详解手册　2026

IGCSE 附加数学全基础题型

Cambridge 0606 · Additional Mathematics

目 录

第 1 章 函数 5

1.1 函数 5

题型 1：用单调支判断可逆性或确定定义域端点（考频★★★☆☆） 5

题型 2：互换坐标画原函数与逆函数，并标出边界和截距（考频★★★★☆） 9

题型 3：交换变量，用指数与对数互消求逆函数（考频★★★☆☆） 32

题型 4：比较内层值域与外层定义域，判断复合或限定参数（考频★★☆☆☆） 38

题型 5：令对数真数大于零，求允许的自变量范围（考频★★★☆☆） 43

题型 6：交换变量解二次关系，按原定义域选逆函数分支（考频★★☆☆☆） 48

题型 7：由内到外代入，求复合函数值或化简表达式（考频★★☆☆☆） 55

题型 8：画二次函数的绝对值图并标截距（考频★★☆☆☆） 60

题型 9：由顶点和轴截距画一次式的绝对值图（考频★★☆☆☆） 70

第 2 章 二次函数 80

2.1 二次函数 80

题型 1：把二次一般式配成顶点式（考频★★★★☆） 80

题型 2：由顶点式读驻点、最值或值域（考频★★★☆☆） 88

题型 3：联立直线与抛物线求相切参数（考频★★☆☆☆） 96

题型 4：令判别式小于零求参数范围（考频★★☆☆☆） 100

题型 5：求二次式的零点并选取符号区间（考频★★☆☆☆） 104

第 3 章 多项式的因式 109

3.1 多项式的因式 109

题型 1：代入一次式的零点，求余数或验证因式、根（考频★★★☆☆） 109

题型 2：代入根、因子与余数条件，消元求系数或关系式（考频★★★☆☆） 112

题型 3：用零点和函数值确定多项式因式参数（考频★★☆☆☆） 120

题型 4：利用已知一次因式降次，求全部线性因式或根（考频★★★☆☆） 126

题型 5：一次式除三次式，逐项消元求二次商（考频★★☆☆☆） 133

题型 6：分解已有二次因式，写成三个一次因式的乘积（考频★★☆☆☆） 140

题型 7：用二次因式的负判别式证明三次式仅一实根（考频★★☆☆☆） 145

第 4 章 方程、不等式与图像 154

4.1 方程、不等式与图像 154

题型 1：把绝对值等式分两支解一次方程（考频★★★☆☆） 154

题型 2：把绝对值界限改写为一次不等式（考频★★☆☆☆） 156

题型 3：平方比较两个一次式的绝对值（考频★★☆☆☆） 160

题型 4：画比较图并读取绝对值不等式区间（考频★★☆☆☆） 163

题型 5：以分数幂为新元化成二次方程（考频★★☆☆☆） 172

题型 6：标出截距并画三次函数图（考频★★☆☆☆） 178

题型 7：比较三次曲线与水平线读取不等式区间（考频★★★☆☆） 184

题型 8：由零点、驻点画三次曲线草图（考频★★★☆☆） 192

题型 9：用水平线与极值比较确定实根个数（考频★★★☆☆） 205

第 5 章 联立方程 219

5.1 联立方程 219

题型 1：代入消元得到二次方程，求根后回代（考频★★☆☆☆） 219

第 6 章 对数与指数函数 226

6.1 对数与指数函数 226

题型 1：由对数遍历实数写值域（考频★★☆☆☆） 226

题型 2：由指数项的取值边界写值域或逆函数定义域（考频★★☆☆☆） 230

题型 3：用积、商、幂法则合成单个对数（考频★★★☆☆） 234

题型 4：换成一个对数未知量，解二次方程后还原（考频★★★★☆） 237

题型 5：合并对数后去对数，解二次方程并验根（考频★★★☆☆） 243

题型 6：化成同底幂并比较指数（考频★★☆☆☆） 250

题型 7：令一个指数幂为未知量，解二次方程再回代（考频★★★☆☆） 253

题型 8：先撤去外层对数或指数，再解内层代数方程（考频★★☆☆☆） 258

题型 9：两边取对数，解指数中的代数式（考频★★☆☆☆）……265
题型 10：先反解指数外面的代数运算，再取对数求自变量（考频★★☆☆☆）……270

第 7 章 直线图……273

7.1 直线图……273
题型 1：用中点和垂直斜率求垂直平分线及线上坐标（考频★★☆☆☆）……273
题型 2：联立直线与曲线后求交点连线的垂直平分线（考频★★☆☆☆）……278
题型 3：用垂足为中点求关于直线的反射点（考频★★☆☆☆）……282
题型 4：计算变换坐标，描点画最佳直线（考频★★★☆☆）……287
题型 5：由变换坐标直线求斜率、截距并还原关系式（考频★★★★☆）……299
题型 6：在变换坐标直线上读数并还原原变量（考频★★★☆☆）……316

第 8 章 圆的坐标几何……329

8.1 圆的坐标几何……329
题型 1：由圆心和半径条件写圆方程（考频★★☆☆☆）……329
题型 2：直线代入圆后用二次方程的根判断相交关系或求参数（考频★★☆☆☆）……332
题型 3：两圆方程作差，利用公共弦求圆方程或判断交点（考频★★☆☆☆）……335

第 9 章 弧度制……343

9.1 弧度制……343
题型 1：用弧长、扇形与弓形面积关系求未知量（考频★★★☆☆）……343
题型 2：补齐边长与圆心角后累加直边和圆弧（考频★★★☆☆）……350
题型 3：把图形分成扇形与三角形作面积和差（考频★★★★☆）……357
题型 4：扇形减三角形求弓形再合并面积（考频★★☆☆☆）……371

第 10 章 三角函数……377

10.1 三角函数……377
题型 1：用直角三角形三角比反求圆心角（考频★★☆☆☆）……377
题型 2：改写为正弦余弦，通分或约分证明恒等式（考频★★★★☆）……383
题型 3：化为单个三角比的确定值，在内角区间列全解（考频★★★★☆）……389
题型 4：确定峰谷、截距和周期关键点，画正弦或余弦曲线（考频★★★☆☆）……395
题型 5：由周期和纵坐标条件求三角函数式中的常数（考频★★★☆☆）……411
题型 6：由三角函数式求振幅与周期（考频★★★☆☆）……421
题型 7：由正切内角确定渐近线并描画曲线（考频★★☆☆☆）……424
题型 8：展开或分解三角多项式，用平方关系化简（考频★★☆☆☆）……429
题型 9：化为同一三角比的二次式，因式分解后逐根求角（考频★★★★☆）……431
题型 10：用平方恒等式消去三角参数，写出 y 与 x 的关系（考频★★☆☆☆）……443
题型 11：分出不同三角零因子，分别求解后合并（考频★★☆☆☆）……447

第 11 章 排列与组合……455

11.1 排列与组合……455
题型 1：用补集计数必含字符，并处理指定位置（考频★★☆☆☆）……455
题型 2：先排受限位置，再排其余不重复字符（考频★★★★☆）……457
题型 3：按各类入选人数分类，相乘后相加（考频★★★☆☆）……464
题型 4：把相邻对象捆成一块，并处理首末限制（考频★★☆☆☆）……471
题型 5：指定一组成员全入选或全不入选（考频★★☆☆☆）……474
题型 6：展开排列组合等式，约分整理参数关系（考频★★★☆☆）……478
题型 7：展开组合数并提取公因式证明等式（考频★★☆☆☆）……484

第 12 章 数列……489

12.1 数列……489
题型 1：比较二项式展开的前几项求指数与系数（考频★★☆☆☆）……489
题型 2：取二项式展开的前三项（考频★★☆☆☆）……494
题型 3：展开乘积并比较系数求参数（考频★★☆☆☆）……497
题型 4：由指定项系数或系数比求二项式参数（考频★★☆☆☆）……504
题型 5：令二项式通项的字母指数为零求常数项（考频★★★☆☆）……510
题型 6：按幂次配对相乘求乘积指定项系数（考频★★☆☆☆）……515
题型 7：由等差项与和的条件列一次方程求首项、公差（考频★★★☆☆）……520
题型 8：代入等比通项与求和公式求指定量（考频★★☆☆☆）……527

题型 9：把对应项写成等差式与等比式后消元求公比（考频★★☆☆☆）……531
题型 10：由连续三项成等比令中项平方等于两端积（考频★★☆☆☆）……534
题型 11：将等比项式相除消去首项后求公比（考频★★★☆☆）……537
题型 12：由等差前 n 项和列二次式求项数（考频★★☆☆☆）……542
题型 13：由等比有限和或无穷和条件列方程求公比（考频★★☆☆☆）……549
题型 14：由公比绝对值小于 1 求参数范围（考频★★★☆☆）……552

第 13 章 平面向量 …… 559

13.1 平面向量 …… 559
题型 1：沿路径相加减，求两点间向量（考频★★☆☆☆）……559
题型 2：列向量等式，比较分量或系数求参数与分比（考频★★★★☆）……564
题型 3：用分比或模长条件确定共线点的向量（考频★★★★☆）……581
题型 4：将方向向量单位化，求指定长度向量与匀速位置（考频★★☆☆☆）……592
题型 5：用参数倍乘方向向量，写线上点的向量（考频★★★☆☆）……597
题型 6：相减位置向量后取模，求距离或距离平方（考频★★☆☆☆）……603
题型 7：把向量化成倍数，求比例或判定平行共线（考频★★☆☆☆）……611
题型 8：用正弦余弦分解航向速度（考频★★☆☆☆）……617
题型 9：初始位置加时间乘速度，写匀速位置（考频★★☆☆☆）……623
题型 10：令两个坐标同时相等，检验到达或碰撞（考频★★☆☆☆）……628

第 14 章 微积分 …… 636

14.1 微积分 …… 636
题型 1：逐项求导与复合函数的链式法则（考频★★★☆☆）……636
题型 2：逐次微分位移、速度求速度或加速度（考频★★★☆☆）……641
题型 3：连续积分两次并由斜率、过点条件定常数（考频★★★☆☆）……647
题型 4：由导数值与因子、余数条件求系数（考频★★★☆☆）……653
题型 5：令三角导数或速度为零并按区间取根（考频★★☆☆☆）……660
题型 6：用商法则与链式法则求导并通分（考频★★★★☆）……664
题型 7：用乘积法则求导并整理（考频★★★★☆）……673
题型 8：在指定点求导并写切线或法线方程（考频★★☆☆☆）……679
题型 9：列切线或法线方程求轴截距或直线交点（考频★★★☆☆）……684
题型 10：由切线或法线的轴截距求三角形面积（考频★★☆☆☆）……693
题型 11：用切线或法线条件反求曲线参数（考频★★☆☆☆）……697
题型 12：先求切线或法线再求围成面积（考频★★☆☆☆）……701
题型 13：令一阶导数为零求驻点（考频★★★★☆）……707
题型 14：令导数为零并化为指数的代数方程（考频★★☆☆☆）……716
题型 15：用导数乘自变量小增量估计函数变化（考频★★★★☆）……721
题型 16：把面积、体积写成同一长度的函数并连接变化率（考频★★★☆☆）……730
题型 17：用链式变化率连接两个随时间变化的量（考频★★☆☆☆）……738
题型 18：用函数小变化除以导数估计自变量变化（考频★★☆☆☆）……744
题型 19：令目标函数导数为零并用二阶导数确认最小值（考频★★★☆☆）……749
题型 20：改写成标准项后逐项积分（考频★★★★☆）……762
题型 21：整理已知导式反推所求积分（考频★★★★☆）……768
题型 22：积分一次并用过点或初始位移定常数（考频★★☆☆☆）……775
题型 23：用三角恒等式化简被积式后积分（考频★★☆☆☆）……781
题型 24：确定横向边界后积分上方函数减下方函数（考频★★★★☆）……783
题型 25：用三角形或梯形面积与曲线积分作差（考频★★☆☆☆）……799
题型 26：将给定面积或积分值化为参数方程（考频★★☆☆☆）……807
题型 27：将已得时刻代入加速度式求值（考频★★☆☆☆）……811
题型 28：求出速度式并判断静止或换向时刻（考频★★☆☆☆）……818
题型 29：在速度变号时分段累计路程（考频★★☆☆☆）……824
题型 30：用速度图面积列方程确定未知速度或时刻（考频★★☆☆☆）……833
题型 31：由位移差或速度积分求位移与终止时刻（考频★★☆☆☆）……838
题型 32：求出各段速度式并画速度时间图（考频★★☆☆☆）……842
题型 33：由二次速度的斜率画直线加速度图（考频★★☆☆☆）……849
题型 34：用速度图线段斜率求加速度（考频★★☆☆☆）……856

第 1 章 函数

Chapter 1

1.1 函数

函数与取值：函数把每个允许的输入 x 对应到唯一的输出 $f(x)$。所有允许输入组成定义域，所有实际输出组成值域。

一一与多对一：例如 $f(x)=x^2$ 在实数范围内有 $f(-2)=f(2)=4$，是多对一函数。将定义域限制为 $x\geq 0$，不同输入对应不同输出，成为一一函数。

记号与逆过程：$f(x)$ 表示函数值，$f^{-1}(x)$ 表示反函数的值，$\frac{1}{f(x)}$ 表示函数值的倒数，三者含义不同。

题型 1 用单调支判断可逆性或确定定义域端点

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **配成完全平方：**题中二次式先提取二次项系数，再配成完全平方。括号内补上的常数须同时减回。

$$2x^2-2x+3=2(x^2-x)+3=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

② **确定对称轴线：**上式的平方项在顶点处为零，对称轴为_____。一般地，配方后可写成下式。

$$y=a(x-h)^2+q,\quad a\neq 0$$

其中，h 为顶点横坐标，q 为顶点纵坐标，对称轴为 $x=h$。

③ **判定反函数存在：**反函数记作 f^{-1}，把函数值对应回原自变量。不同自变量须对应不同函数值，称为_____。

函数在定义域内严格递增或严格递减时，满足此条件。

④ **确定定义域端点：**二次函数的定义域须落在同一条单调支上。设对称轴为 $x=h$，比较定义域端点与 h。

定义域为 $x\leq p$：

$p\leq h$

p 的最大值为_____。

定义域为 $x\geq k$：

$k\geq h$

k 的最小值为_____。

⑤ **判断区间跨轴：**给定有限区间时，先比较区间端点与对称轴。沿用例题的函数，在区间 $[0,1]$ 上有下列关系。

$$0<\frac{1}{2}<1,\quad f(0)=f(1)=3$$

对称轴在区间内部：

两侧存在相同函数值，反函数不存在。

对称轴在区间外或端点处：

函数在区间内严格单调，反函数存在。

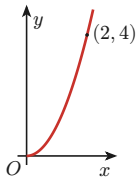
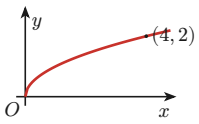
⑥ **判断指数式单调：**例如研究 $y=e^{x^2+1}$ 在 $x<0$ 上的变化。负数增大时平方减小，而 e^t 随指数 t 增大而增大。

$$u<v<0,\quad u^2>v^2,\quad e^{u^2+1}>e^{v^2+1}$$

因此，该函数严格_____，反函数存在。

填空：①$x=\frac{1}{2}$ ②一一对应 ③h ④h ⑤递减

限制二次函数的单调支

	$y=x^2,\quad x\geq 0$	$y=\sqrt{x}$
图像		
原函数限制	$x\geq 0$	
对应点	$(2,4)$	$(4,2)$
值域	$y\geq 0$	

点石成金　题目出现二次函数的定义域端点及反函数存在条件时，先配方求对称轴，再判断定义域是否落在同一单调支上。

例 1　[2025 · February/March 0606/12 Q5(b)]

(a) Write $2x^2-2x+3$ in the form $a(x+b)^2+c$, where a, b and c are constants.

It is given that $\mathrm{f}(x)=2x^2-2x+3$, for $x\leqslant p$.

(b) Write down the greatest value of p for which f has an inverse.

(a) 将 $2x^2-2x+3$ 写成 $a(x+b)^2+c$ 的形式，其中 a、b、c 为常数。

已知

$$f(x)=2x^2-2x+3,\quad x\leq p$$

(b) 写出使 f 有反函数的 p 的最大值。

解答　将二次式配方，得

$$2x^2-2x+3=2(x^2-x)+3=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

方法：先看定义域不等号，再配方找对称轴，比较端点与轴的位置。

辨析：轴在定义域端点是保留一支，轴在内部是跨越两支。

图象的对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，函数在 $x\leq\frac{1}{2}$ 上严格递减。

定义域为 $x\leq p$，为使函数一一对应，须有

$$p\leq\frac{1}{2}$$

若 $p>\frac{1}{2}$，定义域会包含对称轴两侧的对称点，函数值重复。

答：(a) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$；(b) p 的最大值为 $\frac{1}{2}$。

针对练习

1.　[2026 · May/June 0606/11 Q6(a)]

提示：配方后找顶点横坐标，比较右同定义域的起点。

The function f is such that $\mathrm{f}(x)=3x^2+8x$ for $x\geqslant k$, where k is a constant.
It is given that f^{-1} exists.
k has the least possible value for which f^{-1} exists.

(a) Find the value of k.

函数 f 满足

$$f(x)=3x^2+8x,\quad x\geq k$$

其中 k 为常数。

已知反函数 f^{-1} 存在，且 k 取使 f^{-1} 存在的最小可能值。
(a) 求 k 的值。

✓ **答案** $k=-\frac{4}{3}$

解析 配方得

$$f(x)=3x^2+8x=3\left(x^2+\frac{8}{3}x\right)=3\left[\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}\right]=3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{3}$$

图象的对称轴为 $x=-\frac{4}{3}$，函数在 $x\geq-\frac{4}{3}$ 上严格递增。
定义域为 $x\geq k$，反函数存在须有

$$k\geq-\frac{4}{3}$$

答：k 的最小值为 $-\frac{4}{3}$。

2. [2026 · February/March 0606/22 Q1(c)]
提示：看两图共用的对称轴，比较左向定义域的终点。

The function f is defined by $\mathrm{f}(x)=2x^2-6x+4$ for all real values of x.

(a) Write $\mathrm{f}(x)$ in the form $a(x+b)^2+c$ where a, b and c are constants.

(c) The function g is defined by $\mathrm{g}(x)=2x^2-6x+4$ for $x\leqslant k$, where k is a constant.

Given that g has an inverse, state the largest possible value of k.

函数 f 定义为

$$f(x)=2x^2-6x+4$$

其中 x 可取所有实数。
(a) 将 $f(x)$ 写成 $a(x+b)^2+c$ 的形式，其中 a、b、c 为常数。
(c) 函数 g 定义为

$$g(x)=2x^2-6x+4,\quad x\leq k$$

其中 k 为常数。
已知 g 有反函数，写出 k 的最大可能值。

✓ **答案** (a) $2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$；(c) $k=\frac{3}{2}$

解析 将二次式配方，得

$$f(x)=2x^2-6x+4=2(x^2-3x)+4=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+4=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

g 的图象与 f 的图象具有相同的对称轴 $x=\frac{3}{2}$。
g 在 $x\leq\frac{3}{2}$ 上严格递减。
定义域为 $x\leq k$，反函数存在须有

$$k\leq\frac{3}{2}$$

答：(a) $2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$；(c) k 的最大值为 $\frac{3}{2}$。

3. [2025 · May/June 0606/13 Q9(a)]
提示：看配方后的对称轴，比较它与区间两端的位置。

The function f is defined by $\mathrm{f}(x)=-2x^2+9x-10$ for $0\leqslant x\leqslant 3$.

(a) (i) Write $\mathrm{f}(x)$ in the form $a+b(x+c)^2$ where a, b and c are constants.

(ii) Hence determine whether or not f^{-1} exists.

函数 f 定义为

$$f(x) = -2x^2 + 9x - 10, \quad 0 \le x \le 3$$

(a)(i) 将 $f(x)$ 写成 $a + b(x + c)^2$ 的形式，其中 a、b、c 为常数。
(ii) 由此判断反函数 f^{-1} 是否存在。

✓ **答案** (a)(i) $\frac{1}{8} - 2\left(x - \frac{9}{4}\right)^2$；(ii) f^{-1} 不存在。

解析 将二次项系数提出后配方，得

$$f(x) = -2x^2 + 9x - 10 = -2\left(x^2 - \frac{9}{2}x\right) - 10 = -2\left[\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{81}{16}\right] - 10 = \frac{1}{8} - 2\left(x - \frac{9}{4}\right)^2$$

图象的对称轴位于定义域内部，因为

$$0 < \frac{9}{4} < 3$$

取定义域内两个不同的自变量 $\frac{3}{2}$ 和 3，有

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{8} - 2\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{4}\right)^2 = -1$$

$$f(3) = \frac{1}{8} - 2\left(3 - \frac{9}{4}\right)^2 = -1$$

不同自变量对应相同函数值，故 f 不是一一对应函数。
答：(a)(i) $\frac{1}{8} - 2\left(x - \frac{9}{4}\right)^2$；(ii) f^{-1} 不存在。

4. [2024 · May/June 0606/22 Q10(a)]
提示：在负半轴取两个递增的数，依次比较平方与指数值。

The functions f and fg are defined by

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x^2+3} \quad \text{for } x < 0$$

$$\mathrm{fg}(x) = \mathrm{e}^{2x} \quad \text{for } x > \frac{3}{2}.$$

(a) Explain why f^{-1} exists.

函数 f 和复合函数 fg 定义如下：

$$f(x) = e^{x^2+3}, \quad x < 0$$

$$fg(x) = e^{2x}, \quad x > \frac{3}{2}$$

(a) 说明反函数 f^{-1} 存在的原因。

✓ **答案** f 是一一对应函数，因此 f^{-1} 存在。

解析 任取 $u < v < 0$，有

$$u^2 + 3 > v^2 + 3$$

因指数函数 e^t 严格递增，得

$$f(u) = e^{u^2+3} > e^{v^2+3} = f(v)$$

故 f 在 $x<0$ 上严格递减，是一一对应函数。
答：f 是一一对应函数，因此 f^{-1} 存在。

5. [2024 · October/November 0606/23 Q2(c)]
提示：看共同对称轴，比较右向定义域的起点是否跨轴。

The function f is defined by $\mathrm{f}(x)=1-4x-x^2$ for all real values of x.

(a) Write $\mathrm{f}(x)$ in the form $a-(x+b)^2$, where a and b are constants.

The function g is defined by $\mathrm{g}(x)=1-4x-x^2$ for $x \geqslant k$, where k is a constant.

(c) State the least possible value of k such that g has an inverse.

函数 f 定义为

$$f(x)=1-4x-x^2$$

其中 x 可取所有实数。
(a) 将 $f(x)$ 写成 $a-(x+b)^2$ 的形式，其中 a、b 为常数。
函数 g 定义为

$$g(x)=1-4x-x^2,\quad x\geq k$$

其中 k 为常数。
(c) 写出使 g 有反函数的 k 的最小可能值。

✓ **答案** (a) $5-(x+2)^2$；(c) $k=-2$

解析 将二次项的负号提出后配方，得

$$f(x)=1-4x-x^2=-(x^2+4x)+1=-\left[(x+2)^2-4\right]+1=5-(x+2)^2$$

g 的图象与 f 的图象具有相同的对称轴 $x=-2$。
g 在 $x\geq -2$ 上严格递减。
定义域为 $x\geq k$，反函数存在须有

$$k\geq -2$$

答：(a) $5-(x+2)^2$；(c) k 的最小值为 -2。

题型 2 互换坐标画原函数与逆函数，并标出边界和截距

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **端点与值域：**题给指数函数及条件，先求左端点的函数值。指数部分随横坐标增大而增大，故值域为_____。

$$f(x)=1+2^x,\quad x\geq -1$$

$$f(-1)=1+2^{-1}=\frac{3}{2}$$

② **反求函数式：**先用具体数值认识对数，再交换横、纵坐标。记号 $\log_2 u$ 表示以 2 为底的对数。由下列等式得逆函数式为_____。

$$2^3=8,\quad \log_2 8=3$$

$$y=1+2^x$$

$$2^x=y-1$$

$$x = \log_2(y-1)$$

③ **互换坐标画图：**原图上的点交换横、纵坐标，得到逆函数图象上的点。两图关于_____对称，递增时交点均在此直线上。求截距时分别使用下列条件。

$$(0,2) \xrightarrow{\text{互换坐标}} (2,0)$$

横轴截距：令 $y=0$ | 纵轴截距：令 $x=0$

④ **边界对应规律：**母例包含左端点，两图的对应端点均画实心点。渐近线表示曲线无限接近的直线，也随图象交换坐标。例如下式在实数范围内有如下渐近线。

$$g(x) = 3 + e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

原函数图象：
$y=3$

逆函数图象：
$x=3$

⑤ **对数条件变形：**对数的真数须大于零，下式的定义域为_____。反求时先除去系数，再用指数消去对数。记号 ln 表示自然对数，e 为自然对数的底。

$$r(x) = 2\ln(5-x)$$

$$5-x>0$$

$$y = 2\ln(5-x)$$

$$e^{\frac{y}{2}} = 5-x$$

$$x = 5 - e^{\frac{y}{2}}$$

$$r^{-1}(x) = 5 - e^{\frac{x}{2}}$$

⑥ **二次函数限域：**题给向上开口的二次函数及下界，先配方求顶点。保留顶点右侧时，下界的最小值为_____。反求时取非负平方根，截距也须满足定义域。

$$q(x) = 2x^2+4x+1 = 2(x^2+2x+1)-1 = 2(x+1)^2-1$$

$$x \geq -1, \quad x+1 \geq 0$$

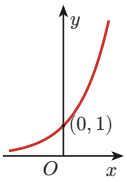
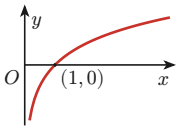
$$y = 2(x+1)^2-1$$

$$x+1 = \sqrt{\frac{y+1}{2}}$$

$$q^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}} - 1, \quad x \geq -1$$

⟵ 填空：①$y \geq \frac{3}{2}$　②$f^{-1}(x) = \log_2(x-1)$　③直线 $y=x$　④$x<5$　⑤-1

互换横、纵坐标

	$y=e^x$	$y=\ln x$
图像		
定义域	$\mathbb{R}$	$x>0$
值域	$y>0$	$\mathbb{R}$
对应点	$(0,1)$	$(1,0)$

点石成金　题目出现原函数与逆函数的草图、边界或截距时，先确定原图的范围和特征点，再互换坐标。

例 1　[2026 · May/June 0606/22 Q8(b)]

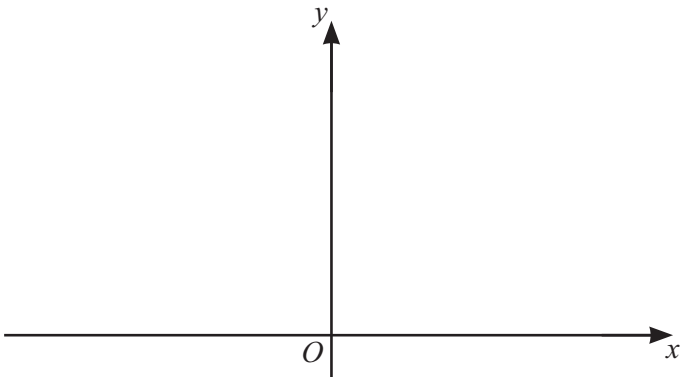
The function f is defined, for $x \geqslant -1$, by $\mathrm{f}(x)=1+2^x$.

(a) Find the range of f.

(b) **(i)** Write down the domain of f^{-1}.

(ii) Find an expression for $\mathrm{f}^{-1}(x)$.

(iii) On the axes, sketch the graph of $y=\mathrm{f}(x)$ and hence the graph of $y=\mathrm{f}^{-1}(x)$. State any intercepts with the coordinate axes.



函数 f 在 $x \geq -1$ 时定义为

$$f(x)=1+2^x$$

(a) 求 f 的值域。
(b) (i) 写出 f^{-1} 的定义域。
(ii) 求 $f^{-1}(x)$ 的表达式。
(iii) 在所给坐标轴上画出 $y=f(x)$ 的图象草图，并由此画出 $y=f^{-1}(x)$ 的图象草图。写出图象与坐标轴的所有交点。
图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

解答　由指数函数递增，且

$$x \geq -1$$

得

$$f(x) \geq f(-1)=1+2^{-1}=\frac{3}{2}$$

方法：先看定义域下界，算出端点与截距，再互换坐标画逆图。

辨析：定义域是横坐标的取值范围，值域是纵坐标的取值范围。

拓展：互换坐标保留递增或递减的性质，弯曲方向须另行判断。

且函数值无上界，故（a）的值域为

$$y \geq \frac{3}{2}$$

逆函数的定义域等于原函数的值域，故（b）（i）为

$$x \geq \frac{3}{2}$$

设

$$y = 1 + 2^x$$

则

$$2^x = y - 1$$

$$x = \log_2(y - 1)$$

交换横、纵坐标，得（b）（ii）

$$f^{-1}(x) = \log_2(x - 1), \quad x \geq \frac{3}{2}$$

对于（b）（iii），原函数图象从实心端点

$$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

向右上方延伸，递增且向上弯曲。令横坐标为零，得

$$f(0) = 1 + 2^0 = 2$$

故纵轴截距点为

$$(0, 2)$$

因函数值恒为正，原图与横轴不相交。
将原图关于直线

$$y = x$$

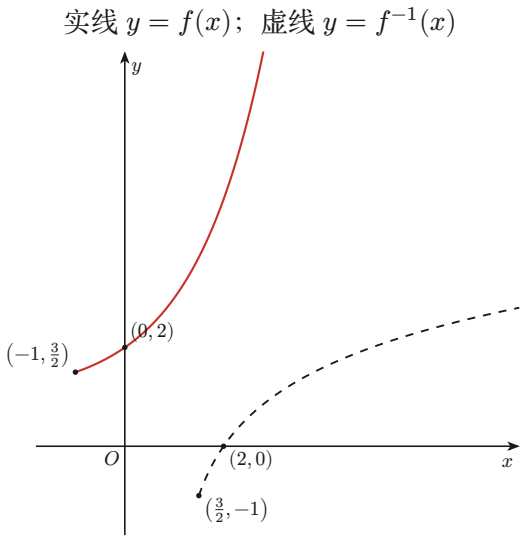
反射，所得逆函数图象从实心端点

$$\left(\frac{3}{2}, -1\right)$$

向右上方延伸，递增且向下弯曲，经过

$$(2, 0)$$

其定义域不含零，故与纵轴不相交。两条曲线分别标为 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$。
答：原图的轴截距点为 $(0, 2)$，逆函数图象的轴截距点为 $(2, 0)$。



$(-1,\frac{3}{2})$；$(\frac{3}{2},-1)$；$(0,2)$；$(2,0)$

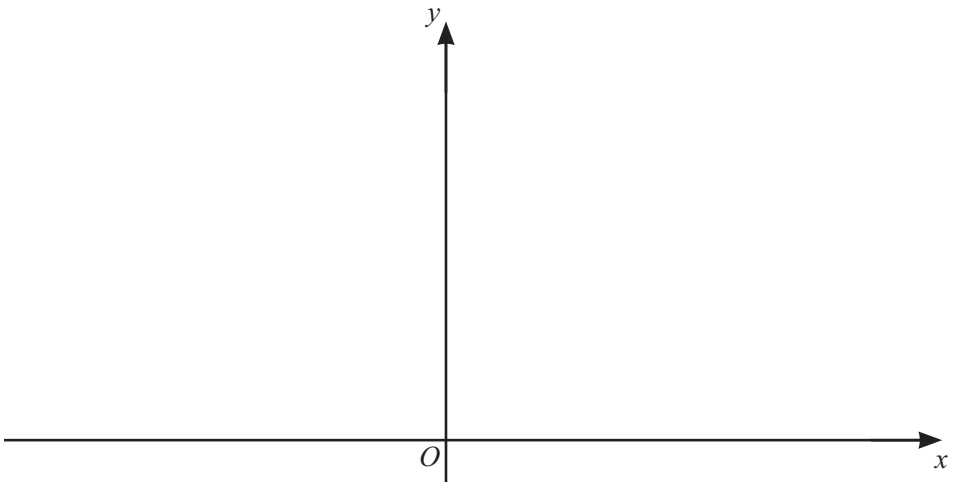
针对练习

1. [2026 · May/June 0606/13 Q8(d)]

提示：先看指数项趋零时的走向，再交换截距与渐近线的坐标。

A function f is defined by $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{2x+1}$ for $x\in\mathbb{R}$.

(d) On the axes, sketch the graph of $y=\mathrm{f}(x)$ and hence sketch the graph of $y=\mathrm{f}^{-1}(x)$. State the exact coordinates of any intercepts with the axes.



函数 f 定义为

$$f(x)=e^{2x+1},\quad x\in\mathbb{R}$$

(d) 在所给坐标轴上画出 $y=f(x)$ 的图象草图，并由此画出 $y=f^{-1}(x)$ 的图象草图。写出图象与坐标轴的所有交点的精确坐标。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

✓ **答案** $y=f(x)$ 递增且向上弯曲，轴截距点为 $(0,e)$，渐近线为 $y=0$；$y=f^{-1}(x)$ 递增且向下弯曲，轴截距点为 $(e,0)$，渐近线为 $x=0$。两图关于 $y=x$ 对称。

解析 原函数为

$$f(x)=e^{2x+1},\quad x\in\mathbb{R}$$

令横坐标为零，得

$$f(0)=e^{1}=e$$

故原图经过

$$(0, e)$$

由于指数值恒为正，原图与横轴不相交。当横坐标趋向负无穷时，函数值趋近零，故水平渐近线为

$$y = 0$$

原图由左向右递增，且向上弯曲。
设

$$y = e^{2x+1}$$

则

$$\ln y = 2x + 1$$

$$x = \frac{\ln y - 1}{2}$$

交换横、纵坐标，得

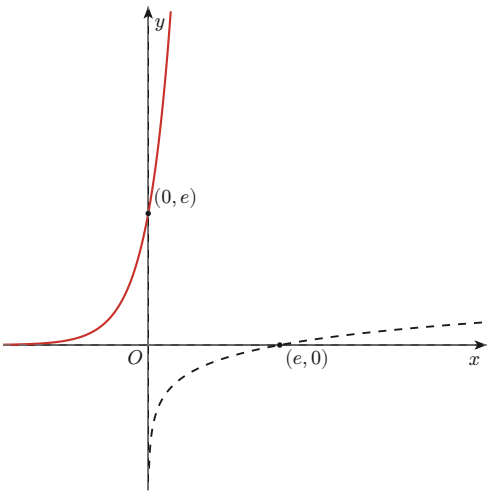
$$f^{-1}(x) = \frac{\ln x - 1}{2}, \quad x > 0$$

将原图关于直线 $y = x$ 反射，得递增且向下弯曲的逆函数图象。原图的截距点与渐近线分别对应为

$$(e, 0), \quad x = 0$$

逆函数图象与纵轴不相交。
答：原图的轴截距点为 $(0, e)$，逆函数图象的轴截距点为 $(e, 0)$。

实线 $y = f(x)$；虚线 $y = f^{-1}(x)$

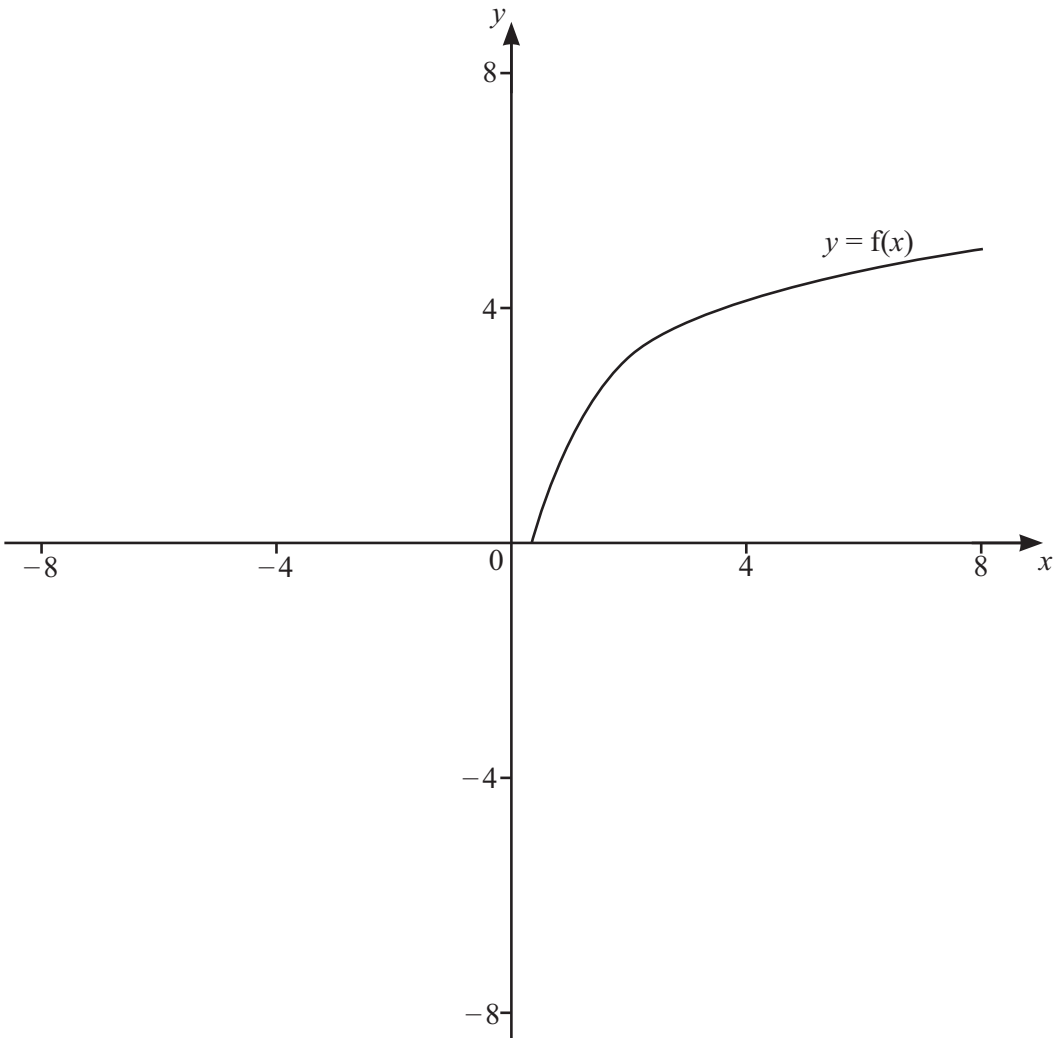


$(0, e)$；$(e, 0)$

2. [2025 · October/November 0606/23 Q2(a)]

提示：在所给曲线上选点，比较交换坐标前后各点的位置。

(a) (i)



The diagram shows the graph of $y = \mathrm{f}(x)$.

On the same diagram sketch the graph of $y = \mathrm{f}^{-1}(x)$.

(ii) Describe the relationship between the graph of $\mathrm{f}(x)$ and the graph of $\mathrm{f}^{-1}(x)$.

(a)（i）图中给出了 $y = f(x)$ 的图象。在同一幅图中画出 $y = f^{-1}(x)$ 的图象草图。
图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点处标有 0；两轴均标有刻度 −8、−4、4、8，所给曲线标为 $y = f(x)$。
（ii）描述 $f(x)$ 的图象与 $f^{-1}(x)$ 的图象之间的关系。

✓ **答案** （i）将所给曲线关于直线 $y = x$ 反射，所得曲线为 $y = f^{-1}(x)$。
（ii）两图关于直线 $y = x$ 对称。

解析 设所给曲线上任一点的坐标为

$$(a, b)$$

则

$$f(a) = b$$

$$f^{-1}(b) = a$$

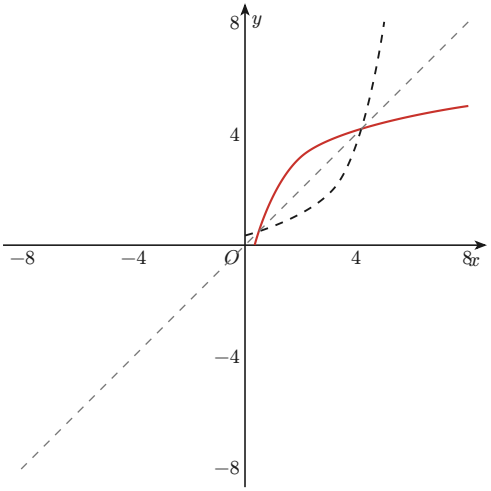
故逆函数图象上对应点的坐标为

$$(b, a)$$

在图中画出辅助直线 $y=x$，将原曲线上的点逐一交换横、纵坐标，再用光滑曲线连接。所得曲线递增且向上弯曲，标为 $y=f^{-1}(x)$。

答：两图关于直线 $y=x$ 对称。

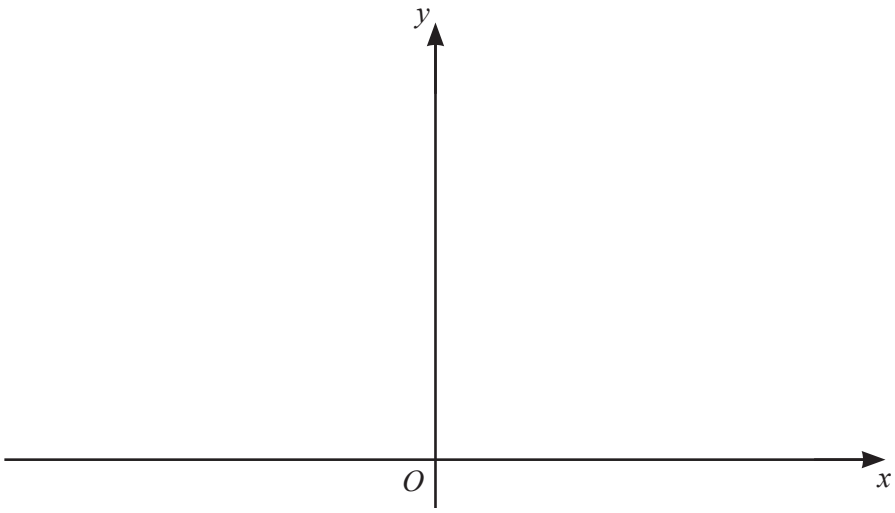
实线 $y=f(x)$；虚线 $y=f^{-1}(x)$；点线 $y=x$



3. [2023 · May/June 0606/23 Q8(b)]

提示：先看真数趋零时横坐标靠近哪里，再对应两轴截距。

(b) The function h is defined by $\mathrm{h}(x)=\ln(4-x)$ for $x<4$. Sketch the graph of $y=\mathrm{h}(x)$ and hence sketch the graph of $y=\mathrm{h}^{-1}(x)$. Show the position of any asymptotes and any points of intersection with the coordinate axes.



(b) 函数 h 定义为

$$h(x)=\ln(4-x),\quad x<4$$

画出 $y=h(x)$ 的图象草图，并由此画出 $y=h^{-1}(x)$ 的图象草图。标明所有渐近线的位置，以及图象与坐标轴的所有交点。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

✓ **答案** $h^{-1}(x)=4-e^{x}$。原图递减，经过 $(3,0)$、$(0,\ln 4)$，渐近线为 $x=4$；逆函数图象递减，经过 $(\ln 4,0)$、$(0,3)$，渐近线为 $y=4$。两图均向下弯曲，关于 $y=x$ 对称。

解析 由

$$h(x)=\ln(4-x),\quad x<4$$

令纵坐标为零，得

$$\ln(4-x)=0$$

$$4-x=1$$

$$x=3$$

令横坐标为零，得

$$h(0)=\ln 4$$

故原图与两轴的交点为

$$(3,0),\quad (0,\ln 4)$$

当横坐标从左侧趋近 4 时，对数真数趋近零，函数值趋向负无穷，故竖直渐近线为

$$x=4$$

原图在此直线左侧，由左向右递减且向下弯曲。
设

$$y=\ln(4-x)$$

则

$$e^y=4-x$$

$$x=4-e^y$$

交换横、纵坐标，得

$$h^{-1}(x)=4-e^x,\quad x\in\mathbb{R}$$

将原图关于直线 $y=x$ 反射，所得曲线也递减且向下弯曲，与两轴的交点为

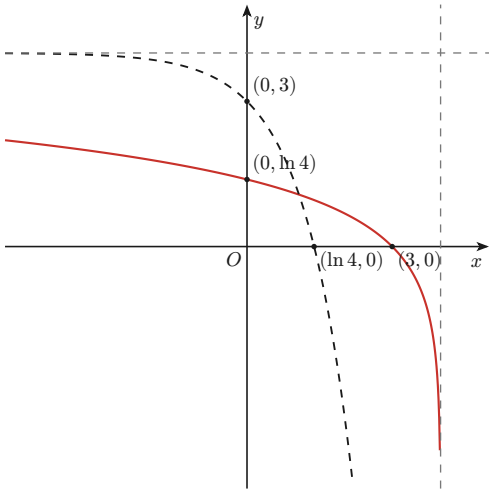
$$(\ln 4,0),\quad (0,3)$$

水平渐近线为

$$y=4$$

逆函数图象位于该渐近线下方。
答：原图标为 $y=h(x)$，逆函数图象标为 $y=h^{-1}(x)$，并标出上述四个截距点及两条渐近线。

实线 $y=f(x)$；虚线 $y=f^{-1}(x)$



$(0, \ln 4)$；$(3, 0)$；$(\ln 4, 0)$；$(0, 3)$

4. [2024 · October/November 0606/12 Q4(a)]

提示：先由真数为正确定边界，再检验两轴截距是否存在。

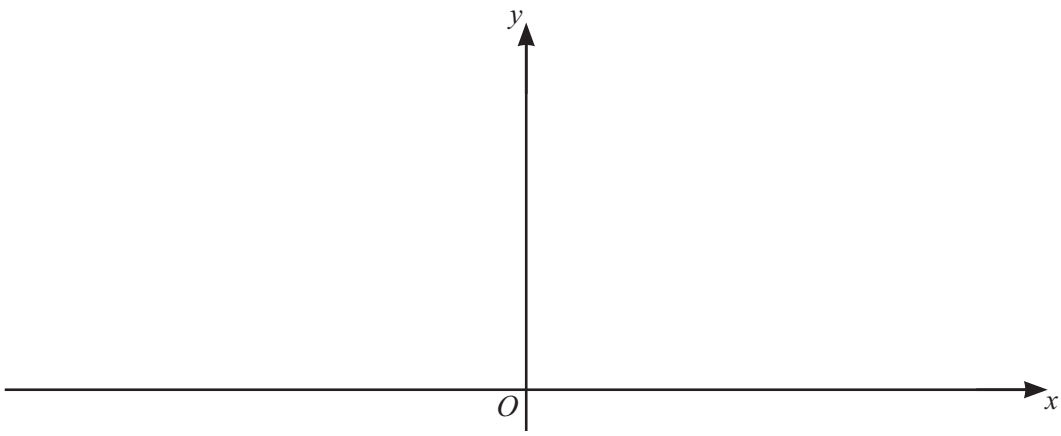
The function f is such that $\mathrm{f}(x) = 4\ln(3x-2)$, for $x > a$, where a is as small as possible.

(a) (i) Write down the value of a.

(ii) Write down the range of f.

(iii) Find $\mathrm{f}^{-1}(x)$, stating its domain and range.

(iv) On the axes sketch the graphs of $y = \mathrm{f}(x)$ and $y = \mathrm{f}^{-1}(x)$, stating the intercepts with the axes.



