上方延伸，植物高度随给水量增加而总体升高。
答：正相关。

6. [2023 · May/June 0580/32 Q4(c)]

提示：先看多数点形成的趋势，再找偏离较远的点。

Fidel gives different amounts of water to some plants.
The scatter diagram shows the height (cm) and the amount of water (ml) for each of 15 plants.



(c) One of the plants had a lower height than expected for the amount of water given.

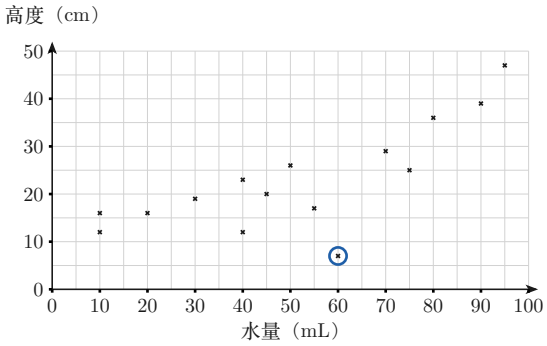
On the scatter diagram, put a ring around the point for this plant.

菲德尔给一些植物浇了不同量的水。散点图给出了 15 株植物中每株的高度（厘米）与给水量（毫升）。
图中横轴：给水量（毫升）；纵轴：高度（厘米）。
(c) 其中一株植物的高度低于按其给水量预期的高度。
在散点图上，用圆圈圈出代表这株植物的点。

✓ **答案** 圈出点 (60, 7)。

解析 大多数点表明，给水量越多，植物通常越高。给水量为 60 ml、高度为 7 cm 的点明显偏低，远离整体上升的趋势。

答：圈出点 (60, 7)。



7. [2024 · February/March 0580/22 Q7]
提示：比较气温与游泳人数的增减方向。

As the temperature increases, the number of people who go swimming increases.

Write down the type of correlation that this statement describes.

随着气温升高，去游泳的人数增加。
写出这段话所描述的相关类型。

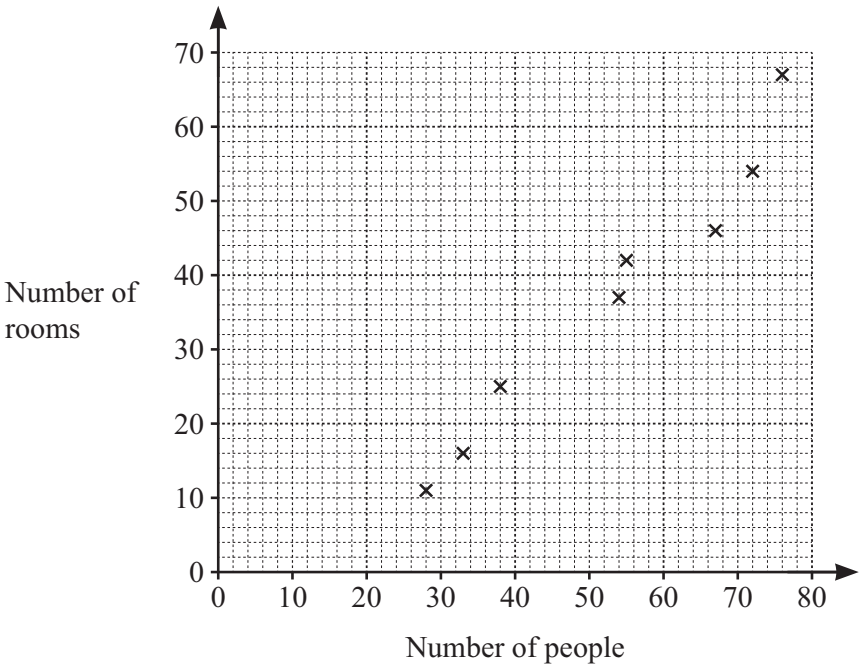
✓ **答案** 正相关

解析 气温升高时，去游泳的人数增加，两个量的变化方向相同。

答：正相关。

8. [2024 · October/November 0580/22 Q4(d)]
提示：沿人数增加的方向观察多数散点的走向。

The scatter diagram shows the number of rooms and the number of people in each of eight buildings.



(d) What type of correlation is shown in the scatter diagram?

散点图给出了八幢建筑中每幢的房间数与人数。
图中横轴：人数；纵轴：房间数。
(d) 该散点图呈现哪一种相关性？

✓ **答案** 正相关

解析 沿横轴从左向右观察，散点总体由左下向右上分布。人数越多，房间数通常越多。

答：正相关。

9.15 画过点云中心的拟合直线，再沿线估值

题型 1 画过点云中心的拟合直线，再沿线估值（Core）

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **散点坐标含义：** 图中每个点表示一株植物，共有 15 个点。横坐标表示浇水量，纵坐标表示植物高度。

② **坐标刻度读取：** 读坐标前，先看两轴相邻标数的差。
植物图：横轴相邻标数相差 5 ml，纵轴相差 5 cm。 | 购物图：横轴相邻标数相差 10 min，纵轴相差 2 件。

③ **异常散点处理：**点 $(60,7)$ 表示浇水 60 ml、高度 7 cm。该点远离其余散点的上升趋势，是异常点。画线时依据其余散点，避免直线被该点拉低。

④ **拟合直线画法：**其余散点从左下向右上分布。用直尺画一条拟合直线，穿过点云的 _____。直线两侧的散点数量应大致 _____。

⑤ **直线位置示范：**本图可画约经过以下两个位置的直线。

$$(10,12),\quad (90,38)$$

连接这两个位置，并沿散点趋势延长。

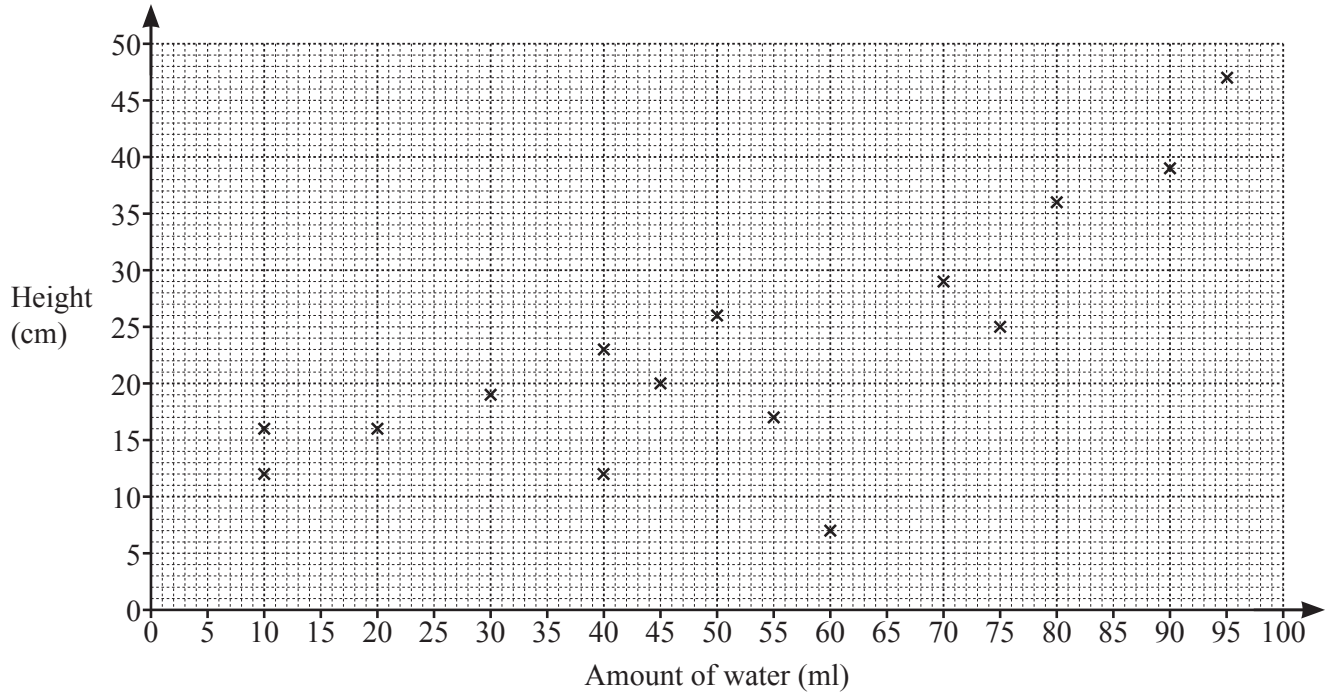
⑥ **沿线读取估值：**从横轴 65 ml 处 _____ 移至拟合线。再 _____ 移至纵轴，读得高度约 30 cm。