函数 f 满足

$$f(x) = 4\ln(3x-2), \quad x > a$$

其中 a 取尽可能小的值。

(a)(i) 写出 a 的值。

(ii) 写出 f 的值域。

(iii) 求 $f^{-1}(x)$，并写出它的定义域和值域。

(iv) 在所给坐标轴上画出 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的图象草图，写出图象与坐标轴的交点。

图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

✓ **答案** (i) $a = \frac{2}{3}$。

(ii) $\mathbb{R}$。

(iii) $f^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{x}{4}}+2}{3}$，定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $y > \frac{2}{3}$。

(iv) 原图递增且向下弯曲，轴截距点为 $(1, 0)$，渐近线为 $x = \frac{2}{3}$；逆函数图象递增且向上弯曲，轴截距点为 $(0, 1)$，渐近线为 $y = \frac{2}{3}$。

解析 对数真数须大于零，故

$$3x - 2 > 0$$

$$x > \frac{2}{3}$$

因此

$$a = \frac{2}{3}$$

对数值可取任意实数，乘以 4 后仍可取任意实数，故原函数的值域为

$$\mathbb{R}$$

设

$$y = 4\ln(3x-2)$$

则

$$\frac{y}{4} = \ln(3x-2)$$

$$e^{\frac{y}{4}} = 3x-2$$

$$x = \frac{e^{\frac{y}{4}}+2}{3}$$

交换横、纵坐标，得

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{x}{4}}+2}{3}$$

其定义域为 $\mathbb{R}$，值域为

$$y > \frac{2}{3}$$

令原函数值为零，得

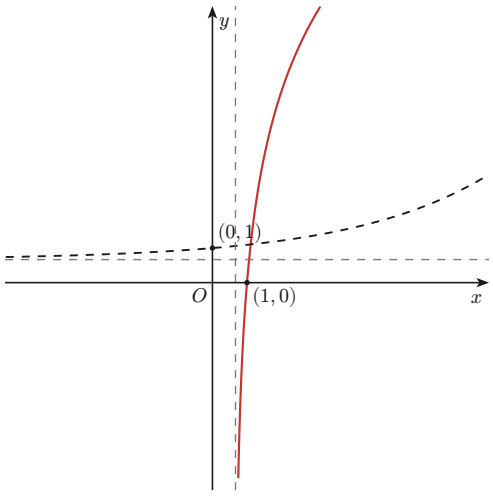
$$4\ln(3x-2) = 0$$

$$3x-2 = 1$$

$$x = 1$$

故原图经过 $(1,0)$。因零不在原函数定义域内，原图与纵轴不相交。
原图在直线 $x = \frac{2}{3}$ 右侧，递增且向下弯曲，以该直线为竖直渐近线。将其关于直线 $y = x$ 反射，得递增且向上弯曲的逆函数图象，经过 $(0,1)$，以 $y = \frac{2}{3}$ 为水平渐近线。
因逆函数值恒大于 $\frac{2}{3}$，逆函数图象与横轴不相交。
答：原图的轴截距点为 $(1,0)$，逆函数图象的轴截距点为 $(0,1)$。

实线 $y = f(x)$；虚线 $y = f^{-1}(x)$



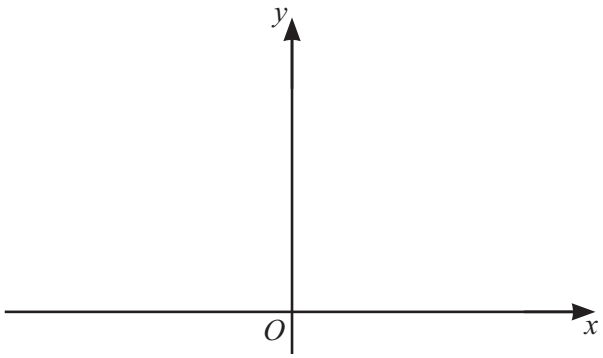
$(1,0)$；$(0,1)$

5. [2025 · May/June 0606/21 Q7(a)]
提示：先看指数项前的系数与平移量，再定位截距和渐近线。

(a) The function f is defined by $\mathrm{f}(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 3$ for $x \in \mathbb{R}$.

On the axes, sketch the graph of $y = \mathrm{f}(x)$ and hence, on the same axes, sketch the graph of $y = \mathrm{f}^{-1}(x)$.
Show clearly

- the positions of any points where your graphs meet the coordinate axes
- the positions of any asymptotes.



(a) 函数 f 定义为

$$f(x) = 2e^{-x} + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

在所给坐标轴上画出 $y = f(x)$ 的图象草图，并由此在同一坐标系中画出 $y = f^{-1}(x)$ 的图象草图。清楚标明图象与坐标轴的所有交点的位置，以及所有渐近线的位置。
图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

✓ **答案** $f^{-1}(x) = -\ln\left(\frac{x-3}{2}\right)$，$x > 3$。原图递减且向上弯曲，轴截距点为 $(0, 5)$，渐近线为 $y = 3$；逆函数图象递减且向上弯曲，轴截距点为 $(5, 0)$，渐近线为 $x = 3$。

解析 由

$$f(x) = 2e^{-x} + 3$$

得

$$f(0) = 2 + 3 = 5$$

且

$$f(x) > 3$$

故原图经过 $(0, 5)$，与横轴不相交。
当横坐标趋向正无穷时，指数项趋近零，故水平渐近线为

$$y = 3$$

原图在该渐近线上方，由左向右递减且向上弯曲。
设

$$y = 2e^{-x} + 3$$

则

$$\frac{y-3}{2} = e^{-x}$$

$$\ln\left(\frac{y-3}{2}\right) = -x$$

$$x = -\ln\left(\frac{y-3}{2}\right)$$

交换横、纵坐标，得

$$f^{-1}(x) = -\ln\left(\frac{x-3}{2}\right), \quad x > 3$$

将原图关于直线 $y = x$ 反射，得递减且向上弯曲的逆函数图象，经过

$$(5, 0)$$

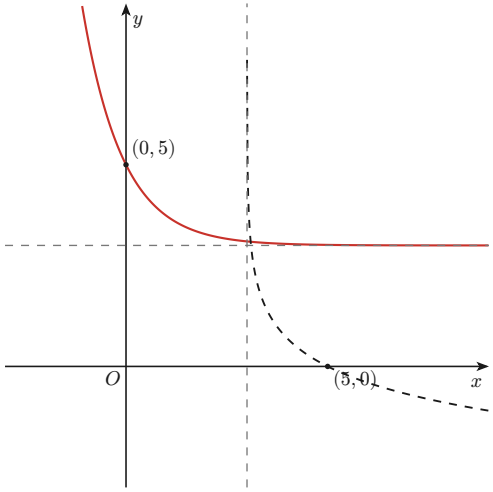
其竖直渐近线为

$$x = 3$$

逆函数图象位于该直线右侧，与纵轴不相交。

答：原图的轴截距点为 $(0, 5)$，渐近线为 $y = 3$；逆函数图象的轴截距点为 $(5, 0)$，渐近线为 $x = 3$。

实线 $y = f(x)$；虚线 $y = f^{-1}(x)$



$(0, 5)$；$(5, 0)$

6. [2023 · October/November 0606/12 Q8(a)]

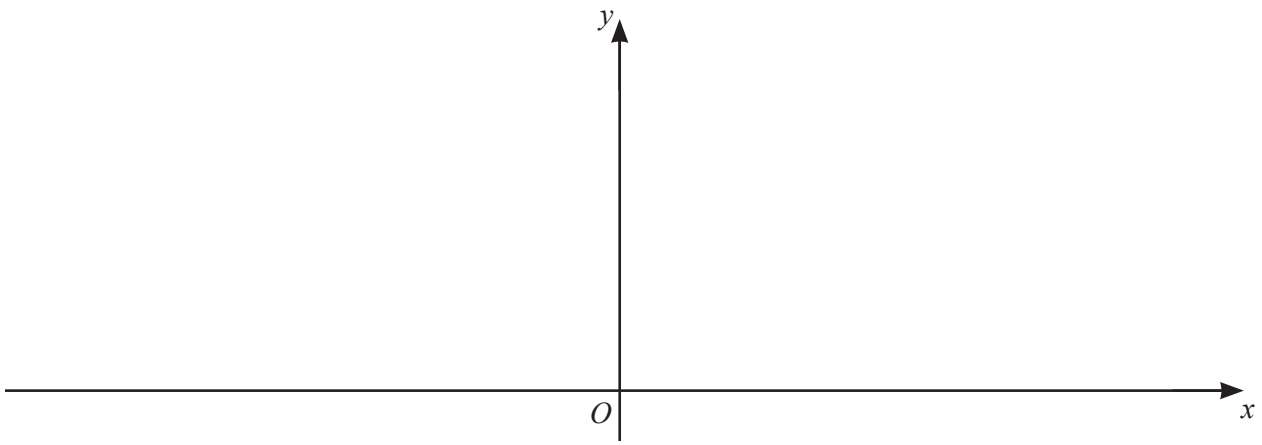
提示：先找平方项为零的位置，再用限域筛选截距与根号分支。

(a) It is given that $\mathrm{f}: x \to (3x+1)^2 - 4$ for $x \geqslant a$, and that f^{-1} exists.

(i) Find the least possible value of a.

(ii) Using this value of a, write down the range of f.

(iii) Using this value of a, sketch the graphs of $y = \mathrm{f}(x)$ and $y = \mathrm{f}^{-1}(x)$ on the axes, stating the intercepts with the coordinate axes.



（a）已知

$$f(x) = (3x+1)^2 - 4, \quad x \geq a$$

且 f^{-1} 存在。
（i）求 a 的最小可能值。
（ii）使用这个 a 值，写出 f 的值域。
（iii）使用这个 a 值，在所给坐标轴上画出 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的图象草图，写出图象与坐标轴的交点。
图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

✓ **答案** （i）$a = -\frac{1}{3}$。
（ii）$y \geq -4$。
（iii）原图为抛物线右支，实心端点为 $\left(-\frac{1}{3}, -4\right)$，轴截距点为 $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$、$(0, -3)$；逆函数图象为 $y = \frac{\sqrt{x+4}-1}{3}$，实心端点为 $\left(-4, -\frac{1}{3}\right)$，轴截距点为 $(-3, 0)$、$\left(0, \frac{1}{3}\right)$。

解析 原函数为

$$f(x) = (3x+1)^2 - 4$$

其图象开口向上，顶点横坐标满足

$$3x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

当定义域从顶点向右延伸时，函数一一对应。若下界小于顶点横坐标，顶点两侧便有不同横坐标对应同一函数值。故

$$a = -\frac{1}{3}$$

此时最小函数值为 -4，故值域为

$$y \geq -4$$

令原函数值为零，得

$$(3x+1)^2 = 4$$

$$3x + 1 = 2 \quad 或 \quad 3x + 1 = -2$$

$$x=\frac{1}{3} \quad 或 \quad x=-1$$

由定义域排除 -1，故原图的横轴截距点为

$$\left(\frac{1}{3},0\right)$$

又有

$$f(0)=1-4=-3$$

故纵轴截距点为

$$(0,-3)$$

由

$$y+4=(3x+1)^2$$

且

$$3x+1\geq 0$$

得

$$x=\frac{\sqrt{y+4}-1}{3}$$

故

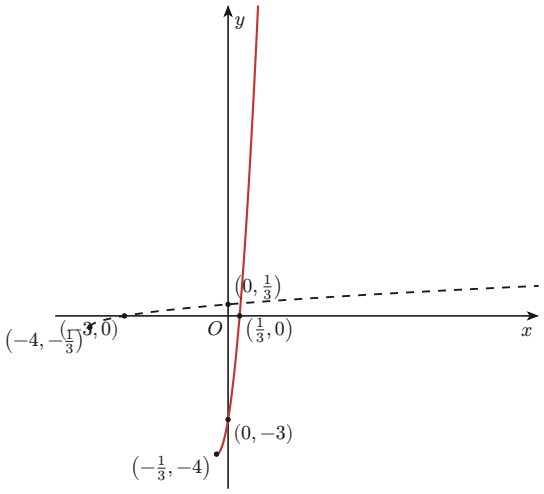
$$f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{x+4}-1}{3}, \quad x\geq -4$$

原图从实心端点 $\left(-\frac{1}{3},-4\right)$ 向右上方延伸，向上弯曲。关于直线 $y=x$ 反射后，逆函数图象从实心端点 $\left(-4,-\frac{1}{3}\right)$ 向右上方延伸，向下弯曲，经过

$$(-3,0), \quad \left(0,\frac{1}{3}\right)$$

答：两图关于直线 $y=x$ 对称，端点及截距点如上。

实线 $y=f(x)$；虚线 $y=f^{-1}(x)$



$\left(-\frac{1}{3},-4\right)$；$\left(-4,-\frac{1}{3}\right)$；$(0,-3)$；$\left(\frac{1}{3},0\right)$；$(-3,0)$；$\left(0,\frac{1}{3}\right)$

7. [2025 · October/November 0606/12 Q4(c)]
提示：先从配方式读顶点，再比较各个零点与定义域下界。

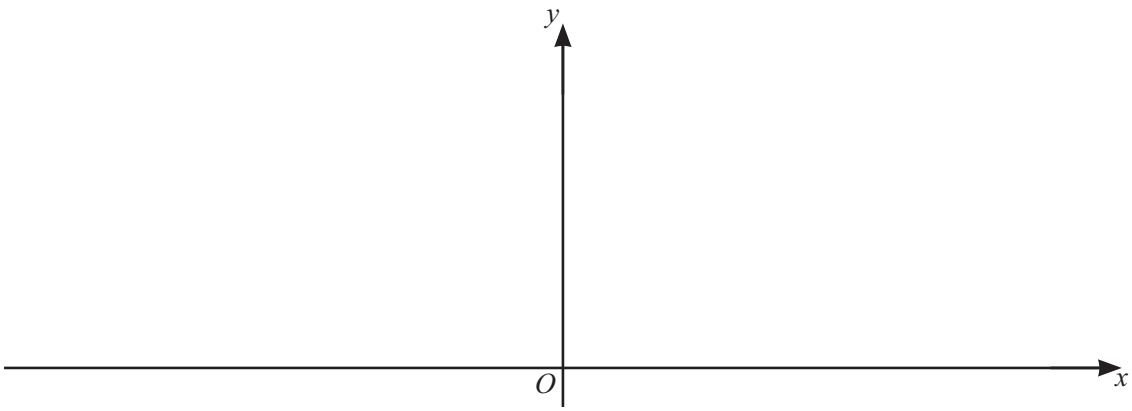
(a) Show that $2x^2+5x+3$ can be written in the form $2(x+a)^2+b$, where a and b are constants to be found.

(b) Hence write down the coordinates of the stationary point on the curve $y=2x^2+5x+3$.

A function f is such that $\mathrm{f}(x)=2x^2+5x+3$, for $x \geqslant p$, where p is a constant.
It is given that f^{-1} exists.

(c) **(i)** Write down the least possible value of p.

(ii) Using your value of p, sketch the graphs of $y=\mathrm{f}(x)$ and $y=\mathrm{f}^{-1}(x)$.
Label each graph.
State the intercepts of each of the graphs with the axes.



(a) 证明 $2x^2+5x+3$ 可以写成 $2(x+a)^2+b$ 的形式，并求出常数 a 和 b。
(b) 由此写出曲线 $y=2x^2+5x+3$ 上驻点的坐标。
函数 f 满足

$$f(x)=2x^2+5x+3, \quad x \geq p$$

其中 p 为常数。已知 f^{-1} 存在。
(c) (i) 写出 p 的最小可能值。
(ii) 使用所求的 p 值，画出 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象草图。标明每条图象，写出每条图象与坐标轴的交点。
图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

✓ **答案** (a) $2x^2+5x+3=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$，故 $a=\frac{5}{4}$，$b=-\frac{1}{8}$。
(b) $\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{8}\right)$。
(c) (i) $p=-\frac{5}{4}$。
(ii) 原图实心端点为 $\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{8}\right)$，轴截距点为 $(-1,0)$、$(0,3)$；逆函数图象为 $y=\frac{\sqrt{8x+1}-5}{4}$，实心端点为 $\left(-\frac{1}{8},-\frac{5}{4}\right)$，轴截距点为 $(3,0)$、$(0,-1)$。两图关于 $y=x$ 对称。

解析 配方得

$$2x^2+5x+3=2\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}\right)+3-\frac{25}{8}=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

故

$$a=\frac{5}{4}, \quad b=-\frac{1}{8}$$

由平方项的最小值为零，得驻点坐标为

$$\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{8}\right)$$

为使逆函数存在，定义域须保留顶点右侧，故下界的最小可能值为

$$p=-\frac{5}{4}$$

令原函数值为零，得

$$2x^2+5x+3=(2x+3)(x+1)=0$$

$$x=-\frac{3}{2}\quad 或\quad x=-1$$

因

$$-\frac{3}{2}<-\frac{5}{4}$$

故舍去 $-\frac{3}{2}$，原图的横轴截距点为

$$(-1,0)$$

又有

$$f(0)=3$$

故纵轴截距点为

$$(0,3)$$

由

$$y+\frac{1}{8}=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2$$

且

$$x+\frac{5}{4}\geq 0$$

得

$$x=\sqrt{\frac{y+\frac{1}{8}}{2}}-\frac{5}{4}=\frac{\sqrt{8y+1}-5}{4}$$

交换横、纵坐标，得

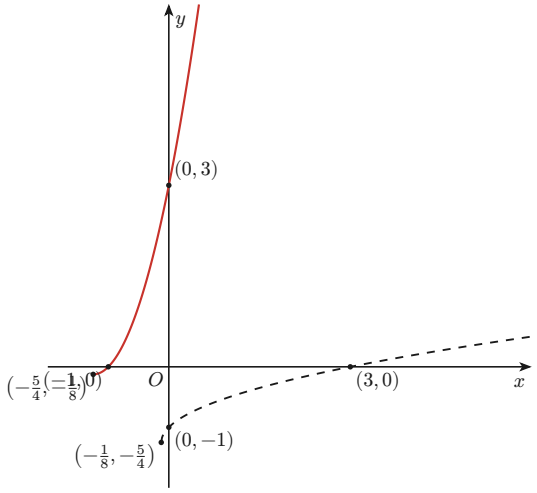
$$f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{8x+1}-5}{4},\quad x\geq -\frac{1}{8}$$

原图从实心端点 $\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{8}\right)$ 向右上方延伸，向上弯曲，标为 $y=f(x)$。
逆函数图象是原图关于直线 $y=x$ 的反射，从实心端点 $\left(-\frac{1}{8},-\frac{5}{4}\right)$ 向右上方延伸，向下弯曲，标为 $y=f^{-1}(x)$。
其轴截距点为

$$(3,0),\quad (0,-1)$$

答：配方结果、驻点、下界及两图的端点和截距点如上。

实线 $y=f(x)$；虚线 $y=f^{-1}(x)$



$\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{8}\right)$；$\left(-\frac{1}{8},-\frac{5}{4}\right)$；$(-1,0)$；$(0,3)$；$(3,0)$；$(0,-1)$

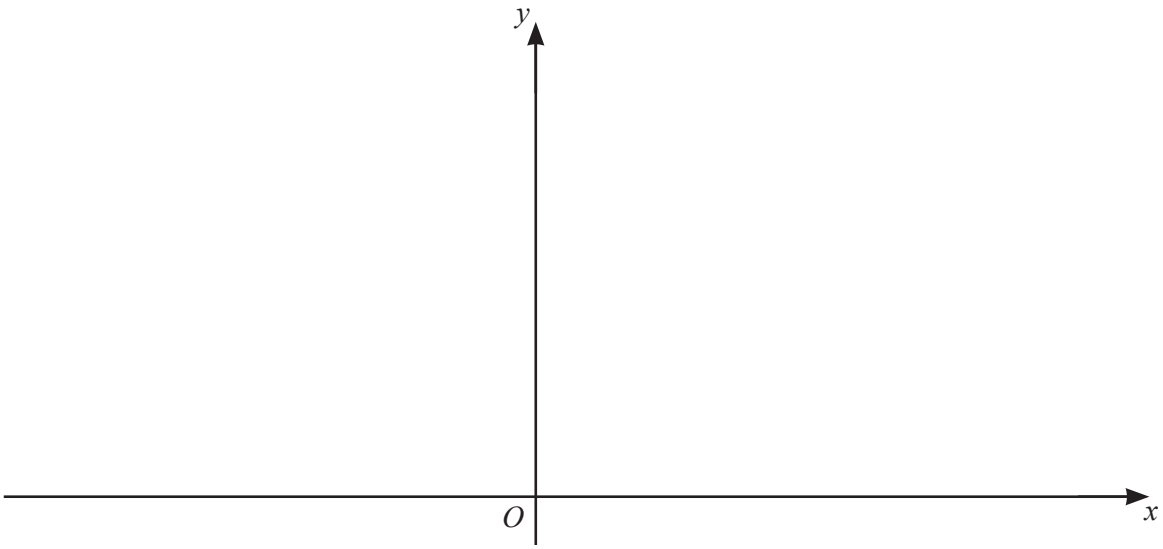
8. [2023 · May/June 0606/12 Q8(c)]

提示：结合递增性与题给方程根数，核对两图交点的位置和个数。

It is given that $\mathrm{f}(x)=2\ln(3x-4)$ for $x>a$.

(a) Write down the least possible value of a.

(c) It is given that the equation $\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}^{-1}(x)$ has two solutions. (You do not need to solve this equation). Using your answer to **part (a)**, sketch the graphs of $y=\mathrm{f}(x)$ and $y=\mathrm{f}^{-1}(x)$ on the axes below, stating the coordinates of the points where the graphs meet the axes.



已知

$$f(x)=2\ln(3x-4),\quad x>a$$

(a) 写出 a 的最小可能值。

(c) 已知方程 $f(x)=f^{-1}(x)$ 有两个解，无需求解这个方程。使用 (a) 的答案，在下方所给坐标轴上画出 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象草图，写出图象与坐标轴的交点坐标。

图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

✓ **答案** (a) $a=\frac{4}{3}$。

(c) 原图递增且向下弯曲，轴截距点为 $\left(\frac{5}{3},0\right)$；逆函数图象为 $y=\frac{e^{\frac{x}{2}}+4}{3}$，递增且向上弯曲，轴截距点为 $\left(0,\frac{5}{3}\right)$。两图关于 $y=x$ 对称，并在该直线上相交两次。

解析 由对数真数为正，得

$$3x-4>0$$

$$x>\frac{4}{3}$$

故

$$a=\frac{4}{3}$$

令原函数值为零，得

$$2\ln(3x-4)=0$$

$$3x-4=1$$

$$x=\frac{5}{3}$$

故原图与横轴的交点为

$$\left(\frac{5}{3},0\right)$$

因零不在定义域内，原图与纵轴不相交。
设

$$y=2\ln(3x-4)$$

则

$$e^{\frac{y}{2}}=3x-4$$

$$x=\frac{e^{\frac{y}{2}}+4}{3}$$

交换横、纵坐标，得

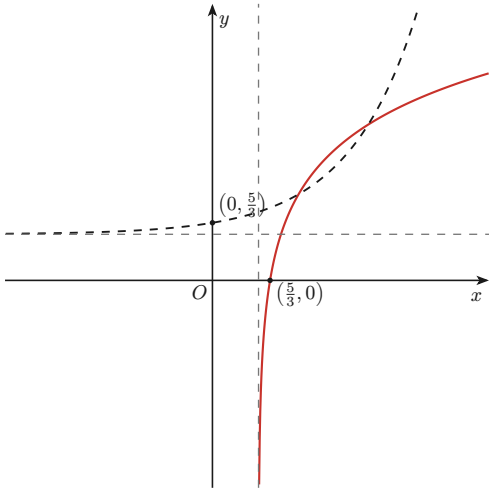
$$f^{-1}(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}+4}{3},\quad x\in\mathbb{R}$$

故逆函数图象与纵轴的交点为

$$\left(0,\frac{5}{3}\right)$$

因逆函数值大于 $\frac{4}{3}$，其图象与横轴不相交。
原图递增且向下弯曲，在直线 $x=\frac{4}{3}$ 右侧，并以该直线为竖直渐近线。其关于直线 $y=x$ 的反射图象递增且向上弯曲，以 $y=\frac{4}{3}$ 为水平渐近线。
原函数递增，两图的交点均在直线 $y=x$ 上。由题给方程有两个解，草图须画出两次相交；两交点之间原图在逆函数图象上方。
答：原图的轴截距点为 $\left(\frac{5}{3},0\right)$，逆函数图象的轴截距点为 $\left(0,\frac{5}{3}\right)$，两图相交两次。

实线 $y=f(x)$；虚线 $y=f^{-1}(x)$



$(\frac{5}{3},0)$；$(0,\frac{5}{3})$

9. [2025 · May/June 0606/12 Q9(d)]

提示：先对应截距和渐近线，再用题给根数核对草图交叉次数。

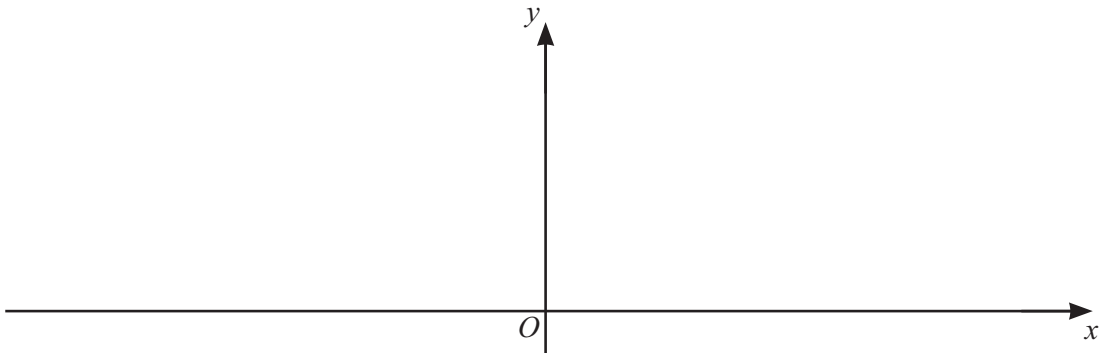
It is given that $\mathrm{f}(x)=2\ln(3x-4)$, for $x>a$, and that f^{-1} exists.

(a) Find the least possible value of a.

(d) It is given that the equation $\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}^{-1}(x)$ has two roots.

For your value of a, sketch the graphs of $y=\mathrm{f}(x)$ and $y=\mathrm{f}^{-1}(x)$ on the axes.

Label each graph.
State the intercepts of each graph with the axes.
State the equations of any asymptotes.



已知

$$f(x)=2\ln(3x-4),\quad x>a$$

且 f^{-1} 存在。
(a) 求 a 的最小可能值。
(d) 已知方程 $f(x)=f^{-1}(x)$ 有两个根。使用所求的 a 值，在所给坐标轴上画出 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象草图。标明每条图象，写出每条图象与坐标轴的交点，并写出所有渐近线的方程。
图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

✓ **答案** (a) $a=\frac{4}{3}$。
(d) 原图递增且向下弯曲，轴截距点为 $(\frac{5}{3},0)$，渐近线为 $x=\frac{4}{3}$；逆函数图象递增且向上弯曲，轴截距点为 $(0,\frac{5}{3})$，渐近线为 $y=\frac{4}{3}$。两图关于 $y=x$ 对称，在该直线上相交两次。

解析 由

$$3x-4>0$$

得

$$x > \frac{4}{3}$$

故下界的最小可能值为

$$a = \frac{4}{3}$$

令原函数值为零，得

$$2\ln(3x-4) = 0$$

$$3x - 4 = 1$$

$$x = \frac{5}{3}$$

故原图的横轴截距点为

$$\left(\frac{5}{3}, 0\right)$$

原函数的定义域不含零，故没有纵轴截距点。
由

$$y = 2\ln(3x-4)$$

得

$$e^{\frac{y}{2}} = 3x - 4$$

$$x = \frac{e^{\frac{y}{2}} + 4}{3}$$

故

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}} + 4}{3}$$

原函数与逆函数的截距点互换坐标，故逆函数图象的纵轴截距点为

$$\left(0, \frac{5}{3}\right)$$

由

$$f^{-1}(x) > \frac{4}{3}$$

知逆函数图象没有横轴截距点。
原图的竖直渐近线为

$$x = \frac{4}{3}$$

反射后，逆函数图象的水平渐近线为

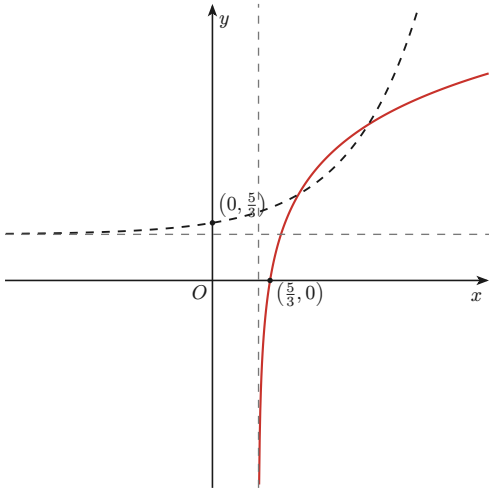
$$y=\frac{4}{3}$$

原图在竖直渐近线右侧，递增且向下弯曲，标为 $y=f(x)$；逆函数图象在水平渐近线上方，递增且向上弯曲，标为 $y=f^{-1}(x)$。

两图关于直线 $y=x$ 对称。由题给方程有两个根，两图在该直线上相交两次；两交点之间原图在逆函数图象上方。

答：两图的轴截距点分别为 $\left(\frac{5}{3},0\right)$、$\left(0,\frac{5}{3}\right)$，渐近线分别为 $x=\frac{4}{3}$、$y=\frac{4}{3}$。

实线 $y=f(x)$；虚线 $y=f^{-1}(x)$



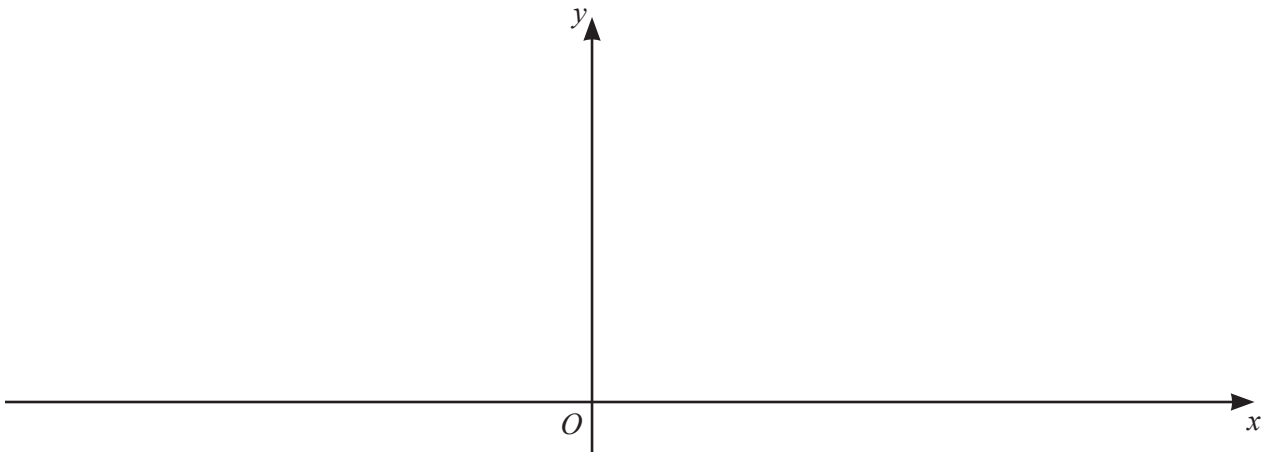
$\left(\frac{5}{3},0\right)$；$\left(0,\frac{5}{3}\right)$

10. [2024 · February/March 0606/12 Q4(c)]

提示：先看负指数决定的走向，再比较两图与各自渐近线的位置。

A function f is such that $\mathrm{f}(x)=2+\mathrm{e}^{-3x}$, $x\in\mathbb{R}$.

(c) On the axes, sketch the graphs of $y=\mathrm{f}(x)$ and $y=\mathrm{f}^{-1}(x)$, stating the coordinates of the points where the curves meet the coordinate axes. State the equations of any asymptotes. Label your curves.



A function g is such that $\mathrm{g}(x)=x^{\frac{3}{2}}+4$, $x\geqslant 0$.

函数 f 满足

$$f(x)=2+e^{-3x},\quad x\in\mathbb{R}$$

(c) 在所给坐标轴上画出 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象草图，写出曲线与坐标轴的交点坐标。写出所有渐近线的方程，并标明各条曲线。
图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。
函数 g 满足

$$g(x)=x^{\frac{3}{2}}+4,\quad x\geq 0$$

✓ **答案** $f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}\ln(x-2)$，$x>2$。原图递减且向上弯曲，轴截距点为 $(0,3)$，渐近线为 $y=2$；逆函数图象递减且向上弯曲，轴截距点为 $(3,0)$，渐近线为 $x=2$。

解析 由

$$f(x)=2+e^{-3x}$$

得

$$f(0)=2+1=3$$

且

$$f(x)>2$$

故原图经过 $(0,3)$，与横轴不相交。
当横坐标趋向正无穷时，指数项趋近零，故原图的水平渐近线为

$$y=2$$

原图位于此直线上方，由左向右递减且向上弯曲，标为 $y=f(x)$。
设

$$y=2+e^{-3x}$$

则

$$y-2=e^{-3x}$$

$$\ln(y-2)=-3x$$

$$x=-\frac{1}{3}\ln(y-2)$$

交换横、纵坐标，得

$$f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}\ln(x-2),\quad x>2$$

将原图关于直线 $y=x$ 反射，所得逆函数图象经过

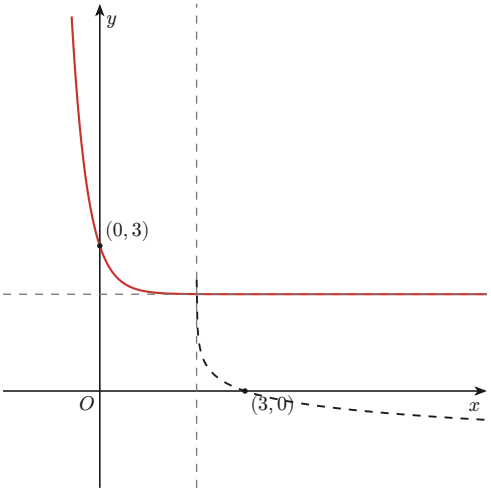
$$(3,0)$$

其竖直渐近线为

$$x=2$$

逆函数图象位于此直线右侧，递减且向上弯曲，与纵轴不相交，标为 $y=f^{-1}(x)$。
答：原图的轴截距点为 $(0,3)$，渐近线为 $y=2$；逆函数图象的轴截距点为 $(3,0)$，渐近线为 $x=2$。

实线 $y=f(x)$；虚线 $y=f^{-1}(x)$



$(0,3)$；$(3,0)$

题型 3　交换变量，用指数与对数互消求逆函数

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **函数往返对应：**本例的函数把 2 对应到 3。

$$g(2)=4e^{2-2}-1=3$$

把原输出还原为原输入的函数称为_____，记为 g^{-1}。

$$g^{-1}(3)=2$$

上标 -1 表示反函数，不表示倒数。

② **指数对数互消：**以 e 为底的对数称为自然对数，记为 ln。

$$e^0=1,\ln 1=0$$

指数与自然对数互相抵消，对数的真数必须大于 0。

$\ln(e^2)=2$

$\ln(e^t)=$_____

$e^{\ln 3}=3$

$e^{\ln t}=$_____，$t>0$

③ **交换变量求逆：**写出函数式后，交换 x、y，再解出 y。指数式取自然对数，对数式改写为指数式。

本例交换后有

$x=4e^{y-2}-1$

$e^{y-2}=\frac{x+1}{4}$

$y-2=\ln\left(\frac{x+1}{4}\right)$

对数式交换后，如

$x=2\ln(y+1)$

$\ln(y+1)=\frac{x}{2}$

$y+1=e^{\frac{x}{2}}$

④ **分母指数分离：**指数在分母中，先移项，再去分母。分离指数后，取自然对数。

$$x=3-\frac{2}{e^y+1}$$

$$3-x=\frac{2}{e^y+1}$$

$$e^y=\frac{2}{3-x}-1$$

$$y=\ln\left(\frac{2}{3-x}-1\right)$$

⑤ **定义域与值域：**原函数与反函数交换输入、输出，两个取值范围也随之交换。

原函数的值域是反函数的_____。

原函数的定义域是反函数的_____。

续用上一条的函数关系，原自变量满足下列条件时，有

$$x \geq 0, e^x \geq 1$$

$$0 < \frac{2}{e^x + 1} \leq 1$$

$$2 \leq 3 - \frac{2}{e^x + 1} < 3$$

端点能取到用等号，有限过程不能取到的端点不用等号。

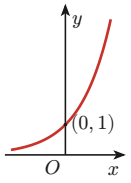
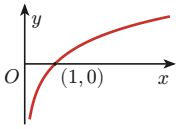
⑥ **对数曲线作图：**令横坐标或纵坐标为 0，求两轴交点。对数真数从正侧趋近 0 时，函数值趋于负无穷。例如

$$y = \ln(2 - x), 0 \leq x < 2$$

图象要素	结果
纵轴交点	$(0, \ln 2)$
横轴交点	$(1, 0)$
竖直渐近线	$x = 2$
曲线走向	从实心端点向右下方延伸，逐渐接近渐近线。

填空：①反函数　②t　③t　④定义域　⑤值域

互换横、纵坐标

	$y = e^x$	$y = \ln x$
图像		
定义域	$\mathbb{R}$	$x > 0$
值域	$y > 0$	$\mathbb{R}$
对应点	$(0, 1)$	$(1, 0)$

点石成金　题目出现求指数或对数函数的反函数时，先交换 x、y，再用指数与对数互消。

例 1　[2026 · February/March 0606/12 Q2(b)]

(b) The function g is defined by $g(x) = 4e^{x-2} - 1$ for all real x.

Find an expression for $g^{-1}(x)$.

(b) 函数 g 对所有实数 x 定义为 $g(x) = 4e^{x-2} - 1$。求 $g^{-1}(x)$ 的表达式。

解答　设

$$y = 4e^{x-2} - 1$$

交换 x、y，得

$$x = 4e^{y-2} - 1$$

$$e^{y-2} = \frac{x + 1}{4}$$

方法：先看指数外的平移与倍数，交换变量后把指数项单独留下。

辨析：反函数是输入输出的逆向对应，倒数是函数值的乘法逆元。

拓展：原函数与反函数的图象关于直线 $y = x$ 对称。

两边取自然对数，得

$$y-2=\ln\left(\frac{x+1}{4}\right)$$

$$y=2+\ln\left(\frac{x+1}{4}\right)$$

原函数的值域为 $y>-1$，故反函数的定义域为 $x>-1$。
答：$g^{-1}(x)=2+\ln\left(\frac{x+1}{4}\right), x>-1$。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/13 Q8(c)]
提示：看指数里的运算顺序，取对数后按相反顺序还原。

A function f is defined by $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{2x+1}$ for $x\in\mathbb{R}$.

(c) Find an expression for $\mathrm{f}^{-1}(x)$.

函数 f 定义为 $f(x)=e^{2x+1}, x\in\mathbb{R}$。(c) 求 $f^{-1}(x)$ 的表达式。

✓ **答案**

$$f^{-1}(x)=\frac{\ln x-1}{2}$$

解析 设

$$y=e^{2x+1}$$

交换 x、y，得

$$x=e^{2y+1}$$

两边取自然对数，得

$$\ln x=2y+1$$

$$y=\frac{\ln x-1}{2}$$

原函数的值域为 $y>0$，故上述对数的真数为正。
答：$f^{-1}(x)=\frac{\ln x-1}{2}, x>0$。

2. [2025 · May/June 0606/12 Q9(c)]
提示：先确定真数为正的范围，再交换自变量与函数值。

It is given that $\mathrm{f}(x)=2\ln(3x-4)$, for $x>a$, and that f^{-1} exists.

(a) Find the least possible value of a.

(c) For your value of a, find an expression for $\mathrm{f}^{-1}(x)$.

已知 $f(x)=2\ln(3x-4)$，定义域为 $x>a$，且 f^{-1} 存在。(a) 求 a 的最小可能值。(c) 使用该 a 的值，求 $f^{-1}(x)$ 的表达式。

✓ **答案** (a) $a=\frac{4}{3}$；(c) $f^{-1}(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}+4}{3}$。

解析 对数真数须为正，故

$$3x-4>0$$

$$x>\frac{4}{3}$$

所以（a）中 a 的最小可能值为 $\frac{4}{3}$。设

$$y = 2\ln(3x-4)$$

交换 x、y，得

$$x = 2\ln(3y-4)$$

$$\ln(3y-4) = \frac{x}{2}$$

$$3y-4 = e^{\frac{x}{2}}$$

$$y = \frac{e^{\frac{x}{2}}+4}{3}$$

因指数项恒正，所得 $y > \frac{4}{3}$，符合原定义域。答：（a）$a = \frac{4}{3}$；（c）

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}+4}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

3. [2025 · May/June 0606/21 Q7(b)]

提示：看分母中的指数项，比原函数在起点与无穷远处的取值。

(b) The function g is defined by $\mathrm{g}(x) = 2 - \dfrac{3}{\mathrm{e}^{x}+2}$ for $x \geqslant 0$.

Given that g^{-1} exists, find an expression for $\mathrm{g}^{-1}(x)$ and state its domain.

(b) 函数 g 定义为 $g(x) = 2 - \frac{3}{e^x+2}, x \geq 0$。已知 g^{-1} 存在，求 $g^{-1}(x)$ 的表达式，并写出它的定义域。

✓ **答案** $g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{3}{2-x} - 2\right)$；定义域为 $1 \leq x < 2$。

解析 设

$$y = 2 - \frac{3}{e^x+2}$$

交换 x、y，得

$$x = 2 - \frac{3}{e^y+2}$$

$$2 - x = \frac{3}{e^y+2}$$

$$e^y + 2 = \frac{3}{2-x}$$

$$e^y = \frac{3}{2-x} - 2$$

$$y = \ln\left(\frac{3}{2-x} - 2\right)$$

由原函数的定义域 $x \geq 0$，得

$$e^x \geq 1$$

$$e^x + 2 \geq 3$$

$$0 < \frac{3}{e^x+2} \leq 1$$

$$1 \le 2 - \frac{3}{e^x + 2} < 2$$

故原函数的值域为 $1 \le y < 2$，这也是反函数的定义域。此时 $\frac{3}{2-x} - 2 \ge 1 > 0$，对数有意义，所得反函数值非负。

答：$g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{3}{2-x} - 2\right)$，

定义域为 $1 \le x < 2$。

4. [2024 · February/March 0606/12 Q4(b)]

提示：先看指数项外的常数，取对数后再看指数的负系数。

A function f is such that $\mathrm{f}(x) = 2 + \mathrm{e}^{-3x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Find an expression for f^{-1}.

函数 f 满足 $f(x) = 2 + e^{-3x}, x \in \mathbb{R}$。(b) 求 f^{-1} 的表达式。

✓ **答案**

$$f^{-1}(x) = -\frac{\ln(x-2)}{3}$$

解析 设

$$y = 2 + e^{-3x}$$

交换 x、y，得

$$x = 2 + e^{-3y}$$

$$x - 2 = e^{-3y}$$

两边取自然对数，得

$$\ln(x-2) = -3y$$

$$y = -\frac{\ln(x-2)}{3}$$

原函数的值域为 $y > 2$，故反函数的定义域为 $x > 2$，对数有意义。

答：$f^{-1}(x) = -\frac{\ln(x-2)}{3}, x > 2$。

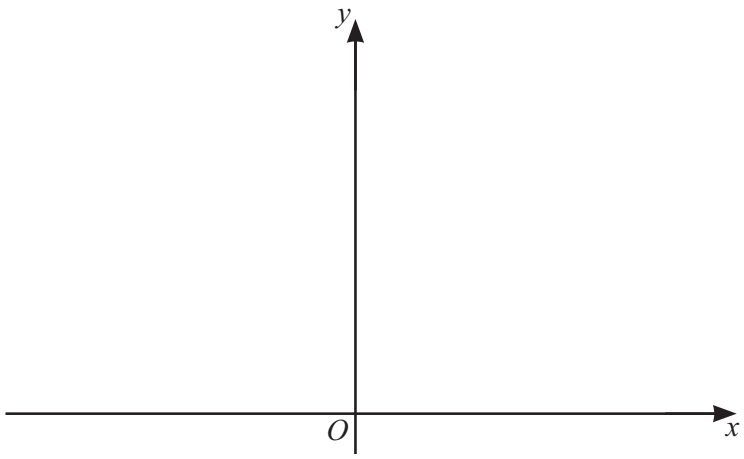
5. [2025 · May/June 0606/13 Q9(b)]

提示：作图看两轴交点与真数趋零，求逆后比输入输出范围。

The function f is defined by $\mathrm{f}(x) = -2x^2 + 9x - 10$ for $0 \leqslant x \leqslant 3$.

(b) The function g is defined by $\mathrm{g}(x) = 3\ln(5 - 2x)$ for $0 \leqslant x < 2.5$.

(i) On the axes, sketch the graph of $y = \mathrm{g}(x)$.
State the exact values of the intercepts with the coordinate axes and the equation of any asymptote.



(ii) Find an expression for $g^{-1}(x)$.

(iii) Find the domain and range of g^{-1}.
Give each of your answers in exact form.

函数 f 定义为 $f(x)=-2x^2+9x-10, 0\le x\le 3$。(b) 函数 g 定义为 $g(x)=3\ln(5-2x), 0\le x<2.5$。(i) 在所给坐标轴上，画出 $y=g(x)$ 的图象草图。写出图象与两坐标轴交点的精确坐标，以及所有渐近线的方程。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。(ii) 求 $g^{-1}(x)$ 的表达式。(iii) 求 g^{-1} 的定义域和值域，答案均须用精确形式表示。

✓ **答案** (i) 图象从实心点 $(0,3\ln 5)$ 向右下方延伸，经过 $(2,0)$，并趋近竖直渐近线 $x=\frac{5}{2}$；(ii) $g^{-1}(x)=\frac{5-e^{\frac{x}{3}}}{2}$；(iii) 定义域为 $x\le 3\ln 5$，值域为 $0\le y<\frac{5}{2}$。

解析 令 $x=0$，得 $g(0)=3\ln 5$，

故与纵轴的交点为 $(0,3\ln 5)$。令 $y=0$，得

$$3\ln(5-2x)=0$$

$$5-2x=e^0=1$$

$x=2$，

故与横轴的交点为 $(2,0)$。

当 x 从左侧趋近 $\frac{5}{2}$ 时，$5-2x$ 从正侧趋近 0，函数值趋于负无穷，故竖直渐近线为 $x=\frac{5}{2}$。

随 x 增大，$5-2x$ 减小，曲线递减。图象从实心点 $(0,3\ln 5)$ 向右下方延伸，经过 $(2,0)$，越向右越陡，并逐渐接近该渐近线。

设

$$y=3\ln(5-2x)$$

交换 x、y，得

$$x=3\ln(5-2y)$$

$$\ln(5-2y)=\frac{x}{3}$$

$$5-2y=e^{\frac{x}{3}}$$

$$y=\frac{5-e^{\frac{x}{3}}}{2}$$

由原函数的定义域，得

$$0 \le x < \frac{5}{2}$$

$$0 < 5 - 2x \le 5$$

$$\ln(5-2x) \le \ln 5$$

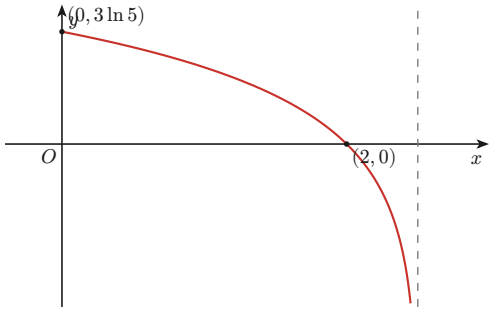
$g(x) \le 3\ln 5$。

原函数的值域为所有不大于 $3\ln 5$ 的实数。交换定义域与值域，得反函数的定义域为 $x \le 3\ln 5$，值域为 $0 \le y < \frac{5}{2}$。

答：两轴交点为 $(0, 3\ln 5)$、$(2, 0)$，渐近线为 $x = \frac{5}{2}$；$g^{-1}(x) = \frac{5-e^{\frac{x}{3}}}{2}$，

其定义域为 $x \le 3\ln 5$，值域为 $0 \le y < \frac{5}{2}$。

实线 $y = g(x)$



$(0, 3\ln 5)$；$(2, 0)$

题型 4　比较内层值域与外层定义域，判断复合或限定参数

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **函数的输入：**本例规定输入为任意实数。允许输入的数构成函数的定义域，所以本例的定义域为 _____。

② **函数的输出：**本例中，设输出为实数 y，反求对应的输入。

$$y = 2x - 1$$

$$x = \frac{y+1}{2} \in \mathbb{R}$$

每个实数都能成为输出，所以值域为 _____。

③ **复合的次序：**本例的 f^2 表示把函数 f 连续使用两次。$f^2(x) =$ _____

两个不同函数复合时，靠近输入的函数先运算。

$fg(x) = f(g(x))$	$gf(x) = g(f(x))$
先算 $g(x)$，再代入 f。	先算 $f(x)$，再代入 g。

④ **复合存在条件：**内层函数的输出，要作为外层函数的输入。在内层定义域内处处有定义，要求内层值域是外层定义域的 _____。本例中，f 的值域与定义域都是 $\mathbb{R}$，所以能连续使用。

⑤ **平方倒数符号：**遇到平方的倒数，先判平方的正负，再判倒数的正负。例如：

$$(-2)^2 = 4$$

$$\frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} > 0$$

实数 $x \ne 0$ 时，同样有：

$$x^2 > 0$$

$$\frac{1}{x^2} > 0$$

⑥ **参数取值条件：**当 $x \geq 0$ 时，考虑下列函数。

$$h(x) = e^x + b$$

因 e^x 随 x 增大而增大，最小输出在 $x = 0$ 处取得。

$$h(x) \geq h(0) = e^0 + b = 1 + b$$

若外层要求输入不小于 4，用最小输出列不等式。

$$1 + b \geq 4$$

$$b \geq 3$$

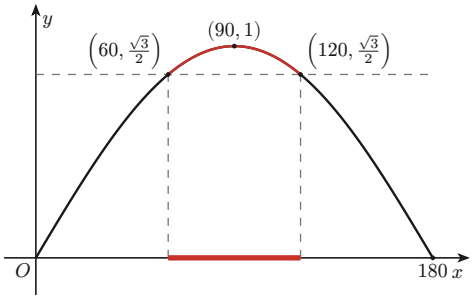
⑦ **正弦输出与连续区间：**角度制中，$\sin 0° = 0$、$\sin 90° = 1$、$\sin 180° = 0$。在0°至90°正弦值递增，在90°至180°递减，图象关于$x = 90°$对称。已知$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

若内层输入从60°起连续延伸，外层要求其输出满足$\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$，则必须取

$60° \leq x \leq 120°$

两个端点都使正弦值等于下界，故均可取。继续向右越过120°会立刻出现小于下界的输出，不能为了使用后续周期而跳过这段不满足条件的区间。因此最大右端点是120°。



x以度为单位；红色对应$60° \leq x \leq 120°$。

填空：①$\mathbb{R}$　②$\mathbb{R}$　③$f(f(x))$　④子集

点石成金　题目出现复合函数能否构成或对所有给定输入成立的参数条件时，先比较内层值域与外层定义域。

例 1　[2025 · May/June 0606/23 Q4(a)]

The function f is defined by　$f(x) = 2x - 1$　for $x \in \mathbb{R}$.