填空：①中心　②均衡　③竖直向上　④水平向左

点石成金　题目出现散点图，要求画拟合直线或估值时，先看散点趋势，排除异常点的牵引，再画线读数。

例 1　[2023 · May/June 0580/32 Q4(d)(ii)]

Fidel gives different amounts of water to some plants.
The scatter diagram shows the height (cm) and the amount of water (ml) for each of 15 plants.



(a) Plot these two results on the scatter diagram.

Amount of water (ml)	60	85
Height (cm)	27	41

(d) (i) On the scatter diagram, draw a line of best fit.

(ii) Another plant is given 65 ml of water.

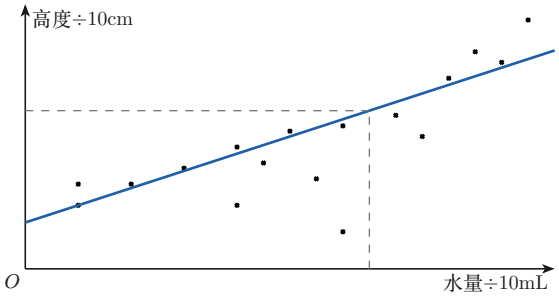
Use your line of best fit to estimate the height of this plant.

Fidel 给植物浇不同水量，散点图给出 15 株植物的水量（mL）与高度（cm）。（a）另外两株植物的数据分别为水量 60mL、高度 27cm，以及水量 85mL、高度 41cm。在散点图上画出这两个点。（d）（i）在散点图上画一条拟合直线。（ii）另一株植物浇 65mL 水，用拟合直线估计其高度。

解答 图中 $(60,7)$ 为异常点，依据其余散点画拟合直线。
可取约经过 $(10,12)$ 与 $(90,38)$ 的直线。
从横轴 65 ml 处竖直向上移至直线，再水平向左移至纵轴，读得高度约为 30 cm。
答：这株植物的高度约为 30 cm。