(a) Explain why the function f^2 can be formed.

函数 f 定义为

$$f(x) = 2x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) 解释为什么可以构成函数 f^2。

解答　函数 f 的定义域为 $\mathbb{R}$。任取实数 y，由

$$y = 2x - 1$$

得

方法：先看内层值域与外层定义域，再检查前者是否包含于后者。

$$x = \frac{y+1}{2} \in \mathbb{R}$$

! 辨析：定义域是允许的输入集合，值域是实际的输出集合。

所以 f 的值域为 $\mathbb{R}$。其值域包含于自身的定义域，输出可再次作为输入。答：函数 f 的值域与定义域均为 $\mathbb{R}$，所以可以构成 f^2。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/21 Q9(a)]

提示：先判平方倒数的符号，再比外层允许输入的符号。

The functions f and g are defined by

$$\mathrm{f}(x) = \frac{3x^2}{4x-1} \quad \text{for } x < 0$$
$$\mathrm{g}(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{for } x < 0.$$

(a) Explain why the function fg does **not** exist.

函数 f 和 g 定义如下：

$$f(x) = \frac{3x^2}{4x-1}, \quad x < 0$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x < 0$$

(a) 解释为什么复合函数 fg 不存在。

✓ **答案** g 的值域为 $(0, \infty)$，不包含于 f 的定义域 $(-\infty, 0)$，所以 fg 不存在。

解析 复合函数 fg 表示先算 $g(x)$，再将结果代入 f。由 $x < 0$，得

$$x^2 > 0$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

而函数 f 要求输入小于 0，所以 $g(x)$ 不能作为 f 的输入。答：g 的值域为正实数集，与 f 的定义域不相交，所以 fg 不存在。

2. [2025 · February/March 0606/22 Q7(a)]

提示：从给定区间的左端点找最小输出，与外层下界比较。

It is given that $\mathrm{f}(x) = 2\mathrm{e}^x + a$ for $x \geqslant 0$, where a is an integer

and $\mathrm{g}(x) = \sqrt{x-1}$ for $x \geqslant 1$.

(a) Find the least value of a so that the function gf exists for all $x \geqslant 0$.

已知

$$f(x) = 2e^x + a, \quad x \geq 0$$

其中 a 为整数，且

$$g(x) = \sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$$

(a) 求 a 的最小值，使复合函数 gf 对所有 $x \geq 0$ 都存在。

✓ **答案**

$$a = -1$$

解析 由 $x \geq 0$，得

$$e^x \geq e^0 = 1$$

$$f(x) = 2e^x + a \geq 2 + a$$

当 $x = 0$ 时取等号，所以 f 的最小输出为 $2 + a$。函数 g 的定义域为 $[1, \infty)$。要使 gf 对所有 $x \geq 0$ 都存在，须使 f 的最小输出不小于 1，故

$$2 + a \geq 1$$

$$a \geq -1$$

又因为 a 为整数，且 $a = -1$ 时所有输出均符合要求。答：a 的最小值为 -1。

3. [2023 · May/June 0606/21 Q8(b)(ii)]
提示：内层输出须符合外层定义域，先找最小输出。

(b) The functions g and h are defined by

$$\mathrm{g}(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 3} \quad \text{for} \quad x \geqslant 1,$$

$$\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{4x} \quad \text{for} \quad x \geqslant k.$$

(ii) State the least value of the constant k such that gh(x) can be formed.

(b) 函数g和h定义如下：

$$g(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 3}, \quad x \geq 1$$

$$h(x) = e^{4x}, \quad x \geq k$$

(ii) 写出使$gh(x)$能够构成的常数k的最小值。

✓ **答案** $k = 0$

解析 $gh(x)$先求$h(x)$，再把结果代入g。函数g要求输入不小于1，故须使

$$h(x) \geq 1$$

因e^{4x}随x增大而增大，在$x \geq k$上有

$$h(x) \geq h(k) = e^{4k}$$

且等号在$x = k$时成立。因此要求

$$e^{4k} \geq 1$$

由$1 = e^0$，得

$$4k \geq 0$$

$$k \geq 0$$

当$k = 0$时，所有允许的输入均满足$h(x) \geq 1$，可以构成$gh(x)$。答：k的最小值为0。

4. [2025 · October/November 0606/11 Q4(c)(i)]
提示：由外层定义域列正弦值的限制，再连续考察角度区间。

(c) Functions f and g are defined as follows.

$\text{f}: x \mapsto \sin x \qquad \text{for } 30° \leqslant x \leqslant a°$

$\text{g}: x \mapsto \sqrt{x - \frac{1}{2}} \qquad \text{for } x \geqslant \frac{1}{2}$

It is given that the function gf exists.

(i) Find the value of a so that the domain of gf is as large as possible.

You may use the information that $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

(c) 函数f和g定义如下：

$$f(x) = \sin x, \quad 30° \le x \le a°$$

$$g(x) = \sqrt{x - \frac{1}{2}}, \quad x \ge \frac{1}{2}$$

已知函数gf存在。
(i) 求a的值，使gf的定义域尽可能大。
可使用$\sin 30° = \frac{1}{2}$这一信息。

✓ **答案** $a = 150$

解析 $gf(x)$先求$f(x)$，再把结果代入g。由g的定义域，须使

$$\sin x \ge \frac{1}{2}$$

已知

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

由正弦图象关于$x = 90°$对称，得

$$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \frac{1}{2}$$

在$30° \le x \le 90°$上，正弦值由$\frac{1}{2}$增至1；在$90° \le x \le 150°$上，正弦值由1减至$\frac{1}{2}$。因此，从30°起连续满足条件的最大区间为

$$30° \le x \le 150°$$

若$a > 150$，定义域会包含150°与180°之间的某些角。这些角的正弦值小于$\frac{1}{2}$，不符合要求。答：$a = 150$。

5. [2026 · May/June 0606/22 Q8(c)(i)]
提示：用内层定义域的左端点求最小输出，再与外层定义域比较。

The function f is defined, for $x \geqslant -1$, by $\text{f}(x) = 1 + 2^x$.

(c) The function g is defined, for $x \geqslant -1$, by $\text{g}(x) = x(x + k)$ where k is a constant.

(i) Explain why gf exists.

函数f在$x \ge -1$上定义为

$$f(x) = 1 + 2^x$$

(c) 函数g在$x \ge -1$上定义为

$$g(x)=x(x+k)$$

其中k为常数。

(i) 解释为什么gf存在。

✓ **答案** f的值域$\left[\frac{3}{2},\infty\right)$包含于$g$的定义域$[-1,\infty)$，所以$gf$存在。

解析 $gf(x)$先求$f(x)$，再把结果代入g。因2^x随x增大而增大，且$x\geq -1$，有

$$2^x\geq 2^{-1}=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=1+2^x\geq 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

等号在$x=-1$时成立。随x增大，$f(x)$连续增大且无上界，故f的值域为$\left[\frac{3}{2},\infty\right)$。函数$g$的定义域为$[-1,\infty)$，而

$$\left[\frac{3}{2},\infty\right)\subseteq[-1,\infty)$$

所以f的所有输出均可作为g的输入。 答：f的值域包含于g的定义域，所以gf存在。

题型 5 令对数真数大于零，求允许的自变量范围

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **真数取正条件：** 在 $\log_5(12x-4)$ 中，5 为底数，$12x-4$ 为真数。由底数得到真数所需的指数，就是对数。

$$5^2=25$$

$$\log_5 25=2$$

底数大于 0 且不等于 1 时，真数须_____。

$$12x-4>0$$

② **变换坐标关系：** 以 e^y 为纵坐标，其中 e 为约等于 2.718 的常数。m 为斜率，c 为纵截距。横坐标取 x^3 或 x^2 时，直线关系分别为：

横坐标为 x^3	横坐标为 x^2
$e^y=mx^3+c$	$e^y=mx^2+c$

③ **两点求直线式：** 两点的纵坐标差除以横坐标差，得斜率 m。已知 m 后，代入一点求 c。如直线经过 $(1,7)$ 与 $(3,3)$：

$$m=\frac{3-7}{3-1}=-2$$

$$7=-2\times 1+c$$

$$c=7+2=9$$

④ **指数式取对数：** ln 表示以 e 为底的自然对数。

$$e^0=1$$

$$\ln 1=0$$

$$\ln(e^y)=y$$

真数大于 0 时，两边取_____，可求出 y。例如：

$$e^y=9-2x^3$$

$$y=\ln(9-2x^3)$$

⑤ **立方不等式求解：**真数含 x^3，先将 x^3 单独留在一边。乘除负数时，不等号须_____。立方在实数范围内递增，开立方后方向不变。

$$9-2x^3>0$$

$$-2x^3>-9$$

$$x^3<\frac{9}{2}$$

$$x<\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

⑥ **平方不等式求解：**真数含 x^2，先求 x^2 的范围。平方小于正数，x 位于正、负平方根之间。

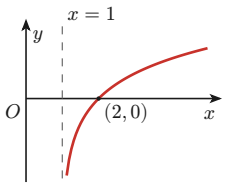
$$12-3x^2>0$$

$$x^2<4$$

因此 x 的范围为_____。

⑦ 对数函数的边界与取值

$$y=\ln(x-1),\quad x>1$$



填空：①大于 0　②自然对数　③改变方向　④$-2<x<2$

点石成金　题目出现对数存在，或求由指数图象所得方程的适用范围时，先令对数的真数大于零。

例 1 [2025 · May/June 0606/11 Q8(a)]

(a) Write down the set of values of x for which $\log_5(12x-4)$ exists.

8 (a) 写出使 $\log_5(12x-4)$ 存在的 x 的取值范围。

解答 对数存在，真数须大于 0，得

$$12x-4>0$$

$$12x>4$$

$$x>\frac{1}{3}$$

答：$x>\frac{1}{3}$。

方法：先圈出对数括号内的式子，再列它大于零的不等式。

辨析：底数是幂的基底，真数是对数所作用的数。

例 2　[2023 · May/June 0606/12 Q8(a)]

It is given that $f(x) = 2\ln(3x-4)$ for $x > a$.

(a) Write down the least possible value of a.

已知函数
$f(x) = 2\ln(3x-4),\quad x > a$

(a) 写出 a 的最小可能值。

解答 由对数的真数大于 0，得

$$3x - 4 > 0$$

$$3x > 4$$

$$x > \frac{4}{3}$$

方法：先解 3x−4>0，再与 x>a 比较。

! 辨析：x 不取端点；a 可等于端点。

题设为 $x > a$，故

$$a \geq \frac{4}{3}$$

答：a 的最小可能值为 $\frac{4}{3}$。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/22 Q4(b)]

提示：看真数中立方项的系数，除以负数时核对不等号方向。

Variables x and y are such that when e^y is plotted against x^3, a straight-line graph is obtained.

This line passes through the points (1, 13.5) and (7.5, 0.5).

(a) Find y in terms of x.

(b) Find the values of x for which your equation is valid.

4 变量 x 与 y 满足如下关系：以 x^3 为横坐标、e^y 为纵坐标作图，所得图象是一条直线。
这条直线经过点 $(1, 13.5)$ 和 $(7.5, 0.5)$。
(a) 用 x 表示 y。
(b) 求使所求方程成立的 x 的取值范围。

✓ **答案** (a) $y = \ln(15.5 - 2x^3)$；(b) $x < \sqrt[3]{7.75}$。

解析 (a) 以 x^3 为横坐标，以 e^y 为纵坐标，设直线关系为

$$e^y = mx^3 + c$$

由直线经过两点，得

$$m = \frac{0.5 - 13.5}{7.5 - 1} = \frac{-13}{6.5} = -2$$

代入点 $(1, 13.5)$，得

$$13.5 = -2 \times 1 + c$$

$$c = 13.5 + 2 = 15.5$$

$$e^y = 15.5 - 2x^3$$

两边取自然对数，得

$$y = \ln(15.5 - 2x^3)$$

(b) 方程成立，真数须大于 0，得

$$15.5 - 2x^3 > 0$$

$$-2x^3 > -15.5$$

$$x^3 < 7.75$$

立方在实数范围内递增，故

$$x < \sqrt[3]{7.75}$$

答：(a) $y = \ln(15.5 - 2x^3)$；(b) $x < \sqrt[3]{7.75}$。

2. [2025 · October/November 0606/22 Q9(a)]
提示：看真数为正时的范围，比较题设端点与所得边界。

It is given that $\mathrm{f}(x) = \ln(2x+5)$ for $x > a$, where a is a constant.

(a) Write down the least possible value of a.

已知函数
$f(x) = \ln(2x + 5), \quad x > a$

其中 a 为常数。
(a) 写出 a 的最小可能值。

✓ **答案** $-\frac{5}{2}$

解析 由对数的真数大于 0，得

$$2x + 5 > 0$$

$$2x > -5$$

$$x > -\frac{5}{2}$$

题设为 $x > a$，故

$$a \geq -\frac{5}{2}$$

答：a 的最小可能值为 $-\frac{5}{2}$。

3. [2025 · May/June 0606/12 Q9(a)]
提示：看对数括号内的式子，比较题设范围是否全落在定义域内。

It is given that $\mathrm{f}(x) = 2\ln(3x-4)$, for $x > a$, and that f^{-1} exists.

(a) Find the least possible value of a.

已知函数
$f(x) = 2\ln(3x - 4), \quad x > a$

且反函数 f^{-1} 存在。
(a) 求 a 的最小可能值。

✓ **答案** $\frac{4}{3}$

解析 由对数的真数大于 0，得

$$3x-4>0$$

$$3x>4$$

$$x>\frac{4}{3}$$

题设为 $x>a$，故

$$a\geq\frac{4}{3}$$

答：a 的最小可能值为 $\frac{4}{3}$。

4. [2025 · February/March 0606/22 Q5(b)]
提示：看真数中的平方项，求范围时同时考虑正、负两侧。

When e^{y} is plotted against x^{2}, a straight-line graph with gradient -3 is obtained. The line passes through the point $(4.30, 5.85)$.

(a) Find y in terms of x.

(b) Find the values of x for which y exists.

5 以 x^2 为横坐标、e^y 为纵坐标作图，所得图象是一条斜率为 -3 的直线。
这条直线经过点 $(4.30, 5.85)$。
(a) 用 x 表示 y。
(b) 求使 y 存在的 x 的取值范围。

✓ **答案** (a) $y=\ln(18.75-3x^2)$；(b) $-2.5<x<2.5$。

解析 (a) 以 x^2 为横坐标，以 e^y 为纵坐标，斜率为 -3，设直线关系为

$$e^{y}=-3x^{2}+c$$

代入点 $(4.30, 5.85)$，得

$$5.85=-3\times4.30+c$$

$$c=5.85+12.90=18.75$$

$$e^{y}=18.75-3x^{2}$$

两边取自然对数，得

$$y=\ln(18.75-3x^{2})$$

(b) y 存在，真数须大于 0，得

$$18.75-3x^{2}>0$$

$$-3x^{2}>-18.75$$

$$x^{2}<6.25$$

由 $6.25 = 2.5^2$，得

$$-2.5 < x < 2.5$$

答：(a) $y = \ln(18.75 - 3x^2)$；(b) $-2.5 < x < 2.5$。

题型 6　交换变量解二次关系，按原定义域选逆函数分支

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **配成平方形式：**题中有 $1 - 4x - x^2$，先提出负号，再配方。

$$1 - 4x - x^2 = -(x^2 + 4x) + 1 = -(x^2 + 4x + 4) + 5 = 5 - (x + 2)^2$$

顶点的横坐标为 _____，函数的最大值为 _____。

② **截取单调区间：**不同输入的函数值互不相同，称为一一对应。抛物线跨过顶点时，同一函数值可能对应两个输入。将定义域限制在顶点的一侧，可使函数一一对应。

右侧递减：	左侧递增：
$x \geq -2$	$x \leq -2$
定义域为 $x \geq k$ 时，	定义域为 $x \leq p$ 时，
k 的最小值为 -2。	p 的最大值为 -2。

③ **交换变量范围：**函数 g 的逆函数记作 g^{-1}，输入与输出互换。交换 x, y 时，两个变量的范围也随之交换。

$$y = 5 - (x + 2)^2, x \geq -2, y \leq 5$$

$$x = 5 - (y + 2)^2, x \leq 5, y \geq -2$$

逆函数的定义域为 $x \leq 5$，值域为 $y \geq -2$。

④ **依据范围选根：**交换变量后，整理出平方项，再开方。

$$(y + 2)^2 = 5 - x$$

$$y = -2 \pm \sqrt{5 - x}$$

由原定义域确定 $y + 2$ 的符号，选取相应的根。

$y \geq -2$	$y \leq -2$
$y + 2 \geq 0$	$y + 2 \leq 0$
$y = -2 + \sqrt{5 - x}$	$y = -2 - \sqrt{5 - x}$

本例交换后有 $y \geq -2$，应取 _____ 号。

⑤ **还原指数外层：**自然对数记作 ln，它能还原以 e 为底的指数。

$$\ln(e^2) = 2$$

$$\ln(e^u) = u$$

其中 u 为实数；如 $x = e^{y^2+1}$ 且 $y < 0$，两边取自然对数。

$$\ln x = \ln\left(e^{y^2+1}\right) = y^2 + 1$$

$$y^2 = \ln x - 1$$

由 $y<0$ 选根，得 $y=$ _____。

⑥ **求解二次关系：**分母含未知数时，先乘非零分母，整理成二次方程。对于 $Ay^2+By+C=0$，当 $A\neq 0$ 且 $B^2-4AC\geq 0$ 时，有

$$y=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

如 $x=\frac{y^2}{y-1}$ 且 $y<0$，则 $y-1\neq 0$，可作如下变形。

$$x(y-1)=y^2$$

$$y^2-xy+x=0$$

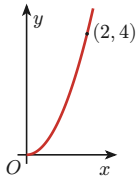
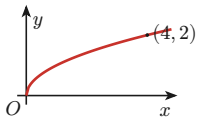
$$y=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4x}}{2}$$

$\because x<0$，有 $\sqrt{x^2-4x}>|x|$，$\therefore$ 负根为

$$y=\frac{x-\sqrt{x^2-4x}}{2}$$

⟵ 填空：①-2　②$5$　③$+$　④$-\sqrt{\ln x-1}$

限制二次函数的单调支

	$y=x^2,\quad x\geq 0$	$y=\sqrt{x}$
图像		
原函数限制	$x\geq 0$	
对应点	$(2,4)$	$(4,2)$
值域	$y\geq 0$	

点石成金　题目出现二次关系、限定定义域并要求逆函数时，先交换变量，再依据原定义域选根。

例 1　[2024 · October/November 0606/23 Q2(d)]

The function f is defined by $f(x) = 1-4x-x^2$ for all real values of x.

(a) Write $f(x)$ in the form $a-(x+b)^2$, where a and b are constants.

The function g is defined by $g(x) = 1-4x-x^2$ for $x \geqslant k$, where k is a constant.

(c) State the least possible value of k such that g has an inverse.

(d) Using your value of k, find $g^{-1}(x)$, stating its domain and range.

函数 f 定义为

$$f(x) = 1 - 4x - x^2$$

其中 x 为任意实数。（a）将 $f(x)$ 写成 $a-(x+b)^2$ 的形式，其中 a 和 b 为常数。函数 g 定义为

$$g(x) = 1 - 4x - x^2, x \geq k$$

其中 k 为常数。（c）写出使 g 有逆函数的 k 的最小可能值。（d）使用所得的 k 值，求 $g^{-1}(x)$，并写出它的定义域和值域。

解答　将原式配方，得

$$f(x) = 1 - 4x - x^2 = 5 - (x+2)^2$$

$\therefore a = 5$，$b = 2$。抛物线的顶点横坐标为 -2。为使 g 在 $x \geq k$ 上一一对应，应有 $k \geq -2$。$\therefore k$ 的最小值为 -2。此时

$$g(x) = 5 - (x+2)^2, x \geq -2$$

由 $(x+2)^2 \geq 0$，得 $g(x) \leq 5$。设 $y = g(x)$，交换 x, y，得

$$x = 5 - (y+2)^2, y \geq -2$$

$$(y+2)^2 = 5 - x$$

$\because y \geq -2$，$\therefore y + 2 \geq 0$，取非负平方根。

$$y + 2 = \sqrt{5-x}$$

$$y = -2 + \sqrt{5-x}$$

根式有意义时，$5 - x \geq 0$。答：（a）$f(x) = 5 - (x+2)^2$；（c）$k = -2$；（d）

$$g^{-1}(x) = -2 + \sqrt{5-x}$$

定义域为 $x \leq 5$，值域为 $y \geq -2$。

方法：先看定义域位于顶点哪侧，再交换变量并标出新范围。

辨析：原定义域是选根依据，根式条件是逆函数的输入限制。

拓展：原函数图像上的点，交换横纵坐标后落在逆函数图像上。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/22 Q10(b)]

提示：先取对数，再看原定义域的符号及边界能否取到。

The functions f and fg are defined by

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x^2+3} \quad \text{for } x < 0$$

$$\mathrm{fg}(x) = \mathrm{e}^{2x} \quad \text{for } x > \frac{3}{2}.$$

(b) Find an expression for $\mathrm{f}^{-1}(x)$ and state the domain and range of f^{-1}.

函数 f 和 fg 定义为

$$f(x) = e^{x^2+3}, x < 0$$

$$fg(x) = e^{2x}, x > \frac{3}{2}$$

(b) 求 $f^{-1}(x)$ 的表达式，并写出 f^{-1} 的定义域和值域。

✓ **答案** $f^{-1}(x) = -\sqrt{\ln x - 3}$，定义域为 $x > e^3$，值域为 $y < 0$。

解析 设 $y = f(x)$，则

$$y = e^{x^2+3}, x < 0$$

两边取自然对数，得

$$\ln y = x^2 + 3$$

$$x^2 = \ln y - 3$$

$\because x < 0$，$\therefore$取负根。

$$x = -\sqrt{\ln y - 3}$$

交换 x, y，得

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{\ln x - 3}$$

原定义域中 $x < 0$，故 $x^2 > 0$。

$$x^2 + 3 > 3$$

$$e^{x^2+3} > e^3$$

原函数可取遍大于 e^3 的值，且不取 e^3。答：$f^{-1}(x) = -\sqrt{\ln x - 3}$，定义域为 $x > e^3$，值域为 $y < 0$。

2. [2024 · May/June 0606/21 Q9(c)]

提示：看原定义域的符号限制，比较根式与一次项的绝对值。

The functions f and g are defined by

$$\mathrm{f}(x) = \frac{3x^2}{4x-1} \quad \text{for } x < 0$$

$$\mathrm{g}(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{for } x < 0.$$

(c) Show that $\mathrm{f}^{-1}(x)$ can be written as $\dfrac{px - \sqrt{x(qx+r)}}{3}$ where p, q and r are integers.

函数 f 和 g 定义为

$$f(x)=\frac{3x^2}{4x-1}, x<0$$

$$g(x)=\frac{1}{x^2}, x<0$$

(c) 证明 $f^{-1}(x)$ 可以写成

$$\frac{px-\sqrt{x(qx+r)}}{3}$$

的形式，其中 p、q 和 r 为整数。

✓ **答案** $f^{-1}(x)=\frac{2x-\sqrt{x(4x-3)}}{3}$，其中 $p=2$，$q=4$，$r=-3$。

解析 设 $y=f^{-1}(x)$，则由原定义域得 $y<0$，且

$$x=\frac{3y^2}{4y-1}$$

$\because y<0$，$\therefore 4y-1<0$，从而 $x<0$。两边乘非零分母，得

$$x(4y-1)=3y^2$$

$$3y^2-4xy+x=0$$

由二次方程求根公式，得

$$y=\frac{4x\pm\sqrt{16x^2-12x}}{6}=\frac{2x\pm\sqrt{x(4x-3)}}{3}$$

$\because x<0$，$\therefore$

$$x(4x-3)=4x^2-3x>4x^2$$

$$\sqrt{x(4x-3)}>|2x|=-2x$$

故取加号时 $y>0$，取减号时 $y<0$。由 $y<0$，取减号，得

$$f^{-1}(x)=\frac{2x-\sqrt{x(4x-3)}}{3}$$

答：所求形式成立，其中 $p=2$，$q=4$，$r=-3$。

3. [2025 · February/March 0606/12 Q5(d)]

提示：看定义域位于顶点哪侧，再判断平方项底数的符号。

(a) Write $2x^2-2x+3$ in the form $a(x+b)^2+c$, where a, b and c are constants.

It is given that $f(x)=2x^2-2x+3$, for $x\leqslant p$.

(b) Write down the greatest value of p for which f has an inverse.

(d) Using this value of p, find an expression for f^{-1}.

(a) 将 $2x^2-2x+3$ 写成 $a(x+b)^2+c$ 的形式，其中 a、b 和 c 为常数。已知

$$f(x)=2x^2-2x+3, x\leq p$$

(b) 写出使 f 有逆函数的 p 的最大值。(d) 使用这个 p 值，求 f^{-1} 的表达式。

✓ **答案**　(a) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$，其中 $a=2$，$b=-\frac{1}{2}$，$c=\frac{5}{2}$；(b) $p=\frac{1}{2}$；(d) $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{x-\frac{5}{2}}{2}}$。

解析　将原式配方，得

$$2x^2-2x+3=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+3-\frac{1}{2}=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

$\therefore a=2$，$b=-\frac{1}{2}$，$c=\frac{5}{2}$。抛物线的顶点横坐标为 $\frac{1}{2}$。为使 f 在 $x\le p$ 上一一对应，应有 $p\le\frac{1}{2}$。$\therefore p$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$。设 $y=f(x)$，交换 x,y，得

$$x=2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2},y\le\frac{1}{2}$$

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x-\frac{5}{2}}{2}$$

$\because y\le\frac{1}{2}$，$\therefore y-\frac{1}{2}\le 0$，取非正平方根。

$$y-\frac{1}{2}=-\sqrt{\frac{x-\frac{5}{2}}{2}}$$

$$y=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{x-\frac{5}{2}}{2}}$$

答：(a) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$；(b) $p=\frac{1}{2}$；(d)

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{x-\frac{5}{2}}{2}},x\ge\frac{5}{2}$$

4. [2026 · May/June 0606/11 Q6(c)]

← 提示：看原定义域的下界，比较两个根与顶点横坐标的大小。

The function f is such that $\mathrm{f}(x)=3x^2+8x$ for $x\geqslant k$, where k is a constant.
It is given that f^{-1} exists.
k has the least possible value for which f^{-1} exists.

(a) Find the value of k.

(c) Find an expression for f^{-1}.

函数 f 满足

$$f(x)=3x^2+8x,x\ge k$$

其中 k 为常数。已知 f^{-1} 存在，且 k 是使 f^{-1} 存在的最小可能值。(a) 求 k 的值。(c) 求 f^{-1} 的表达式。

✓ **答案**　(a) $k=-\frac{4}{3}$；(c) $f^{-1}(x)=\frac{-8+\sqrt{64+12x}}{6}$。

解析　将原式配方，得

$$f(x)=3x^2+8x=3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{3}$$

抛物线的顶点横坐标为 $-\frac{4}{3}$。为使 f 在 $x\ge k$ 上一一对应，应有 $k\ge-\frac{4}{3}$。$\therefore k$ 的最小值为 $-\frac{4}{3}$。设 $y=f(x)$，交换 x,y，得

$$x=3y^2+8y,y\ge-\frac{4}{3}$$

$$3y^2+8y-x=0$$

由二次方程求根公式，得

$$y=\frac{-8\pm\sqrt{64+12x}}{6}$$

原函数的最小值为 $-\frac{16}{3}$，故逆函数的定义域为 $x\geq-\frac{16}{3}$。 $\because y\geq-\frac{4}{3}$，$\therefore 6y+8\geq 0$，应取加号。

$$y=\frac{-8+\sqrt{64+12x}}{6}$$

答：(a) $k=-\frac{4}{3}$；(c)

$$f^{-1}(x)=\frac{-8+\sqrt{64+12x}}{6},x\geq-\frac{16}{3}$$

5. [2022 · May/June 0606/13 Q6(b)(iii)]

提示：先由顶点确定原定义域，交换变量后按范围选根。

(b) It is given that $\mathrm{h}(x)=(x-1)^2+3$ for $x\geqslant a$. The value of a is as small as possible such that h^{-1} exists.

(i) Write down the value of a.

(ii) Write down the range of h.

(iii) Find $\mathrm{h}^{-1}(x)$ and state its domain.

(b) 已知函数h满足

$$h(x)=(x-1)^2+3,\quad x\geq a$$

a取使逆函数h^{-1}存在的最小可能值。

(i) 写出a的值。

(ii) 写出h的值域。

(iii) 求$h^{-1}(x)$，并写出它的定义域。

✓ **答案** $h^{-1}(x)=1+\sqrt{x-3}$，定义域为$x\geq 3$。

解析 抛物线的顶点为$(1,3)$，在$x\geq 1$上递增。若$a<1$，定义域跨过顶点，函数值会重复。故使逆函数存在的最小值为

$$a=1$$

此时

$$h(x)=(x-1)^2+3,\quad x\geq 1$$

平方项非负，且在$x=1$处取零，故h的值域为

$$h(x)\geq 3$$

设

$$y=(x-1)^2+3,\quad x\geq 1,\quad y\geq 3$$

交换x,y及其范围，得

$$x=(y-1)^2+3,\quad y\geq 1,\quad x\geq 3$$

整理得

$$(y-1)^2=x-3$$

$\because y \geq 1$，$\therefore y-1 \geq 0$，取非负平方根。

$$y-1=\sqrt{x-3}$$

$$y=1+\sqrt{x-3}$$

答：（i）$a=1$；（ii）h的值域为$h(x) \geq 3$；（iii）逆函数为

$$h^{-1}(x)=1+\sqrt{x-3}$$

定义域为$x \geq 3$。

题型 7　由内到外代入，求复合函数值或化简表达式

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **复合函数次序：**本例中，f 给出分式，g 将输入平方后取倒数。$gf(x)$ 表示 $g(f(x))$，称为复合函数。先算_____，再算_____。

$$gf(x)=g(f(x))=\frac{1}{(f(x))^2}$$

② **分式平方倒数：**先将分子、分母分别平方，再将分子、分母_____。

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{4}$$

若原分式为 $\frac{a}{b}$，且 $a \neq 0$、$b \neq 0$，则

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\frac{b^2}{a^2}$$

③ **复合函数求值：**求 $fg(0)$，先求内层在零处的值。例如，内层为 $e^{2x}-1$ 时，

$$e^{2\times 0}-1=1-1=0$$

再将所得的零代入外层；三角函数在零处的值为

$$\sin 0=0, \cos 0=1$$

④ **整体代入展开：**内层含减法时，用括号将整个式子代入。平方展开须保留中间项，再去括号、合并同类项。

$$(e^x)^2=e^{2x}$$

$$(e^x-1)^2=e^{2x}-2e^x+1$$

$$(e^x-1)^2-2(e^x-1)=e^{2x}-2e^x+1-2e^x+2=e^{2x}-4e^x+3$$

⑤ **复合函数条件：**内层函数的输出须属于外层函数的_____。本例中，由 $x<0$ 得

$$3x^2>0, 4x-1<0$$

$$f(x)=\frac{3x^2}{4x-1}<0$$

因此，所得结果可代入 g。

填空：①f　②g　③互换　④定义域

点石成金　题目出现复合函数值或复合函数表达式时，先算右边的函数，再将结果整体代入左边的函数。

例 1　[2024 · May/June 0606/21 Q9(b)]

The functions f and g are defined by

$$\mathrm{f}(x) = \frac{3x^2}{4x-1} \quad \text{for } x < 0$$

$$\mathrm{g}(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{for } x < 0.$$

(b) Given that the function gf does exist, find and simplify an expression for $\mathrm{gf}(x)$.

函数 f 和 g 定义为
$f(x) = \frac{3x^2}{4x-1}$，其中 $x < 0$；
$g(x) = \frac{1}{x^2}$，其中 $x < 0$。
(b) 已知复合函数 gf 存在，求 $gf(x)$ 的表达式，并化简。

解答　由 $x < 0$，得
$f(x) = \frac{3x^2}{4x-1} < 0$，
故 $f(x)$ 属于 g 的定义域。由复合函数的定义，

$$gf(x) = g(f(x))$$

$$gf(x) = \frac{1}{\left(\frac{3x^2}{4x-1}\right)^2}$$

$gf(x) = \frac{(4x-1)^2}{9x^4}$。
答：$gf(x) = \frac{(4x-1)^2}{9x^4}$，其中 $x < 0$。

方法：先看复合记号右侧的函数，检查输出范围后再整体代入。

辨析：分式平方是分子分母各自平方，平方的倒数是平方后再互换分子分母。

拓展：内层函数有定义且其输出属于外层定义域，复合函数才有定义。

针对练习

1. [2023 · October/November 0606/23 Q1(a)]

提示：先算右侧函数在零处的值，再看外层的正弦、余弦项。

The functions f and g are defined as follows, for all real values of x.

$$\mathrm{f}(x) = 2\sin x + 3\cos x$$

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{e}^{3x} - 1$$

(a) Find $\mathrm{fg}(0)$.

函数 f 和 g 对所有实数 x 定义如下：
$f(x) = 2\sin x + 3\cos x$，
$g(x) = e^{3x} - 1$。
(a) 求 $fg(0)$。

✓ **答案**

3

解析　先求内层函数值，得
$g(0) = e^{3\times 0} - 1 = 1 - 1 = 0$。
代入外层函数，得
$fg(0) = f(0) = 2\sin 0 + 3\cos 0 = 2\times 0 + 3\times 1 = 3$。
答：$fg(0) = 3$。

2. [2026 · February/March 0606/22 Q1(d)]

提示：把内层整体放入括号，核对平方中间项与一次项系数。

The function f is defined by $\mathrm{f}(x) = 2x^2 - 6x + 4$ for all real values of x.

(a) Write $\mathrm{f}(x)$ in the form $a(x+b)^2 + c$ where a, b and c are constants.

(c) The function g is defined by $\mathrm{g}(x) = 2x^2 - 6x + 4$ for $x \leqslant k$, where k is a constant.

Given that g has an inverse, state the largest possible value of k.

(d) The function h is defined by $\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{3x} - 1$ for $x \leqslant 0$.

Given that $\mathrm{gh}(x)$ exists, find $\mathrm{gh}(x)$, simplifying your answer.

函数 f 定义为
$f(x) = 2x^2 - 6x + 4$，其中 x 为任意实数。
(a) 将 $f(x)$ 写成 $a(x+b)^2 + c$ 的形式，其中 a、b、c 为常数。
(c) 函数 g 定义为
$g(x) = 2x^2 - 6x + 4$，其中 $x \leq k$，k 为常数。
已知 g 有反函数，写出 k 的最大可能值。
(d) 函数 h 定义为
$h(x) = e^{3x} - 1$，其中 $x \leq 0$。
已知 $gh(x)$ 存在，求 $gh(x)$，并化简答案。

✓ **答案**

$$gh(x) = 2e^{6x} - 10e^{3x} + 12$$

解析 将 $h(x)$ 整体代入 g，得

$$gh(x) = g(e^{3x} - 1)$$

$$gh(x) = 2(e^{3x} - 1)^2 - 6(e^{3x} - 1) + 4$$

$$gh(x) = 2(e^{6x} - 2e^{3x} + 1) - 6e^{3x} + 6 + 4$$

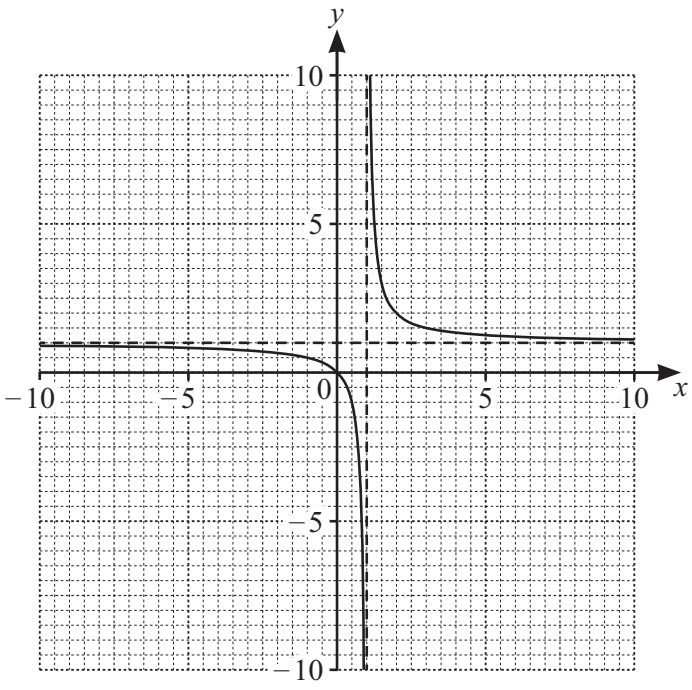
$$gh(x) = 2e^{6x} - 4e^{3x} + 2 - 6e^{3x} + 6 + 4$$

$gh(x) = 2e^{6x} - 10e^{3x} + 12$。
答：$gh(x) = 2e^{6x} - 10e^{3x} + 12$，其中 $x \leq 0$。

3. [2024 · October/November 0606/21 Q11(a)(ii)]
提示：整体代入分子和分母，再把分母中的减法通分。

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ for $-10 \leqslant x \leqslant 10, x \neq 1$.

The diagram shows the graph of $y = f(x)$.



(ii) Find ff(x), giving your answer in its simplest form.

(a) 函数f定义为
$f(x) = \frac{x}{x-1}$，其中$-10 \leq x \leq 10$且$x \neq 1$。
图示为$y = f(x)$的图象。横轴为x，纵轴为y，两轴标示的数值为-10、-5、0、5、10。
(ii) 求$ff(x)$，答案须写成最简形式。

✓ **答案** $ff(x) = x$。

解析 将$f(x)$整体代入f，得

$$ff(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1}$$

$$\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{x-(x-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

$$ff(x) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = x$$

两次代入均须符合f的定义域，因此

$$-10 \leq x \leq 10, \quad x \neq 1$$

$$-10 \leq \frac{x}{x-1} \leq 10, \quad \frac{x}{x-1} \neq 1$$

方程$\frac{x}{x-1} = 1$无解。
当$x < 1$时，$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} < 1$，上界条件成立；由下界条件得

$$x \le -10(x-1)$$

$$x \le \frac{10}{11}$$

当$x > 1$时，$\frac{x}{x-1} > 1$，下界条件成立；由上界条件得

$$x \le 10(x-1)$$

$$x \ge \frac{10}{9}$$

答：$ff(x) = x$，其中$-10 \le x \le \frac{10}{11}$或$\frac{10}{9} \le x \le 10$。

4. [2025 · October/November 0606/23 Q2(b)(iii)]

提示：先整体代入，再用自变量的正负限制确定根式的符号。

(b) A function g is defined by $\mathrm{g}(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x-2}}$ for $x \geqslant 2$.

(iii) A function h is defined by $\mathrm{h}(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ for $x > 0$.

Find an expression for $\mathrm{gh}(x)$ in its simplest form.

(b) 函数g定义为
$g(x) = e^{\sqrt{x-2}}$，其中$x \ge 2$。
(iii) 函数h定义为
$h(x) = \frac{1}{x^2} + 2$，其中$x > 0$。
求$gh(x)$的表达式，并写成最简形式。

✓ **答案** $gh(x) = e^{\frac{1}{x}}$。

解析 由$x > 0$，得

$$h(x) = \frac{1}{x^2} + 2 > 2$$

故$h(x)$属于g的定义域。将$h(x)$代入g，得

$$gh(x) = e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+2\right)-2}} = e^{\sqrt{\frac{1}{x^2}}}$$

由$x > 0$，得$\frac{1}{x} > 0$，所以

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$$

答：$gh(x) = e^{\frac{1}{x}}$，其中$x > 0$。

5. [2023 · May/June 0606/21 Q8(b)(iii)]

提示：先按外层定义域限制内层输出，再将内层函数整体代入。

(b) The functions g and h are defined by

$$\mathrm{g}(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 3} \quad \text{for} \quad x \geqslant 1,$$

$$\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{4x} \quad \text{for} \quad x \geqslant k.$$

(ii) State the least value of the constant k such that $\mathrm{gh}(x)$ can be formed.

(iii) Find and simplify an expression for $\mathrm{gh}(x)$.

(b) 函数g和h定义为
$g(x)=\sqrt[3]{8x^3+3}$，其中$x\geq 1$；
$h(x)=e^{4x}$，其中$x\geq k$。
(ii) 写出使复合函数$gh(x)$能够成立的常数k的最小值。
(iii) 求$gh(x)$的表达式，并化简。

✓ **答案** $gh(x)=\sqrt[3]{8e^{12x}+3}$。

解析 要使复合函数gh存在，h的输出须属于g的定义域，故

$$e^{4x}\geq 1$$

由指数函数的单调性，得

$$x\geq 0$$

因此，h的定义域下限须满足$k\geq 0$，最小值为0。
将$h(x)$整体代入g，得

$$gh(x)=g(h(x))=\sqrt[3]{8(e^{4x})^3+3}=\sqrt[3]{8e^{12x}+3}$$

答：k的最小值为0；$gh(x)=\sqrt[3]{8e^{12x}+3}$，此时$x\geq 0$。

题型 8 画二次函数的绝对值图并标截距

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **配成完全平方：**对曲线 $y=x^2-x-6$，x、y 分别表示横、纵坐标。一次项系数的一半为 $-\frac{1}{2}$，添上其平方再减去，配成完全平方。

$$x^2-x-6=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

题设的常数 a 为_____，b 为_____。

② **二次项先提取：**二次项系数不是 1 时，先从二次项和一次项提取该系数。如：

$$2x^2-4x+1=2(x^2-2x)+1=2((x-1)^2-1)+1=2(x-1)^2-1$$

③ **平方确定驻点：**抛物线顶点处切线水平，称为驻点。平方项非负，取 0 时得到顶点坐标。

$$x-\frac{1}{2}=0$$

$$x=\frac{1}{2}$$

$$y=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=-\frac{25}{4}$$

故原曲线的驻点为_____。

④ **纵坐标取绝对值：**原曲线在 $x=0$ 时的纵坐标为 -6，取绝对值后为 6。绝对值表示数到 0 的距离，取值为_____。以 u 表示原纵坐标，翻折时横坐标保持不变。

$u\geq 0$	$u<0$
$\lvert u\rvert=u$	$\lvert u\rvert=-u$
保留原图	关于横轴翻折

⑤ **求出坐标截距：**求与横轴的交点时，令纵坐标为 0，先分解因式。两因式乘积为 0，至少一个因式为 0。求与纵轴的交点时，令横坐标为 0。

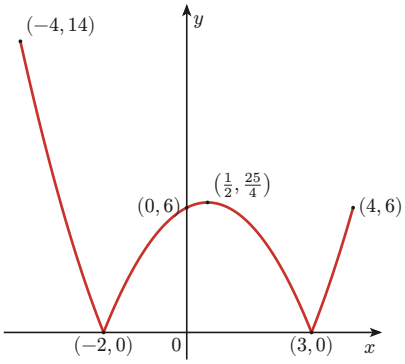
$$x^2-x-6=x^2+2x-3x-6=x(x+2)-3(x+2)=(x+2)(x-3)$$

$y=0$	$x=0$
$(x+2)(x-3)=0$	$y=\lvert 0^2-0-6\rvert=6$
$x=-2$ 或 $x=3$	交点为 $(0,6)$

交点为 $(-2,0)$、$(3,0)$

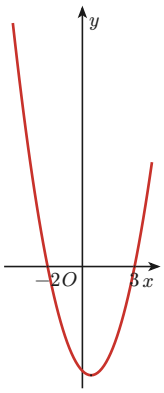
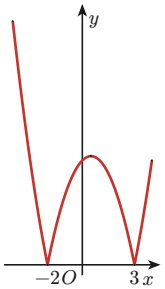
⑥ **依照区间作图：**根据二次式的正负，确定保留或翻折的区间。连接时，两个零点处形成_____，中间弧的顶点随之翻折。题目限定横坐标范围时，图象画到两个端点。

x 的范围	原二次式的符号	图象操作
$-4\le x\le -2$	非负	保留
$-2\le x\le 3$	非正	关于横轴翻折
$3\le x\le 4$	非负	保留



← 填空：①$-\frac{1}{2}$　②$-\frac{25}{4}$　③$\left(\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)$　④非负数　⑤尖点

同一二次式取绝对值前后

	$y=x^2-x-6$	$y=\lvert x^2-x-6\rvert$
图像		
横截距	$(-2,0)$ 与 $(3,0)$	
负值部分	在 x 轴下方	关于 x 轴翻折到上方

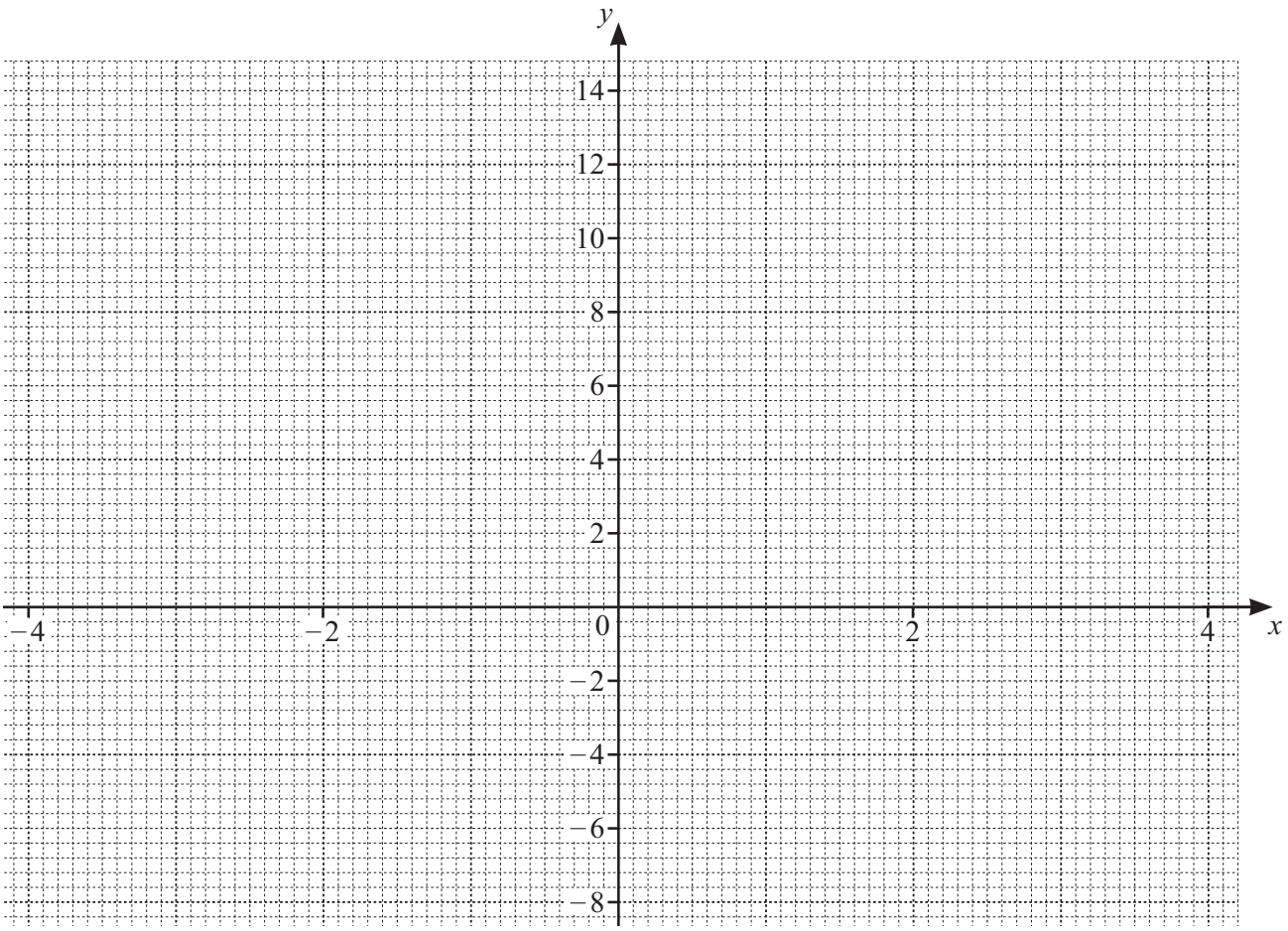
点石成金　题目出现二次式外的绝对值，并要求画图、标截距时，先配方求原曲线的驻点。

例 1　[2025 · October/November 0606/23 Q3(b)]

(a) (i) Write x^2-x-6 in the form $(x+a)^2+b$ where a and b are constants.

(ii) Hence write down the coordinates of the stationary point on the curve $y = x^2 - x - 6$.

(b) On the axes, draw the graph of $y = \left|x^2 - x - 6\right|$ for $-4 \leqslant x \leqslant 4$.



(a)(i) 将 $x^2 - x - 6$ 写成 $(x + a)^2 + b$ 的形式，其中 a、b 是常数。

(ii) 由此写出曲线 $y = x^2 - x - 6$ 的驻点坐标。

(b) 在给定坐标系中，画出 $y = \left|x^2 - x - 6\right|$ 在 $-4 \leq x \leq 4$ 内的图象。横轴、纵轴分别标为 x、y；横轴标有 $-4, -2, 2, 4$，纵轴标有 $-8, -6, -4, -2, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$，原点标为 0。

解答 展开完全平方，有

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

方法：先看绝对值内的二次式，配方定位原图顶点。

辨析：保留是沿用横轴上方的曲线，翻折是把横轴下方的曲线对称到上方。

故

$$x^2 - x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

由题设形式得

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$b = -\frac{25}{4}$$

平方项非负，取零时有

$$x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x=\frac{1}{2}$$

$$y=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=-\frac{25}{4}$$

故原曲线的驻点为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)$。
令 $y=0$，则绝对值内的二次式为 0，有

$$x^2-x-6=(x+2)(x-3)=0$$

$$x=-2 \quad 或 \quad x=3$$

故与横轴的交点为 $(-2,0)$、$(3,0)$。
令 $x=0$，得

$$y=|-6|=6$$

故与纵轴的交点为 $(0,6)$。
在 $-2<x<3$ 内，两个因式异号，原二次式为负，翻折后

$$y=-(x^2-x-6)=-x^2+x+6=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

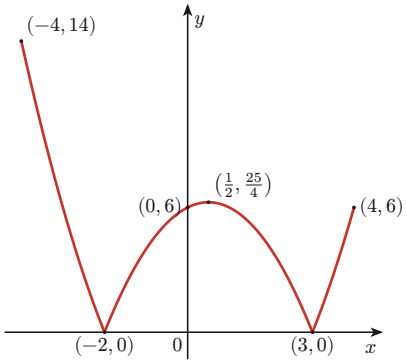
中间弧的最高点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{25}{4}\right)$。
在 $-4\le x\le -2$ 及 $3\le x\le 4$ 内，保留原图。
当 $x=-4$ 时，

$$y=\left|(-4)^2-(-4)-6\right|=14$$

当 $x=4$ 时，

$$y=\left|4^2-4-6\right|=6$$

故区间端点为 $(-4,14)$、$(4,6)$。
过上述各点连成三段抛物线弧，在两横轴交点处保留尖点。



答：所求图象如图。

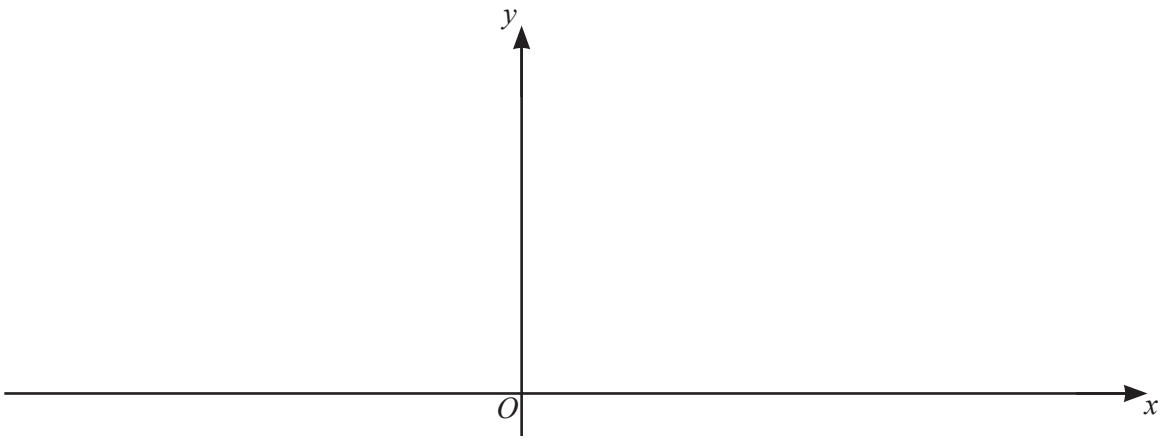
针对练习

1. [2023 · May/June 0606/11 Q1(c)]
提示：先看二次项系数，提取后配方，再比较各段的正负。

(a) Write $5x^2-14x+8$ in the form $a(x+b)^2+c$, where a, b and c are constants to be found.

(b) Hence write down the coordinates of the stationary point on the curve $y = 5x^2 - 14x + 8$.

(c) On the axes below, sketch the graph of $y = \left|5x^2 - 14x + 8\right|$, stating the coordinates of the points where the graph meets the coordinate axes.



(a) 将 $5x^2 - 14x + 8$ 写成 $a(x+b)^2 + c$ 的形式，其中 a、b、c 是待求的常数。
(b) 由此写出曲线 $y = 5x^2 - 14x + 8$ 的驻点坐标。
(c) 在下方给定坐标系中，画出 $y = \left|5x^2 - 14x + 8\right|$ 的草图，并写出图象与两坐标轴相交各点的坐标。图中横轴、纵轴分别标为 x、y，原点标为 O。

✓ **答案** (a)

$$5\left(x - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{9}{5}$$

$$a = 5$$

$$b = -\frac{7}{5}$$

$$c = -\frac{9}{5}$$

(b) $\left(\frac{7}{5}, -\frac{9}{5}\right)$。
(c) 与横轴的交点为 $\left(\frac{4}{5}, 0\right)$、$(2, 0)$，与纵轴的交点为 $(0, 8)$；中间弧的最高点为 $\left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$，两横轴交点处为尖点，两端向上延伸。

解析 先从二次项和一次项提取 5，得

$$5x^2 - 14x + 8 = 5\left(x^2 - \frac{14}{5}x\right) + 8$$

$$5\left(x^2 - \frac{14}{5}x\right) + 8 = 5\left(\left(x - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{49}{25}\right) + 8 = 5\left(x - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{9}{5}$$

故

$$a = 5$$

$$b = -\frac{7}{5}$$

$$c=-\frac{9}{5}$$

平方项取零时，有

$$x-\frac{7}{5}=0$$

$$x=\frac{7}{5}$$

$$y=5\left(\frac{7}{5}-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{9}{5}=-\frac{9}{5}$$

故原曲线的驻点为 $\left(\frac{7}{5},-\frac{9}{5}\right)$。
令 $y=0$，则绝对值内的二次式为 0，有

$$5x^2-14x+8=5x^2-10x-4x+8=5x(x-2)-4(x-2)=(5x-4)(x-2)=0$$

$$5x-4=0 \quad 或 \quad x-2=0$$

$$x=\frac{4}{5} \quad 或 \quad x=2$$

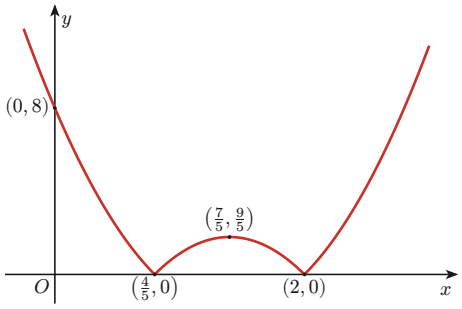
故与横轴的交点为 $\left(\frac{4}{5},0\right)$、$(2,0)$。
令 $x=0$，得

$$y=|8|=8$$

故与纵轴的交点为 $(0,8)$。
在 $\frac{4}{5}<x<2$ 内，原二次式为负，翻折后

$$y=-(5x^2-14x+8)=-5x^2+14x-8=-5\left(x-\frac{7}{5}\right)^2+\frac{9}{5}$$

中间弧的最高点为 $\left(\frac{7}{5},\frac{9}{5}\right)$。
在 $x\le\frac{4}{5}$ 及 $x\ge2$ 内，保留原图，两端向上延伸。
过上述各点连成三段抛物线弧，在两横轴交点处保留尖点。

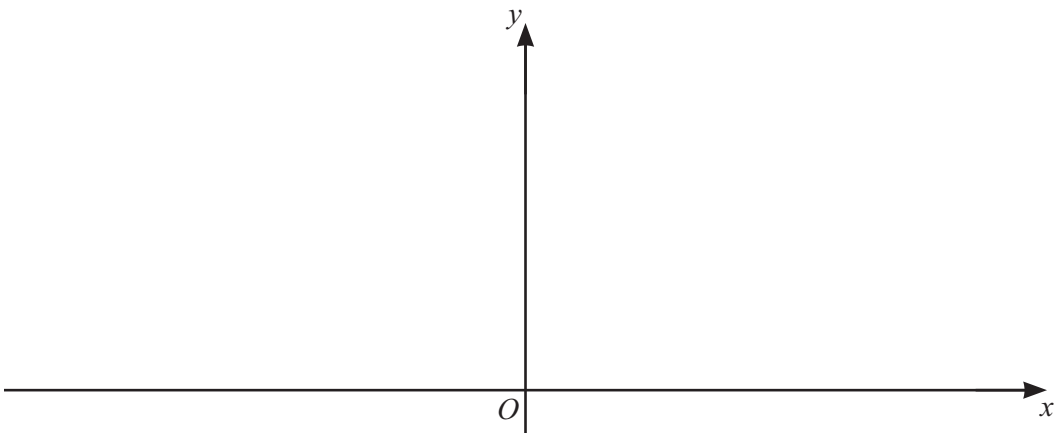


答：所求图象如图，与横轴的交点为 $\left(\frac{4}{5},0\right)$、$(2,0)$，与纵轴的交点为 $(0,8)$。

2. [2024 · October/November 0606/13 Q1(b)]
提示：从两个因式找零点，比较零点内外乘积的符号。

(a) Find the coordinates of the stationary point on the curve $y=(x+3)(x-4)$.

(b) On the axes, sketch the graph of $y=\left|(x+3)(x-4)\right|$, stating the intercepts with the axes.



(a) 求曲线 $y=(x+3)(x-4)$ 的驻点坐标。

(b) 在给定坐标系中，画出 $y=|(x+3)(x-4)|$ 的草图，并注明与两坐标轴的截距。图中横轴、纵轴分别标为 x、y，原点标为 O。

✓ **答案** (a) $\left(\frac{1}{2},-\frac{49}{4}\right)$。

(b) 与横轴的交点为 $(-3,0)$、$(4,0)$，与纵轴的交点为 $(0,12)$；中间弧的最高点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{49}{4}\right)$，两横轴交点处为尖点，两端向上延伸。

解析 展开乘积并配方，得

$$(x+3)(x-4)=x^2-4x+3x-12=x^2-x-12$$

$$x^2-x-12=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-12=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$$

平方项取零时，有

$$x-\frac{1}{2}=0$$

$$x=\frac{1}{2}$$

$$y=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}=-\frac{49}{4}$$

故原曲线的驻点为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{49}{4}\right)$。

令 $y=0$，则绝对值内的乘积为 0，有

$$(x+3)(x-4)=0$$

$$x+3=0 \quad 或 \quad x-4=0$$

$$x=-3 \quad 或 \quad x=4$$

故与横轴的交点为 $(-3,0)$、$(4,0)$。

令 $x=0$，得

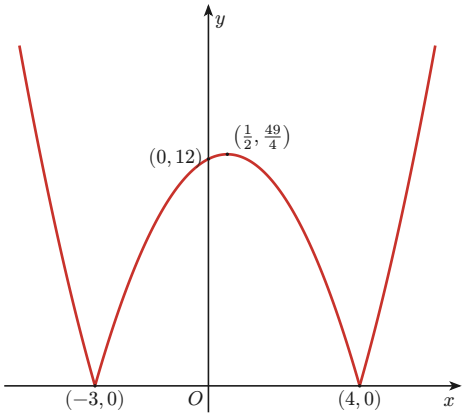
$$y=|(0+3)(0-4)|=|-12|=12$$

故与纵轴的交点为 $(0,12)$。

在 $-3<x<4$ 内，原二次式为负，翻折后

$$y=-(x+3)(x-4)=-x^2+x+12=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{49}{4}$$

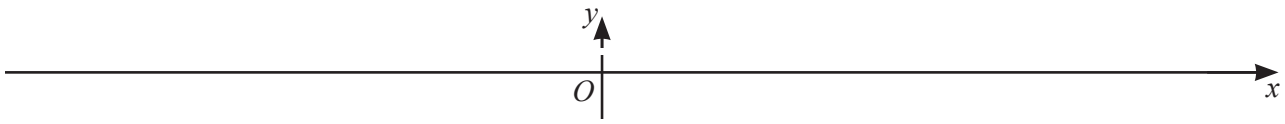
中间弧的最高点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{49}{4}\right)$。
在 $x\le -3$ 及 $x\ge 4$ 内，保留原图，两端向上延伸。
过上述各点连成三段抛物线弧，在两横轴交点处保留尖点。



答：所求图象如图，与横轴的交点为 $(-3,0)$、$(4,0)$，与纵轴的交点为 $(0,12)$。

3. [2022 · October/November 0606/12 Q2(a)]
提示：先令绝对值内的二次式为零，再判断两零点之间的符号。

(a) On the axes, draw the graph of $y=\left|3x^2+13x-10\right|$, stating the coordinates of the points where the graph meets the axes.



(a) 在给定坐标系中，画出函数$y=\left|3x^2+13x-10\right|$的图象，并写出图象与两坐标轴交点的坐标。横轴标为$x$，纵轴标为$y$，原点标为$O$。

✓ **答案** 横轴交点为$(-5,0)$、$\left(\frac{2}{3},0\right)$，纵轴交点为$(0,10)$。中间弧最高点为$\left(-\frac{13}{6},\frac{289}{12}\right)$，两个横轴交点均为尖点，两侧分支向上。

解析 令$y=0$，得

$$3x^2+13x-10=(3x-2)(x+5)=0$$

$$x=-5 \quad 或 \quad x=\frac{2}{3}$$

故与横轴的交点为$(-5,0)$、$\left(\frac{2}{3},0\right)$。
令$x=0$，得

$$y=|-10|=10$$

故与纵轴的交点为$(0,10)$。
将绝对值内的二次式配方，得

$$3x^2+13x-10=3\left(x^2+\frac{13}{3}x\right)-10=3\left(x+\frac{13}{6}\right)^2-\frac{289}{12}$$

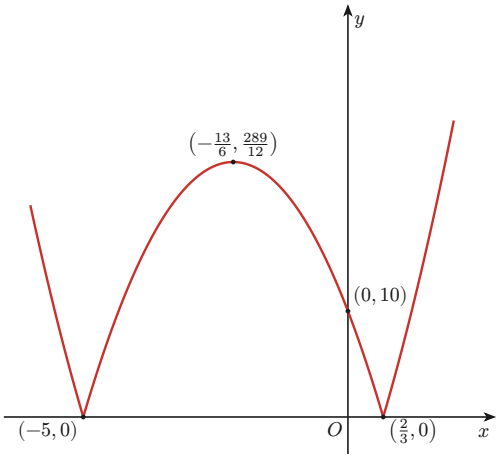
原抛物线的顶点为$\left(-\frac{13}{6},-\frac{289}{12}\right)$。
当$-5\le x\le\frac{2}{3}$时，原二次式非正，关于横轴翻折后，

$$y=-3x^2-13x+10=-3\left(x+\frac{13}{6}\right)^2+\frac{289}{12}$$

故中间弧开口向下，最高点为$\left(-\frac{13}{6},\frac{289}{12}\right)$。
当$x\le -5$或$x\ge \frac{2}{3}$时，原二次式非负，保留原图，

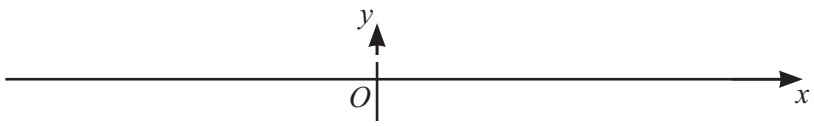
$$y=3x^2+13x-10$$

过上述各点连接三段抛物线弧。两横轴交点处形成尖点，图象关于直线$x=-\frac{13}{6}$对称。
横坐标可取任意实数，纵坐标满足$y\ge 0$。两侧分支向上无限延伸，无端点及渐近线。
答：横轴交点为$(-5,0)$、$\left(\frac{2}{3},0\right)$，纵轴交点为$(0,10)$，中间弧最高点为$\left(-\frac{13}{6},\frac{289}{12}\right)$。



4. [2026 · February/March 0606/12 Q2(a)]
提示：先分解绝对值内的二次式，再将横轴下方的部分翻折。

(a) On the axes, sketch the graph of $y=\left|x^2-2x-3\right|$.
State the intercepts with the coordinate axes.



(a) 在给定坐标系中，画出函数$y=\left|x^2-2x-3\right|$的示意图。写出图象与两坐标轴的交点坐标。横轴标为x，纵轴标为y，原点标为O。

✓ **答案** 横轴交点为$(-1,0)$、$(3,0)$，纵轴交点为$(0,3)$。中间弧最高点为$(1,4)$，两个横轴交点均为尖点，两侧分支向上。

解析 令$y=0$，得

$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$$

$$x=-1 \quad 或 \quad x=3$$

故与横轴的交点为$(-1,0)$、$(3,0)$。
令$x=0$，得

$$y=|-3|=3$$

故与纵轴的交点为$(0,3)$。
将绝对值内的二次式配方，得

$$x^2-2x-3=(x-1)^2-4$$

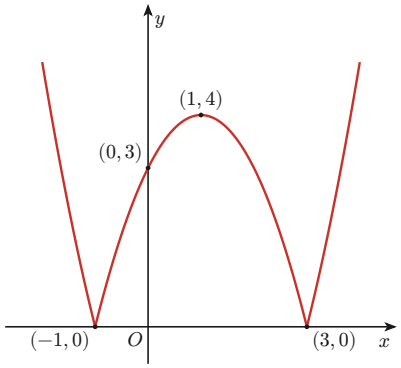
原抛物线的顶点为$(1,-4)$。
当$-1 \le x \le 3$时，原二次式非正，关于横轴翻折后，

$$y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$$

故中间弧开口向下，最高点为$(1,4)$。
当$x \le -1$或$x \ge 3$时，原二次式非负，保留原图，

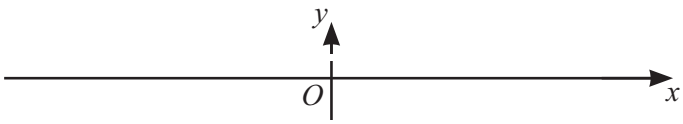
$$y = x^2 - 2x - 3$$

过上述各点连接三段抛物线弧。两横轴交点处形成尖点，图象关于直线$x = 1$对称。
横坐标可取任意实数，纵坐标满足$y \ge 0$。两侧分支向上无限延伸，无端点及渐近线。
答：横轴交点为$(-1,0)$、$(3,0)$，纵轴交点为$(0,3)$，中间弧最高点为$(1,4)$。



5. [2026 · May/June 0606/22 Q4(a)]
提示：先求零点，再判断原顶点翻折后的位置。

(a) On the axes, sketch the graph of $y = |x^2 - 5|$.
State the intercepts with the coordinate axes.



(a) 在给定坐标系中，画出函数$y = |x^2 - 5|$的示意图。写出图象与两坐标轴的交点坐标。横轴标为x，纵轴标为y，原点标为O。

✓ **答案** 横轴交点为$\left(-\sqrt{5},0\right)$、$\left(\sqrt{5},0\right)$，纵轴交点为$(0,5)$。两个横轴交点均为尖点，中间弧最高点为$(0,5)$，图象关于纵轴对称，两侧分支向上。

解析 令$y = 0$，得

$$x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = 5$$

$$x = -\sqrt{5} \quad 或 \quad x = \sqrt{5}$$

故与横轴的交点为$\left(-\sqrt{5},0\right)$、$\left(\sqrt{5},0\right)$。
令$x = 0$，得

$$y = |-5| = 5$$

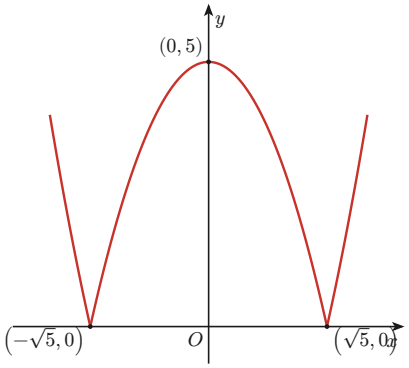
故与纵轴的交点为$(0,5)$。
原抛物线$y = x^2 - 5$开口向上，顶点为$(0,-5)$。
当$-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$时，原二次式非正，关于横轴翻折后，

$$y=-(x^2-5)=5-x^2$$

故中间弧开口向下，最高点为$(0,5)$。
当$x\le-\sqrt{5}$或$x\ge\sqrt{5}$时，原二次式非负，保留原图，

$$y=x^2-5$$

过上述各点连接三段抛物线弧。两横轴交点处形成尖点，图象关于纵轴对称。
横坐标可取任意实数，纵坐标满足$y\ge0$。两侧分支向上无限延伸，无端点及渐近线。
答：横轴交点为$\left(-\sqrt{5},0\right)$、$\left(\sqrt{5},0\right)$，纵轴交点及中间弧最高点均为$(0,5)$。



题型 9　由顶点和轴截距画一次式的绝对值图

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **绝对值取值：**例题中的绝对值表示数到零的距离。非负数保持不变，负数取相反数。

② 非负数的绝对值

$$|2\times3-5|=|1|=_____$$

负数的绝对值

$$|2\times0-5|=|-5|=_____$$

③ **顶点的位置：**例题的两条图象均为开口向_____的 V 形。令绝对值内的一次式为零，求出顶点。两支都是直线，关于过顶点的竖直线对称。

④ $2x-5=0$

$$x=\frac{5}{2}$$

顶点为 $\left(\frac{5}{2},0\right)$。

$4-x=0$

$$x=4$$

顶点为 $(4,0)$。

⑤ **纵轴的交点：**图象与纵轴相交处满足 $x=0$，代入求出纵坐标。连接顶点与纵轴交点，再作对称的一支。

⑥ $y=|2\times0-5|=$_____
纵轴交点为 $(0,5)$。

$y=|4-0|=$_____
纵轴交点为 $(0,4)$。

⑦ **区间的端点：**例题给出横坐标范围，须求两个端点。把端点、顶点及区间内的纵轴交点按横坐标顺序连接。

⑧

$$-2\le x\le6$$

⑨ $y=|2x-5|$
$x=-2$ 时，$y=9$。
$x=6$ 时，$y=7$。

$y=|4-x|$
$x=-2$ 时，$y=6$。
$x=6$ 时，$y=2$。

⑩ **式外的倍数：**绝对值外有正数乘数时，先求绝对值，再乘这个数。所得纵坐标随之改变，顶点的横坐标不变。例如：

⑪

$$y=2|x-3|$$

⑫ 令 $x-3=0$，得 $x=3$。
顶点为 $(3,0)$。

令 $x=0$。

$$y=2|-3|=2\times3=_____$$

纵轴交点为 $(0,6)$。

⑫ **普通直线作图：**同题中的普通一次函数画成直线。分别令横坐标、纵坐标为零，求出两轴交点。过两点作直线，并向两端延伸，例如：

⑫ $y=2x+4$

⑫ 令 $x=0$。

$$y=2\times 0+4=4$$

纵轴交点为 $(0,4)$。

令 $y=0$。

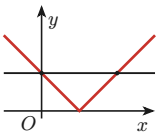
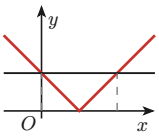
$$2x+4=0$$

$$x=-2$$

横轴交点为 $(-2,0)$。

一 填空：①1 ②5 ③上 ④5 ⑤4 ⑥6

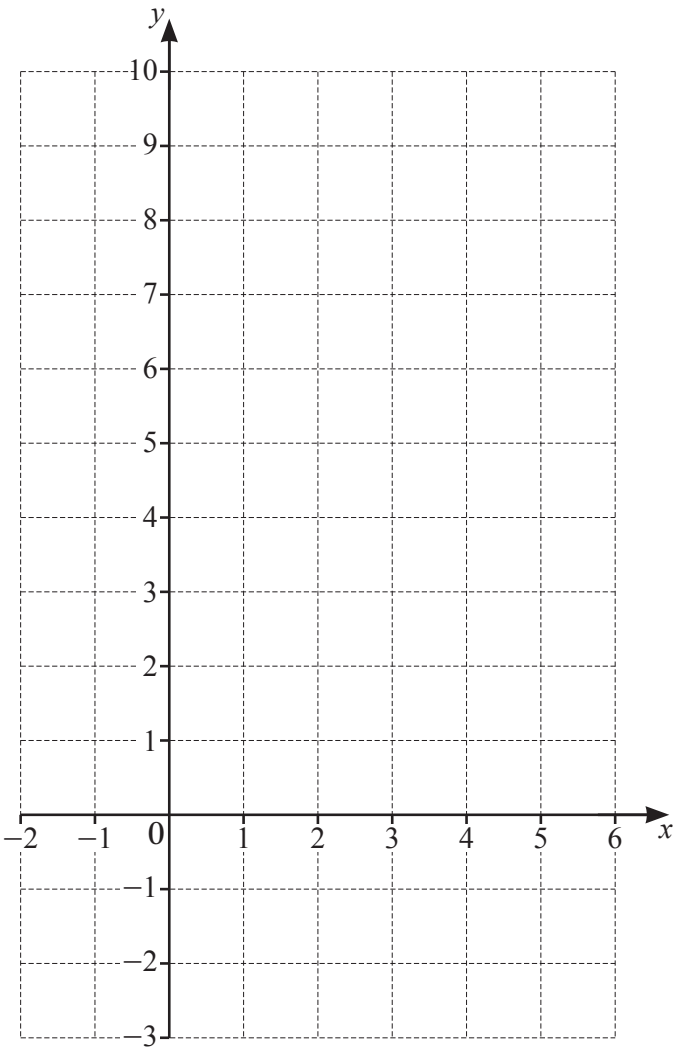
同一条折线与水平界线

	$\lvert x-1\rvert=1$	$\lvert x-1\rvert<1$
图像		
交点横坐标	$0,2$	
所求	$x=0$ 或 $x=2$	$0<x<2$

点石成金　题目出现一次式的绝对值图象时，先令绝对值内的式子为零，确定顶点。

例 1　[2024 · May/June 0606/23 Q3(a)]

(a)



Draw the graphs of $y=|2x-5|$ and $y=|4-x|$ for $-2\leqslant x\leqslant 6$.

(a) 在 $-2\leq x\leq 6$ 的范围内，画出 $y=|2x-5|$ 和 $y=|4-x|$ 的图象。所给方格坐标图的横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 0；横轴刻度从 -2 到 6，纵轴刻度从 -3 到 10，每格均表示 1 个单位。(4 分)

解答　对于

$$y=|2x-5|$$

令绝对值内的式子为零，得

$$2x-5=0$$

$$x=\frac{5}{2}$$

故顶点为 $\left(\frac{5}{2},0\right)$。
当 $x=0$ 时，

$$y=|2\times 0-5|=5$$

方法：先看绝对值内的一次式，从求它的零点起手。

辨析：顶点是折线转向处，纵轴交点是横坐标为零的点。

拓展：横坐标范围有限定时，两支画到区间端点为止。

故纵轴交点为 $(0,5)$。
当 $x=-2$ 时，

$$y=|2\times(-2)-5|=9$$

当 $x=6$ 时，

$$y=|2\times 6-5|=7$$

依次用线段连接 $(-2,9)$、$\left(\frac{5}{2},0\right)$、$(6,7)$，左支经过 $(0,5)$。
对于

$$y=|4-x|$$

令绝对值内的式子为零，得

$$4-x=0$$

$$x=4$$

故顶点为 $(4,0)$。
当 $x=0$ 时，

$$y=|4-0|=4$$

故纵轴交点为 $(0,4)$。
当 $x=-2$ 时，

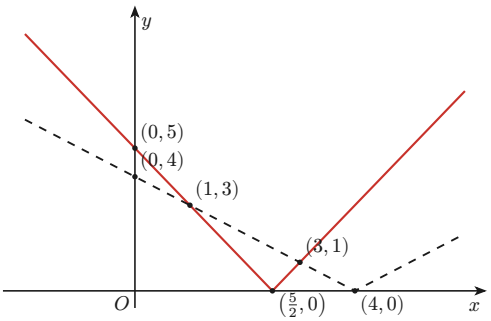
$$y=|4-(-2)|=6$$

当 $x=6$ 时，

$$y=|4-6|=2$$

依次用线段连接 $(-2,6)$、$(4,0)$、$(6,2)$，左支经过 $(0,4)$。
答：两条图象均为开口向上的 V 形折线，分别按上述各点连接，并标明对应的函数。

实线 $y=|2x-5|$；虚线 $y=|4-x|$



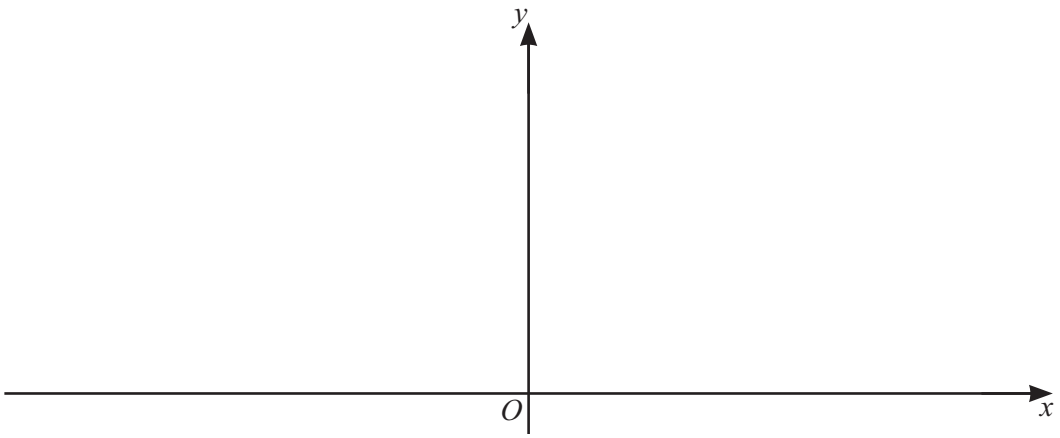
$\left(\frac{5}{2},0\right)$；$(4,0)$；$(0,5)$；$(0,4)$；$(1,3)$；$(3,1)$

针对练习

1. [2025 · February/March 0606/12 Q1(a)]

提示：看乘数在绝对值内还是外，比较它对轴交点的影响。

(a) On the axes, sketch the graphs of $y = 4|x-1|$ and $y = |3x+2|$, stating the intercepts with the axes.



(a) 在所给坐标轴上，画出 $y = 4|x-1|$ 和 $y = |3x+2|$ 的图象草图，并写出它们与坐标轴的交点。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。(3 分)

✓ **答案** $y = 4|x-1|$ 为顶点在 $(1,0)$、经过 $(0,4)$ 的开口向上的 V 形图象；$y = |3x+2|$ 为顶点在 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$、经过 $(0,2)$ 的开口向上的 V 形图象。两图与坐标轴的交点分别为 $(1,0)$、$(0,4)$ 和 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$、$(0,2)$。

解析 对于

$$y = 4|x-1|$$

令 $y = 0$，得

$$4|x-1| = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

故顶点及横轴交点为 $(1,0)$。

当 $x = 0$ 时，

$$y = 4|0-1| = 4 \times 1 = 4$$

故纵轴交点为 $(0,4)$。

连接 $(0,4)$ 与 $(1,0)$，并向左上方延伸；以过顶点的竖直线为对称轴，作出右支。

对于

$$y = |3x+2|$$

令 $y = 0$，得

$$3x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

故顶点及横轴交点为 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$。

当 $x = 0$ 时，

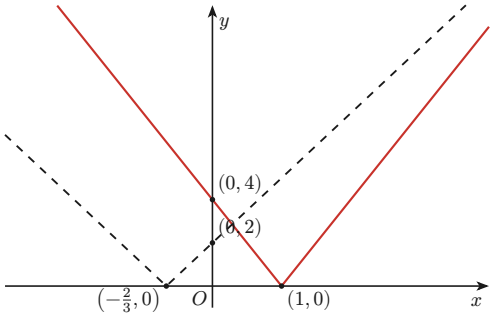
$$y = |3 \times 0 + 2| = 2$$

故纵轴交点为 $(0,2)$。

连接 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ 与 $(0,2)$，并向右上方延伸；以过顶点的竖直线为对称轴，作出左支。

答：两图均为开口向上的 V 形，分别标出轴交点 $(1,0)$、$(0,4)$ 和 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$、$(0,2)$，并标明对应的函数。

实线 $y=4|x-1|$；虚线 $y=|3x+2|$

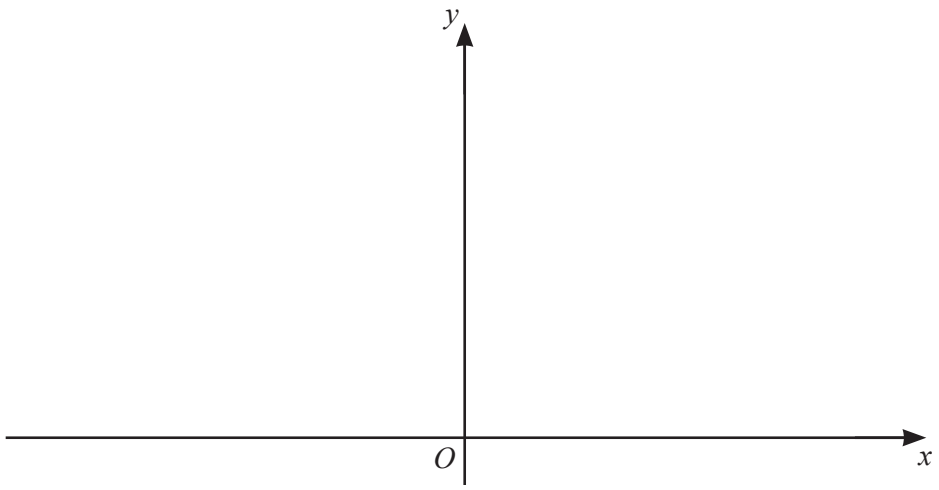


$(1,0)$；$\left(-\frac{2}{3},0\right)$；$(0,4)$；$(0,2)$

2. [2024 · May/June 0606/21 Q1(a)]

提示：看括号内何时为零，再用纵轴交点确定一支的方向。

(a) On the axes, sketch the graph of $y=|4x-6|$, showing the points where the graph meets the axes.



(a) 在所给坐标轴上，画出 $y=|4x-6|$ 的图象草图，并标出图象与坐标轴的交点。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。(2 分)

✓ **答案** 图象为开口向上的 V 形，顶点及横轴交点为 $\left(\frac{3}{2},0\right)$，纵轴交点为 $(0,6)$。

解析 令 $y=0$，得

$$|4x-6|=0$$

$$4x-6=0$$

$$x=\frac{3}{2}$$

故顶点及横轴交点为 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

当 $x=0$ 时，

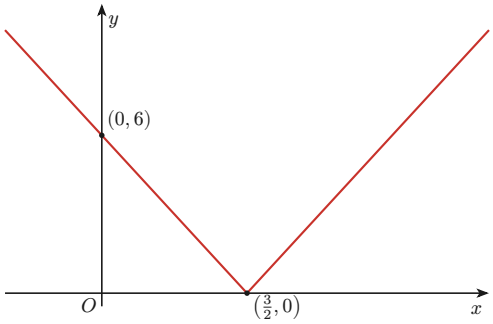
$$y=|4\times 0-6|=6$$

故纵轴交点为 $(0,6)$。

连接 $(0,6)$ 与 $\left(\frac{3}{2},0\right)$，并向左上方延伸；以过顶点的竖直线为对称轴，作出右支。

答：图象为开口向上的 V 形，标出轴交点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 和 $(0,6)$。

实线 $y=|4x-6|$

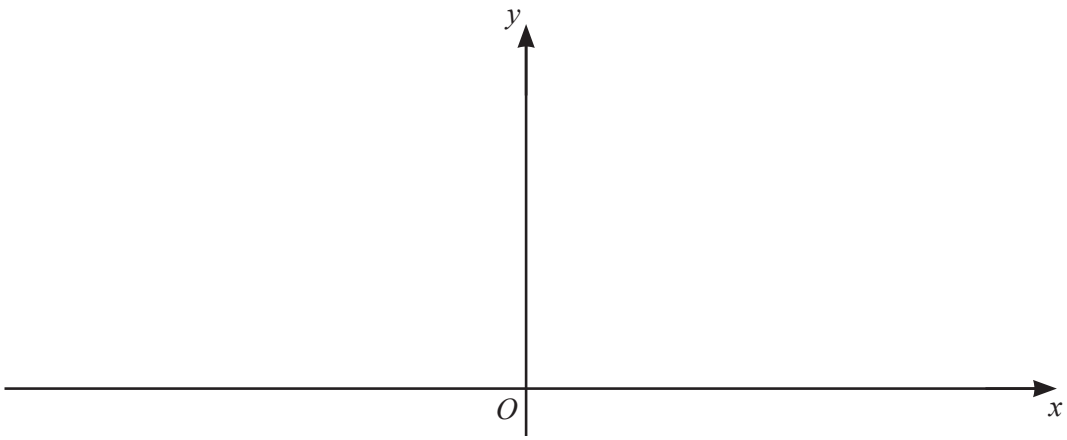


$\left(\frac{3}{2},0\right)$；$(0,6)$

3. [2023 · October/November 0606/13 Q1(a)]

提示：先看两式有无绝对值，再分别考虑两轴交点与连线方式。

(a) On the axes, sketch the graphs of $y=2x+5$ and $y=|4x-3|$, stating the intercepts with the coordinate axes.



(a) 在所给坐标轴上，画出 $y=2x+5$ 和 $y=|4x-3|$ 的图象草图，并写出它们与坐标轴的交点。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。(3 分)

✓ **答案** $y=2x+5$ 是经过 $\left(-\frac{5}{2},0\right)$ 和 $(0,5)$ 的直线；$y=|4x-3|$ 为顶点在 $\left(\frac{3}{4},0\right)$、经过 $(0,3)$ 的开口向上的 V 形图象。两图与坐标轴的交点分别为 $\left(-\frac{5}{2},0\right)$、$(0,5)$ 和 $\left(\frac{3}{4},0\right)$、$(0,3)$。

解析 对于

$$y=2x+5$$

当 $x=0$ 时，

$$y=2\times 0+5=5$$

故纵轴交点为 $(0,5)$。

当 $y=0$ 时，

$$2x+5=0$$

$$x=-\frac{5}{2}$$

故横轴交点为 $\left(-\frac{5}{2},0\right)$。

过 $\left(-\frac{5}{2},0\right)$ 和 $(0,5)$ 作直线，并向两端延伸。

对于

$$y=|4x-3|$$

令 $y=0$，得

$$4x-3=0$$

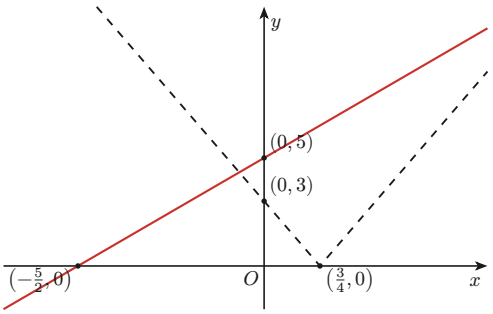
$$x=\frac{3}{4}$$

故顶点及横轴交点为 $\left(\frac{3}{4},0\right)$。
当 $x=0$ 时，

$$y=|4\times 0-3|=3$$

故纵轴交点为 $(0,3)$。
连接 $(0,3)$ 与 $\left(\frac{3}{4},0\right)$，并向左上方延伸；以过顶点的竖直线为对称轴，作出右支。
答：画出上述直线及开口向上的 V 形图象，分别标出轴交点 $\left(-\frac{5}{2},0\right)$、$(0,5)$ 和 $\left(\frac{3}{4},0\right)$、$(0,3)$，并标明对应的函数。

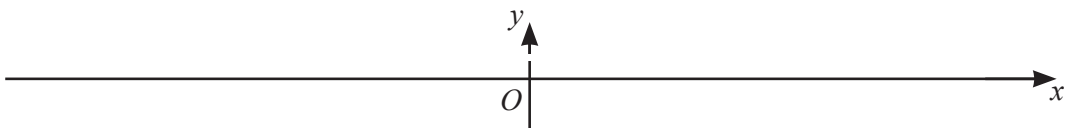
实线 $y=2x+5$；虚线 $y=|4x-3|$



$\left(-\frac{5}{2},0\right)$；$(0,5)$；$\left(\frac{3}{4},0\right)$；$(0,3)$

4. [2022 · May/June 0606/11 Q4(b)(i)]
提示：先求两图的顶点，再求纵轴交点。

(b) (i) On the axes below, sketch the graph of $y=|2x+1|$ and the graph of $y=|4(x-1)|$, stating the coordinates of the points where the graphs meet the coordinate axes.



(b)(i) 在下方所给坐标轴上，画出$y=|2x+1|$和$y=|4(x-1)|$的图象，并写出各图象与坐标轴交点的坐标。横轴标为x，纵轴标为y，原点标为O。（3分）

✓ **答案** $y=|2x+1|$为开口向上的 V 形，顶点及横轴交点为$\left(-\frac{1}{2},0\right)$，纵轴交点为$(0,1)$；$y=|4(x-1)|$为开口向上的 V 形，顶点及横轴交点为$(1,0)$，纵轴交点为$(0,4)$。两图象在第一象限相交两次。

解析 对于

$$y=|2x+1|$$

令绝对值内的一次式为零，得

$$2x+1=0$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

故顶点及横轴交点为$\left(-\frac{1}{2},0\right)$。
令$x=0$，得

$$y = |2 \times 0 + 1| = 1$$

故纵轴交点为$(0, 1)$。
关于直线$x = -\frac{1}{2}$，点$(0, 1)$的对称点为$(-1, 1)$。
从顶点分别经过$(-1, 1)$、$(0, 1)$作两条射线。
对于

$$y = |4(x - 1)|$$

令绝对值内的一次式为零，得

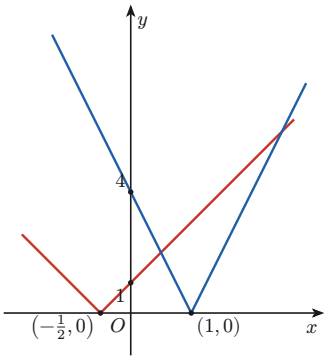
$$4(x - 1) = 0$$

$$x = 1$$

故顶点及横轴交点为$(1, 0)$。
令$x = 0$，得

$$y = |4(0 - 1)| = 4$$

故纵轴交点为$(0, 4)$。
关于直线$x = 1$，点$(0, 4)$的对称点为$(2, 4)$。
从顶点分别经过$(0, 4)$、$(2, 4)$作两条射线。
两图象的横坐标均取全体实数，纵坐标均不小于零，两支向上无限延伸。
答：两条图象均为开口向上的 V 形，分别标明上述顶点、纵轴交点及对应函数；两图象在第一象限相交两次。



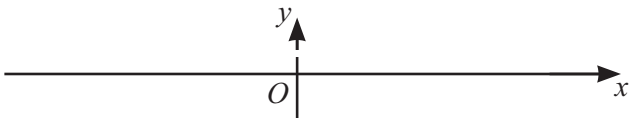
$y = |2x + 1|$　　$y = |4(x - 1)|$

5. [2025 · May/June 0606/23 Q4(b)]
提示：先连续代入两次，再求绝对值图象的顶点和截距。

The function f is defined by　$f(x) = 2x - 1$　for $x \in \mathbb{R}$.

(a) Explain why the function f^2 can be formed.

(b) On the axes, sketch the graph of　$y = \left|f^2(x)\right|$.
State any intercepts with the coordinate axes.