方法：先看两轴刻度和散点走向，从其余点云中部起笔画线。

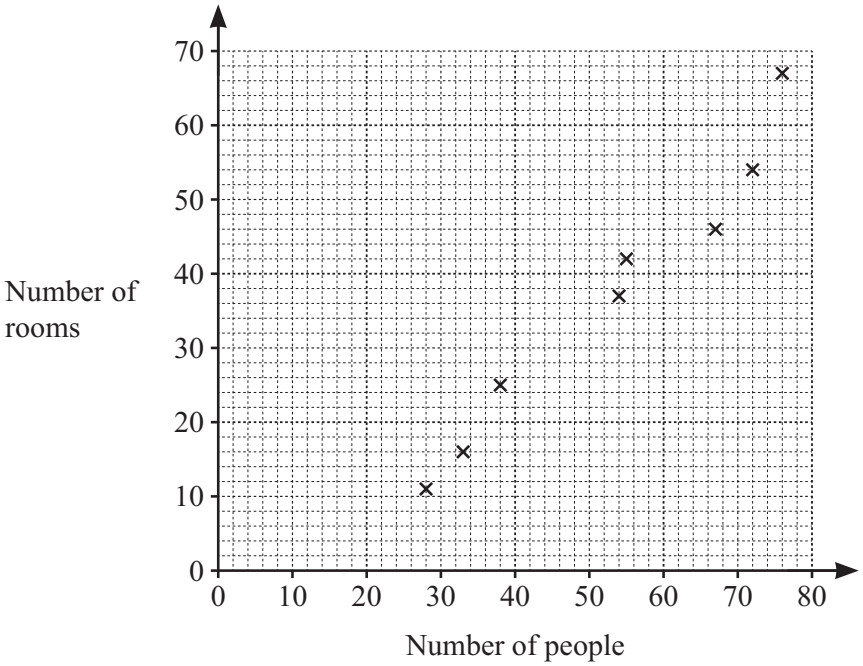
辨析：散点是单株植物的实测记录，拟合线是整体趋势的近似表示。



针对练习

1. [2024 · October/November 0580/22 Q4(c)(ii)]
提示：从横轴表示 45 人的位置向上移至所画拟合直线。

The scatter diagram shows the number of rooms and the number of people in each of eight buildings.



(c) (i) On the scatter diagram, draw a line of best fit.

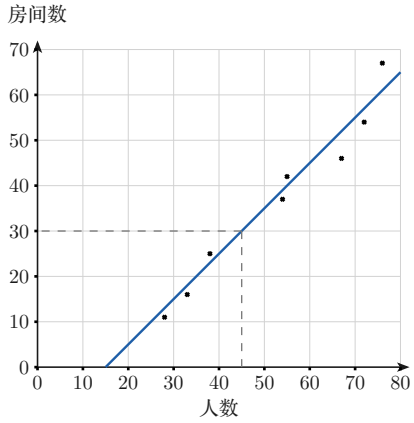
(ii) There are 45 people in a different building.

Find an estimate for the number of rooms in this building.

散点图给出了八幢建筑中每幢的房间数与人数。
图中横轴：人数；纵轴：房间数。
(c) (i) 在散点图上画一条拟合直线。
(ii) 另一幢建筑中有 45 人。
估计这幢建筑的房间数。

✓ **答案** 约 30 间

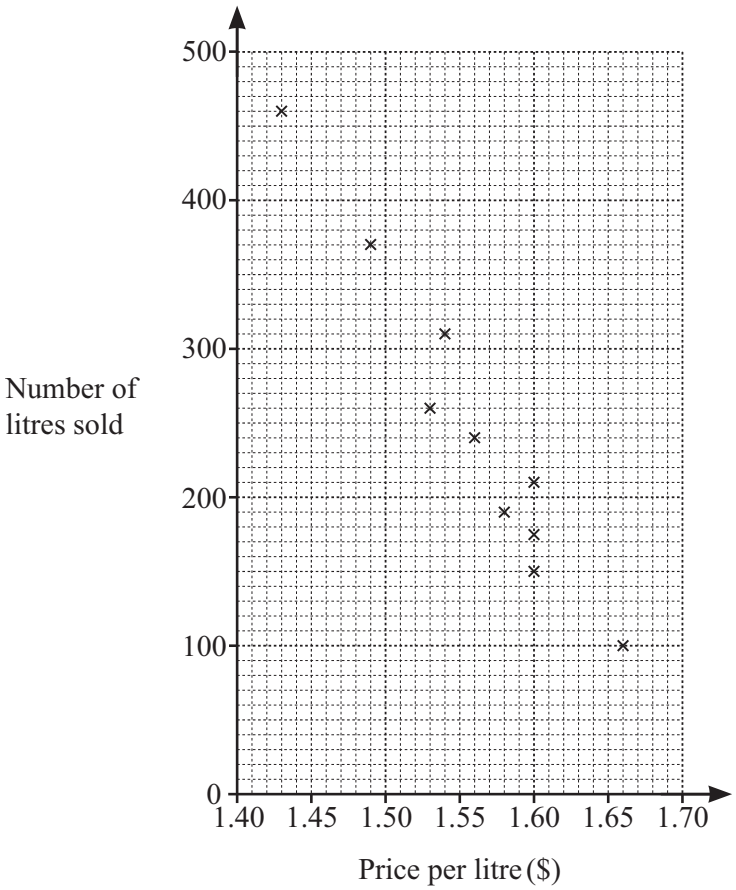
解析 用直尺画一条穿过点云中部的拟合直线，使两侧散点数大致相等。
可取约经过 $(30,14)$ 与 $(70,56)$ 的直线。
从横轴 45 处竖直向上移至拟合直线，再水平向左移至纵轴，读得房间数约为 30。
答：约 30 间。



2. [2025 · May/June 0580/11 Q20(c)(i)]

⟵ 提示：沿点云的整体走向确定直线，使两侧散点数大致相等。

The scatter diagram shows the price of petrol per litre and the number of litres sold at a petrol station on each of ten days.