函数f定义为$f(x) = 2x - 1$，其中$x \in \mathbb{R}$。
(a) 说明为什么可以构成函数f^2。（1分）
(b) 在所给坐标轴上，画出$y = \left|f^2(x)\right|$的图象，并写出图象与坐标轴的所有交点。横轴标为x，纵轴标为y，原点标为O。（4分）

✓ **答案** $y=|4x-3|$，图象为开口向上的 V 形，顶点及横轴交点为$\left(\frac{3}{4},0\right)$，纵轴交点为$(0,3)$。

解析 函数f的定义域和值域均为$\mathbb{R}$，输出的每个值都在定义域内，故可以构成f^2。

$f^2(x)$表示$f(f(x))$，即先后应用两次函数f。

$$f^2(x)=f(f(x))=2(2x-1)-1=4x-3$$

故所求图象的函数式为

$$y=|4x-3|$$

令绝对值内的一次式为零，得

$$4x-3=0$$

$$x=\frac{3}{4}$$

故顶点及横轴交点为$\left(\frac{3}{4},0\right)$。

令$x=0$，得

$$y=|4\times 0-3|=3$$

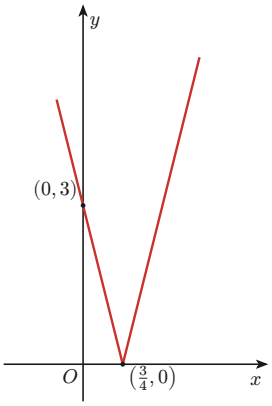
故纵轴交点为$(0,3)$。

关于直线$x=\frac{3}{4}$，点$(0,3)$的对称点为$\left(\frac{3}{2},3\right)$。

从顶点分别经过$(0,3)$、$\left(\frac{3}{2},3\right)$作两条射线。

图象的横坐标取全体实数，纵坐标不小于零，两支向上无限延伸。

答：图象为开口向上的 V 形，顶点及横轴交点为$\left(\frac{3}{4},0\right)$，纵轴交点为$(0,3)$。



第 2 章 二次函数

Chapter 2

2.1 二次函数

题型 1 把二次一般式配成顶点式

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **平方展开关系：**本例曲线用横坐标 x 确定纵坐标 y。

$$y=x^2+2x-3$$

展开下式，得到与原式相同的平方项和一次项。

$$(x+1)^2=(x+1)(x+1)=x^2+x+x+1=x^2+2x+1$$

② **补减保持相等：**原式前两项加 1 可凑成平方，补 1 后再减 1。

$$y=x^2+2x+1-1-3=(x+1)^2-4$$

把二次式写成平方项与常数之和，称为配方。

平方外的常数为_____。

③ **一次系数折半：**平方项系数为 1 时，括号内的常数为一次项系数的_____。

一次项系数为分数时，先算它的一半。

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\div 2=-\frac{3}{4}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

$$x^2-\frac{3}{2}x=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$$

④ **提出二次系数：**平方项系数不为 1 时，从含 x 的两项中提出该系数。

$$-2x^2+4x-3=-2(x^2-2x)-3$$

提出负数时，括号内各项的符号随之改变。

⑤ **乘回外部系数：**括号内配方后，补减的常数也须乘括号外的系数。

$$-2(x^2-2x)-3=-2[(x-1)^2-1]-3$$

$$-2[(x-1)^2-1]-3=-2(x-1)^2+2-3=-1-2(x-1)^2$$

⑥ **驻点坐标读取：**本例中平方不小于零，平方为零时，曲线达到最低点。

$$(x+1)^2\geq 0$$

$$x+1=0,\quad x=-1,\quad y=-4$$

二次曲线的驻点就是顶点。

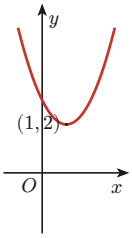
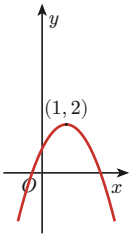
一般写成下式，a, b, c 为常数且 $a \neq 0$，驻点坐标为_____。

$$y = a(x+b)^2 + c$$

$$x + b = 0, \quad x = -b, \quad y = c$$

填空：①-4　②$-$半　③$(-b, c)$

同顶点的两种开口（定义域均为全体实数）

	$y = (x-1)^2 + 2$	$y = -(x-1)^2 + 2$
图像		
系数	正	负
顶点	$(1, 2)$	
最值	最小值为 2	最大值为 2
值域	$y \geq 2$	$y \leq 2$

点石成金　题目出现二次式并要求配成平方形式或用配方法求驻点时，先提出二次项系数，再把括号内一次项系数折半。

例 1　[2025 · May/June 0606/21 Q1(a)]

A curve has equation $y = x^2 + 2x - 3$.

(a) Use the method of completing the square to find the coordinates of the stationary point on the curve.

曲线的方程为 $y = x^2 + 2x - 3$。(a) 用配方法求曲线上驻点的坐标。

解答　配方得

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3$$

$$y = (x+1)^2 - 4$$

方法：先看二次项系数是否为一，再从一次项系数折半起手。

辨析：括号内常数是一次系数的折半值，驻点横坐标是它的相反数。

$\because (x+1)^2 \geq 0$，平方为零时 y 取得最小值，

$\therefore$ 驻点满足

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$y = -4$$

答：驻点坐标为 $(-1, -4)$。

例 2　[2024 · October/November 0606/23 Q2(a)]

The function f is defined by $f(x) = 1 - 4x - x^2$ for all real values of x.

(a) Write $f(x)$ in the form $a - (x+b)^2$, where a and b are constants.

对于所有实数 x，函数 f 定义为

$$f(x) = 1 - 4x - x^2$$

(a) 将 $f(x)$ 写成下列形式，其中 a 和 b 为常数。

$$a - (x+b)^2$$

解答 提出负号，得

$$f(x) = 1 - (x^2 + 4x)$$

括号内添上再减去 4，得

$$f(x) = 1 - ((x+2)^2 - 4)$$

$$f(x) = 5 - (x+2)^2$$

与所给形式比较，得

$$a = 5$$

$$b = 2$$

答：所求形式为 $5 - (x+2)^2$。

方法：先看二次项的符号，从前两项提出负号后再配方。

辨析：括号内的减四是配方补偿，括号外的加四是负号分配的结果。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/22 Q1(a)]

提示：看一次项系数凑平方，再找平方项为零的位置。

The point A is the minimum point on the curve $y = x^2 - 6x + 10$.

(a) Using the method of completing the square, find the coordinates of A.

点 A 是曲线 $y = x^2 - 6x + 10$ 上的最低点。(a) 用配方法求点 A 的坐标。

答案

$$(3, 1)$$

解析 配方得

$$y = x^2 - 6x + 9 - 9 + 10$$

$$y = (x-3)^2 + 1$$

$\because (x-3)^2 \geq 0$，最低点处的平方项为零，

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$y = 1$$

答：点 A 的坐标为 $(3, 1)$。

2. [2025 · October/November 0606/23 Q3(a)]
提示：看折半后的分数，比较补入与减去的常数是否相等。

(a) (i) Write x^2-x-6 in the form $(x+a)^2+b$ where a and b are constants.

(ii) Hence write down the coordinates of the stationary point on the curve $y=x^2-x-6$.

(a)（i）把 x^2-x-6 写成 $(x+a)^2+b$ 的形式，其中 a,b 为常数。（ii）由此写出曲线 $y=x^2-x-6$ 上驻点的坐标。

✓ **答案** （i）$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$；（ii）$\left(\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)$。

解析 （i）将一次项系数 -1 折半后配方，得

$$x^2-x-6=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-6$$

$$x^2-x-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

（ii）由（i）得

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

$\because \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$，驻点处的平方项为零，

$$x-\frac{1}{2}=0$$

$$x=\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{25}{4}$$

答：（i）$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$；（ii）驻点坐标为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)$。

3. [2024 · May/June 0606/21 Q2(a)]
提示：看含未知数的两项，提出负系数后核对括号内符号。

(a) Write $3+4x-2x^2$ in the form $a+b(x+c)^2$, where a, b and c are integers.

(a) 把 $3+4x-2x^2$ 写成 $a+b(x+c)^2$ 的形式，其中 a,b,c 均为整数。

✓ **答案**

$$5-2(x-1)^2$$

解析 从含 x 的两项中提出 -2，得

$$3+4x-2x^2=-2(x^2-2x)+3$$

$$3+4x-2x^2=-2[(x-1)^2-1]+3$$

$$3+4x-2x^2=-2(x-1)^2+2+3$$

$$3+4x-2x^2=5-2(x-1)^2$$

答：$5-2(x-1)^2$。

4. [2026 · May/June 0606/13 Q1(a)]
提示：看提出系数后的一次项，配方后核对常数是否乘回。

(a) Write $2x^2-6x+5$ in the form $a(x+b)^2+c$, where a, b and c are constants.

(a) 把 $2x^2-6x+5$ 写成 $a(x+b)^2+c$ 的形式，其中 a,b,c 为常数。

✓ **答案**

$$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

解析 从含 x 的两项中提出 2，得

$$2x^2-6x+5=2(x^2-3x)+5$$

$$2x^2-6x+5=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+5$$

$$2x^2-6x+5=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+5$$

$$2x^2-6x+5=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

答：$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$。

5. [2026 · February/March 0606/22 Q1(a)]
提示：看提出系数后的一次项，取半配方后检查外系数是否乘回。

The function f is defined by $\mathrm{f}(x)=2x^2-6x+4$ for all real values of x.

(a) Write $\mathrm{f}(x)$ in the form $a(x+b)^2+c$ where a, b and c are constants.

对于所有实数 x，函数 f 定义为

$$f(x)=2x^2-6x+4$$

(a) 将 $f(x)$ 写成下列形式，其中 a、b 和 c 为常数。

$$a(x+b)^2+c$$

✓ **答案**

$$f(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

解析 从前两项提出 2，得

$$f(x)=2(x^2-3x)+4$$

括号内一次项系数的一半为 $-\frac{3}{2}$，配方得

$$f(x)=2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+4$$

$$f(x)=2\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)+4$$

$$f(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+4$$

$$f(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

与所给形式比较，得

$$a=2$$

$$b=-\frac{3}{2}$$

$$c=-\frac{1}{2}$$

答：所求形式为 $2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$。

6. [2025 · October/November 0606/12 Q4(a)]

提示：看括号内的一次项系数，比较取半与平方后的分母。

(a) Show that $2x^2+5x+3$ can be written in the form $2(x+a)^2+b$, where a and b are constants to be found.

(a) 证明下列二次式可以写成所给形式，并求出常数 a 和 b。

$$2x^2+5x+3$$

所给形式为

$$2(x+a)^2+b$$

✓ **答案**

$$2x^2+5x+3=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

解析 从前两项提出 2，再在括号内配方，得

$$2x^2+5x+3=2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)+3$$

$$2x^2+5x+3=2\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}\right)+3$$

$$2x^2+5x+3=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right)+3$$

$$2x^2+5x+3=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}+3$$

$$2x^2+5x+3=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

故原式可写成所给形式，所求常数为

$$a=\frac{5}{4}$$

$$b=-\frac{1}{8}$$

答：所求形式为 $2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$。

7. [2025 · February/March 0606/12 Q5(a)]

提示：看括号内一次项的负号，再检查补偿项与原常数的合并。

(a) Write $2x^2-2x+3$ in the form $a\left(x+b\right)^2+c$, where a, b and c are constants.

（a）将下列二次式写成所给形式，其中 a、b 和 c 为常数。

$$2x^2-2x+3$$

所给形式为

$$a(x+b)^2+c$$

✓ **答案**

$$2x^2-2x+3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

解析 从前两项提出 2，得

$$2x^2-2x+3=2(x^2-x)+3$$

括号内一次项系数的一半为 $-\frac{1}{2}$，配方得

$$2x^2-2x+3=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+3$$

$$2x^2-2x+3=2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)+3$$

$$2x^2-2x+3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+3$$

$$2x^2-2x+3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

与所给形式比较，得

$$a=2$$

$$b=-\frac{1}{2}$$

$$c=\frac{5}{2}$$

答：所求形式为 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$。

8. [2023 · May/June 0606/13 Q2(a)]
提示：看括号内的分数系数，先折半再平方，末尾通分。

(a) Write $2x^2+5x+3$ in the form $2(x+a)^2+b$, where a and b are rational numbers.

(a) 把 $2x^2+5x+3$ 写成 $2(x+a)^2+b$ 的形式，其中 a, b 为有理数。

✓ **答案**

$$2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

解析 从含 x 的两项中提出 2，得

$$2x^2+5x+3=2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)+3$$

$$2x^2+5x+3=2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]+3$$

$$2x^2+5x+3=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}+3$$

$$2x^2+5x+3=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

答：$2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$。

9. [2023 · October/November 0606/21 Q1(a)]
提示：看提出负数后的符号，比较补减常数乘回前后的变化。

(a) Write $19-12x-3x^2$ in the form $a(x+b)^2+c$ where a, b and c are integers.

(a) 把 $19-12x-3x^2$ 写成 $a(x+b)^2+c$ 的形式，其中 a, b, c 均为整数。

✓ **答案**

$$-3(x+2)^2+31$$

解析 从含 x 的两项中提出 -3，得

$$19-12x-3x^2=-3(x^2+4x)+19$$

$$19-12x-3x^2=-3[(x+2)^2-4]+19$$

$$19-12x-3x^2=-3(x+2)^2+12+19$$

$$19-12x-3x^2=-3(x+2)^2+31$$

答：$-3(x+2)^2+31$。

10. [2023 · May/June 0606/11 Q1(a)]
提示：看提出系数后的分数，比较平方展开与原式各项。

(a) Write $5x^2-14x+8$ in the form $a(x+b)^2+c$, where a, b and c are constants to be found.

(a) 把 $5x^2-14x+8$ 写成 $a(x+b)^2+c$ 的形式，其中 a, b, c 为待求的常数。

✓ **答案**

$$5\left(x-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{9}{5}$$

解析　从含 x 的两项中提出 5，得

$$5x^2-14x+8=5\left(x^2-\frac{14}{5}x\right)+8$$

$$5x^2-14x+8=5\left[\left(x-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{49}{25}\right]+8$$

$$5x^2-14x+8=5\left(x-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{49}{5}+8$$

$$5x^2-14x+8=5\left(x-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{9}{5}$$

答：$5\left(x-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{9}{5}$。

题型 2　由顶点式读驻点、最值或值域

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **提取二次项系数：**本例研究下式的最大值，x 取实数。将含 x 的两项提出 -3。

$$19-12x-3x^2=-3(x^2+4x)+19$$

② **补成完全平方：**括号内一次项系数为 4，取其一半 _____。补入所得数的平方，再减去同一个数。

$$(x+2)^2=(x+2)(x+2)=x^2+4x+4$$

$$x^2+4x=(x+2)^2-4$$

③ **分数系数配方：**一次项系数为分数时，仍按同样方式配方。以一次项系数 $\frac{3}{2}$ 为例。

$$\frac{3}{2}\div 2=\frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

$$x^2+\frac{3}{2}x=x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}=\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$$

④ **判断最值大小：**用 y 表示二次式的值，利用平方非负求最值。

$$(x+2)^2\geq 0$$

$y=-3(x+2)^2+31\leq 31$

当 $x=-2$ 时，最大值为 _____。

$y=3(x+2)^2+31\geq 31$

当 $x=-2$ 时，最小值为 31。

⑤ **读取驻点坐标：**二次函数图象的顶点是驻点。令平方项括号内为零得横坐标，最值为纵坐标。

$$x+2=0,\quad x=-2,\quad \text{驻点}=(-2,31)$$

实常数 a,b,c 满足 $a\neq 0$ 时，下式驻点为 _____。

$$y = a(x+b)^2 + c$$

⑥ **写出函数值域：**函数值的全部可能取值组成值域。本例记函数值为 $f(x)$，表示 x 对应的式子值。

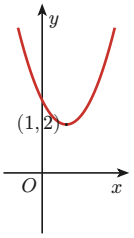
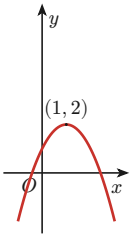
$$f(x) = -3(x+2)^2 + 31$$

当 x 取遍实数时，平方项取遍非负数，故值域为

$f(x) \le 31$。

← 填空：①2　②31　③$(-b, c)$

同顶点的两种开口（定义域均为全体实数）

	$y = (x-1)^2 + 2$	$y = -(x-1)^2 + 2$
图像		
系数	正	负
顶点	$(1, 2)$	
最值	最小值为 2	最大值为 2
值域	$y \ge 2$	$y \le 2$

点石成金　题目出现二次式并要求配方，由此求驻点、最值或值域时，先配方，再令平方项为零。

例 1　[2023 · October/November 0606/21 Q1(b)]

(a) Write $19-12x-3x^2$ in the form $a(x+b)^2+c$ where a, b and c are integers.

(b) Hence find the maximum value of $19-12x-3x^2$ and the value of x at which this maximum occurs.

(a) 将 $19-12x-3x^2$ 写成 $a(x+b)^2+c$ 的形式，其中 a、b 和 c 均为整数。

(b) 由此求 $19-12x-3x^2$ 的最大值，以及取得该最大值时 x 的值。

解答　将含 x 的两项提出 -3，再配方，得

$$19 - 12x - 3x^2 = -3(x^2 + 4x) + 19$$

$$-3(x^2 + 4x) + 19 = -3((x+2)^2 - 4) + 19$$

$$-3((x+2)^2 - 4) + 19 = -3(x+2)^2 + 31$$

由平方的非负性，得

$$(x+2)^2 \ge 0$$

$$-3(x+2)^2 + 31 \le 31$$

等号成立时，

$$x + 2 = 0$$

方法：先看二次项系数，提到括号外，再将括号内一次项系数折半配方。

辨析：驻点是图象上的点，最值是该点的纵坐标。

拓展：平方项系数决定开口方向，也决定驻点是最高点还是最低点。

$$x = -2$$

答：(a) $-3(x+2)^2+31$；(b) 最大值为 31，在 $x=-2$ 时取得。

例 2 [2025 · February/March 0606/12 Q5(c)]

(a) Write $2x^2-2x+3$ in the form $a(x+b)^2+c$, where a, b and c are constants.

It is given that $f(x)=2x^2-2x+3$, for $x \leqslant p$.

(b) Write down the greatest value of p for which f has an inverse.

(c) Using this value of p, write down the range of f.

(a) 将 $2x^2-2x+3$ 写成 $a(x+b)^2+c$ 的形式，其中 a、b、c 为常数。
已知 $f(x)=2x^2-2x+3$，其中 $x \leq p$。
(b) 写出使 f 有反函数的 p 的最大值。
(c) 使用这个 p 值，写出 f 的值域。

解答 提出二次项系数，配方得

$$2x^2-2x+3=2(x^2-x)+3$$

$$=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+3$$

$$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

方法：先看二次项系数，提出后配方，再比较定义域端点与对称轴的位置。

辨析：驻点是图像上的点，值域是函数值的取值集合。

故所求常数为

$$a=2,\quad b=-\frac{1}{2},\quad c=\frac{5}{2}$$

抛物线的对称轴为

$$x=\frac{1}{2}$$

要使反函数存在，定义域须位于对称轴左侧，故

$$p \leq \frac{1}{2}$$

所以最大的端点值为

$$p=\frac{1}{2}$$

在此定义域内，平方项可取任意非负数，且

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2} \geq \frac{5}{2}$$

等号在下列自变量值处成立：

$$x = \frac{1}{2}$$

答：(a) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$；(b) $p=\frac{1}{2}$；(c) 值域为 $f(x)\geq\frac{5}{2}$。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/21 Q2(b)]

提示：看平方项前的负号，比较函数值与括号外常数的大小。

(a) Write $3+4x-2x^2$ in the form $a+b(x+c)^2$, where a, b and c are integers.

(b) Hence write down the range of the function $f(x)=3+4x-2x^2$, where $x\in\mathbb{R}$.

(a) 将 $3+4x-2x^2$ 写成 $a+b(x+c)^2$ 的形式，其中 a、b 和 c 均为整数。
(b) 由此写出函数 $f(x)=3+4x-2x^2$ 的值域，其中 x 为实数。

✓ **答案** (a) $5-2(x-1)^2$；(b) $f(x)\leq 5$。

解析 将含 x 的两项提出 -2，再配方，得

$$3+4x-2x^2=-2(x^2-2x)+3$$

$$-2(x^2-2x)+3=-2((x-1)^2-1)+3$$

$$-2((x-1)^2-1)+3=5-2(x-1)^2$$

当 x 取遍实数时，$(x-1)^2$ 取遍所有非负数，故函数值取遍所有不大于 5 的实数。

$$f(x)\leq 5$$

其中 $x=1$ 时取等号。
答：(a) $5-2(x-1)^2$；(b) 值域为 $f(x)\leq 5$。

2. [2023 · May/June 0606/13 Q2(b)]

提示：看配方后的括号，找使其为零的横坐标，再读纵坐标。

(a) Write $2x^2+5x+3$ in the form $2(x+a)^2+b$, where a and b are rational numbers.

(b) Hence write down the coordinates of the stationary point on the curve $y=2x^2+5x+3$.

(a) 将 $2x^2+5x+3$ 写成 $2(x+a)^2+b$ 的形式，其中 a 和 b 均为有理数。
(b) 由此写出曲线 $y=2x^2+5x+3$ 上驻点的坐标。

✓ **答案** (a) $2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$；(b) $\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{8}\right)$。

解析 将含 x 的两项提出 2，再配方，得

$$2x^2+5x+3=2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)+3$$

$$2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)+3=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right)+3$$

$$2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right)+3=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}+3$$

$$2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}+3=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

平方项系数为正，平方项为零时取得最小值。令

$$x+\frac{5}{4}=0$$

得

$$x=-\frac{5}{4}$$

此时

$$y=-\frac{1}{8}$$

故曲线的驻点为最低点。

答：（a）$2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$；（b）驻点坐标为 $\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{8}\right)$。

3. [2023 · May/June 0606/11 Q1(b)]

提示：看括号内的减号，核对横坐标符号，再读括号外常数。

(a) Write $5x^2-14x+8$ in the form $a(x+b)^2+c$, where a, b and c are constants to be found.

(b) Hence write down the coordinates of the stationary point on the curve $y=5x^2-14x+8$.

（a）将 $5x^2-14x+8$ 写成 $a(x+b)^2+c$ 的形式，其中 a、b 和 c 是待求的常数。

（b）由此写出曲线 $y=5x^2-14x+8$ 上驻点的坐标。

✓ **答案**　（a）$5\left(x-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{9}{5}$；（b）$\left(\frac{7}{5},-\frac{9}{5}\right)$。

解析　将含 x 的两项提出 5，再配方，得

$$5x^2-14x+8=5\left(x^2-\frac{14}{5}x\right)+8$$

$$5\left(x^2-\frac{14}{5}x\right)+8=5\left(\left(x-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{49}{25}\right)+8$$

$$5\left(\left(x-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{49}{25}\right)+8=5\left(x-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{49}{5}+8$$

$$5\left(x-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{49}{5}+8=5\left(x-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{9}{5}$$

平方项系数为正，平方项为零时取得最小值。令

$$x-\frac{7}{5}=0$$

得

$$x=\frac{7}{5}$$

此时

$$y=-\frac{9}{5}$$

故曲线的驻点为最低点。
答：(a) $5\left(x-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{9}{5}$；(b) 驻点坐标为 $\left(\frac{7}{5},-\frac{9}{5}\right)$。

4. [2026 · February/March 0606/22 Q1(b)]
提示：看配方后平方项的系数，比较平方为零及增大时的函数值。

The function f is defined by $\mathrm{f}(x)=2x^2-6x+4$ for all real values of x.

(a) Write $\mathrm{f}(x)$ in the form $a(x+b)^2+c$ where a, b and c are constants.

(b) Hence find the range of f.

函数 f 定义为 $f(x)=2x^2-6x+4$，其中 x 取所有实数。
(a) 将 $f(x)$ 写成 $a(x+b)^2+c$ 的形式，其中 a、b、c 为常数。
(b) 由此求 f 的值域。

✓ **答案** (a) $f(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$；(b) $f(x)\geq-\frac{1}{2}$。

解析 提出二次项系数，配方得

$$f(x)=2x^2-6x+4$$

$$=2(x^2-3x)+4$$

$$=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+4$$

$$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

故所求常数为

$$a=2,\quad b=-\frac{3}{2},\quad c=-\frac{1}{2}$$

由平方非负得

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$$

$$f(x)\geq-\frac{1}{2}$$

等号在下列自变量值处成立：

$$x=\frac{3}{2}$$

自变量取全体实数，平方项可取任意非负数。答：(a) $f(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$；(b) 值域为 $f(x)\geq-\frac{1}{2}$。

5. [2024 · October/November 0606/23 Q2(b)]
提示：看平方项前的负号，比较平方增大时函数值的变化。

The function f is defined by $\mathrm{f}(x)=1-4x-x^2$ for all real values of x.

(a) Write $\mathrm{f}(x)$ in the form $a-(x+b)^2$, where a and b are constants.

(b) Find the range of f.

函数 f 定义为 $f(x)=1-4x-x^2$，其中 x 取所有实数。
(a) 将 $f(x)$ 写成 $a-(x+b)^2$ 的形式，其中 a、b 为常数。
(b) 求 f 的值域。

✓ **答案** (a) $f(x)=5-(x+2)^2$；(b) $f(x)\le 5$。

解析 提出负号，配方得

$$f(x)=1-4x-x^2$$

$$=-(x^2+4x)+1$$

$$=-\left[(x+2)^2-4\right]+1$$

$$=5-(x+2)^2$$

故所求常数为

$$a=5,\quad b=2$$

由平方非负得

$$(x+2)^2\ge 0$$

$$-(x+2)^2\le 0$$

$$f(x)\le 5$$

等号在下列自变量值处成立：

$$x=-2$$

自变量取全体实数，平方项可取任意非负数。答：(a) $f(x)=5-(x+2)^2$；(b) 值域为 $f(x)\le 5$。

6. [2026 · May/June 0606/11 Q6(b)]
提示：将右侧半直线的端点与对称轴比较，再看等号能否成立。

The function f is such that $\mathrm{f}(x)=3x^2+8x$ for $x\geqslant k$, where k is a constant.
It is given that f^{-1} exists.
k has the least possible value for which f^{-1} exists.

(a) Find the value of k.

(b) Find the range of f.

函数 f 满足 $f(x)=3x^2+8x$，其中 $x\ge k$，k 为常数。
已知反函数 f^{-1} 存在。
k 取使 f^{-1} 存在的最小可能值。
(a) 求 k 的值。
(b) 求 f 的值域。

✓ **答案** (a) $k=-\frac{4}{3}$；(b) $f(x)\ge -\frac{16}{3}$。

解析 配方得

$$f(x)=3x^2+8x$$

$$=3\left(x^2+\frac{8}{3}x\right)$$

$$= 3\left[\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right]$$

$$= 3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}$$

抛物线的对称轴为

$$x = -\frac{4}{3}$$

定义域为右侧半直线，要使反函数存在，须有

$$k \geq -\frac{4}{3}$$

故最小的端点值为

$$k = -\frac{4}{3}$$

此时定义域为

$$x \geq -\frac{4}{3}$$

由平方非负得

$$\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 \geq 0$$

$$f(x) \geq -\frac{16}{3}$$

等号在定义域端点处成立：

$$x = -\frac{4}{3}$$

在此定义域内，平方项可取任意非负数。 答：(a) $k = -\frac{4}{3}$；(b) 值域为 $f(x) \geq -\frac{16}{3}$。

7. [2025 · October/November 0606/12 Q4(b)]

提示：看括号内哪个横坐标使平方为零，再读对应的纵坐标。

(a) Show that $2x^2+5x+3$ can be written in the form $2(x+a)^2+b$, where a and b are constants to be found.

(b) Hence write down the coordinates of the stationary point on the curve $y = 2x^2+5x+3$.

(a) 证明 $2x^2+5x+3$ 能写成 $2(x+a)^2+b$ 的形式，其中 a、b 为待求的常数，并求出它们的值。

(b) 由此写出曲线 $y = 2x^2+5x+3$ 上驻点的坐标。

✓ **答案** (a) $2x^2+5x+3 = 2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$，$a = \frac{5}{4}$，$b = -\frac{1}{8}$；(b) $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$。

解析 提出二次项系数，配方得

$$2x^2+5x+3 = 2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)+3$$

$$= 2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] + 3$$

$$= 2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

故原式能写成所给形式，且

$$a = \frac{5}{4},\quad b = -\frac{1}{8}$$

驻点处平方项为零，故

$$x + \frac{5}{4} = 0$$

$$x = -\frac{5}{4}$$

代入顶点式得

$$y = 2\left(-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

答：(a) $2x^2+5x+3 = 2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$，其中 $a=\frac{5}{4}$，$b=-\frac{1}{8}$；(b) 驻点坐标为 $\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{8}\right)$。

题型 3　联立直线与抛物线求相切参数

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **联立消去纵坐标：**例题的直线与曲线在交点处，横、纵坐标分别相同。将两个纵坐标表达式相等，再移项。

$$kx^2 + x + 2k = 1 - k - x$$

$$kx^2 + 2x + 3k - 1 = 0$$

② **二次项须非零：**本例的二次项系数为 k，先考察它为零的情形。取 $k=0$，两式分别为

$$y = x$$

$$y = 1 - x$$

两条直线斜率不同，不相切，故须有 $k \neq 0$。

③ **相切对应重根：**直线与抛物线相切，联立方程有两个_____的实根，称为重根。记二次项系数、一次项系数、常数项依次为 A、B、C。当 $A \neq 0$ 时，相切条件为判别式等于零。

$$A = k,\quad B = 2,\quad C = 3k - 1$$

$$B^2 - 4AC = 0$$

④ **展开括号平方：**含参数的括号平方，先写成两个相同括号相乘。

$$(2k+1)^2 = (2k+1)(2k+1)$$

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$(2k-1)^2 = (2k-1)(2k-1)$$

$$(2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$$

整体变号不改变平方的值。

$$(-(2k+1))^2 = (2k+1)^2$$

⑤ **平方方程求根：**平方等于正数，开方须取正、负两种值。符号 $\pm$ 表示这两种取值。平方等于零，括号内的式子为_____。

$$(6k-1)^2=13$$

$$6k-1=\pm\sqrt{13}$$

$$(k-1)^2=0$$

$$k-1=0$$

$$k=1$$

⑥ **零乘积求根：**方程各项含有相同因式，先提取公因式。

$$k^2-2k=k(k-2)$$

两因式乘积为零，至少一个因式为零。

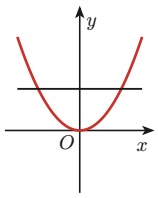
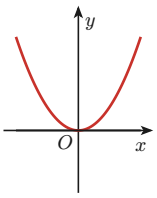
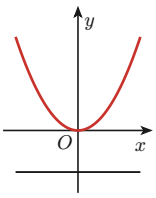
$$k(k-2)=0$$

$$k=0 \quad 或 \quad k=2$$

若要求非零值，舍去 $k=0$，保留 $k=2$。

填空：①相同　②零

同一抛物线与三条水平直线

	$y=1$	$y=0$	$y=-1$
图像			
交点方程	$x^2=1$	$x^2=0$	$x^2=-1$
不同交点数	2	1	0
判别式	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$

点石成金　题目出现直线与抛物线相切并求参数时，先联立两式，整理成关于横坐标的方程。

例 1　[2023 · February/March 0606/12 Q1]

Find the exact values of k such that the straight line $y=1-k-x$ is a tangent to the curve $y=kx^2+x+2k$.

求 k 的精确值，使直线 $y=1-k-x$ 与曲线 $y=kx^2+x+2k$ 相切。

解答　当 $k=0$ 时，两式分别为

$$y=1-x$$

$$y=x$$

两条直线斜率不同，不相切，故 $k\neq 0$。联立两式，得

$$kx^2+x+2k=1-k-x$$

$$kx^2+2x+3k-1=0$$

方法：先看二次项系数能否为零，再联立消元，令判别式为零。

辨析：重根是同一横坐标计两次，两个不同实根是两个不同交点。

∵直线与抛物线相切，∴上述关于 x 的二次方程有两个相同的实根。

$$2^2 - 4k(3k-1) = 0$$

$$4 - 12k^2 + 4k = 0$$

$$3k^2 - k - 1 = 0$$

$$3k^2 - k = 1$$

为配成完全平方，两边同乘 12 后加 1，得

$$36k^2 - 12k + 1 = 13$$

$$(6k-1)^2 = 13$$

$$6k - 1 = \pm\sqrt{13}$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

两值均非零，均使联立所得二次方程有重根。

答：$k = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ 或 $k = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$。

针对练习

1. [2021 · May/June 0606/21 Q7]

提示：联立消去纵坐标，再用相切对应的重根条件。

Find the exact values of the constant k for which the line $y = 2x+1$ is a tangent to the curve $y = 4x^2 + kx + k - 2$.

求常数k的精确值，使直线$y = 2x + 1$与曲线$y = 4x^2 + kx + k - 2$相切。

✓ **答案** $k = 10 \pm \sqrt{48}$。

解析 联立直线与曲线的方程，得

$$4x^2 + kx + k - 2 = 2x + 1$$

$$4x^2 + (k-2)x + k - 3 = 0$$

∵直线与抛物线相切，∴上述二次方程有重根。

$$(k-2)^2 - 4 \times 4(k-3) = 0$$

$$k^2 - 4k + 4 - 16k + 48 = 0$$

$$k^2 - 20k + 52 = 0$$

$$(k-10)^2 = 48$$

$$k - 10 = \pm\sqrt{48}$$

$$k = 10 \pm \sqrt{48}$$

二次项系数为4，两值均使联立方程有重根。
答：$k = 10 + \sqrt{48}$或$k = 10 - \sqrt{48}$。

2. [2023 · October/November 0606/22 Q2]
提示：联立后核对三项系数，求根后对照参数的非零要求。

Find the non-zero value of k for which the line $y = -2x - 6k - 1$ is a tangent to the curve $y = x(x + 2k)$.

求 k 的非零值，使直线 $y = -2x - 6k - 1$ 与曲线 $y = x(x + 2k)$ 相切。

✓ **答案**

$$k = 4$$

解析 联立直线与曲线的方程，得

$$x(x + 2k) = -2x - 6k - 1$$

$$x^2 + (2k + 2)x + 6k + 1 = 0$$

∵直线与曲线相切，∴上述关于 x 的二次方程有两个相同的实根。

$$(2k + 2)^2 - 4 \times 1 \times (6k + 1) = 0$$

$$4k^2 + 8k + 4 - 24k - 4 = 0$$

$$4k^2 - 16k = 0$$

$$4k(k - 4) = 0$$

$$k = 0 \quad 或 \quad k = 4$$

题设要求 k 为非零值，舍去 $k = 0$。当 $k = 4$ 时，联立所得方程为

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$(x + 5)^2 = 0$$

该方程有两个相同的实根，符合相切条件。
答：$k = 4$。

3. [2023 · October/November 0606/21 Q6]
提示：移项后看一次项的整体负号，展开平方时核对交叉项。

Find the value of the constant a for which the line $y = (2a + 1)x - 10$ is a tangent to the curve $y = ax^2 - 5x + 2$.

求常数 a 的值，使直线 $y = (2a + 1)x - 10$ 与曲线 $y = ax^2 - 5x + 2$ 相切。

✓ **答案**

$$a = 3$$

解析 当 $a = 0$ 时，两式分别为

$$y = x - 10$$

$$y = -5x + 2$$

两条直线斜率不同，不相切，故 $a \neq 0$。联立两式，得

$$ax^2 - 5x + 2 = (2a+1)x - 10$$

$$ax^2 - (2a+6)x + 12 = 0$$

∵直线与曲线相切，∴上述关于 x 的二次方程有两个相同的实根。

$$(-(2a+6))^2 - 4 \times a \times 12 = 0$$

$$4a^2 + 24a + 36 - 48a = 0$$

$$4a^2 - 24a + 36 = 0$$

$$a^2 - 6a + 9 = 0$$

$$(a-3)^2 = 0$$

$$a = 3$$

此时二次项系数非零，联立所得方程为

$$3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$3(x-2)^2 = 0$$

该方程有两个相同的实根，符合相切条件。

答：$a = 3$。

题型 4　令判别式小于零求参数范围

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **移项认出系数：**例题两边都含未知数 x，k 为参数。把各项移到左边，按 x 的降幂排列。

$$4x^2 - k = 4kx - 2$$

$$4x^2 - 4kx + 2 - k = 0$$

将二次项系数、一次项系数和常数项分别记为 a、b、c。

$$a = 4, \quad b = -4k, \quad c = 2 - k$$

② **无实根的条件：**上式移项后，两边同加 k^2，可得

$$(2x-k)^2 = 4x^2 - 4kx + k^2 = k^2 + k - 2$$

平方非负，右边小于零时无实根。一般二次方程的判别式记为 Δ，无实根等价于 _____。

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

③ **乘积小于零：**把二次式写成两因式的乘积。

$$k^2 + k - 2 = k^2 + 2k - k - 2 = k(k+2) - (k+2) = (k+2)(k-1)$$

乘积小于零时，两因式符号_____。本例前一因式比后一因式大 3，故有

$$k+2>0,\quad k-1<0$$

④ **曲线全在轴上方：**将例题左边的二次式记为函数值 y。

$$y=4x^2-4kx+2-k$$

如 $k=0$，函数值恒正，令 $y=0$ 后无实根。

$$y=4x^2+2\geq 2>0$$

$$y=0 \quad 时 \quad 4x^2=-2$$

二次项系数为正时，曲线全在 x 轴上方等价于对应方程无实根。

⑤ **二次项含参数：**若要求下式无实根，先讨论二次项系数是否为零。

$$kx^2+x+1=0$$

当 $k=0$ 时

$$x+1=0$$

$x=-1$，有实根，不合要求。

当 $k\neq 0$ 时

为二次方程，须满足

$\Delta<0$

⑥ **负数除法变号：**上式在 $k\neq 0$ 时，无实根要求

$$\Delta=1^2-4k\cdot 1=1-4k<0$$

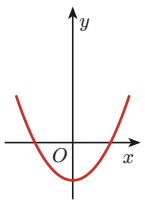
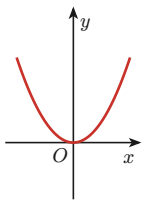
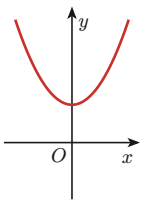
移项后除以负数，不等号方向_____。

$$-4k\leftarrow 1$$

$$k>\frac{1}{4}$$

← 填空：①$\Delta<0$　②相反　③改变

正首项系数时的三种实根情况

	$y=x^2-1$	$y=x^2$	$y=x^2+1$
图像			
与横轴交点数	2	1	0
判别式	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$

点石成金　题目出现无实根或曲线完全在 x 轴上方时，先将对应方程整理为右边等于零的形式。

例 1　[2024 · October/November 0606/13 Q3]

Find the values of k for which the equation $4x^2-k=4kx-2$ has no real roots.

求使方程 $4x^2-k=4kx-2$ 无实根的 k 的值。

解答　移项得

$$4x^2-4kx+2-k=0$$

方法：先看等号两边含 x 的项，移到左边按降幂排列，再认系数。

二次项系数为 $4\neq 0$，由方程无实根，得

$$\Delta=(-4k)^2-4\cdot 4\cdot(2-k)<0$$

辨析：无实根是没有实数解，重根是两个实数根重合。

$$16k^2+16k-32<0$$

两边除以正数 16，得

$$k^2+k-2<0$$

$$(k+2)(k-1)<0$$

两因式异号，且 $k+2$ 大于 $k-1$，故

$$k+2>0,\quad k-1<0$$

答：$-2<k<1$。

针对练习

1. [2023 · October/November 0606/23 Q2]

提示：先看开口方向，再把曲线与横轴的位置关系转成根的条件。

Find the values of k for which the curve $y=x^2+kx+(4k-15)$ is completely above the x-axis.

求使曲线 $y=x^2+kx+(4k-15)$ 完全位于 x 轴上方的 k 的值。

✓ **答案**

$$6<k<10$$

解析　二次项系数为 $1>0$，抛物线开口向上。

曲线完全在 x 轴上方，故令 $y=0$ 所得方程无实根。

$$\Delta=k^2-4\cdot 1\cdot(4k-15)=k^2-16k+60$$

由 $\Delta<0$，得

$$k^2-16k+60<0$$

因式分解得

$$k^2-16k+60=k^2-6k-10k+60=k(k-6)-10(k-6)=(k-6)(k-10)$$

$$(k-6)(k-10)<0$$

两因式异号，且 $k-6$ 大于 $k-10$，故

$$k-6>0,\quad k-10<0$$

答：$6<k<10$。

2. [2024 · May/June 0606/23 Q2]

提示：先查二次项系数能否为零，再看除数正负与不等号方向。

Given that the equation $kx^2+(2k-1)x+k+1=0$ has no real roots, find the set of possible values of k.

已知方程 $kx^2+(2k-1)x+k+1=0$ 无实根，求 k 的所有可能值构成的集合。

✓ **答案**

$$k > \frac{1}{8}$$

解析 当 $k = 0$ 时，原方程为

$$-x + 1 = 0$$

$$x = 1$$

有实根，不合题意。
当 $k \neq 0$ 时，原方程为二次方程，其判别式为

$$\Delta = (2k-1)^2 - 4k(k+1)$$

$$\Delta = 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 - 4k = 1 - 8k$$

由方程无实根，得

$$1 - 8k < 0$$

$$-8k \leftarrow 1$$

两边除以负数 -8，不等号变向，得

$$k > \frac{1}{8}$$

此范围内 $k \neq 0$，符合二次方程的条件。
答：$k > \frac{1}{8}$。

3. [2024 · October/November 0606/21 Q9(b)]

提示：开口向上的二次函数恒正时，图象与横轴没有交点。

A curve has equation $y = x^2 - 8x + c$, where c is a constant.

(b) Find the range of values of c for which y is always greater than 0.

一条曲线的方程为

$$y = x^2 - 8x + c$$

其中 c 为常数。
(b) 求使 y 始终大于 0 的 c 的取值范围。(2 分)

✓ **答案** $c > 16$

解析 二次项系数为 $1 > 0$，曲线开口向上。
要使 y 恒大于 0，曲线须与 x 轴无交点，故

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c < 0$$

$$64 - 4c < 0$$

$$-4c \leftarrow 64$$

两边除以负数，不等号方向改变，得

$$c > 16$$

答：c 的取值范围为 $c > 16$。

题型 5 求二次式的零点并选取符号区间

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **因式分解：**式子 $x^2 - x - 6$ 的首项系数为 1。找出和为一次项系数、积为常数项的两个数。

$$(-3) + 2 = -1, \quad (-3) \times 2 = -6$$

$$(x-3)(x+2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$$

② **求出零点：**使二次式等于零的实数称为零点。两个因式的积为零，至少一个因式为零。

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad 或 \quad x + 2 = 0$$

$$x = _____ \quad 或 \quad x = _____$$

③ **分区判号：**零点 -2 和 3 将数轴分成三个区间。分别判断两个因式的正负，再用同号得正、异号得负判断乘积。

区间	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$x > 3$
$x - 3$	负	负	正
$x + 2$	负	正	正
$(x-3)(x+2)$	正	负	正

④ **选取区间：**根据不等号，选取乘积符号符合要求的区间。

乘积 ≥ 0 或 > 0：选取乘积为正的区间。

乘积 ≤ 0 或 < 0：选取乘积为负的区间。

含等号时，零点_____；不含等号时，零点_____。

⑤ **同侧整理：**两侧含括号或分母时，整理成一侧为零。乘去正数分母，不等号方向不变。

$$\frac{(x-3)(x+2)}{2} \geq \frac{x-3}{2}$$

$$(x-3)(x+2) - (x-3) \geq 0$$

$$x^2 - x - 6 - x + 3 = x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

⑥ **负数乘除：**两边同乘或同除以负数，不等号方向要_____。

$$-2(x-3)(x+2) > 0$$

$$(x-3)(x+2) < 0$$

填空：①3　②−2　③保留　④不保留　⑤改变

点石成金　题目出现二次式的不等式时，先整理成一侧为零，再求零点并选取符号符合要求的区间。

例 1　[2025 · October/November 0606/13 Q1(a)]

Solve the following inequalities.

(a) $x^2 - x - 6 \geqslant 0$

解下列不等式。

(a) $x^2 - x - 6 \geq 0$。

解答　因式分解，得

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

令

$$(x-3)(x+2) = 0$$

得

$$x = -2 \quad 或 \quad x = 3$$

当 $x < -2$ 或 $x > 3$ 时，两因式同号，乘积为正。原不等式含等号，保留两个零点。
答：$x \le -2$ 或 $x \ge 3$。

方法：先看不等号与首项系数，将一侧化为零后再分解因式。

辨析：零点是使式值为零的数，解集是使不等式成立的全部数。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/11 Q2]

提示：看整理后的首项系数，比较除法前后的不等号方向。

Solve the inequality $(3-x)(5x+8) \geqslant 9-3x$.

解不等式 $(3-x)(5x+8) \geq 9-3x$。

✓ **答案**

$$-1 \le x \le 3$$

解析　展开并移项，得

$$15x + 24 - 5x^2 - 8x \ge 9 - 3x$$

$$-5x^2 + 10x + 15 \ge 0$$

两边同除以 -5，不等号方向改变，得

$$x^2 - 2x - 3 \le 0$$

$$(x-3)(x+1) \le 0$$

令

$$(x-3)(x+1) = 0$$

得

$$x = -1 \quad 或 \quad x = 3$$

当 $-1 < x < 3$ 时，两因式异号，乘积为负。原不等式含等号，保留两个零点。答：$-1 \le x \le 3$。

2. [2024 · February/March 0606/22 Q1(b)]

提示：看分母的公倍数，分区比较因式符号，再查端点取舍。

(b) Solve the inequality $16x - 5x^2 - 3 < \dfrac{57-9x}{6}$.

(b) 解不等式 $16x - 5x^2 - 3 < \frac{57-9x}{6}$。

✓ **答案**　$x < 1$ 或 $x > \frac{5}{2}$

解析　两边同乘以正数 6，得

$$96x - 30x^2 - 18 < 57 - 9x$$

移项，得

$$-30x^2+105x-75<0$$

两边同除以 -15，不等号方向改变，得

$$2x^2-7x+5>0$$

$$(2x-5)(x-1)>0$$

令

$$(2x-5)(x-1)=0$$

得

$$x=1 \quad 或 \quad x=\frac{5}{2}$$

当 $x<1$ 时，两因式均为负；当 $x>\frac{5}{2}$ 时，两因式均为正。两处乘积均为正，不等式不含等号，不保留零点。答：$x<1$ 或 $x>\frac{5}{2}$。

3. [2023 · May/June 0606/22 Q1(a)]
提示：先将右侧各项移到左侧，使右侧为零。

(a) Solve the inequality $3x^2-12x+16>3x+4$.

(a) 解不等式$3x^2-12x+16>3x+4$。

✓ **答案** $x<1$或$x>4$

解析 移项，得

$$3x^2-12x+16-3x-4>0$$

$$3x^2-15x+12>0$$

提取正因数3，再分解因式，得

$$3(x-1)(x-4)>0$$

因$3>0$，两边同除以3，得

$$(x-1)(x-4)>0$$

令两个因式分别为零，得

$$x=1 \quad 或 \quad x=4$$

当$x<1$时，两因式均为负；当$x>4$时，两因式均为正。这两个区间内乘积为正。不等式不含等号，舍去两个零点。 答：$x<1$或$x>4$。

4. [2025 · May/June 0606/23 Q1]
提示：分别令两个因式为零，再按不等号选取区间和端点。

Solve the inequality $(x+2)(4x-5) \leqslant 0$.

解不等式$(x+2)(4x-5) \leq 0$。

✓ **答案** $-2 \leq x \leq \frac{5}{4}$

解析 令两个因式分别为零，得

$$x+2=0 \quad 或 \quad 4x-5=0$$

$$x=-2 \quad 或 \quad x=\frac{5}{4}$$

当$x<-2$时，两因式均为负，乘积为正。当$-2<x<\frac{5}{4}$时，$x+2>0$且$4x-5<0$，乘积为负。当$x>\frac{5}{4}$时，两因式均为正，乘积为正。原不等式含等号，两个零点均保留。答：$-2 \leq x \leq \frac{5}{4}$。

5. [2023 · May/June 0606/13 Q2(c)]
提示：先完成（a）的配方，再将（c）整理为一侧为零并分解因式。

(a) Write $2x^2+5x+3$ in the form $2(x+a)^2+b$, where a and b are rational numbers.

(c) Solve the inequality $2x^2+5x+3<\frac{15}{8}$.