(a) These are the results for two more days.

Price per litre ($)	1.68	1.47
Number of litres sold	90	380

Plot this information on the scatter diagram.

(c) **(i)** On the scatter diagram, draw a line of best fit.

散点图给出了某加油站在十天中每天的每升汽油价格与售出汽油的升数。
图中横轴：每升汽油的价格（美元）；纵轴：售出汽油的升数。
(a) 另外两天的数据如下。

每升汽油的价格（美元）	1.68	1.47
售出汽油的升数	90	380

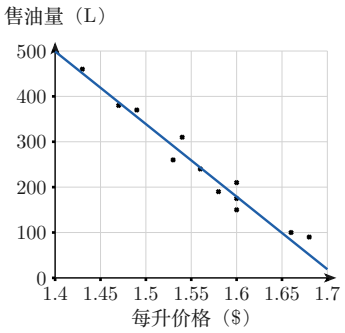
在散点图上画出这两组数据所对应的点。
(c) (i) 在散点图上画一条拟合直线。

✓ **答案** 用直尺画一条约经过 $(1.40, 490)$ 与 $(1.70, 40)$ 的直线。

解析 依据原有散点及表中两天的数据，点云总体由左上向右下分布。
用直尺画一条穿过点云中部的下降直线，使两侧散点数大致相等。
该直线可取约经过以下两个位置：

$$(1.40, 490), \quad (1.70, 40)$$

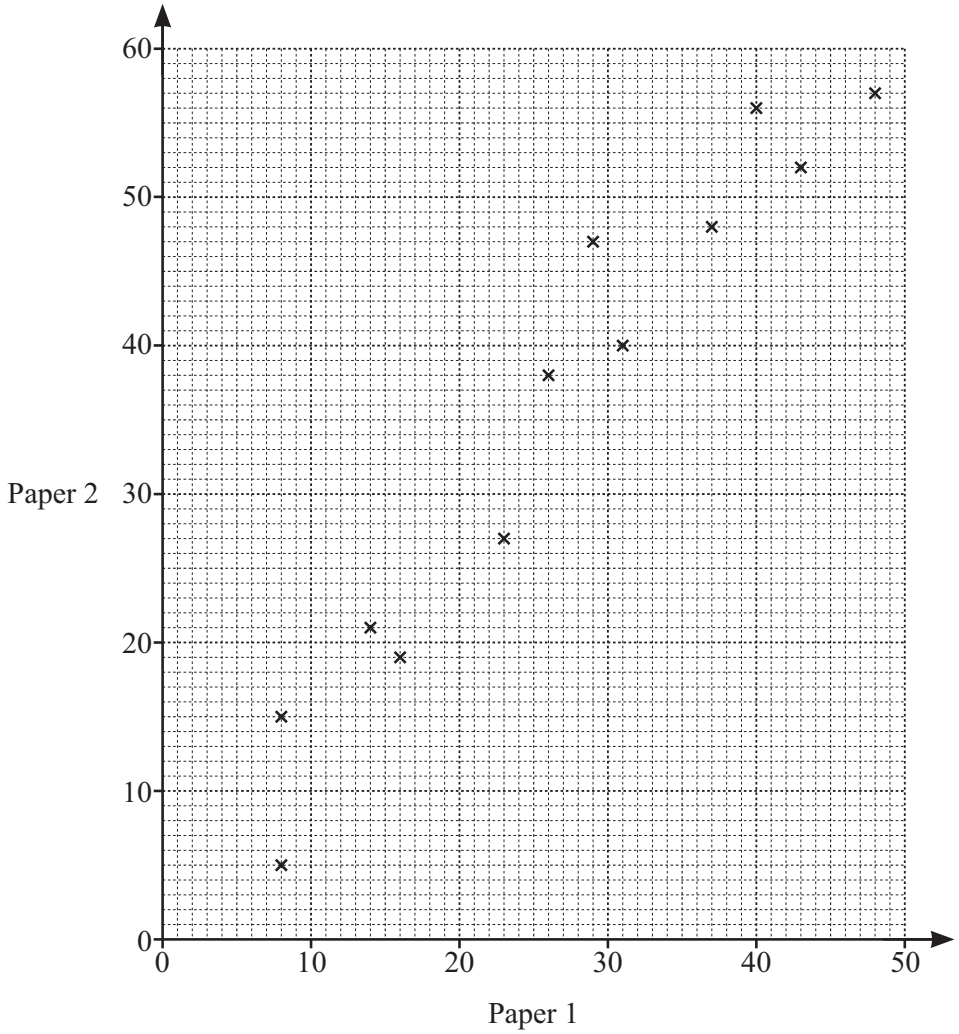
答：连接上述两个位置，画出拟合直线。



3. [2025 · October/November 0580/32 Q18(c)]

提示：在横轴找到试卷一得 35 分的位置，再沿拟合直线读取估值。

A school records the marks students score in Paper 1 and Paper 2 of a subject.
The scatter diagram shows the scores for twelve students.



(b) On the scatter diagram, draw a line of best fit.

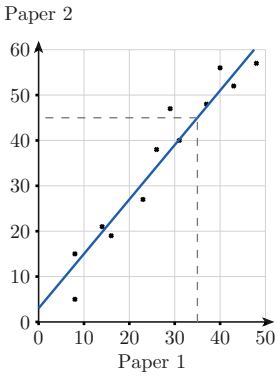
(c) Another student scores 35 on Paper 1.

Use your line of best fit to find an estimate for their score on Paper 2.

某学校记录学生在某一科目的试卷一和试卷二中的得分。散点图给出了十二名学生的得分。
图中横轴：试卷一得分；纵轴：试卷二得分。
(b) 在散点图上画一条拟合直线。
(c) 另一名学生在试卷一中得 35 分。
利用所画的拟合直线，估计这名学生在试卷二中的得分。

✓ **答案** 约 45 分

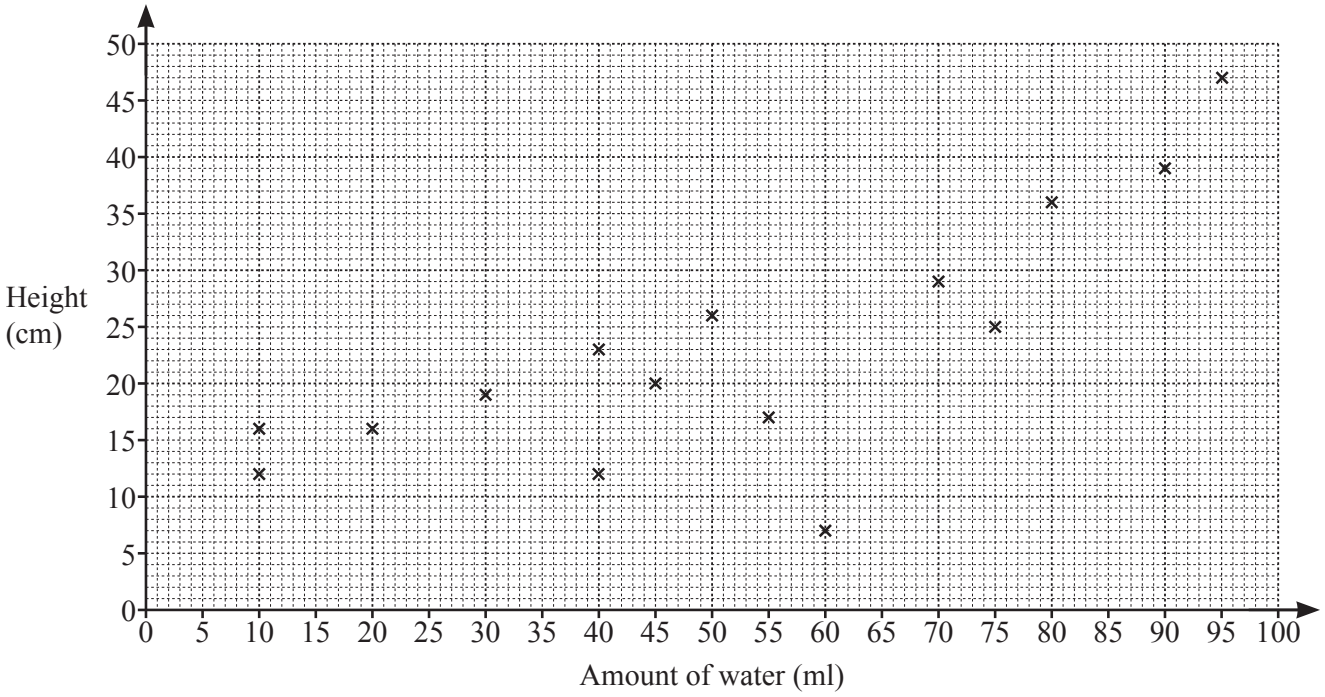
解析 散点总体由左下向右上分布，用直尺画一条穿过点云中部的拟合直线，使两侧散点数大致相等。
可取约经过 $(10, 15)$ 与 $(40, 51)$ 的直线。
从横轴 35 处竖直向上移至拟合直线，再水平向左移至纵轴，读得试卷二的得分约为 45 分。
答：约 45 分。



4. [2023 · May/June 0580/32 Q4(d)(i)]

提示：先找偏离上升趋势的点，再比较其余点在线两侧的数量。

Fidel gives different amounts of water to some plants.
The scatter diagram shows the height (cm) and the amount of water (ml) for each of 15 plants.



(a) Plot these two results on the scatter diagram.

Amount of water (ml)	60	85
Height (cm)	27	41

(d) (i) On the scatter diagram, draw a line of best fit.

Fidel 给植物浇不同水量，散点图给出 15 株植物的水量（mL）与高度（cm）。（a）另外两株植物的数据分别为水量 60mL、高度 27cm，以及水量 85mL、高度 41cm。在散点图上画出这两个点。（d）（i）在散点图上画一条拟合直线。

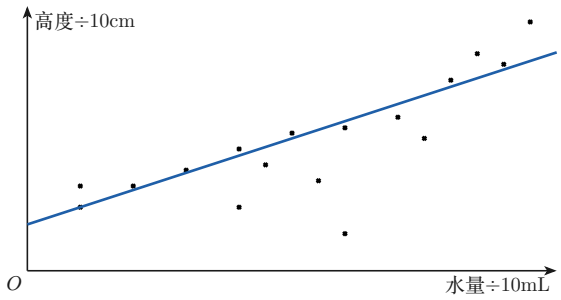
✓ **答案** 用直尺画一条约经过 $(10, 12)$ 与 $(90, 38)$ 的直线。