（a）将$2x^2+5x+3$写成$2(x+a)^2+b$的形式，其中a和b为有理数。
（c）解不等式$2x^2+5x+3<\frac{15}{8}$。

✓ **答案** $-\frac{9}{4}<x<-\frac{1}{4}$

解析 将二次项系数提出，再补成完全平方，得

$$2x^2+5x+3=2\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}\right)+3-\frac{25}{8}$$

$$2x^2+5x+3=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

所以$a=\frac{5}{4}$，$b=-\frac{1}{8}$。由此，原不等式可写为

$$2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}<\frac{15}{8}$$

$$2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2<2$$

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-1<0$$

用平方差公式分解因式，得

$$\left(x+\frac{5}{4}-1\right)\left(x+\frac{5}{4}+1\right)<0$$

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{9}{4}\right)<0$$

令两个因式分别为零，得

$$x=-\frac{9}{4} \quad 或 \quad x=-\frac{1}{4}$$

两零点之间，两因式异号，乘积为负；两零点外，两因式同号，乘积为正。不等式不含等号，舍去两个零点。答：$-\frac{9}{4}<x<-\frac{1}{4}$。

第 3 章 多项式的因式

Chapter 3

3.1 多项式的因式

题型 1 代入一次式的零点，求余数或验证因式、根

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **多项式的取值：** 本题将多项式中的 x 换成 1，求所得数值。将表达式记为 $p(x)$，$p(1)$ 表示代入 $x=1$ 后的值。

$$p(x)=x^3-2x^2-19x+20$$

$$p(1)=1^3-2\times1^2-19\times1+20=_____$$

② **代入数的确定：** 本题除式为 $x-1$，令除式等于 0，确定代入值。

$$x-1=0 \quad x=1$$

用 a 表示常数，两种除式对应的代入值如下。

除式为 $x-a$。

$x-a=0 \quad x=a$

除式为 $x+a$。

$x+a=0 \quad x=-a$

③ **负数的代入：** 代入负数时，先用括号括住负数，再计算乘方。

$(-1)^2=(-1)\times(-1)=1$ | $(-1)^3=(-1)\times(-1)\times(-1)=-1$

④ **一次式的余数：** 本题多项式除以 x 时，余数等于 $p(0)$。

$$p(0)=0^3-2\times0^2-19\times0+20=20$$

由余数定理，多项式 $p(x)$ 除以 $x-a$ 的余数为_____。

⑤ **因式的验证：** 除以一次式的余数为 0，该一次式就是多项式的因式。验证 $x-a$ 是 $p(x)$ 的因式，须算出：

$$p(a)=_____$$

⑥ **方程根的验证：** 使多项式的值等于 0 的数，称为方程的_____。验证 $x=a$ 是方程 $p(x)=0$ 的根，须算出：

$$p(a)=0$$

填空：①0 ②$p(a)$ ③0 ④根

点石成金 题目出现求除以一次式的余数、验证因式或验证根的要求时，先确定代入值，再求多项式的值。

例 1 [2023 · February/March 0606/22 Q5(a)]

DO NOT USE A CALCULATOR IN THIS QUESTION.

(a) Show that $x-1$ is a factor of the expression $x^3-2x^2-19x+20$.

本题不得使用计算器。

(a) 证明 $x-1$ 是表达式 $x^3-2x^2-19x+20$ 的因式。

解答 设

$$p(x)=x^3-2x^2-19x+20$$

方法：先看待验证的一次式，令它为零，再代入多项式。

令除式等于 0，得

$$x-1=0 \quad x=1$$

! 辨析：因式是能整除多项式的式子，根是使多项式值为零的数。

代入得

$$p(1)=1^3-2\times1^2-19\times1+20=1-2-19+20=0$$

答：由因式定理，$x-1$ 是所给表达式的因式。

针对练习

1. [2023 · May/June 0606/22 Q3(a)]

提示：看一次式的加号，代入前先核对零点的符号。

DO NOT USE A CALCULATOR IN THIS QUESTION.

(a) Show that $x+3$ is a factor of $-12+23x+3x^2-2x^3$.

本题不得使用计算器。

(a) 证明 $x+3$ 是表达式 $-12+23x+3x^2-2x^3$ 的因式。

✓ **答案** $x+3$ 是所给表达式的因式。

解析 设

$$p(x)=-12+23x+3x^2-2x^3$$

令除式等于 0，得

$$x+3=0 \quad x=-3$$

代入得

$$p(-3)=-12+23\times(-3)+3\times(-3)^2-2\times(-3)^3=-12-69+27+54=0$$

答：由因式定理，$x+3$ 是所给表达式的因式。

2. [2023 · May/June 0606/23 Q4(a)]

提示：将待验证的数逐项代入，比所得值与零是否相等。

The polynomial p is such that $p(x)=2x^3+11x^2+22x+40$.

(a) Show that $x=-4$ is a root of the equation $p(x)=0$.

多项式 p 满足

$$p(x)=2x^3+11x^2+22x+40$$

(a) 证明 $x=-4$ 是方程 $p(x)=0$ 的根。

✓ **答案** $x=-4$ 是方程 $p(x)=0$ 的根。

解析 将 $x=-4$ 代入，得

$$p(-4)=2\times(-4)^3+11\times(-4)^2+22\times(-4)+40=-128+176-88+40=0$$

答：$x=-4$ 是方程 $p(x)=0$ 的根。

3. [2026 · February/March 0606/12 Q1(a)]
提示：看末两项的减号，代入负数后逐项核对符号。

A polynomial p is given by $\mathrm{p}(x) = 4x^3 + 8x^2 - x - 2$.

(a) Show that $x+2$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$.

多项式 p 定义为

$p(x) = 4x^3 + 8x^2 - x - 2$

(a) 证明 $x + 2$ 是 $p(x)$ 的因式。

✓ **答案** $x + 2$ 是 $p(x)$ 的因式。

解析 令除式等于 0，得

$$x + 2 = 0 \quad x = -2$$

代入得

$$p(-2) = 4 \times (-2)^3 + 8 \times (-2)^2 - (-2) - 2 = -32 + 32 + 2 - 2 = 0$$

答：由因式定理，$x + 2$ 是 $p(x)$ 的因式。

4. [2026 · May/June 0606/13 Q4(a)]
提示：看一次式的零点，将各项代入值求和后与零比较。

The polynomial p is given by $\mathrm{p}(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$.

(a) Show that $x-2$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$.

多项式 p 定义为

$p(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$

(a) 证明 $x - 2$ 是 $p(x)$ 的因式。

✓ **答案** $x - 2$ 是 $p(x)$ 的因式。

解析 令除式等于 0，得

$$x - 2 = 0 \quad x = 2$$

代入得

$$p(2) = 4 \times 2^3 - 5 \times 2^2 - 7 \times 2 + 2 = 32 - 20 - 14 + 2 = 0$$

答：由因式定理，$x - 2$ 是 $p(x)$ 的因式。

5. [2024 · May/June 0606/22 Q4(a)]
提示：看除式的零点，求对应多项式值时保留常数项。

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x)=6x^3+x^2-12x+5$.

(a) Find the remainder when $\mathrm{p}(x)$ is divided by $x-2$.

多项式 p 满足

$$p(x)=6x^3+x^2-12x+5$$

(a) 求 $p(x)$ 除以 $x-2$ 所得的余数。

✓ **答案** 33

解析 令除式等于 0，得

$$x-2=0 \quad x=2$$

由余数定理，所求余数为

$$p(2)=6\times 2^3+2^2-12\times 2+5=48+4-24+5=33$$

答：余数为 33。

6. [2026 · May/June 0606/12 Q3(a)]
提示：看平方项前的负号，区分负数平方与平方后取负。

The polynomial p is given by $\mathrm{p}(x)=6x^3-x^2-5x+2$.

(a) Find the remainder when $\mathrm{p}(x)$ is divided by $x+2$.

多项式 p 定义为

$$p(x)=6x^3-x^2-5x+2$$

(a) 求 $p(x)$ 除以 $x+2$ 所得的余数。

✓ **答案** -40

解析 令除式等于 0，得

$$x+2=0 \quad x=-2$$

由余数定理，所求余数为

$$p(-2)=6\times(-2)^3-(-2)^2-5\times(-2)+2=-48-4+10+2=-40$$

答：余数为 -40。

题型 2 代入根、因子与余数条件，消元求系数或关系式

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **多项式代值：**本例的 $p(x)$ 表示给定的多项式。求 $p(-2)$ 时，将每个 x 换成 -2。负数的幂要保留括号。

$$p(x)=x^3+ax^2+bx-2$$

$$(-2)^3=-8,\quad (-2)^2=\underline{\qquad\qquad}$$

$$p(-2)=(-2)^3+a(-2)^2+b(-2)-2=4a-2b-10$$

② **因子与方程根：**一次因子为零时，多项式的对应值为零。方程的根也使多项式的值为零。一次因子中含未知数的系数不为一时，先令因子为零。

$x+2$ 是因子 | $x=-2$ 是方程的根

$-2+2=0$

$p(-2)=$ _____

$p(x)=0$

$p(-2)=0$

$2x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{3}{2}$

$2x-3$ 是因子 $\quad \Rightarrow \quad p\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$

③ **除式对应余数：** 本例除以 $x-3$ 的余数为 40，因此代入 $x=3$。用 t 表示使一次除式为零的数，r 表示余数。

$p(3)=$ _____

$p(x)$ 除以 $x-t$ 的余数为 $r \quad \Rightarrow \quad p(t)=r$

④ **方程同乘消元：** 本例的两个条件可写成下面两式。将前式两边同乘 2，使含 b 项的系数互为相反数。两式相加，消去 b。

$2a-b=5$

$6a+2b=10$

$4a-2b=10$

$(4a-2b)+(6a+2b)=10+10$

$10a=$ _____

⑤ **相同项作差：** 两式含有相同的常数项字母时，可相减消去该项。相减时，减号作用于后一式的每一项。下面两式相减后，得到其余字母的关系。

$2a+b+c=8$

$a-b+c=3$

$(2a+b+c)-(a-b+c)=8-3$

$a+2b=$ _____

⑥ **二阶导数代值：** 前问给出二阶导数条件时，先连续求导。$p'(x)$、$p''(x)$ 分别表示一阶、二阶导数。幂项求导时系数乘指数、指数减一，常数项导数为零。

$p(x)=x^3+ax^2+bx-2$

$p'(x)=3x^2+2ax+b$

$p''(x)=6x+2a$

$p''(1)=6+$ _____

填空：①4　②0　③40　④20　⑤5　⑥$2a$

点石成金　题目出现因子、根或除式与余数条件，并要求系数或关系式时，先将条件写成多项式代值等式。

例 1　[2025 · October/November 0606/21 Q1]

The polynomial p is such that　$\mathrm{p}(x)=x^3+ax^2+bx-2$,　where a and b are constants.

It is given that:

- $x+2$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$
- when $\mathrm{p}(x)$ is divided by $x-3$ the remainder is 40.

Find the values of a and b.

多项式 p 满足
$p(x)=x^3+ax^2+bx-2$,
其中 a、b 为常数。
已知：
$x+2$ 是 $p(x)$ 的因子；
$p(x)$ 除以 $x-3$ 的余数为 40。
求 a 和 b 的值。

解答　由 $x+2$ 是 $p(x)$ 的因子，得

$$p(-2)=0$$

$$(-2)^3+a(-2)^2+b(-2)-2=0$$

$$4a-2b=10$$

$$2a-b=5$$

由除以 $x-3$ 的余数为 40，得

$$p(3)=40$$

$$3^3+a\times 3^2+3b-2=40$$

$$9a+3b=15$$

$$3a+b=5$$

两式相加，得

$$5a=10$$

$$a=2$$

代入得

$$b=2\times 2-5=-1$$

答：$a=2$，$b=-1$。

方法：先看因子与除式，令各自为零确定代入值，再列式消元。

辨析：因子条件是对应代值为零，余数条件是对应代值等于余数。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/23 Q1]

提示：先按对因子与除式的零点，再比较两式中 b 项的符号。

It is given that $\mathrm{p}(x) = ax^3 - 7x^2 - bx + 9$, where a and b are constants.
$x - 3$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$.
When $\mathrm{p}(x)$ is divided by $x + 2$ the remainder is -35.

Find the values of a and b.

已知多项式
$p(x) = ax^3 - 7x^2 - bx + 9$,
其中 a、b 为常数。$x - 3$ 是 $p(x)$ 的因子。$p(x)$ 除以 $x + 2$ 的余数为 -35。求 a 和 b 的值。

✓ **答案** $a = 2$，$b = 0$。

解析 由 $x - 3$ 是 $p(x)$ 的因子，得

$$p(3) = 0$$

$$27a - 63 - 3b + 9 = 0$$

$$9a - b = 18$$

由除以 $x + 2$ 的余数为 -35，得

$$p(-2) = -35$$

$$-8a - 28 + 2b + 9 = -35$$

$$-4a + b = -8$$

两式相加，得

$$5a = 10$$

$$a = 2$$

代入得

$$b = 9 \times 2 - 18 = 0$$

答：$a = 2$，$b = 0$。

2. [2025 · October/November 0606/12 Q2(a)]

提示：把两个条件写成代值等式，比较 b 项系数后选择加减。

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x) = 2x^3 + ax^2 + 13x + b$, where a and b are integers.
It is given that $x + 2$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$.
When $\mathrm{p}(x)$ is divided by $x + 1$ there is a remainder of 6.

(a) Find the values of a and b.

多项式 p 满足
$p(x) = 2x^3 + ax^2 + 13x + b$,
其中 a、b 为整数。已知 $x + 2$ 是 $p(x)$ 的因子。$p(x)$ 除以 $x + 1$ 的余数为 6。
(a) 求 a 和 b 的值。

✓ **答案** $a = 7$，$b = 14$。

解析 由 $x + 2$ 是 $p(x)$ 的因子，得

$$p(-2) = 0$$

$$-16+4a-26+b=0$$

$$4a+b=42$$

由除以 $x+1$ 的余数为 6，得

$$p(-1)=6$$

$$-2+a-13+b=6$$

$$a+b=21$$

两式相减，得

$$3a=21$$

$$a=7$$

代入得

$$b=21-7=14$$

答：$a=7$，$b=14$。

3. [2024 · October/November 0606/13 Q5(a)]

提示：看目标关系中缺少哪个字母，再比较两式中该项的系数。

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x)=ax^3+bx^2-19x+c$, where a, b and c are integers. It is given that $x+2$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$. When $\mathrm{p}(x)$ is divided by $x+1$ the remainder is 20.

(a) Show that $7a-3b=39$.

多项式 p 满足
$p(x)=ax^3+bx^2-19x+c$，
其中 a、b、c 为整数。已知 $x+2$ 是 $p(x)$ 的因子。$p(x)$ 除以 $x+1$ 的余数为 20。
(a) 证明 $7a-3b=39$。

✓ **答案** $7a-3b=39$。

解析 由 $x+2$ 是 $p(x)$ 的因子，得

$$p(-2)=0$$

$$-8a+4b+38+c=0$$

$$-8a+4b+c=-38$$

由除以 $x+1$ 的余数为 20，得

$$p(-1)=20$$

$$-a+b+19+c=20$$

$$-a+b+c=1$$

两式相减，消去 c，得

$$(-8a+4b+c)-(-a+b+c)=-38-1$$

$$-7a+3b=-39$$

$$7a-3b=39$$

答：$7a-3b=39$，得证。

4. [2024 · October/November 0606/22 Q3(a)]

提示：将两个根分别代入，比较所得两式中 b 项的系数。

DO NOT USE A CALCULATOR IN THIS QUESTION.

The polynomial p is defined by $\mathrm{p}(x)=ax^3-3x^2-3x+b$, where a and b are constants.

(a) Given that $x=2$ and $x=-1$ are roots of the equation $\mathrm{p}(x)=0$, find a and b.

本题不得使用计算器。
多项式 p 定义为
$p(x)=ax^3-3x^2-3x+b$，
其中 a、b 为常数。
(a) 已知 $x=2$ 和 $x=-1$ 是方程 $p(x)=0$ 的根，求 a 和 b 的值。

✓ **答案** $a=2$，$b=2$。

解析 由 $x=2$ 是方程的根，得

$$p(2)=0$$

$$8a-12-6+b=0$$

$$8a+b=18$$

由 $x=-1$ 是方程的根，得

$$p(-1)=0$$

$$-a-3+3+b=0$$

$$-a+b=0$$

两式相减，得

$$9a=18$$

$$a=2$$

代入得

$$b=a=2$$

答：$a=2$，$b=2$。

5. [2023 · October/November 0606/13 Q4(a)]

提示：先令一次因子为零，代值后消分母，再比较 a 项系数。

The polynomial P is given by $\mathrm{P}(x)=ax^3+bx^2+3x+2$, where a and b are integers. $\mathrm{P}(x)$ has a factor of $2x+1$. $\mathrm{P}(x)$ has a remainder of -6 when divided by $x+1$.

(a) Find the values of a and b.

多项式 P 为
$P(x)=ax^3+bx^2+3x+2$，
其中 a、b 为整数。$P(x)$ 有因子 $2x+1$。$P(x)$ 除以 $x+1$ 的余数为 -6。
(a) 求 a 和 b 的值。

✓ **答案** $a=6$，$b=1$。

解析 令一次因子为零，得

$$2x+1=0$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

由因式定理，得

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$-\frac{a}{8}+\frac{b}{4}-\frac{3}{2}+2=0$$

等式两边同乘 8，整理得

$$-a+2b+4=0$$

$$a-2b=4$$

由除以 $x+1$ 的余数为 -6，得

$$P(-1)=-6$$

$$-a+b-3+2=-6$$

$$a-b=5$$

后式减去前式，得

$$(a-b)-(a-2b)=5-4$$

$$b=1$$

代入得

$$a=5+1=6$$

答：$a=6$，$b=1$。

6. [2023 · May/June 0606/11 Q2(b)]
提示：沿用前问的 a 值列出代值等式，比较 c 项系数再消元。

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x)=ax^3+7x^2+bx+c$, where a, b and c are integers.

(a) Given that $\mathrm{p}''\left(\frac{1}{2}\right)=32$, show that $a=6$.

(b) Given that $\mathrm{p}(x)$ has a factor of $3x-4$ and a remainder of 7 when divided by $x+1$, find the values of b and c.

多项式 p 满足
$p(x)=ax^3+7x^2+bx+c$，
其中 a、b、c 为整数。
(a) 已知 $p''\left(\frac{1}{2}\right)=32$，证明 $a=6$。
(b) 已知 $p(x)$ 有因子 $3x-4$，且除以 $x+1$ 的余数为 7，求 b 和 c 的值。

✓ **答案**　(a) $a=6$；(b) $b=-14$，$c=-8$。

解析　(a) 对多项式连续求导，得

$$p'(x)=3ax^2+14x+b$$

$$p''(x)=6ax+14$$

由所给条件，得

$$p''\left(\frac{1}{2}\right)=3a+14=32$$

$$3a=18$$

$$a=6$$

答：$a=6$，得证。
(b) 代入 $a=6$，得

$$p(x)=6x^3+7x^2+bx+c$$

令一次因子为零，得

$$3x-4=0$$

$$x=\frac{4}{3}$$

由因式定理，得

$$p\left(\frac{4}{3}\right)=0$$

$$6\left(\frac{4}{3}\right)^3+7\left(\frac{4}{3}\right)^2+4\frac{b}{3}+c=0$$

$$\frac{128}{9}+\frac{112}{9}+4\frac{b}{3}+c=0$$

$$\frac{80}{3}+4\frac{b}{3}+c=0$$

$$4b+3c=-80$$

由除以 $x+1$ 的余数为 7，得

$$p(-1)=7$$

$$-6+7-b+c=7$$

$$-b+c=6$$

等式两边同乘 3，得

$$-3b+3c=18$$

两式相减，得

$$(4b+3c)-(-3b+3c)=-80-18$$

$$7b=-98$$

$$b=-14$$

代入得

$$c=6+b=6-14=-8$$

答：$b=-14$，$c=-8$。

题型 3　用零点和函数值确定多项式因式参数

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **零点对应因式：**母例的曲线经过 $(-2,0)$ 和 $(1.5,0)$。这两个横坐标称为函数的零点。

$$h(-2)=h(1.5)=\underline{\qquad}$$

零点为 r，对应的因式为 $x-r$。

$$r=-2 \xrightarrow{\text{写出因式}} x+2$$

② **相切对应平方：**母例的曲线在 $(-2,0)$ 处与横轴相切。题式中的平方因式在此处等于零。

$$(-2+a)^2=0$$

$$-2+a=0$$

$$a=2$$

③ **纵截距求参数：**母例的曲线经过 $(0,12)$。求纵截距时，把自变量 x 换成零。

$$h(0)=(0+a)^2(b+c\times 0)=a^2b=\underline{\qquad}$$

$$b=\frac{12}{a^2}$$

④ **一次因式求根：**因式等于零后，移项并除以自变量的系数。零点与常数项不一定互为相反数。

$b+cx=0$，$c\neq 0$

$x=-\frac{b}{c}$

$2x+a=0$

$x=-\frac{a}{2}$

在 $(2x+a)(x+b)(x+c)$ 中，若 b,c 为整数，则后两个因式的零点均为整数。

⑤ **三次式设系数：**母例的零点与平方因式给出下式。k 表示待求的非零常数。

$$h(x)=k(x+2)^2(x-1.5)$$

若三次多项式的三个不同零点记为 r,s,t，则可设

$$f(x)=k(x-r)(x-s)(x-t)$$

再代入另一个点，求出常数系数 k。

⑥ **绝对值分正负：** 图象为 $y=|f(x)|$ 时，横截点仍满足 $f(x)=0$。纵截距给出的是函数值的绝对值。例如图象经过 $(0,6)$，则

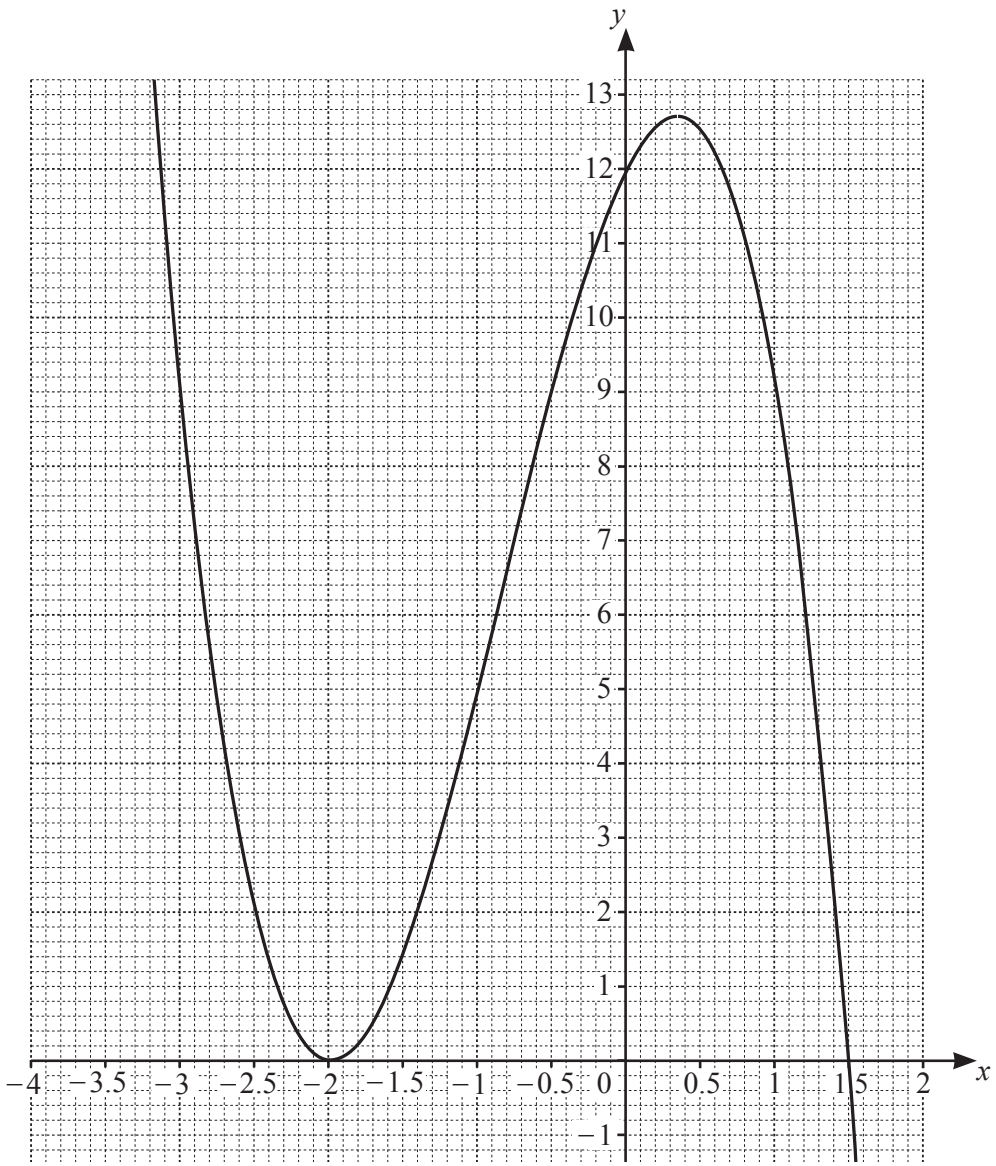
$$|f(0)|=6$$

$f(0)=6$ | $f(0)=-6$

填空：①0 ②12

点石成金　题目出现多项式的图象、横截点和函数值，要求确定因式或参数时，先由横截点写出各因式。

例 1 [2023 · May/June 0606/21 Q3(a)]



The diagram shows the graph of $y=\mathrm{h}(x)$ where $\mathrm{h}(x)=(x+a)^2(b+cx)$ and a, b and c are integers.
The curve meets the x-axis at the points $(-2, 0)$ and $(1.5, 0)$ and the y-axis at the point $(0, 12)$.

(a) Find the values of a, b and c.

图示为函数 $y=h(x)$ 的图象，其中 $h(x)=(x+a)^2(b+cx)$，

a, b, c 均为整数。图中横轴为 x，纵轴为 y。曲线与横轴相交于点 $(-2, 0)$ 和 $(1.5, 0)$，与纵轴相交于点 $(0, 12)$。
(a) 求 a, b, c 的值。

解答 由图象在 $(-2, 0)$ 处与横轴相切，得

$$-2 + a = 0$$

$$a = 2$$

由曲线经过 $(0, 12)$，得

$$h(0) = 2^2 b = 12$$

$$b = 3$$

由曲线经过 $(1.5, 0)$，且 $1.5 + 2 \neq 0$，得

$$3 + 1.5c = 0$$

$$c = -2$$

答：$a = 2$，$b = 3$，$c = -2$。

方法：先看横轴切点定平方因式，再代入纵截距和另一零点。

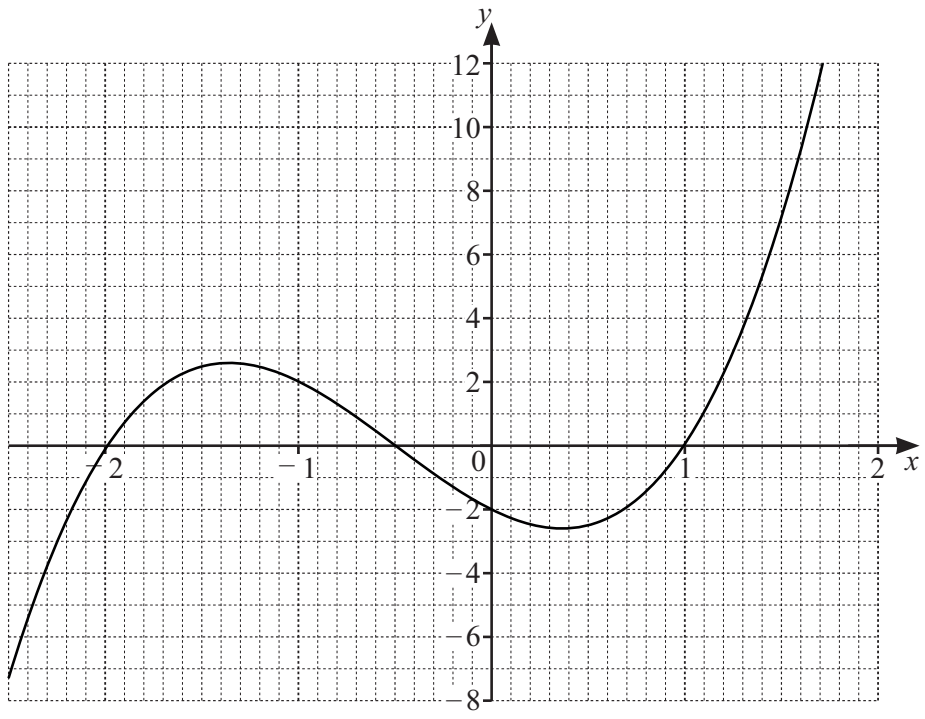
辨析：零点是函数值为零的横坐标，纵截距是横坐标为零时的函数值。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/13 Q1(a)]

提示：比较各零点的整数性与各因式中未知常数的限制。

(a)



The diagram shows the graph of $y = (2x + a)(x + b)(x + c)$ where a, b and c are integers.

Find values for a, b and c.

(a) 图示为函数 $y = (2x + a)(x + b)(x + c)$ 的图象，其中 a, b, c 均为整数。图中横轴为 x，纵轴为 y。
求 a, b, c 的值。

✓ **答案** $a = 1$，$b = 2$，$c = -1$；或 $a = 1$，$b = -1$，$c = 2$。

解析 由图象得，三个零点分别为 -2、$-\frac{1}{2}$ 和 1。

$\because b, c$ 为整数，$x+b$ 和 $x+c$ 的零点均为整数，

$\therefore$ 零点 $-\frac{1}{2}$ 对应因式 $2x+a$。

$$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+a=0$$

$$a=1$$

其余两个零点为 -2 和 1，得

$$(x+b)(x+c)=(x+2)(x-1)$$

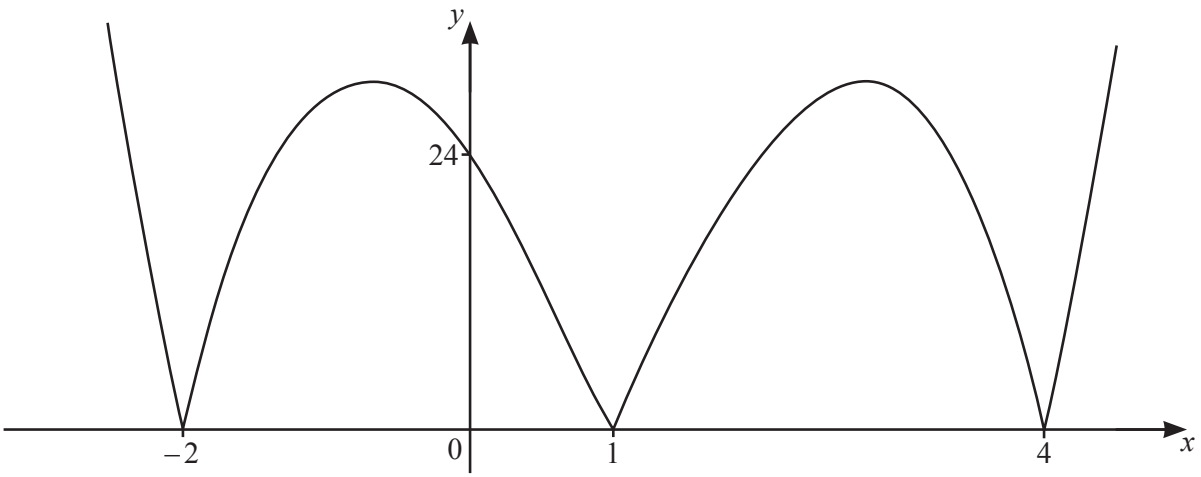
$\therefore b=2, c=-1$，或 $b=-1, c=2$。

答：$a=1$，$b=2$，$c=-1$；或 $a=1$，$b=-1$，$c=2$。

2. [2023 · May/June 0606/12 Q3(a)]

提示：看纵截距表示的绝对值，再考虑原函数值的正负。

(a)



The diagram shows the graph of $y=|\mathrm{f}(x)|$, where $\mathrm{f}(x)$ is a cubic polynomial. Find, in factorised form, the possible expressions for $\mathrm{f}(x)$.

(a) 图示为函数 $y=|f(x)|$ 的图象，其中 $f(x)$ 为三次多项式。图中横轴为 x，纵轴为 y；横轴截点的横坐标为 -2、1、4，纵轴截距为 24。

用因式分解的形式，求 $f(x)$ 所有可能的表达式。

✓ **答案** $f(x)=3(x+2)(x-1)(x-4)$ 或 $f(x)=-3(x+2)(x-1)(x-4)$。

解析 由图象得，$|f(x)|=0$ 时，$x=-2, 1, 4$。

$\because |f(x)|=0$ 等价于 $f(x)=0$，且 $f(x)$ 为三次多项式，

$\therefore$ 设

$f(x)=k(x+2)(x-1)(x-4)$，$k\neq 0$。

由图象经过 $(0, 24)$，得

$$|f(0)|=24$$

$$f(0)=k\times 2\times(-1)\times(-4)=8k$$

$$|8k|=24$$

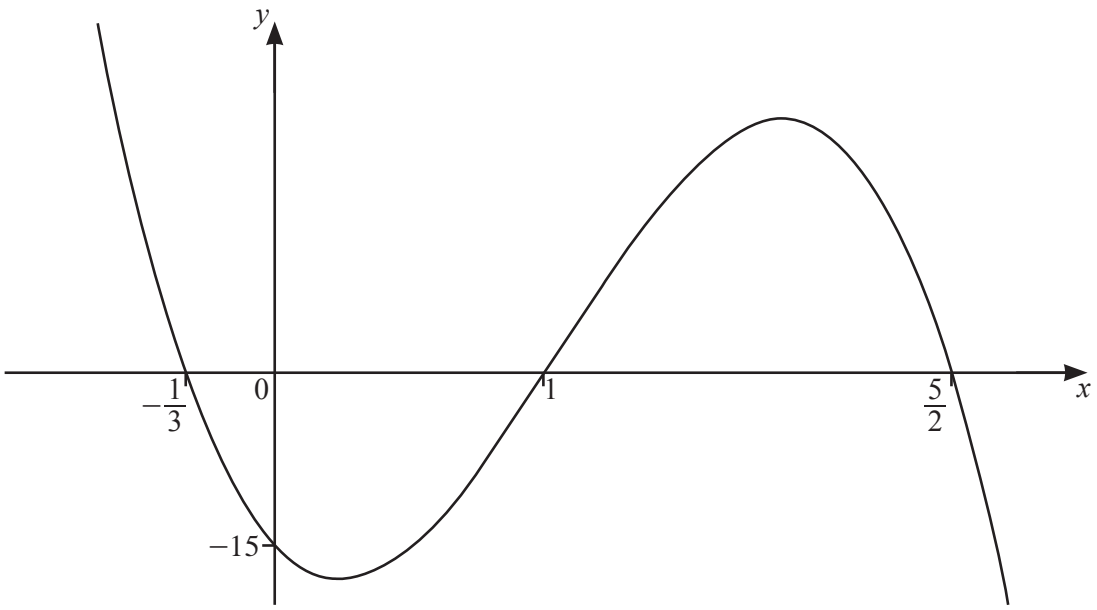
$$|k|=3$$

$k = 3$ 或 $k = -3$。

答：$f(x) = 3(x+2)(x-1)(x-4)$ 或 $f(x) = -3(x+2)(x-1)(x-4)$。

3. [2023 · October/November 0606/12 Q1(a)]

提示：由三个横截点写出一次因式，再代入纵截距确定常数系数。



The diagram shows the graph of the cubic polynomial $y = \mathrm{f}(x)$.

(a) Find an expression for $\mathrm{f}(x)$ in factorised form. Write each linear factor with its coefficients as integers.

图示为三次多项式$y = f(x)$的图象。横轴为x，纵轴为y，原点标为0。曲线与横轴相交于$(-\frac{1}{3}, 0)$、$(1, 0)$和$(\frac{5}{2}, 0)$，与纵轴相交于$(0, -15)$。

(a) 求$f(x)$的因式分解形式。每个一次因式的系数均须为整数。

✓ **答案** $f(x) = -3(3x+1)(x-1)(2x-5)$。

解析 由图象，f的三个零点为$-\frac{1}{3}$、1和$\frac{5}{2}$。取整数系数的一次因式，设

$$f(x) = k(3x+1)(x-1)(2x-5)$$

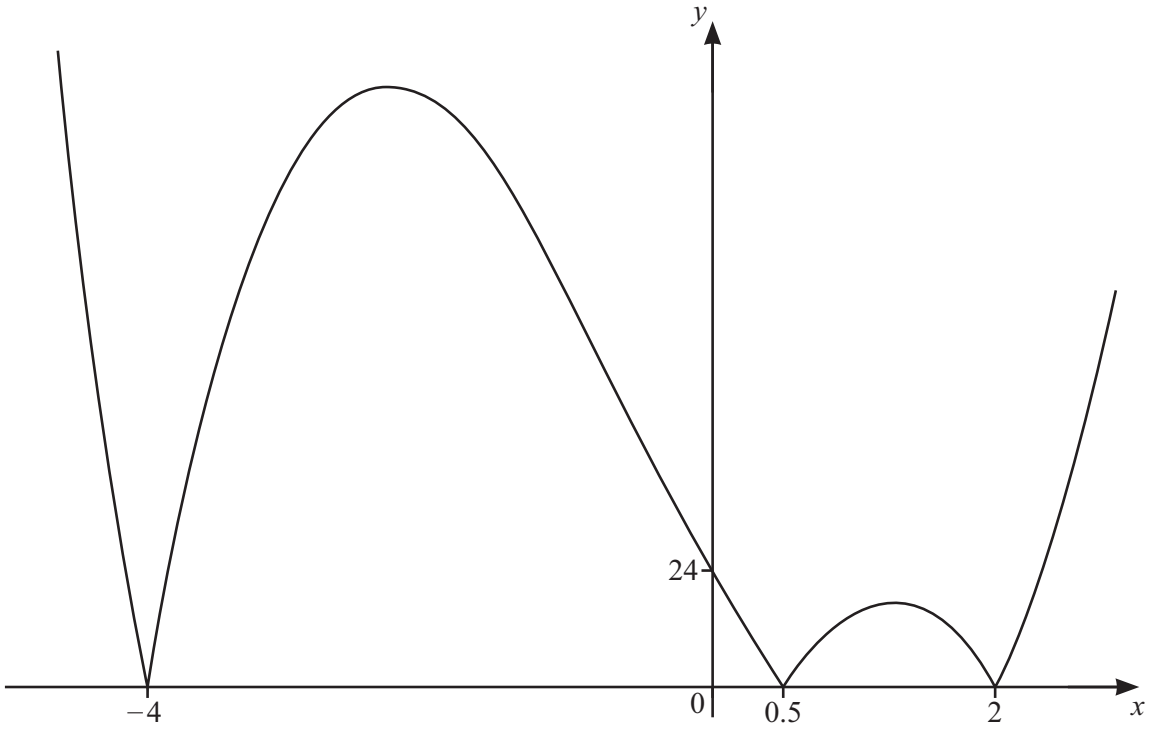
其中$k \neq 0$。由图象经过$(0, -15)$，得

$$f(0) = k \times 1 \times (-1) \times (-5) = 5k = -15$$

$$k = -3$$

答：$f(x) = -3(3x+1)(x-1)(2x-5)$。

4. [2024 · October/November 0606/11 Q1]
提示：先由横截距求零点，再利用纵截距列绝对值条件。



The diagram shows the graph of $y = |\mathrm{f}(x)|$, where $\mathrm{f}(x)$ is a cubic polynomial. Find the two possible expressions for $\mathrm{f}(x)$ in terms of linear factors with integer coefficients.

图示为$y = |f(x)|$的图象，其中$f(x)$是三次多项式。横轴为x，纵轴为y，原点标为0。图象与横轴相交于$(-4, 0)$、$(0.5, 0)$和$(2, 0)$，与纵轴相交于$(0, 24)$。
求$f(x)$的两个可能表达式，均用整数系数的一次因式表示。

✓ **答案** $f(x) = 3(x+4)(2x-1)(x-2)$或$f(x) = -3(x+4)(2x-1)(x-2)$。

解析 由$|f(x)| = 0$与$f(x) = 0$等价，得f的三个零点为-4、0.5和2。设

$$f(x) = k(x+4)(2x-1)(x-2)$$

其中$k \neq 0$。由图象经过$(0, 24)$，得

$$|f(0)| = 24$$

$$f(0) = k \times 4 \times (-1) \times (-2) = 8k$$

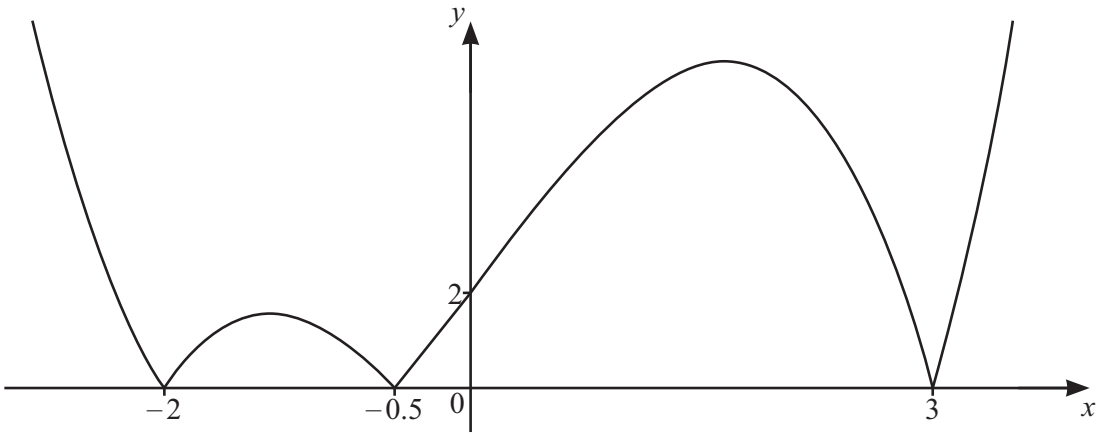
$$|8k| = 24$$

$$|k| = 3$$

$$k = 3 \quad 或 \quad k = -3$$

两式互为相反数，取绝对值后图象相同。
答：$f(x) = 3(x+4)(2x-1)(x-2)$或$f(x) = -3(x+4)(2x-1)(x-2)$。

5. [2025 · May/June 0606/12 Q1]
提示：先用三个零点设因式形式，再由纵截距列出含绝对值的系数方程。



The diagram shows the graph of $y = |f(x)|$, where f is a cubic polynomial.
Find expressions for the two possible functions $f(x)$.
Write each expression in fully factorised form.

图示为$y = |f(x)|$的图象，其中f是三次多项式。横轴为x，纵轴为y，原点标为0。图象与横轴相交于$(-2, 0)$、$(-0.5, 0)$和$(3, 0)$，与纵轴相交于$(0, 2)$。
求函数$f(x)$的两个可能表达式。每个表达式均须写成完全因式分解的形式。

✓ **答案** $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)(2x+1)(x-3)$或$f(x) = -\frac{1}{3}(x+2)(2x+1)(x-3)$。

解析 由图象，f的三个零点为-2、-0.5和3。设

$$f(x) = k(x+2)(2x+1)(x-3)$$

其中$k \neq 0$。由图象经过$(0, 2)$，得

$$|f(0)| = 2$$

$$f(0) = k \times 2 \times 1 \times (-3) = -6k$$

$$|-6k| = 2$$

$$|k| = \frac{1}{3}$$

$$k = \frac{1}{3} \quad 或 \quad k = -\frac{1}{3}$$

两式互为相反数，取绝对值后图象相同。
答：$f(x) = \frac{1}{3}(x+2)(2x+1)(x-3)$或$f(x) = -\frac{1}{3}(x+2)(2x+1)(x-3)$。

题型 4 利用已知一次因式降次，求全部线性因式或根

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **代入验证因式：**本例的多项式及代入结果如下。

$$p(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$$

$$p(2) = 4 \times 8 - 5 \times 4 - 7 \times 2 + 2 = 0$$

代入值为 _____，故 $x - 2$ 是因式。常数 r 满足 $p(r) = 0$ 时，$x - r$ 为因式，r 称为根。

② **利用除法降次：**已知 $x-2$ 是因式，用多项式除法求商式。每次用余下式的最高次项除以 x，再乘回相减。

$$\frac{4x^3}{x}=4x^2$$

$$p(x)-4x^2(x-2)=3x^2-7x+2$$

$$\frac{3x^2}{x}=3x$$

$$(3x^2-7x+2)-3x(x-2)=-x+2$$

$$\frac{-x}{x}=-1$$

$$(-x+2)-(-1)(x-2)=0$$

$$p(x)=(x-2)(4x^2+3x-1)$$

商式的最高次数由 3 降为 _____。

③ **继续分解二次式：**商式仍是二次式，继续分解。各因式的最高次数均为 1 时，称为线性因式。

三项二次式，拆开中间项：

$$4+(-1)=3$$

$$4\times(-1)=4\times(-1)$$

$$4x^2+3x-1=4x^2+4x-x-1$$

$$4x^2+4x-x-1=4x(x+1)-(x+1)$$

$$4x(x+1)-(x+1)=(4x-1)(x+1)$$

平方差式，分别取两项的平方根：

$$9x^2-4=(3x)^2-2^2$$

$$(3x)^2-2^2=(3x-2)(3x+2)$$

一般地，u,v 表示两项：

$$u^2-v^2=(u-v)(u+v)$$

④ **由乘积求根：**求解 $p(x)=0$，先写成因式乘积。乘积为 _____，至少一个因式为 0。

$$(x-2)(4x-1)(x+1)=0$$

$$x-2=0 \quad 或 \quad 4x-1=0 \quad 或 \quad x+1=0$$

$$x=2 \quad 或 \quad x=\frac{1}{4} \quad 或 \quad x=-1$$

同一因式重复出现时，相应的根仍写一次。

⑤ **由根确定系数：**设 $q(x)=x^3+cx+d$，其中 c,d 为常数。已知 $1,-2$ 为根，分别代入列出方程。

$$q(1)=1+c+d=0$$

$$q(-2)=-8-2c+d=0$$

两式相减消去 d，求出 c 后回代。

$$(1+c+d)-(-8-2c+d)=3c+9=0$$

$$c=-3$$

$$d=-1-c=2$$

⑥ **代入导数条件：**题干中的 $p'(x)$ 表示 $p(x)$ 的导函数。各项系数乘以原次数，次数减 1；常数项变为 0。

$$p'(x)=4\times 3x^2-5\times 2x-7=12x^2-10x-7$$

$$p'(-1)=12+10-7=15$$

其中 r 为代入值，k 为给定的导数值。

$p(x)$ 与 $p'(x)$ 同有因式 $x-r$：

$$p(r)=0$$

给出 $p'(r)=k$：

将 $x=r$ 代入导函数，令所得式等于 k。

$$p'(r)=0$$

填空：①0　②2　③0

点石成金　题目出现已知一次因式，并要求全部线性因式或根时，先用该因式除多项式，将三次式降为二次式。

例 1　[2026 · May/June 0606/13 Q4(b)]

The polynomial p is given by $\mathrm{p}(x)=4x^3-5x^2-7x+2$.

(a) Show that $x-2$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$.

(b) Write $\mathrm{p}(x)$ as a product of linear factors.

多项式 p 定义为 $p(x)=4x^3-5x^2-7x+2$。

(a) 证明 $x-2$ 是 $p(x)$ 的因式。

(b) 将 $p(x)$ 写成线性因式的乘积。

解答

$$p(2)=4\times 2^3-5\times 2^2-7\times 2+2=0$$

由因式定理，$x-2$ 是 $p(x)$ 的因式。

将 $p(x)$ 除以 $x-2$，逐项相减得

$$p(x)-4x^2(x-2)=3x^2-7x+2$$

$$(3x^2-7x+2)-3x(x-2)=-x+2$$

$$(-x+2)-(-1)(x-2)=0$$

故商式为 $4x^2+3x-1$，余数为 0。

$$p(x)=(x-2)(4x^2+3x-1)$$

又

$$4x^2+3x-1=4x^2+4x-x-1$$

$$4x^2+4x-x-1=4x(x+1)-(x+1)$$

方法：先看已知的一次因式，用它除原多项式，再分解商式。

辨析：因式是能整除原多项式的式子，根是使原多项式为零的数。

拓展：同一线性因式重复出现，对应的根在根的列表中写一次。

$$4x(x+1)-(x+1)=(4x-1)(x+1)$$

答：$x-2$ 是 $p(x)$ 的因式，且
$p(x)=(x-2)(4x-1)(x+1)$。

针对练习

1. [2026 · February/March 0606/12 Q1(b)]
提示：除以已知因式后，看商式两项能否分别写成平方。

A polynomial p is given by $\mathrm{p}(x)=4x^3+8x^2-x-2$.

(a) Show that $x+2$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$.

(b) Solve the equation $\mathrm{p}(x)=0$.

多项式 p 定义为
$p(x)=4x^3+8x^2-x-2$。
(a) 证明 $x+2$ 是 $p(x)$ 的因式。
(b) 解方程 $p(x)=0$。

✓ **答案** (a) $p(-2)=0$，故 $x+2$ 是 $p(x)$ 的因式；(b) $x=-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$。

解析

$$p(-2)=4\times(-2)^3+8\times(-2)^2-(-2)-2=0$$

由因式定理，$x+2$ 是 $p(x)$ 的因式。
将 $p(x)$ 除以 $x+2$，得

$$p(x)=(x+2)(4x^2-1)$$

由平方差公式，

$$4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$$

故方程可写为

$$(x+2)(2x-1)(2x+1)=0$$

$$x+2=0 \quad 或 \quad 2x-1=0 \quad 或 \quad 2x+1=0$$

答：$x+2$ 是 $p(x)$ 的因式；方程的全部根为
$x=-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$。

2. [2024 · October/November 0606/22 Q3(b)]
提示：先把两个已知根代入，比较两式中同一未知数的系数。

DO NOT USE A CALCULATOR IN THIS QUESTION.

The polynomial p is defined by $\mathrm{p}(x)=ax^3-3x^2-3x+b$, where a and b are constants.

(a) Given that $x=2$ and $x=-1$ are roots of the equation $\mathrm{p}(x)=0$, find a and b.

(b) Solve the equation $\mathrm{p}(x)=0$.

本题不得使用计算器。
多项式 p 定义为
$p(x)=ax^3-3x^2-3x+b$，
其中 a 和 b 为常数。
(a) 已知 $x=2$ 和 $x=-1$ 是方程 $p(x)=0$ 的根，求 a 和 b。
(b) 解方程 $p(x)=0$。

✓ **答案**　（a）$a=2,b=2$；（b）$x=2,-1,\frac{1}{2}$。

解析　由 2 和 -1 均为方程的根，得

$$p(2)=8a-12-6+b=0$$

$$8a+b-18=0$$

$$p(-1)=-a-3+3+b=0$$

$$-a+b=0$$

两式相减，得

$$(8a+b-18)-(-a+b)=9a-18=0$$

$$a=2$$

$$b=a=2$$

代入得

$$p(x)=2x^3-3x^2-3x+2$$

由 $x-2$ 是因式，作除法得

$$p(x)=(x-2)(2x^2+x-1)$$

$$2x^2+x-1=2x^2+2x-x-1=(x+1)(2x-1)$$

故

$$(x-2)(x+1)(2x-1)=0$$

答：$a=2,b=2$；方程的全部根为 $x=2,-1,\frac{1}{2}$。

3. [2023 · February/March 0606/22 Q5(b)]

提示：降次后找函数，比较其和与一次项系数、积与常数项。

DO NOT USE A CALCULATOR IN THIS QUESTION.

(a) Show that $x-1$ is a factor of the expression $x^3-2x^2-19x+20$.

(b) Hence write $x^3-2x^2-19x+20$ as a product of its linear factors.

本题不得使用计算器。

（a）证明 $x-1$ 是表达式

$$x^3-2x^2-19x+20$$

的因式。

（b）由此，将 $x^3-2x^2-19x+20$ 写成线性因式的乘积。

✓ **答案**　（a）代入 $x=1$，表达式的值为 0，故 $x-1$ 是其因式；（b）$(x-1)(x+4)(x-5)$。

解析　将 $x=1$ 代入表达式，得

$$1^3-2\times1^2-19\times1+20=0$$

由因式定理，$x-1$ 是该表达式的因式。
将原式除以 $x-1$，得

$$x^3-2x^2-19x+20=(x-1)(x^2-x-20)$$

又

$$x^2-x-20=x^2+4x-5x-20$$

$$x^2+4x-5x-20=x(x+4)-5(x+4)$$

$$x(x+4)-5(x+4)=(x+4)(x-5)$$

答：$x-1$ 是原式的因式，且
$x^3-2x^2-19x+20=(x-1)(x+4)(x-5)$。

4. [2024 · February/March 0606/12 Q5(b)]
提示：看原式与导函数的共同因式，分别代入其对应的零点。

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x)=5x^3+ax^2+39x+b$, where a and b are constants.

(a) Given that $x+3$ is a factor of both $\mathrm{p}(x)$ and $\mathrm{p}'(x)$, find the values of a and b.

(b) Hence solve the equation $\mathrm{p}(x)=0$.

You must show your working.

多项式 p 满足
$p(x)=5x^3+ax^2+39x+b$,
其中 a 和 b 为常数。
(a) 已知 $x+3$ 是 $p(x)$ 和 $p'(x)$ 的因式，求 a 和 b 的值。
(b) 由此，解方程 $p(x)=0$。必须写出演算过程。

✓ **答案** (a) $a=29, b=-9$；(b) $x=-3, \frac{1}{5}$。

解析 由 $x+3$ 是 $p(x)$ 和 $p'(x)$ 的因式，得

$$p(-3)=0$$

$$p'(-3)=0$$

对 $p(x)$ 求导，得

$$p'(x)=15x^2+2ax+39$$

代入 $x=-3$，得

$$135-6a+39=0$$

$$6a=174$$

$$a=29$$

又

$$p(-3)=-135+9a-117+b=0$$

$$b=252-9\times 29=-9$$

故

$$p(x) = 5x^3 + 29x^2 + 39x - 9$$

将 $p(x)$ 除以 $x+3$，得

$$p(x) = (x+3)(5x^2 + 14x - 3)$$

$$5x^2 + 14x - 3 = 5x^2 + 15x - x - 3 = (x+3)(5x-1)$$

故方程可写为

$$(x+3)^2(5x-1) = 0$$

$$x+3 = 0 \quad 或 \quad 5x-1 = 0$$

答：$a = 29, b = -9$；方程的全部根为 $x = -3, \frac{1}{5}$。

5. [2025 · May/June 0606/12 Q5(b)]

提示：先看导数条件能确定哪个系数，再用因式条件列式。

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x) = 3x^3 - 7x^2 + ax + b$, where a and b are integers.

It is given that $\mathrm{p}'(-1) = 21$ and that $x-2$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$.

(a) Find the values of a and b.

(b) Hence write $\mathrm{p}(x)$ as a product of linear factors with integer coefficients.

多项式 p 满足
$p(x) = 3x^3 - 7x^2 + ax + b$，
其中 a 和 b 为整数。
已知 $p'(-1) = 21$，且 $x-2$ 是 $p(x)$ 的因式。
(a) 求 a 和 b 的值。
(b) 由此，将 $p(x)$ 写成系数为整数的线性因式的乘积。

✓ **答案**　(a) $a = -2, b = 8$；(b) $p(x) = (x-2)(x+1)(3x-4)$。

解析　对 $p(x)$ 求导，得

$$p'(x) = 9x^2 - 14x + a$$

由 $p'(-1) = 21$，得

$$9 + 14 + a = 21$$

$$a = -2$$

由 $x-2$ 是 $p(x)$ 的因式，得

$$p(2) = 24 - 28 + 2a + b = 0$$

代入 $a = -2$，得

$$24 - 28 - 4 + b = 0$$

$$b = 8$$

故

$$p(x)=3x^3-7x^2-2x+8$$

将 $p(x)$ 除以 $x-2$，得

$$p(x)=(x-2)(3x^2-x-4)$$

又

$$3x^2-x-4=3x^2+3x-4x-4$$

$$3x^2+3x-4x-4=3x(x+1)-4(x+1)$$

$$3x(x+1)-4(x+1)=(x+1)(3x-4)$$

答：$a=-2,b=8$，且
$p(x)=(x-2)(x+1)(3x-4)$。

题型 5　一次式除三次式，逐项消元求二次商

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **代入求出参数：**已知 $p(a)=0$，将原式中的 x 全部换成 a。令 $t=a^2$，将关于 t 的二次式分解因式。

$$p(a)=a\cdot a^3+4a^2-a\cdot a-28=a^4+3a^2-28=0$$

$$(t+7)(t-4)=t^2+3t-28$$

$$(a^2+7)(a^2-4)=0$$

由 $a^2+7>0$ 及 $a>0$，得 $a^2=$_____，$a=$_____。

② **除式取零代入：**一次式除多项式，商记为 $q(x)$，余数记为 r。令除式等于零，再代入除法等式，便得到余数。

除式为 $x-2$

$$p(x)=(x-2)q(x)+r$$

$$p(2)=0\cdot q(2)+r=r$$

除式为 $2x-5$

$$p(x)=(2x-5)q(x)+r$$

$2x-5=0$，得 $x=\frac{5}{2}$

$$p\left(\frac{5}{2}\right)=0\cdot q\left(\frac{5}{2}\right)+r=r$$

余数为 0 时，除式是多项式的因式。

③ **首项相除消元：**取 $a=2$，将三次式按降幂排列。每次用余下多项式的首项除以除式首项，所得项写入商。将所得项乘回除式，再整式相减，重复至余式为常数。

$$\frac{2x^3}{x}=2x^2$$

$$(2x^3+4x^2-2x-28)-(x-2)\cdot 2x^2=8x^2-2x-28$$

$$\frac{8x^2}{x}=8x$$

$$(8x^2-2x-28)-(x-2)\cdot 8x=14x-28$$

$$\frac{14x}{x}=14$$

$$(14x-28)-(x-2)\cdot 14=0$$

若除式首项为 $2x$，首项相除同样包含系数相除：

$$\frac{2x^3}{2x}=x^2$$

④ **商余还原原式：**将商的各项相加，得到二次商 _____。按除式乘商加余数写回原式。

$$p(x)=(x-2)(2x^2+8x+14)+0=(x-2)(2x^2+8x+14)$$

余数不为零时，保留乘积后的常数，例如：

$$(2x-2)\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)=x^2-1$$

$$x^2+1=(2x-2)\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)+2$$

⑤ **条件联立求参：**含两个未知系数时，将因式和余数条件分别写成等式。例如 $f(x)=x^3+ux+v$，其中 u、v 为待求常数。

有因式 $x-1$

$$f(1)=0$$

$$1+u+v=0$$

$$u+v=-1$$

除以 $x+1$ 余 4

$$f(-1)=4$$

$$-1-u+v=4$$

$$-u+v=5$$

两式相加消去 u，再代回求另一系数。

$$2v=4$$

$$v=2$$

$$u=-1-2=-3$$

⑥ **二阶导数代入：**多项式逐项求导，参数视为常数，常数项的导数为 0。$p'(x)$ 表示一阶导数，$p''(x)$ 表示二阶导数。给定某处的二阶导数时，先求导两次，再代入该处的 x 值。

$$p(x)=ax^3+4x^2-ax-28$$

$$p'(x)=3ax^2+8x-a$$

$$p''(x)=6ax+8$$

$p''\left(\frac{1}{2}\right)=$ _____。

↩ 填空：①4　②2　③$2x^2+8x+14$　④$3a+8$

点石成金　题目要求将三次式写成一次式乘二次式，或一次式乘商加余数时，先用被除式的首项除以除式的首项。

例 1　[2026 · May/June 0606/11 Q5(b)]

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x) = ax^3 + 4x^2 - ax - 28$, where a is a positive constant.

It is given that $\mathrm{p}(a) = 0$.

(a) Find the value of a.

(b) Using your value of a, find $\mathrm{p}(x)$ as a product of a linear factor and a quadratic factor.

多项式 p 满足 $p(x) = ax^3 + 4x^2 - ax - 28$，其中 a 是正常数。
已知 $p(a) = 0$。
(a) 求 a 的值。
(b) 利用求得的 a 值，将 $p(x)$ 写成一个一次因式与一个二次因式的乘积。

解答　由 $p(a) = 0$，得

$$a \cdot a^3 + 4a^2 - a \cdot a - 28 = 0$$

$$a^4 + 3a^2 - 28 = 0$$

$$(a^2 + 7)(a^2 - 4) = 0$$

$\because a^2 + 7 > 0$，$\therefore$

$$a^2 = 4$$

又 $a > 0$，得

$$a = 2$$

代入原式，得

$$p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 28$$

由 $p(2) = 0$，知 $x - 2$ 是 $p(x)$ 的因式。

$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2$$

$$(2x^3 + 4x^2 - 2x - 28) - 2x^2(x - 2) = 8x^2 - 2x - 28$$

$$\frac{8x^2}{x} = 8x$$

$$(8x^2 - 2x - 28) - 8x(x - 2) = 14x - 28$$

$$\frac{14x}{x} = 14$$

$$(14x - 28) - 14(x - 2) = 0$$

故

$$p(x) = (x - 2)(2x^2 + 8x + 14)$$

答：(a) $a = 2$；(b) $p(x) = (x - 2)(2x^2 + 8x + 14)$。

方法：先看参数条件求出系数，再将两式首项相除，写出商的首项。

辨析：商是各轮首项相除所得项的和，余数是消元后剩下的常数。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/11 Q2(a)]

提示：比较两式首项的系数与次数，相减时按对括号内各项符号。

DO NOT USE A CALCULATOR IN THIS QUESTION.

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x) = 6x^3 - 35x^2 + 34x + 45$.

(a) Find $\mathrm{p}(x)$ in the form $(2x-5)\mathrm{q}(x) + r$, where $\mathrm{q}(x)$ is a polynomial and r is a constant.

本题不得使用计算器。
多项式 p 满足 $p(x) = 6x^3 - 35x^2 + 34x + 45$。
(a) 将 $p(x)$ 写成

$$(2x-5)q(x) + r$$

的形式，其中 $q(x)$ 是多项式，r 是常数。

✓ **答案**

$$p(x) = (2x-5)(3x^2 - 10x - 8) + 5$$

解析 用 $2x-5$ 除 $p(x)$，逐项求商并相减，得

$$\frac{6x^3}{2x} = 3x^2$$

$$(6x^3 - 35x^2 + 34x + 45) - 3x^2(2x-5) = -20x^2 + 34x + 45$$

$$\frac{-20x^2}{2x} = -10x$$

$$(-20x^2 + 34x + 45) - (-10x)(2x-5) = -16x + 45$$

$$\frac{-16x}{2x} = -8$$

$$(-16x + 45) - (-8)(2x-5) = 5$$

余式为常数，故

$$q(x) = 3x^2 - 10x - 8$$

$$r = 5$$

答：$p(x) = (2x-5)(3x^2 - 10x - 8) + 5$。

2. [2023 · May/June 0606/11 Q2(c)]

提示：先看已求出的系数，再比较被除式与除式的首项。

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x) = ax^3 + 7x^2 + bx + c$, where a, b and c are integers.

(a) Given that $\mathrm{p}''\left(\frac{1}{2}\right) = 32$, show that $a = 6$.

(b) Given that $\mathrm{p}(x)$ has a factor of $3x-4$ and a remainder of 7 when divided by $x+1$, find the values of b and c.

(c) Write $\mathrm{p}(x)$ in the form $(3x-4)\mathrm{q}(x)$, where $\mathrm{q}(x)$ is a quadratic factor.

多项式 p 满足 $p(x) = ax^3 + 7x^2 + bx + c$，其中 a、b、c 均为整数。
(a) 已知 $p''\left(\frac{1}{2}\right) = 32$，证明 $a = 6$。

(b) 已知 $p(x)$ 有因式 $3x-4$，且除以 $x+1$ 的余数为 7，求 b 和 c 的值。
(c) 将 $p(x)$ 写成

$$(3x-4)q(x)$$

的形式，其中 $q(x)$ 是二次因式。

✓ **答案**　(a) $a=6$；(b) $b=-14$，$c=-8$；(c) $p(x)=(3x-4)(2x^2+5x+2)$。

解析　对 $p(x)$ 连续求导，得

$$p'(x)=3ax^2+14x+b$$

$$p''(x)=6ax+14$$

由 $p''\left(\frac{1}{2}\right)=32$，得

$$3a+14=32$$

$$3a=18$$

$$a=6$$

将 $a=6$ 代入，得

$$p(x)=6x^3+7x^2+bx+c$$

由 $3x-4$ 是因式，得

$$p\left(\frac{4}{3}\right)=0$$

$$6\left(\frac{4}{3}\right)^3+7\left(\frac{4}{3}\right)^2+4\frac{b}{3}+c=0$$

$$\frac{80}{3}+4\frac{b}{3}+c=0$$

$$4b+3c=-80$$

由除以 $x+1$ 的余数为 7，得

$$p(-1)=7$$

$$-6+7-b+c=7$$

$$-b+c=6$$

$$c=b+6$$

代入前式，得

$$4b+3(b+6)=-80$$

$$7b=-98$$

$$b=-14$$

$$c=-14+6=-8$$

于是

$$p(x)=6x^3+7x^2-14x-8$$

用 $3x-4$ 除 $p(x)$，得

$$\frac{6x^3}{3x} = 2x^2$$

$$(6x^3 + 7x^2 - 14x - 8) - 2x^2(3x - 4) = 15x^2 - 14x - 8$$

$$\frac{15x^2}{3x} = 5x$$

$$(15x^2 - 14x - 8) - 5x(3x - 4) = 6x - 8$$

$$\frac{6x}{3x} = 2$$

$$(6x - 8) - 2(3x - 4) = 0$$

故

$$p(x) = (3x - 4)(2x^2 + 5x + 2)$$

答：(a) $a = 6$；(b) $b = -14$，$c = -8$；(c) $p(x) = (3x - 4)(2x^2 + 5x + 2)$。

3. [2021 · February/March 0606/12 Q9(a)]

提示：用被除式首项除以除式首项，再乘回并相减。

The polynomial $\mathrm{p}(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$ has a factor $2x - 1$.

(a) Find $\mathrm{p}(x)$ in the form $(2x-1)\mathrm{q}(x)$, where $\mathrm{q}(x)$ is a quadratic factor.

多项式$p(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$有一个因式$2x - 1$。

(a) 将$p(x)$写成$(2x - 1)q(x)$的形式，其中$q(x)$是一个二次因式。

✓ **答案** $p(x) = (2x - 1)(x^2 - x - 1)$。

解析 用$2x - 1$除$p(x)$，逐项相除并消元，得

$$\frac{2x^3}{2x} = x^2$$

$$(2x^3 - 3x^2 - x + 1) - x^2(2x - 1) = -2x^2 - x + 1$$

$$\frac{-2x^2}{2x} = -x$$

$$(-2x^2 - x + 1) - (-x)(2x - 1) = -2x + 1$$

$$\frac{-2x}{2x} = -1$$

$$(-2x + 1) - (-1)(2x - 1) = 0$$

因此，二次商为

$$q(x) = x^2 - x - 1$$

答：$p(x) = (2x - 1)(x^2 - x - 1)$。

4. [2021 · May/June 0606/11 Q3(b)]
提示：先按因式与余数条件求系数，再作多项式除法。

The polynomial $\mathrm{p}(x) = ax^3 - 9x^2 + bx - 6$, where a and b are constants, has a factor of $x-2$. The polynomial has a remainder of 66 when divided by $x-3$.

(a) Find the value of a and of b.

(b) Using your values of a and b, show that $\mathrm{p}(x) = (x-2)\mathrm{q}(x)$, where $\mathrm{q}(x)$ is a quadratic factor to be found.

多项式$p(x) = ax^3 - 9x^2 + bx - 6$，其中$a$和$b$是常数，且$x - 2$是它的一个因式。该多项式除以$x - 3$时，余数为66。
(a) 求a和b的值。
(b) 利用求得的a和b的值，证明$p(x) = (x - 2)q(x)$，并求出其中的二次因式$q(x)$。

✓ **答案** $p(x) = (x - 2)(6x^2 + 3x + 3)$。

解析 由$x - 2$是$p(x)$的因式，得

$$p(2) = 0$$

$$8a - 36 + 2b - 6 = 0$$

$$4a + b = 21$$

由$p(x)$除以$x - 3$的余数为66，得

$$p(3) = 66$$

$$27a - 81 + 3b - 6 = 66$$

$$9a + b = 51$$

两式相减，得

$$5a = 30$$

$$a = 6$$

代回，得

$$b = 21 - 4 \times 6 = -3$$

因此

$$p(x) = 6x^3 - 9x^2 - 3x - 6$$

用$x - 2$除$p(x)$，逐项消元，得

$$\frac{6x^3}{x} = 6x^2$$

$$(6x^3 - 9x^2 - 3x - 6) - 6x^2(x - 2) = 3x^2 - 3x - 6$$

$$\frac{3x^2}{x} = 3x$$

$$(3x^2 - 3x - 6) - 3x(x - 2) = 3x - 6$$

$$\frac{3x}{x}=3$$

$$(3x-6)-3(x-2)=0$$

故

$$p(x)=(x-2)(6x^2+3x+3)$$

答：$q(x)=6x^2+3x+3$，所求形式为$p(x)=(x-2)(6x^2+3x+3)$。

题型 6　分解已有二次因式，写成三个一次因式的乘积

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **导数条件代入：**本例用二阶导数值确定三次项系数。记 p'、p'' 为一阶、二阶导函数。逐项求导，再代入给定的自变量。

$$p(x)=ax^3+7x^2+bx+c$$

$$p'(x)=3ax^2+14x+b$$

$$p''(x)=6ax+14$$

$$p''\left(\frac{1}{2}\right)=3a+14=32$$

② **因式余式条件：**令一次因式等于零，求出代入值。有该因式时，余式为 _____。除以其他一次式，也用其零点求余式。

$$3x-4=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad p\left(\frac{4}{3}\right)=0$$

$$x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1 \quad\Rightarrow\quad p(-1)=7$$

$$mx+n=0 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{n}{m} \quad (m\neq 0)$$

除以 $mx+n$ 的余式为 $p\left(-\frac{n}{m}\right)$；被 x 整除时，$p(0)=0$。

③ **展开比较系数：**三次式除以一次式，商 $q(x)$ 为 _____次式。设商的待定系数为 u,v,w，常数余式为 r。展开后，令同次项的系数分别相等。

$$q(x)=ux^2+vx+w$$

$$p(x)=(3x-4)(ux^2+vx+w)+r=3ux^3+(3v-4u)x^2+(3w-4v)x+r-4w$$

④ **二次因式拆项：**二次式还需分解时，将一次项拆成两项。两项系数之和等于原一次项系数。两项系数之积等于首项系数与常数项之积。

常数项为正：

$$4+1=5,\quad 4\times 1=2\times 2$$

$$2x^2+5x+2=2x^2+4x+x+2$$

常数项为负：

$$2+(-3)=-1,\quad 2\times(-3)=2\times(-3)$$

$$2x^2-x-3=2x^2+2x-3x-3$$

$= 2x(x+2)+(x+2) = (2x+1)(x+2)$　　$= 2x(x+1)-3(x+1) = (2x-3)(x+1)$

⑤ **减去常数余式：** 商式末尾有常数余式时，等式两边减去该余式。例如，多项式 $f(x)$ 满足下式。

$$f(x) = (x-1)(x^2+3x+2)+4$$

$$f(x)-4 = (x-1)(x^2+3x+2) = (x-1)(x+1)(x+2)$$

⑥ **提出共同因式：** 各项都含 x 时，先提取公因式，再分解括号内的二次式。所得三个因式的次数均为 _____。

$$2x^3+5x^2+2x = x(2x^2+5x+2) = x(2x+1)(x+2)$$

填空：①0　②2　③1

点石成金　题目出现已知一次因式，并要求写成三个一次因式的乘积时，先求出二次因式，再拆项分组。

例 1　[2023 · May/June 0606/11 Q2(d)]

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x) = ax^3+7x^2+bx+c$, where a, b and c are integers.

(a) Given that $\mathrm{p}''\left(\frac{1}{2}\right) = 32$, show that $a = 6$.

(b) Given that $\mathrm{p}(x)$ has a factor of $3x-4$ and a remainder of 7 when divided by $x+1$, find the values of b and c.

(c) Write $\mathrm{p}(x)$ in the form $(3x-4)\mathrm{q}(x)$, where $\mathrm{q}(x)$ is a quadratic factor.

(d) Hence write $\mathrm{p}(x)$ as a product of linear factors with integer coefficients.

多项式 p 满足
$p(x) = ax^3+7x^2+bx+c$，
其中 a、b、c 均为整数。
(a) 已知 $p''\left(\frac{1}{2}\right) = 32$，证明 $a = 6$。
(b) 已知 $p(x)$ 有因式 $3x-4$，且除以 $x+1$ 时的余式为 7，求 b 和 c 的值。
(c) 将 $p(x)$ 写成 $(3x-4)q(x)$ 的形式，其中 $q(x)$ 是二次因式。
(d) 由此，将 $p(x)$ 写成整数系数的一次因式的乘积。

解答　逐项求导，得

$$p'(x) = 3ax^2+14x+b$$

$$p''(x) = 6ax+14$$

由已知二阶导数值，得

$$p''\left(\frac{1}{2}\right) = 3a+14 = 32$$

$$3a = 18$$

$$a = 6$$

因 $3x-4$ 是 $p(x)$ 的因式，

$$p\left(\frac{4}{3}\right) = 6\left(\frac{4}{3}\right)^3+7\left(\frac{4}{3}\right)^2+4\frac{b}{3}+c = 0$$

方法：先看已知一次因式，比较系数求二次因式，再拆一次项。

辨析：因式条件是代入零点得零，余式条件是代入零点得指定余式。

$$\frac{80}{3}+4\frac{b}{3}+c=0$$

$$4b+3c=-80$$

由除以 $x+1$ 的余式为 7，得

$$p(-1)=-6+7-b+c=7$$

$$c=b+6$$

代入得

$$4b+3(b+6)=-80$$

$$7b=-98$$

$$b=-14$$

$$c=-14+6=-8$$

故

$$p(x)=6x^3+7x^2-14x-8$$

设二次因式为

$$q(x)=ux^2+vx+w$$

展开得

$$(3x-4)q(x)=3ux^3+(3v-4u)x^2+(3w-4v)x-4w$$

比较同次项系数，得

$$3u=6 \quad \Rightarrow \quad u=2$$

$$3v-4\times 2=7 \quad \Rightarrow \quad v=5$$

$$3w-4\times 5=-14 \quad \Rightarrow \quad w=2$$

常数项也满足 $-4\times 2=-8$，故

$$p(x)=(3x-4)(2x^2+5x+2)$$

将二次因式的一次项拆开，得

$$2x^2+5x+2=2x^2+4x+x+2$$

$$=2x(x+2)+(x+2)=(2x+1)(x+2)$$

因此

$$p(x)=(3x-4)(2x+1)(x+2)$$

三个一次因式的系数均为整数。

答：$a=6, b=-14, c=-8$；$p(x)=(3x-4)(2x^2+5x+2)=(3x-4)(2x+1)(x+2)$。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/11 Q2(b)]

提示：看等式末尾的余式如何移项，再核对二次式拆项的和与积。

DO NOT USE A CALCULATOR IN THIS QUESTION.

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x)=6x^3-35x^2+34x+45$.

(a) Find $\mathrm{p}(x)$ in the form $(2x-5)\mathrm{q}(x)+r$, where $\mathrm{q}(x)$ is a polynomial and r is a constant.

(b) Hence write the expression $\mathrm{p}(x)-5$ as a product of linear factors.

本题不得使用计算器。

多项式 p 满足

$p(x)=6x^3-35x^2+34x+45$。

(a) 将 $p(x)$ 写成 $(2x-5)q(x)+r$ 的形式，其中 $q(x)$ 是多项式，r 是常数。

(b) 由此，将表达式 $p(x)-5$ 写成一次因式的乘积。

✓ **答案** (a) $p(x)=(2x-5)(3x^2-10x-8)+5$，其中 $q(x)=3x^2-10x-8$，$r=5$。

(b) $p(x)-5=(3x+2)(x-4)(2x-5)$。

解析 三次式除以一次式，商为二次式。设

$$q(x)=ux^2+vx+w$$

由题意，

$$p(x)=(2x-5)(ux^2+vx+w)+r$$

$$=2ux^3+(2v-5u)x^2+(2w-5v)x+r-5w$$

比较同次项系数，得

$$2u=6 \quad \Rightarrow \quad u=3$$

$$2v-5\times 3=-35 \quad \Rightarrow \quad v=-10$$

$$2w-5\times(-10)=34 \quad \Rightarrow \quad w=-8$$

$$r-5\times(-8)=45 \quad \Rightarrow \quad r=5$$

故

$$p(x)=(2x-5)(3x^2-10x-8)+5$$

等式两边减去 5，得

$$p(x)-5=(2x-5)(3x^2-10x-8)$$

因 $(-12)+2=-10$，且 $(-12)\times 2=3\times(-8)$，

$$3x^2-10x-8=3x^2-12x+2x-8$$

$$=3x(x-4)+2(x-4)=(3x+2)(x-4)$$

因此

$$p(x)-5=(3x+2)(x-4)(2x-5)$$

答：$q(x)=3x^2-10x-8$，$r=5$；$p(x)-5=(3x+2)(x-4)(2x-5)$。

2. [2023 · October/November 0606/11 Q2(b)]
提示：先看各项的共同因式，再核对括号内二次式拆项的和与积。

The polynomial $\mathrm{P}(x)$ is such that $\mathrm{P}(x)=ax^3-11x^2+bx+c$, where a, b and c are integers. $\mathrm{P}(x)$ is divisible by x and has a remainder of $\frac{3}{2}$ when divided by $2x+1$. It is also given that $\mathrm{P}'(2)=18$.

(a) Find the values of a, b and c.

(b) Hence write $\mathrm{P}(x)$ as a product of three linear factors.

多项式 $P(x)$ 满足
$P(x)=ax^3-11x^2+bx+c$，
其中 a、b、c 均为整数。$P(x)$ 能被 x 整除，且除以 $2x+1$ 时的余式为 $\frac{3}{2}$。另已知 $P'(2)=18$。
(a) 求 a、b、c 的值。
(b) 由此，将 $P(x)$ 写成三个一次因式的乘积。

✓ **答案** (a) $a=6$，$b=-10$，$c=0$。
(b) $P(x)=x(3x+2)(2x-5)$。

解析 因 $P(x)$ 能被 x 整除，

$$P(0)=c=0$$

令除式 $2x+1=0$，得 $x=-\frac{1}{2}$。由余式条件，

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{a}{8}-\frac{11}{4}-\frac{b}{2}=\frac{3}{2}$$

等式两边乘以 8，得

$$-a-22-4b=12$$

$$a+4b=-34$$

逐项求导，得

$$P'(x)=3ax^2-22x+b$$

由 $P'(2)=18$，得

$$12a-44+b=18$$

$$b=62-12a$$

代入得

$$a+4(62-12a)=-34$$

$$47a=282$$

$$a=6$$

$$b=62-12\times 6=-10$$

因此

$$P(x)=6x^3-11x^2-10x=x(6x^2-11x-10)$$

因 $(-15)+4=-11$，且 $(-15)\times 4=6\times(-10)$，

$$6x^2-11x-10=6x^2-15x+4x-10$$

$$=3x(2x-5)+2(2x-5)=(3x+2)(2x-5)$$

故

$$P(x)=x(3x+2)(2x-5)$$

答：$a=6$，$b=-10$，$c=0$；$P(x)=x(3x+2)(2x-5)$。

题型 7 用二次因式的负判别式证明三次式仅一实根

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **因式余式代入：**题给 $x+2$ 为因式，除以 $x+1$ 余 6。$p(t)$ 表示把 x 换成 t，按余式定理代入。

因式对应的值为零

$$x+2=0$$

$p(-2)=$ _____

除式对应的值等于余数

$$x+1=0$$

$p(-1)=$ _____

线性式的首项系数不为一时，也先令它为零，例如：

$$4x+1=0$$

$$x=-\frac{1}{4}$$

② **联立求出系数：**将上述两个值代入原多项式，得到关于 a,b 的方程。用消元法求系数。

$$-16+4a-26+b=0$$

$$4a+b=42$$

$$-2+a-13+b=6$$

$$a+b=21$$

$$3a=21$$

$$a=7$$

$$b=14$$

③ **导数条件代入：**记号 $p'(x)$ 表示 $p(x)$ 的导函数。各项求导时，幂次乘入系数并减一，常数项导数为零。

$$p(x)=2x^3+7x^2+13x+14$$

$$p'(x)=6x^2+14x+13$$

$$p'(0)=13$$

代入零后，导数值等于原多项式的一次项系数。

④ **参数自身代入：**题给多项式在参数处的值为零，须把每个自变量换成该参数。例如 $r(x)=kx^3+2x^2-kx-6$，其中 $k>0$，且 $r(k)=0$。把 k^2 看作一个整体，分解因式后取正值。

$$r(k)=k\cdot k^3+2k^2-k\cdot k-6=k^4+k^2-6$$

$$(k^2+3)(k^2-2)=0$$

$$k^2+3>0$$

$$k^2=2$$

$k=$ _____

⑤ **分出二次因式：**已知线性因式 $x+2$，设余下的二次因式为 Ax^2+Bx+C。其中 A,B,C 为待定系数，展开后比较同次幂的系数。

$$(x+2)(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+(2A+B)x^2+(2B+C)x+2C$$

$$A=2$$

$$B=7-2A=3$$

$$C=13-2B=7$$

$$2C=14$$

$$p(x)=(x+2)(2x^2+3x+7)$$

⑥ **判定实根个数：**方程的实根是满足方程的实数。二次因式为 $2x^2+3x+7$，其判别式记为 Δ。

$$\Delta=B^2-4AC=3^2-4\cdot 2\cdot 7=-47<0$$

二次项系数非零且 $\Delta<0$ 时，二次方程无实根，乘积为零的实数解仅来自线性因式。

$$x+2=0$$

$x=$ _____

← 填空：①0　②6　③$\sqrt{2}$　④-2

点石成金　题目出现三次方程须证明仅有一个实根时，先分出已知线性因式，再求二次因式的判别式。

例 1　[2025 · October/November 0606/12 Q2(b)]

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x)=2x^3+ax^2+13x+b$, where a and b are integers.
It is given that $x+2$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$.
When $\mathrm{p}(x)$ is divided by $x+1$ there is a remainder of 6.

(a) Find the values of a and b.

(b) Show that the equation $\mathrm{p}(x)=0$ has only one real root.

多项式 p 满足
$p(x)=2x^3+ax^2+13x+b$,
其中 a 和 b 为整数。
已知 $x+2$ 是 $p(x)$ 的一个因式。
$p(x)$ 除以 $x+1$ 的余数为 6。
(a) 求 a 和 b 的值。
(b) 证明方程 $p(x)=0$ 仅有一个实根。

解答　由 $x+2$ 是 $p(x)$ 的因式，得

$$p(-2)=0$$

$$2(-2)^3+a(-2)^2+13(-2)+b=0$$

$$4a+b=42$$

由除以 $x+1$ 的余数为 6，得

$$p(-1)=6$$

$$2(-1)^3+a(-1)^2+13(-1)+b=6$$

$$a+b=21$$

两式相减，得

$$3a=21$$

$$a=7$$

代入得

$$b=21-7=14$$

故

$$p(x)=2x^3+7x^2+13x+14$$

$$p(x)=(x+2)(2x^2+3x+7)$$

二次因式的判别式为

$$\Delta=3^2-4\cdot2\cdot7=-47<0$$

方法：先看已知线性因式，分出二次因式后计算判别式。

辨析：因式是多项式的乘积组成，根是使多项式值为零的数。

∴ 方程 $2x^2+3x+7=0$ 无实根。
由 $p(x)=0$，得

$$x+2=0$$

$$x=-2$$

答：$a=7$，$b=14$；方程 $p(x)=0$ 仅有一个实根 $x=-2$。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/11 Q5(c)]
提示：从已求出的分解式起手，比较二次因式的判别式与零。

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x)=ax^3+4x^2-ax-28$, where a is a positive constant.

It is given that $\mathrm{p}(a)=0$.

(a) Find the value of a.

(b) Using your value of a, find $\mathrm{p}(x)$ as a product of a linear factor and a quadratic factor.

(c) Hence show that the equation $\mathrm{p}(x)=0$ has exactly one root.

多项式 p 满足
$p(x)=ax^3+4x^2-ax-28$，
其中 a 为正常数。已知 $p(a)=0$。
(a) 求 a 的值。
(b) 利用所得的 a 值，将 $p(x)$ 表示为一个一次因式与一个二次因式的乘积。
(c) 由此证明，方程 $p(x)=0$ 恰有一个根。

✓ **答案**　(a) $a=2$；(b) $p(x)=(x-2)(2x^2+8x+14)$；(c) 方程恰有一个实根 $x=2$。

解析　由 $p(a)=0$，得

$$a\cdot a^3+4a^2-a\cdot a-28=0$$

$$a^4+3a^2-28=0$$

$$(a^2+7)(a^2-4)=0$$

$\because a^2+7>0$，$\therefore$

$$a^2=4$$

又 $a>0$，故

$$a=2$$

代入得

$$p(x)=2x^3+4x^2-2x-28$$

由 $p(2)=0$，分解得

$$p(x)=(x-2)(2x^2+8x+14)$$

二次因式的判别式为

$$\Delta=8^2-4\cdot2\cdot14=-48<0$$

∴ 方程 $2x^2+8x+14=0$ 无实根。

由 $p(x)=0$，得

$$x-2=0$$

$$x=2$$

答：$a=2$，$p(x)=(x-2)(2x^2+8x+14)$；方程恰有一个实根 $x=2$。

2. [2023 · October/November 0606/13 Q4(b)]

提示：看二次因式的三个系数，比较判别式与零。

The polynomial P is given by $\mathrm{P}(x)=ax^3+bx^2+3x+2$, where a and b are integers. $\mathrm{P}(x)$ has a factor of $2x+1$. $\mathrm{P}(x)$ has a remainder of -6 when divided by $x+1$.

(a) Find the values of a and b.

(b) Show that the equation $\mathrm{P}(x)=0$ has only one real root.

多项式 P 定义为
$P(x)=ax^3+bx^2+3x+2$，
其中 a 和 b 为整数。$P(x)$ 有因式 $2x+1$。$P(x)$ 除以 $x+1$ 的余数为 -6。
(a) 求 a 和 b 的值。
(b) 证明方程 $P(x)=0$ 仅有一个实根。

✓ **答案** (a) $a=6$，$b=1$；(b) 方程仅有一个实根 $x=-\frac{1}{2}$。

解析 由 $2x+1$ 是 $P(x)$ 的因式，得

$$2x+1=0$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$-\frac{a}{8}+\frac{b}{4}-\frac{3}{2}+2=0$$

$$a-2b=4$$

由除以 $x+1$ 的余数为 -6，得

$$P(-1)=-6$$

$$-a+b-3+2=-6$$

$$a-b=5$$

两式相减，得

$$b=1$$

代入得

$$a=6$$

故

$$P(x) = 6x^3 + x^2 + 3x + 2$$

$$P(x) = (2x + 1)(3x^2 - x + 2)$$

二次因式的判别式为

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -23 < 0$$

$\therefore$ 方程 $3x^2 - x + 2 = 0$ 无实根。
由 $P(x) = 0$，得

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

答：$a = 6$，$b = 1$；方程 $P(x) = 0$ 仅有一个实根 $x = -\frac{1}{2}$。

3. [2023 · October/November 0606/12 Q6(b)]
提示：看分解式中的二次因式，用判别式检查是否还有实根。

The polynomial $\mathrm{p}(x)$ is such that $\mathrm{p}(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$, where a, b and c are integers. It is given that $\mathrm{p}'(0) = 12$. It is also given that $\mathrm{p}(x)$ has a factor of $3x - 1$ and a remainder of 95 when divided by $x - 2$.

(a) Find the values of a, b and c.

(b) Show that the equation $\mathrm{p}(x) = 0$ has only one real root.

多项式 $p(x)$ 满足
$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$，
其中 a, b, c 为整数。已知 $p'(0) = 12$。另知 $p(x)$ 有因式 $3x - 1$，且除以 $x - 2$ 的余数为 95。
(a) 求 a, b, c 的值。
(b) 证明方程 $p(x) = 0$ 仅有一个实根。

✓ **答案**　(a) $a = 6$，$b = 7$，$c = 12$；(b) 方程仅有一个实根 $x = \frac{1}{3}$。

解析　由

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

及 $p'(0) = 12$，得

$$c = 12$$

由 $3x - 1$ 是 $p(x)$ 的因式，得

$$3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\frac{a}{27}+\frac{b}{9}+\frac{12}{3}-5=0$$

$$a+3b=27$$

由除以 $x-2$ 的余数为 95，得

$$p(2)=95$$

$$8a+4b+24-5=95$$

$$2a+b=19$$

将后一式乘以 3，得

$$6a+3b=57$$

减去 $a+3b=27$，得

$$5a=30$$

$$a=6$$

$$b=19-2\cdot 6=7$$

故

$$p(x)=6x^3+7x^2+12x-5$$

$$p(x)=(3x-1)(2x^2+3x+5)$$

二次因式的判别式为

$$\Delta=3^2-4\cdot 2\cdot 5=-31<0$$

$\therefore$ 方程 $2x^2+3x+5=0$ 无实根。
由 $p(x)=0$，得

$$3x-1=0$$

$$x=\frac{1}{3}$$

答：$a=6$，$b=7$，$c=12$；方程 $p(x)=0$ 仅有一个实根 $x=\frac{1}{3}$。

4. [2023 · May/June 0606/23 Q4(b)]
提示：从已验证的根分出线性因式，再检查二次因式的判别式。

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x)=2x^3+11x^2+22x+40$.

(a) Show that $x=-4$ is a root of the equation $\mathrm{p}(x)=0$.

(b) Factorise $\mathrm{p}(x)$ and hence show that $\mathrm{p}(x)=0$ has no other real roots.

多项式 p 满足
$p(x)=2x^3+11x^2+22x+40$。
(a) 证明 $x=-4$ 是方程 $p(x)=0$ 的一个根。
(b) 分解 $p(x)$ 的因式，并由此证明方程 $p(x)=0$ 没有其他实根。

✓ **答案**　（a）$p(-4)=0$，故 $x=-4$ 是方程的根；（b）$p(x)=(x+4)(2x^2+3x+10)$，方程没有其他实根。

解析　将 $x=-4$ 代入，得

$$p(-4)=2(-4)^3+11(-4)^2+22(-4)+40$$

$$p(-4)=-128+176-88+40=0$$

$\therefore$ $x=-4$ 是方程 $p(x)=0$ 的根，$x+4$ 是 $p(x)$ 的因式。

分解得

$$p(x)=(x+4)(2x^2+3x+10)$$

二次因式的判别式为

$$\Delta=3^2-4\cdot 2\cdot 10=-71<0$$

$\therefore$ 方程 $2x^2+3x+10=0$ 无实根。

由 $p(x)=0$，得

$$x+4=0$$

$$x=-4$$

答：$p(x)=(x+4)(2x^2+3x+10)$；除 $x=-4$ 外，方程没有其他实根。

5. [2025 · February/March 0606/12 Q4(c)]

提示：由线性因式令多项式值为零，求出参数后分出二次因式。

The polynomial p is given by $\mathrm{p}(x)=a^2x^3+2ax^2+ax+2$, where a is a positive integer.
It is given that $2x+1$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$.

(a) Find the value of a.

(b) Hence factorise $\mathrm{p}(x)$.

(c) Hence show that the equation $\mathrm{p}(x)=0$ has only one real root.

多项式p由下式给出，其中a为正整数。

$p(x)=a^2x^3+2ax^2+ax+2$

已知$2x+1$是$p(x)$的一个因式。

（a）求a的值。

（b）由此将$p(x)$分解因式。

（c）由此证明方程$p(x)=0$仅有一个实根。

✓ **答案**　方程$p(x)=0$仅有一个实根$x=-\frac{1}{2}$。

解析　由$2x+1$是$p(x)$的因式，得

$$p\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$a^2\left(-\frac{1}{2}\right)^3+2a\left(-\frac{1}{2}\right)^2+a\left(-\frac{1}{2}\right)+2=0$$

$$-\frac{a^2}{8}+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+2=0$$

$$a^2=16$$

$\because a$为正整数，$\therefore$

$$a = 4$$

代入并分组，得

$$p(x) = 16x^3 + 8x^2 + 4x + 2$$

$$p(x) = 8x^2(2x + 1) + 2(2x + 1) = 2(2x + 1)(4x^2 + 1)$$

二次因式的判别式为

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 4 \times 1 = -16 < 0$$

$\therefore$方程$4x^2 + 1 = 0$无实根。
由$p(x) = 0$，得

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

答：方程$p(x) = 0$仅有一个实根$x = -\frac{1}{2}$。

第 4 章 方程、不等式与图像

Chapter 4

4.1 方程、不等式与图像

题型 1 把绝对值等式分两支解一次方程

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **绝对值的含义：**题中比较 $5x+4$ 与 $3x-2$ 到 0 的距离。一个数到 0 的距离称为它的绝对值，绝对值是_____。

$$|3| = |-3| = 3$$

$$|0| = 0$$

② **两侧绝对值相等：**两式的绝对值相等，竖线内的式子_____，或互为_____。母例可分成两种情形：

$5x+4 = 3x-2$ | $5x+4 = -(3x-2)$

③ **括号前有负号：**去掉括号时，括号内各项都变号。

$$-(3x-2) = -3x+2$$

④ **一次方程求解：**两边都有含 x 的项时，将含 x 的项移到同一边，移项时变号。合并后，两边同除以 x 的系数。

$5x+4 = 3x-2 \xrightarrow{\text{移项并合并}} 2x = -6$

$-2x = 3 \xrightarrow{\text{两边除以负二}} x = -\frac{3}{2}$

⑤ **一侧为非负常数：**绝对值等于非负常数时，竖线内的式子等于该常数，或等于它的相反数。例如：

$$|5x+4| = 3$$

$5x+4 = 3$ | $5x+4 = -3$

⑥ **还原单个绝对值：**绝对值外有加减、乘除时，先用等式两边的相同运算还原。

$$2|5x+4|+3 = 9$$

两边减去 3，再除以 2：

$$2|5x+4| = 6$$

$$|5x+4| = 3$$

若绝对值除以 2 等于 3，则两边乘以 2：

$$\frac{|5x+4|}{2} = 3$$

$$|5x+4| = 6$$

填空：①非负数 ②相等 ③相反数

点石成金 题目出现含绝对值的一次方程时，先还原单个绝对值，再按竖线内的式子相等或互为相反数分两支求解。

例 1 [2026 · May/June 0606/11 Q1]

Solve the equation $|5x+4| = |3x-2|$.

解方程 $|5x+4| = |3x-2|$。

解答　由两式的绝对值相等，得

$5x+4=3x-2$

$2x=-6$

$x=-3$

$5x+4=-(3x-2)$

$5x+4=-3x+2$

$8x=-2$

$x=-\frac{1}{4}$

方法：先看两侧竖线内的式子，按同值与反号各列一个方程。

! 辨析：数值相等是位置相同，绝对值相等是到零的距离相同。

答：$x=-3$ 或 $x=-\frac{1}{4}$。

针对练习

1. [2026 · February/March 0606/12 Q6(a)]

提示：看竖线外的常数，分支时比较两式的符号。

(a) Solve the equation $|3x+2|=7$.

(a) 解方程 $|3x+2|=7$。

✓ **答案**　$x=\frac{5}{3}$ 或 $x=-3$

解析　由绝对值等于 7，得

$3x+2=7$

$3x=5$

$x=\frac{5}{3}$

$3x+2=-7$

$3x=-9$

$x=-3$

答：$x=\frac{5}{3}$ 或 $x=-3$。

2. [2025 · May/June 0606/11 Q5(a)]

提示：先看绝对值外的加法与乘法，按逆序还原。

(a) Solve the equation $5|2x-1|+8=23$.

(a) 解方程 $5|2x-1|+8=23$。

✓ **答案**　$x=-1$ 或 $x=2$

解析　将等式两边减去 8，得

$5|2x-1|=15$

两边除以 5，得

$|2x-1|=3$

于是

$2x-1=3$

$2x=4$

$x=2$

$2x-1=-3$

$2x=-2$

$x=-1$

答：$x=-1$ 或 $x=2$。

3. [2024 · May/June 0606/21 Q1(b)]
提示：比较两侧竖线内的式子，分同值与反号两支。

(b) Solve the equation $|4x-6|=|2x|$.