解析 除 $(60, 7)$ 外，其余散点大致从左下向右上分布。

依据这些散点的中心趋势，用直尺画约经过 $(10, 12)$ 与 $(90, 38)$ 的直线，并延长至图示水量范围。

直线穿过点云中部，两侧散点数量大致均衡。

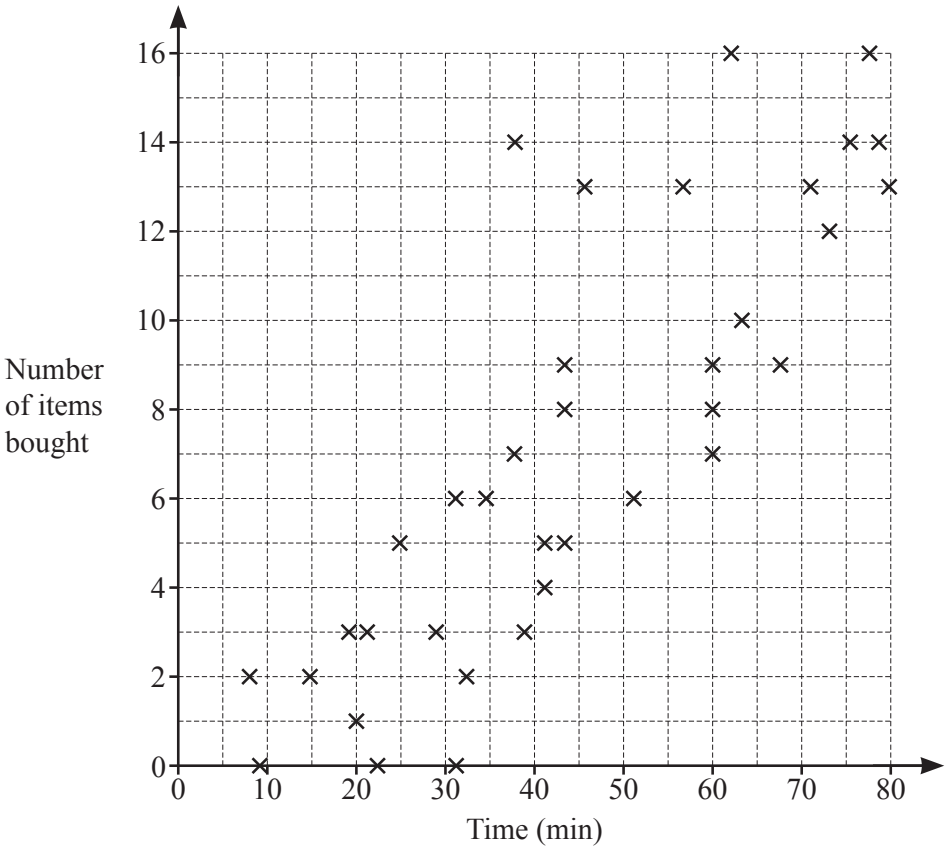
答：所画拟合直线可约经过 $(10, 12)$ 与 $(90, 38)$。



5. [2023 · May/June 0580/13 Q14(c)]

提示：先看点云走向，再比较所画直线两侧的散点数量。

The scatter diagram shows information about the time spent in a shop and the number of items bought.



(c) Draw a line of best fit on the scatter diagram.

散点图显示了在一家商店内停留的时间与所购物品件数的信息。图中横轴为时间（min），纵轴为所购物品件数。

（c）在散点图上画出一条拟合直线。

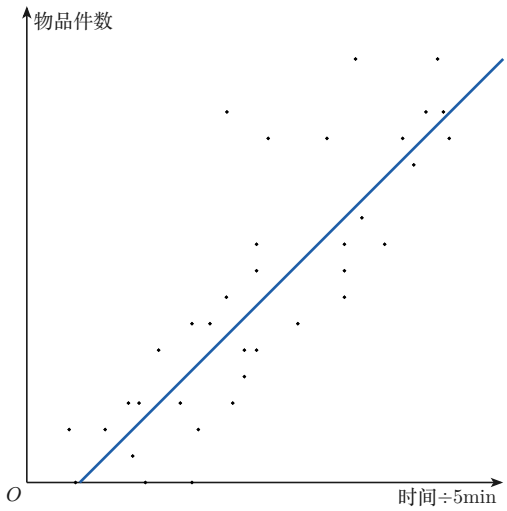
✓ **答案** 用直尺画一条约经过 $(10, 0)$ 与 $(80, 14)$ 的直线。

解析 散点大致从左下向右上分布。

横轴表示时间，纵轴表示所购物品件数。

用直尺画约经过 $(10, 0)$ 与 $(80, 14)$ 的直线，使直线穿过点云中部，两侧散点数量大致均衡。

答：所画拟合直线可约经过 $(10, 0)$ 与 $(80, 14)$。


物品件数
O
时间÷5min