(b) 解方程 $|4x-6|=|2x|$。

✓ **答案** $x=1$ 或 $x=3$

解析 由两式的绝对值相等，得

$4x-6=2x$

$2x=6$

$x=3$

$4x-6=-2x$

$6x=6$

$x=1$

答：$x=1$ 或 $x=3$。

4. [2024 · February/March 0606/22 Q1(a)]
提示：先看竖线外的运算，移项后再消去外部系数。

(a) Solve the equation $2|8-4x|+5=25$.

(a) 解方程 $2|8-4x|+5=25$。

✓ **答案** $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{9}{2}$

解析 将等式两边减去 5，得

$$2|8-4x|=20$$

两边除以 2，得

$$|8-4x|=10$$

于是

$8-4x=10$

$-4x=2$

$x=-\frac{1}{2}$

$8-4x=-10$

$-4x=-18$

$x=\frac{9}{2}$

答：$x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{9}{2}$。

5. [2023 · May/June 0606/23 Q1(a)]
提示：先看绝对值外的分母，用两边同乘消去分母。

(a) Solve the equation $\dfrac{|4x-5|}{7}=1$.

(a) 解方程 $\frac{|4x-5|}{7}=1$。

✓ **答案** $x=3$ 或 $x=-\frac{1}{2}$

解析 将等式两边乘以 7，得

$$|4x-5|=7$$

于是

$4x-5=7$

$4x=12$

$x=3$

$4x-5=-7$

$4x=-2$

$x=-\frac{1}{2}$

答：$x=3$ 或 $x=-\frac{1}{2}$。

题型 2　把绝对值界限改写为一次不等式

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **绝对值的含义：**本题中的绝对值表示一个数到零的距离。绝对值内的数是 $5x+2$，题目要求距离不小于 3。

$$|5x+2| \geq 3$$

② **同除一个数：**不等式两边同除以正数，不等号方向不变。同除以负数，不等号方向_____。

同除以正数：

$$5x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{5}$$

同除以负数：

$$-2x < 6$$

$$x > -3$$

③ **外侧分成两支：**距离不小于 3，数的位置在两个界限的外侧。两支有一支成立，解集用_____连接。原式含等号，两个端点均保留。

$5x+2 \leq -3$　　$5x+2 \geq 3$

④ **内侧写成双限：**绝对值小于右端式子时，写成两个界限之间的范围。例如：

$$|2x-1| < x+3$$

$$-(x+3) < 2x-1 < x+3$$

⑤ **负号去掉括号：**括号前有负号，去括号时各项均变号。上式左端展开为：

$$-(x+3) = -x-3$$

因此有：

$$-x-3 < 2x-1 < x+3$$

⑥ **双限取公共部分：**左右两个不等式须_____成立，分别求解后取公共部分。

$$-x-3 < 2x-1$$

$$-2 < 3x$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

$$2x-1 < x+3$$

$$x < 4$$

合并得：

$$-\frac{2}{3} < x < 4$$

填空：①改变　②或　③同时

点石成金　题目出现绝对值不等式时，先按不等号方向，把绝对值界限改写为两个一次不等式。

例 1　[2025 · May/June 0606/22 Q1]

Solve the inequality $|5x+2| \geqslant 3$.

解不等式：$|5x+2| \geq 3$。

解答　由绝对值的意义，得

$$5x+2 \leq -3 \quad 或 \quad 5x+2 \geq 3$$

移项得

$$5x \leq -5 \quad 或 \quad 5x \geq 1$$

两边同除以 5，得

$$x \leq -1 \quad 或 \quad x \geq \frac{1}{5}$$

方法：先看不等号方向及有无等号，再判断内式应落在界限内侧还是外侧。

辨析：或是至少一支成立，且是两支同时成立。

答：$x \le -1$ 或 $x \ge \frac{1}{5}$。

针对练习

1. [2023 · October/November 0606/13 Q1(b)]

提示：看左端括号前的负号，逐项变号后比较两侧给出的范围。

(b) Solve the inequality $|4x-3| < 2x+5$.

(b) 解不等式：$|4x-3| < 2x+5$。

✓ **答案**

$$-\frac{1}{3} < x < 4$$

解析 由绝对值的意义，得

$$-(2x+5) < 4x-3 < 2x+5$$

去括号得

$$-2x-5 < 4x-3 < 2x+5$$

由左侧不等式得

$$-2x-5 < 4x-3$$

$$-2 < 6x$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

由右侧不等式得

$$4x-3 < 2x+5$$

$$2x < 8$$

$$x < 4$$

两个不等式须同时成立，取公共部分。

答：$-\frac{1}{3} < x < 4$。

2. [2025 · October/November 0606/13 Q1(b)]

提示：看双限两侧分别限制哪一端，再找两个范围重叠的区间。

Solve the following inequalities.

(b) $|3x-4| < x+2$

解下列不等式。

(b) $|3x-4| < x+2$。

✓ **答案**

$$\frac{1}{2} < x < 3$$

解析 由绝对值的意义，得

$$-(x+2) < 3x-4 < x+2$$

去括号得

$$-x-2<3x-4<x+2$$

由左侧不等式得

$$-x-2<3x-4$$

$$2<4x$$

$$x>\frac{1}{2}$$

由右侧不等式得

$$3x-4<x+2$$

$$2x<6$$

$$x<3$$

两个不等式须同时成立，取公共部分。
答：$\frac{1}{2}<x<3$。

3. [2021 · May/June 0606/12 Q2(b)]
提示：绝对值不小于正数，先把内式分成界限外侧的两支。

(b) Solve the inequality $|4-3x|\geqslant 7$.

(b) 解不等式
$|4-3x|\geq 7$。

✓ **答案** $x\leq -1$ 或 $x\geq \frac{11}{3}$。
解析 由绝对值的意义，得

$$4-3x\geq 7 \quad 或 \quad 4-3x\leq -7$$

移项得

$$-3x\geq 3 \quad 或 \quad -3x\leq -11$$

两边同除以 -3，不等号方向改变，得

$$x\leq -1 \quad 或 \quad x\geq \frac{11}{3}$$

原不等式含等号，两个端点均保留。
答：$x\leq -1$ 或 $x\geq \frac{11}{3}$。

4. [2021 · May/June 0606/21 Q3(a)]

提示：绝对值大于正数，内式应大于正界限或小于负界限。

(a) Solve the inequality $|4x-1|>9$.

(a) 解不等式
$|4x-1|>9$。

✓ **答案** $x \leftarrow 2$ 或 $x>\frac{5}{2}$。

解析 由绝对值的意义，得

$$4x-1>9 \quad 或 \quad 4x-1 \leftarrow 9$$

移项得

$$4x>10 \quad 或 \quad 4x \leftarrow 8$$

两边同除以 4，得

$$x>\frac{5}{2} \quad 或 \quad x \leftarrow 2$$

原不等式为严格大于，两个端点均不取。

答：$x \leftarrow 2$ 或 $x>\frac{5}{2}$。

题型 3 平方比较两个一次式的绝对值

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **两边平方比较：** 例题比较 $5x+4$ 与 $2x-3$ 的绝对值。两边均非负，平方后不等号方向_____。

$$|5x+4| \leq |2x-3|$$

$$(5x+4)^2 \leq (2x-3)^2$$

② **外侧系数平方：** 绝对值外有正系数，平方时系数也须平方。以例题左式乘 2 为例：

$$(2|5x+4|)^2 = 4|5x+4|^2 = 4(5x+4)^2$$

③ **移项右边归零：** 平方后，将右边的式子移到左边，使右边为_____。

$$(5x+4)^2-(2x-3)^2 \leq 0$$

④ **平方差分解：** 左边是两个式子的平方差，写成两式之差与两式之和的乘积。

$$(5x+4)^2-(2x-3)^2=((5x+4)-(2x-3))((5x+4)+(2x-3))=(3x+7)(7x+1)$$

⑤ **负积取两根间：** 两个一次因式的 x 项系数均为正。记两因式等于零所得的值为 r、s，且 $r<s$。乘积为负，取两根_____。

乘积小于零	乘积小于或等于零
$r<x<s$	$r \leq x \leq s$

⑥ **正积取两根外：** 沿用上述系数与两根的条件。乘积为正，取两根_____。

乘积大于零	乘积大于或等于零
$x<r$ 或 $x>s$	$x \leq r$ 或 $x \geq s$

填空：①不变　②0　③之间　④两侧

点石成金　题目出现两个一次式的绝对值比较大小时，先将两边平方，移项后用平方差分解因式。

例 1　[2023 · February/March 0606/22 Q3]

Solve the inequality $|5x+4| \leqslant |2x-3|$.

解不等式 $|5x+4| \leq |2x-3|$。

解答　两边均非负，平方得

$$(5x+4)^2 \leq (2x-3)^2$$

移项，得

$$(5x+4)^2 - (2x-3)^2 \leq 0$$

由平方差公式，得

$$((5x+4)-(2x-3))((5x+4)+(2x-3)) \leq 0$$

$$(3x+7)(7x+1) \leq 0$$

令两因式分别等于零，得

$$3x+7=0$$

$$x=-\frac{7}{3}$$

$$7x+1=0$$

$$x=-\frac{1}{7}$$

两因式的 x 项系数均为正，乘积不大于零时取两根之间，含两端。

答：$-\frac{7}{3} \leq x \leq -\frac{1}{7}$。

方法：先看两边是否非负，再平方移项，凑两式的差与和。

辨析：乘积为负是两因式异号，乘积为零是至少一个因式为零。

针对练习

1. [2023 · May/June 0606/12 Q3(b)]

提示：看分解所得的两根，比较大小，再按不等号判断端点取舍。

(b) Solve the inequality $|5x-2| \leqslant |4x+1|$.

(b) 解不等式 $|5x-2| \leq |4x+1|$。

答案

$$\frac{1}{9} \leq x \leq 3$$

解析　两边均非负，平方得

$$(5x-2)^2 \leq (4x+1)^2$$

移项，得

$$(5x-2)^2 - (4x+1)^2 \leq 0$$

由平方差公式，得

$$((5x-2)-(4x+1))((5x-2)+(4x+1)) \leq 0$$

$$(x-3)(9x-1) \leq 0$$

令两因式分别等于零，得

$$x-3=0$$

$$x=3$$

$$9x-1=0$$

$$x=\frac{1}{9}$$

两因式的 x 项系数均为正，乘积不大于零时取两根之间，含两端。
答：$\frac{1}{9} \leq x \leq 3$。

2. [2026 · February/March 0606/12 Q6(b)]
提示：看乘积的正负要求，比较两根分出的各段符号。

(b) Solve the inequality $|2x-4|>|x+1|$.

(b) 解不等式 $|2x-4|>|x+1|$。

✓ **答案** $x<1$ 或 $x>5$
解析 两边均非负，平方得

$$(2x-4)^2>(x+1)^2$$

移项，得

$$(2x-4)^2-(x+1)^2>0$$

由平方差公式，得

$$((2x-4)-(x+1))((2x-4)+(x+1))>0$$

$$(x-5)(3x-3)>0$$

令两因式分别等于零，得

$$x-5=0$$

$$x=5$$

$$3x-3=0$$

$$x=1$$

两因式的 x 项系数均为正，乘积大于零时取两根两侧，不含端点。
答：$x<1$ 或 $x>5$。

3. [2025 · February/March 0606/12 Q1(b)]
提示：看绝对值外的系数，核对平方前后系数的变化。

(b) Solve the inequality $4|x-1| \leqslant |3x+2|$.

(b) 解不等式 $4|x-1| \leq |3x+2|$。

✓ **答案**

$$\frac{2}{7} \le x \le 6$$

解析　两边均非负，平方得

$$(4|x-1|)^2 \le |3x+2|^2$$

$$16(x-1)^2 \le (3x+2)^2$$

移项，得

$$(4(x-1))^2 - (3x+2)^2 \le 0$$

由平方差公式，得

$$(4(x-1)-(3x+2))(4(x-1)+(3x+2)) \le 0$$

$$(x-6)(7x-2) \le 0$$

令两因式分别等于零，得

$$x-6=0$$

$$x=6$$

$$7x-2=0$$

$$x=\frac{2}{7}$$

两因式的 x 项系数均为正，乘积不大于零时取两根之间，含两端。
答：$\frac{2}{7} \le x \le 6$。

题型 4　画比较图并读取绝对值不等式区间

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **绝对值的计算：**本例把一次式的值取绝对值。负数取相反数，非负数保持原值。所得函数值均为_____。

$$|2\times 2-8| = |-4| = 4$$

② **折线图象画法：**横坐标记为 x，函数值记为 y。绝对值内为零处是折点，先求其横坐标。左右各取一点，连成_____形折线。

$$2x-8=0$$

$$x=4$$

$$|2\times 6-8| = |4| = 4$$

$$(2,4),\quad (4,0),\quad (6,4)$$

③ **比较图象高低：**本例右边为常数，画出水平比较图。两图使用同一坐标系。左边大于右边时，左图在右图的_____。

$$y=4$$

④ **两条折线相交：**两边都含绝对值时，分别画出折线。如下描点画图，再读取两交点。

$y=|2x|$

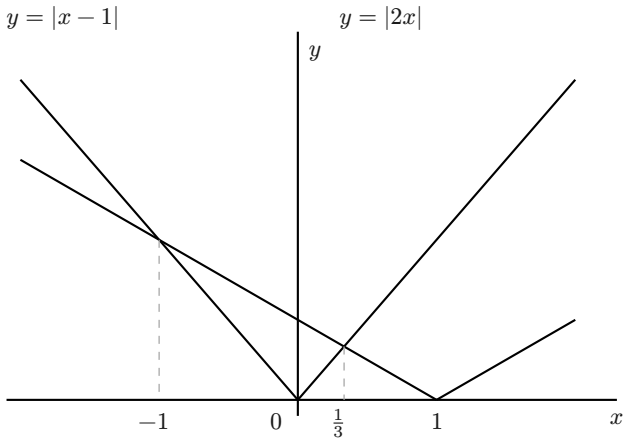
折点为 $(0,0)$。

另取 $(-1,2)$、$(1,2)$。

$y=|x-1|$

折点为 $(1,0)$。

另取 $(0,1)$、$(2,1)$。



$$(-1,2),\quad \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

⑤ **选取连续区间：**两交点把横轴分成三段，逐段比较图象高低。上图中，大于取两侧，小于取中间。把满足条件的区间合并写出。

$|2x|>|x-1|$

$x<-1$ 或 $x>\frac{1}{3}$

$|2x|<|x-1|$

$-1<x<\frac{1}{3}$

⑥ **区间端点取舍：**交点处两式相等，是否取端点由不等号决定。题目若仅限定画图范围，不据此截短不等式的解集。

不等号为 $>$ 或 $<$

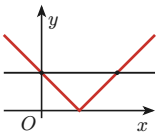
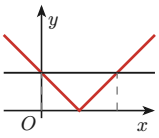
解集_____交点横坐标。

不等号为 $\geq$ 或 $\leq$

解集_____交点横坐标。

填空：①非负　②V　③上方　④不含　⑤包含

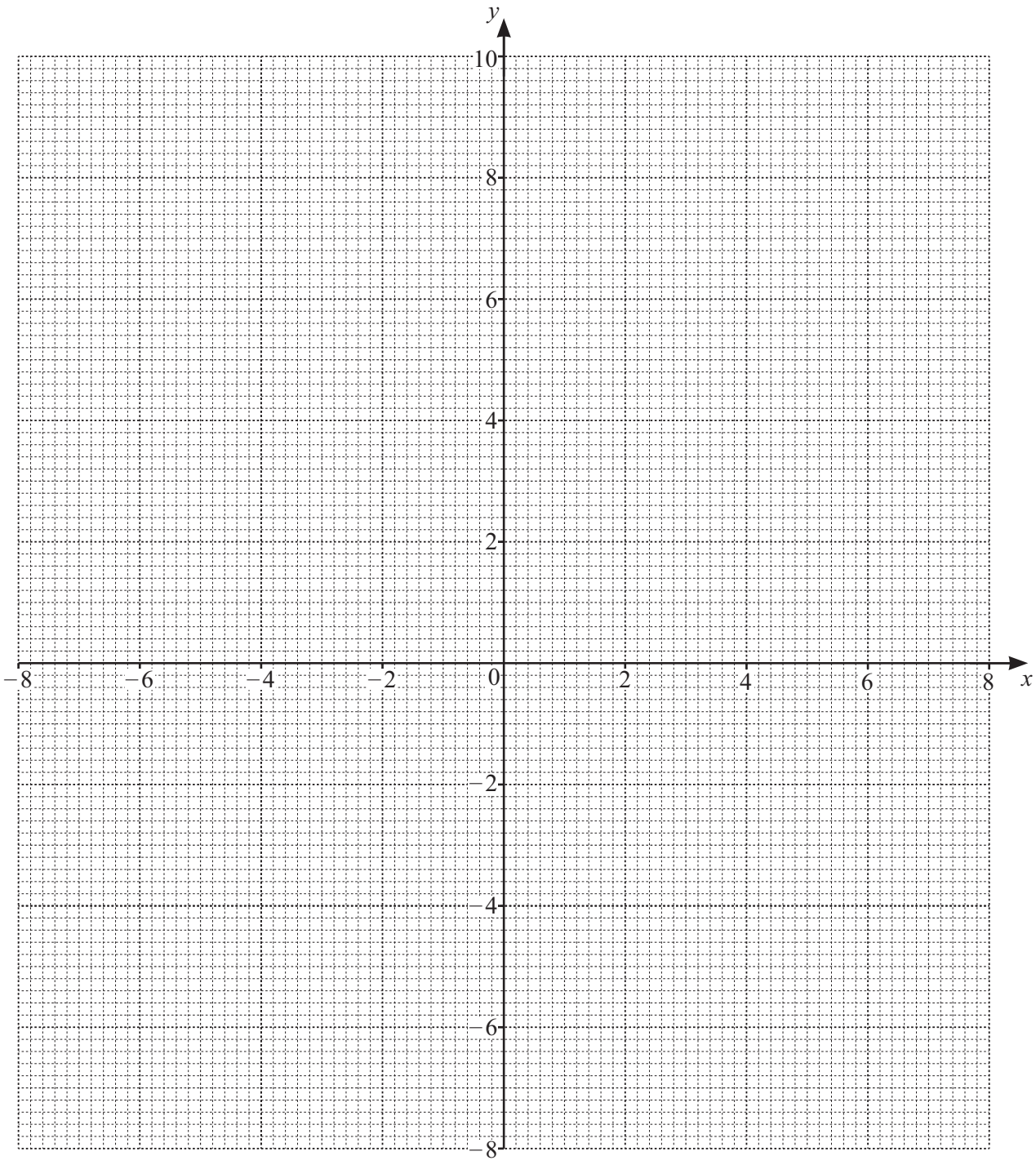
同一条折线与水平界线

	$\lvert x-1\rvert=1$	$\lvert x-1\rvert<1$
图像		
交点横坐标	$0,2$	
所求	$x=0$ 或 $x=2$	$0<x<2$

点石成金　题目出现用图象法解绝对值不等式时，先在同一坐标系画出两边对应的图象。

例 1　[2024 · October/November 0606/22 Q4]

Use a graphical method to solve the inequality $|2x-8|>4$.



用图象法解不等式。

$$|2x-8|>4$$

所给坐标系横轴为 x，纵轴为 y；横轴标数从 -8 到 8，纵轴标数从 -8 到 10，均每隔 2 标数。

解答　先画左边对应的图象。

$$y=|2x-8|$$

由绝对值内为零，得折点横坐标。

$$2x-8=0$$

$$x=4$$

在折点两侧，取横坐标为 0、8 的两点。

$$y=|2\times 0-8|=|-8|=8$$

$$y=|2\times 8-8|=|8|=8$$

将 $(0,8)$、$(4,0)$、$(8,8)$ 分别用直线连接，再画水平直线。

$$y=4$$

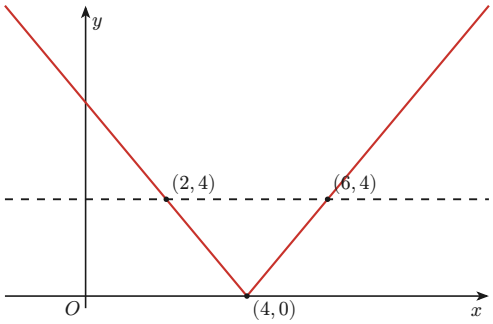
从图中读得两交点。

$$(2,4),\quad (6,4)$$

原不等式要求折线在水平直线上方，取两交点外侧的区间。因不等号为 $>$，不含端点。

答：$x<2$ 或 $x>6$。

实线 $y=|2x-8|$；虚线 $y=4$



$(2,4)$；$(6,4)$；$(4,0)$

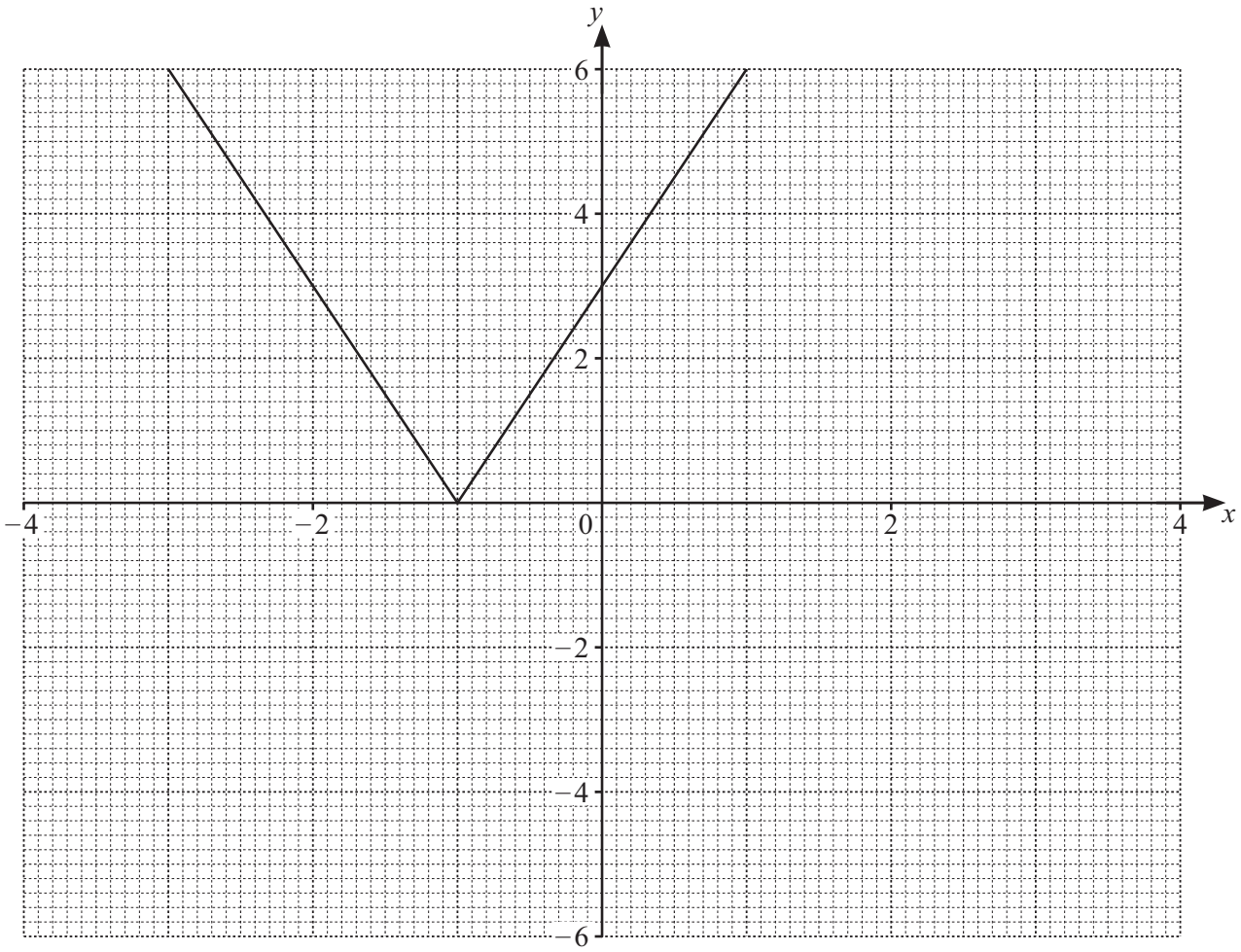
方法：看绝对值内的一次式，先找使它为零的横坐标。

辨析：折点是折线转向的位置，交点是两图函数值相等的位置。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/21 Q2]

提示：以交点分段，比已给折线与补画折线的高低。



The diagram shows the graph of $y = |3x + 3|$.

Use a graphical method to solve the inequality $|3x + 3| \geqslant |x - 2|$.

图中给出了函数的图象。

$$y = |3x + 3|$$

用图象法解不等式。

$$|3x + 3| \geq |x - 2|$$

图中横轴为 x，纵轴为 y；横轴标数从 -4 到 4，纵轴标数从 -6 到 6，均每隔 2 标数。

✓ **答案**　$x \leq -2.5$ 或 $x \geq -0.25$

解析　在同一坐标系补画右边对应的图象。

$$y = |x - 2|$$

由绝对值内为零，得折点横坐标。

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

在折点两侧，取横坐标为 0、4 的两点。

$$y = |0 - 2| = |-2| = 2$$

$$y = |4 - 2| = |2| = 2$$

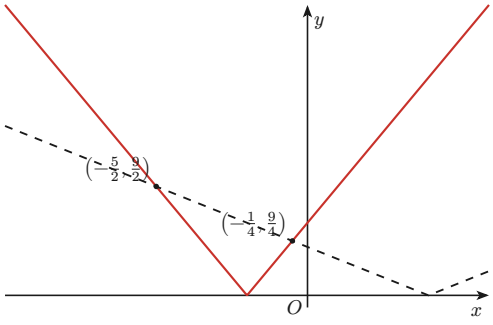
将 $(0, 2)$、$(2, 0)$、$(4, 2)$ 分别用直线连接。

从图中读得两交点。

$$(-2.5, 4.5), \quad (-0.25, 2.25)$$

原不等式要求已给折线在所画折线上方或与之相交，取两交点外侧的区间，并包含端点。
答：$x \le -2.5$ 或 $x \ge -0.25$。

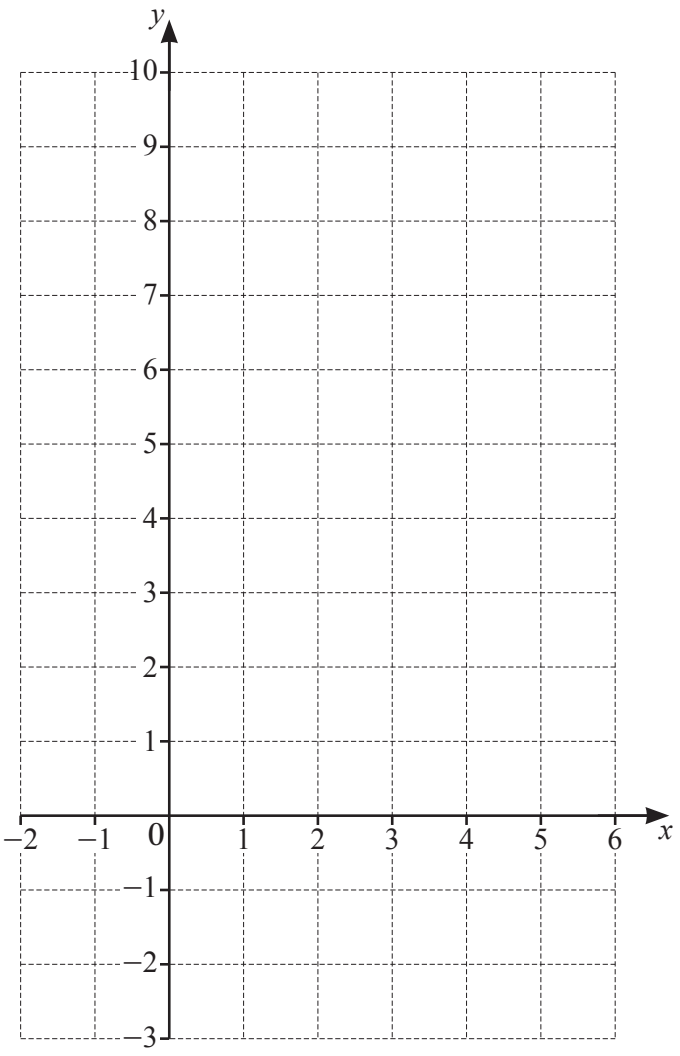
实线 $y = |3x + 3|$；虚线 $y = |x - 2|$



$\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$；$\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$

2. [2024 · May/June 0606/23 Q3(b)]
提示：看求解范围是否受限，再比两侧分支延长后的高低。

(a)



Draw the graphs of $y=|2x-5|$ and $y=|4-x|$ for $-2\leqslant x\leqslant 6$.

(b) Use your graphs to solve the inequality $|4-x|\leqslant|2x-5|$.

（a）在所给坐标系中，画出下列两个函数在给定范围内的图象。

$$y=|2x-5|,\quad y=|4-x|$$

$$-2\le x\le 6$$

图中横轴为 x，纵轴为 y；横轴标数从 -2 到 6，纵轴标数从 -3 到 10，均每隔 1 标数。

（b）利用所画图象解不等式。

$$|4-x|\le|2x-5|$$

✓ **答案** $x\le 1$ 或 $x\ge 3$

解析 两图的折点分别由绝对值内为零求得。

$$2x-5=0$$

$$x=2.5$$

$$4-x=0$$

$$x = 4$$

在给定范围内分别取点。

$$y = |2x - 5|: \quad (-2, 9), \quad (2.5, 0), \quad (6, 7)$$

$$y = |4 - x|: \quad (-2, 6), \quad (4, 0), \quad (6, 2)$$

分别在折点两侧用直线连接各点，得两图。

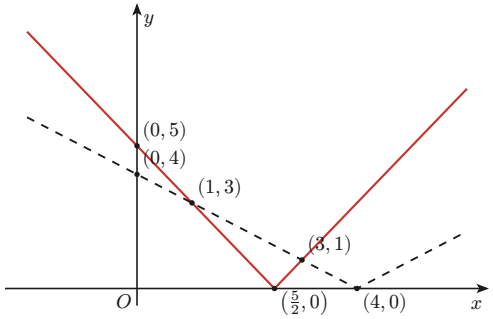
从图中读得两交点。

$$(1, 3), \quad (3, 1)$$

原不等式要求较平缓的折线在较陡折线下方或与之相交，取两交点外侧的区间。向两侧延长各直线分支，仍保持相同的高低关系。不等式未限定求解范围，且包含端点。

答：$x \le 1$ 或 $x \ge 3$。

实线 $y = |2x - 5|$；虚线 $y = |4 - x|$

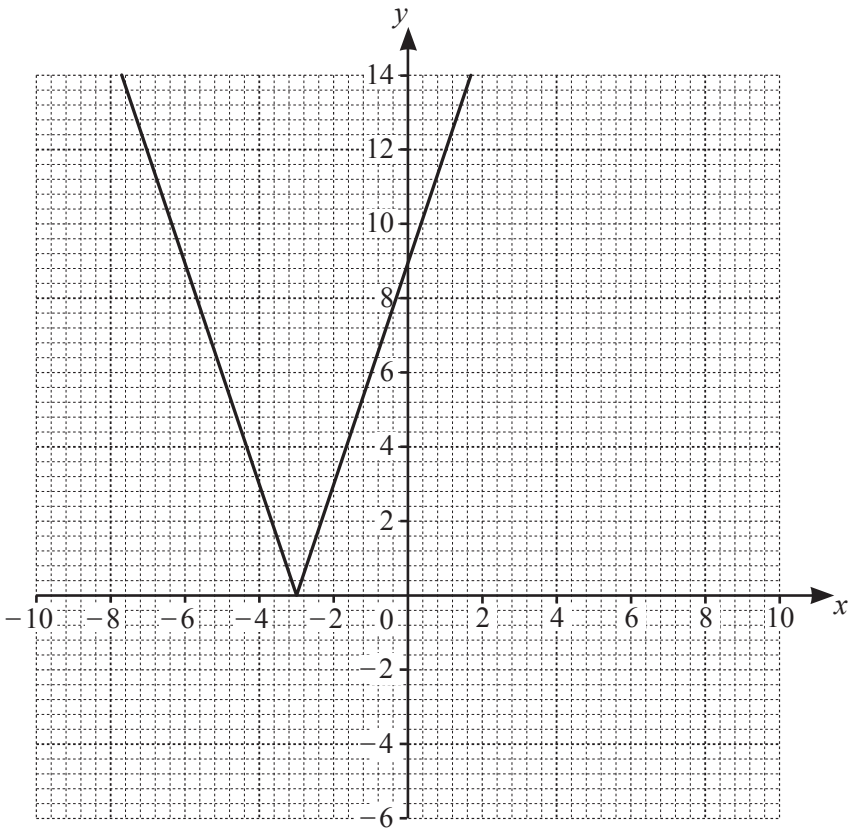


$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$；$(4, 0)$；$(0, 5)$；$(0, 4)$；$(1, 3)$；$(3, 1)$

3. [2023 · May/June 0606/23 Q1(b)]

提示：比较各段中已给折线的高低，再看不等号是否含等号。

(b)



The diagram shows the graph of $y = |3x + 9|$.

By drawing a suitable graph on the same diagram, solve the inequality $|3x + 9| \leqslant |x - 5|$.

(b) 图中给出了函数的图象。

$$y = |3x + 9|$$

在同一坐标图上画出合适的图象，解不等式。

$$|3x + 9| \leq |x - 5|$$

图中横轴为 x，纵轴为 y；横轴标数从 -10 到 10，纵轴标数从 -6 到 14，均每隔 2 标数。

✓ **答案**

$$-7 \leq x \leq -1$$

解析 在同一坐标系补画右边对应的图象。

$$y = |x - 5|$$

由绝对值内为零，得折点横坐标。

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

在折点两侧，取横坐标为 0、6 的两点。

$$y = |0 - 5| = |-5| = 5$$

$$y=|6-5|=|1|=1$$

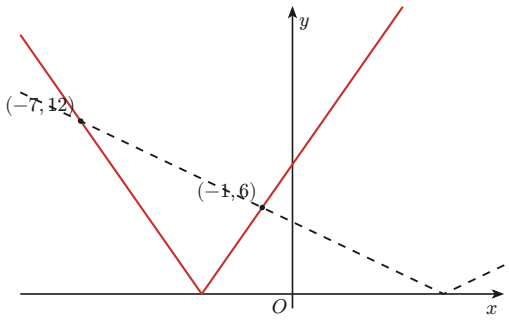
将 $(0,5)$、$(5,0)$、$(6,1)$ 分别用直线连接。

从图中读得两交点。

$$(-7,12),\quad (-1,6)$$

原不等式要求已给折线在所画折线下方或与之相交，取两交点之间的区间，并包含端点。
答：$-7\le x\le -1$。

实线 $y=|3x+9|$；虚线 $y=|x-5|$



$(-7,12)$；$(-1,6)$

题型 5　以分数幂为新元化成二次方程

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **分数幂的含义：**例题中的三分之一次幂表示_____。负数也有三次方根。

$$x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$$

$$(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$$

② **负指数的改写：**出现负指数时，改写成相应正指数幂的倒数。底数不能为零。

$$2^{-1}=\frac{1}{2}$$

$$x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}},\quad x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}},\quad x\neq 0$$

③ **相同幂的换元：**例题的分子、分母含有相同的分数幂。用字母代替这个幂，所设的字母称为新元。分母不能为零，因此新元不为_____。

$$t=x^{\frac{1}{3}},\quad t\neq 0$$

$$x^{\frac{1}{3}}+1=\frac{6}{x^{\frac{1}{3}}}\xrightarrow{\text{换元}}t+1=\frac{6}{t}$$

④ **同乘新元去分母：**新元不为零时，两边同乘新元。整理后分解因式，求出新元的值。

$$t+1=\frac{6}{t}\xrightarrow{\text{两边同乘 t}}t^2+t-6=0$$

$$(t+3)(t-2)=0$$

$$t=-3\quad 或\quad t=2$$

⑤ **分数幂的还原：**求出新元后，按根与幂的次序求原未知数。三分之一次幂还原时取三次方，五分之三次幂还原时先开三次方再取五次方。

三分之一次幂：

$$t = x^{\frac{1}{3}}$$

$$x = t^3$$

$$t = 2 \xrightarrow{\text{还原}} x = 2^3 = 8$$

五分之三次幂：

$$t = x^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt[5]{x}\right)^3$$

$$x = \left(\sqrt[3]{t}\right)^5$$

$$t = -8 \xrightarrow{\text{还原}} x = (-2)^5 = -32$$

⑥ **正数条件的筛选：**题目限定原未知数为正数时，它的三分之二次幂也为正数。舍去不满足条件的新元值，再取正的平方根还原。

$$x > 0, \quad t = x^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 > 0$$

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt{t}, \quad x = \left(\sqrt{t}\right)^3$$

$$t = 4 \xrightarrow{\text{还原}} x = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$$

填空：①立方根　②0

点石成金　题目出现互为倒数的分数幂时，先把分数幂设为新元，将原方程化为二次方程。

例 1　[2025 · May/June 0606/12 Q2]

Solve the equation $x^{\frac{1}{3}} + 1 = \dfrac{6}{x^{\frac{1}{3}}}$.

解方程 $x^{\frac{1}{3}} + 1 = \frac{6}{x^{\frac{1}{3}}}$。

解答　原方程的分母不为零，故

$$x \neq 0$$

设

$$t = x^{\frac{1}{3}}, \quad t \neq 0$$

原方程化为

$$t + 1 = \frac{6}{t}$$

两边同乘 t，得

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t+3)(t-2) = 0$$

$$t = -3 \quad \text{或} \quad t = 2$$

由新元的定义，得

$$x = t^3$$

方法：先比分子、分母中的分数幂，设共同的幂为新元，并写出非零条件。

辨析：新元值是二次方程的根，原未知数值是还原后待检验的数。

$$x=(-3)^3=-27 \quad 或 \quad x=2^3=8$$

两值均不为零，符合原方程的取值条件。

答：$x=-27$ 或 $x=8$。

针对练习

1. [2025 · February/March 0606/22 Q3]

提示：看新元定义中根与幂的次序，还原时按相反次序运算。

Solve the equation $6x^{\frac{3}{5}}+1=\dfrac{12}{x^{\frac{3}{5}}}$, giving your answers correct to 2 decimal places.

解方程

$$6x^{\frac{3}{5}}+1=\frac{12}{x^{\frac{3}{5}}}$$

答案精确到小数点后两位。

✓ **答案** $x=1.62$ 或 $x=-1.97$

解析 原方程的分母不为零，故

$$x\neq 0$$

设

$$t=x^{\frac{3}{5}}, \quad t\neq 0$$

原方程化为

$$6t+1=\frac{12}{t}$$

两边同乘 t，得

$$6t^2+t-12=0$$

$$(3t-4)(2t+3)=0$$

$$t=\frac{4}{3} \quad 或 \quad t=-\frac{3}{2}$$

由新元的定义，得

$$\left(\sqrt[5]{x}\right)^3=t$$

$$\sqrt[5]{x}=\sqrt[3]{t}$$

$$x=\left(\sqrt[3]{t}\right)^5$$

分别代入，得

$$x=\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)^5\approx 1.62$$

或

$$x = \left(\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}\right)^5 \approx -1.97$$

两值均不为零，符合原方程的取值条件。

答：$x = 1.62$ 或 $x = -1.97$，均精确到小数点后两位。

2. [2022 · May/June 0606/21 Q1(b)]

提示：三分之二次幂是三分之一次幂的平方。

(b) Solve the equation $x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 6 = 0$.

(b) 解方程$x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 6 = 0$。

✓ **答案** $x = 8$或$x = 27$

解析 设

$$t = x^{\frac{1}{3}}$$

由$x^{\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2$，原方程化为

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t-2)(t-3) = 0$$

$$t = 2 \quad 或 \quad t = 3$$

由新元的定义，得

$$x = t^3$$

$$x = 2^3 = 8 \quad 或 \quad x = 3^3 = 27$$

答：$x = 8$或$x = 27$。

3. [2023 · May/June 0606/12 Q5(a)]

提示：把负指数幂写成倒数，再设三分之一次幂为新元。

(a) Find the exact solutions of the equation $6p^{\frac{1}{3}} - 5p^{-\frac{1}{3}} - 13 = 0$.

(a) 求方程$6p^{\frac{1}{3}} - 5p^{-\frac{1}{3}} - 13 = 0$的精确解。

✓ **答案** $p = \frac{125}{8}$或$p = -\frac{1}{27}$

解析 由负指数幂的定义，得

$$p \neq 0$$

设

$$t = p^{\frac{1}{3}}, \quad t \neq 0$$

原方程化为

$$6t - \frac{5}{t} - 13 = 0$$

两边同乘t，得

$$6t^2 - 13t - 5 = 0$$

$$(2t-5)(3t+1) = 0$$

$$t=\frac{5}{2}\quad 或\quad t=-\frac{1}{3}$$

由新元的定义，得

$$p=t^3$$

$$p=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}\quad 或\quad p=\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{27}$$

两值均不为零，符合原方程的取值条件。

答：$p=\frac{125}{8}$或$p=-\frac{1}{27}$。

4. [2023 · October/November 0606/13 Q7]

提示：比较正、负指数的绝对值，将互为倒数的幂统一换元。

Solve the equation $6x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}-1=0$. Give your answers in exact form.

解方程

$6x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}-1=0$

答案用精确形式表示。

✓ **答案** $x=\frac{8}{27}$ 或 $x=-\frac{1}{8}$

解析 负指数幂要求

$$x\neq 0$$

设

$$t=x^{\frac{1}{3}},\quad t\neq 0$$

由

$$x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{t}$$

原方程化为

$$6t-\frac{2}{t}-1=0$$

两边同乘 t，得

$$6t^2-t-2=0$$

$$(3t-2)(2t+1)=0$$

$$t=\frac{2}{3}\quad 或\quad t=-\frac{1}{2}$$

由新元的定义，得

$$x=t^3$$

$$x=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

或

$$x=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$$

两值均不为零，符合原方程的取值条件。

答：$x=\frac{8}{27}$ 或 $x=-\frac{1}{8}$。

5. [2023 · October/November 0606/12 Q9]

提示：先看原未知数的正数条件，再比较各新元值的正负。

Solve the equation $12x^{\frac{2}{3}}-5x^{-\frac{2}{3}}-11=0$ for $x>0$. Give your answer correct to one decimal place.

在 $x>0$ 的条件下，解方程

$12x^{\frac{2}{3}}-5x^{-\frac{2}{3}}-11=0$

答案精确到小数点后一位。

✓ **答案**

$$x=1.4$$

解析 设

$$t=x^{\frac{2}{3}}$$

$\because x>0$，$\therefore$

$$t>0$$

由

$$x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{t}$$

原方程化为

$$12t-\frac{5}{t}-11=0$$

两边同乘 t，得

$$12t^2-11t-5=0$$

$$(4t-5)(3t+1)=0$$

$$t=\frac{5}{4}\quad 或\quad t=-\frac{1}{3}$$

$\because t>0$，$\therefore$ 舍去负值，得

$$t=\frac{5}{4}$$

由 $x>0$ 及新元的定义，得

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x=\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^3\approx 1.4$$

答：$x=1.4$，精确到小数点后一位。

题型 6 标出截距并画三次函数图

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **横轴交点：**横轴上的点满足$y=0$。乘积为零，至少有一个因子为零。

$$(1-x)(x-5)(2x-5)=0$$

$$1-x=0 \text{ 或 } x-5=0 \text{ 或 } 2x-5=0$$

$$x=1 \text{ 或 } x=5 \text{ 或 } x=\frac{5}{2}$$

这些解称为函数的零点，横截距为_____。

② **纵轴交点：**纵轴上的点满足$x=0$。将$x=0$代入原式，求出纵截距。

$$y=(1-0)(0-5)(2\times 0-5)=25$$

纵轴交点为_____。

③ **交点排列：**三个零点大小不同，先按从小到大的顺序排列。再在横轴上标出对应交点。

$$1<\frac{5}{2}<5$$

$$(1,0),\quad \left(\frac{5}{2},0\right),\quad (5,0)$$

④ **两端走向：**取各因子中含x的项相乘，并保留式前系数，得到最高次项。

$$(-x)\times x\times 2x=-2x^3$$

用a表示三次项的系数，本例$a=-2$。

$a>0$：左下右上。　　$a<0$：左上右下。

⑤ **区间正负：**三个零点把横轴分成四段。各因子的正负相乘，确定曲线在横轴上方或下方。

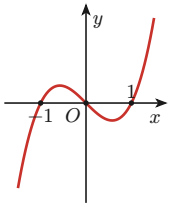
横坐标范围	$x<1$	$1<x<\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}<x<5$	$x>5$
$1-x$	$+$	$-$	$-$	$-$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$2x-5$	$-$	$-$	$+$	$+$
y	$+$	$-$	$+$	$-$
曲线位置	上方	下方	上方	下方

⑥ **光滑曲线：**三个一次因子给出三个不同零点，曲线在各零点处穿过横轴。按区间正负和两端走向，画光滑曲线经过四个交点。

⑦

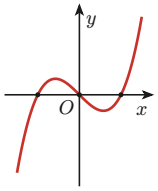
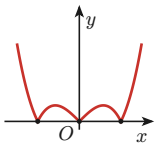
一次因式决定横截距

$$y=(x+1)x(x-1)$$



⟵ 填空：①$1$、$\frac{5}{2}$、5　②$(0,25)$

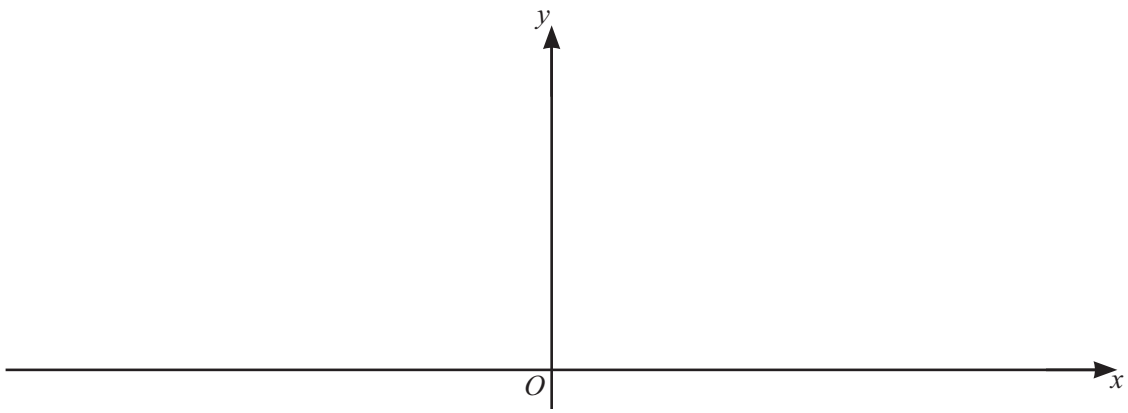
同一三次式取绝对值前后

	$y=(x+1)x(x-1)$	$y=\lvert(x+1)x(x-1)\rvert$
图像		
零点	$-1,0,1$	
负值部分	位于横轴下方	关于横轴翻折到上方

点石成金　题目出现已写成三个一次因子乘积的三次函数，并要求标出截距、画草图时，先令$y=0$求横轴交点。

例 1　[2025 · October/November 0606/12 Q1(a)]

(a) On the axes, sketch the graph of $y=(1-x)(x-5)(2x-5)$, stating the intercepts with the axes.



(a) 在所给坐标轴上，画出函数

$y=(1-x)(x-5)(2x-5)$

的图象草图，并标明图象与两坐标轴的交点。
图中横轴标为x，纵轴标为y，原点标为O。

解答　令$y=0$，得

$$(1-x)(x-5)(2x-5)=0$$

由乘积为零，得

$$1-x=0 \text{ 或 } x-5=0 \text{ 或 } 2x-5=0$$

$$x=1 \text{ 或 } x=5 \text{ 或 } x=\frac{5}{2}$$

令$x=0$，得

$$y=(1-0)(0-5)(2\times 0-5)=25$$

最高次项为

$$(-x)\times x\times 2x=-2x^3$$

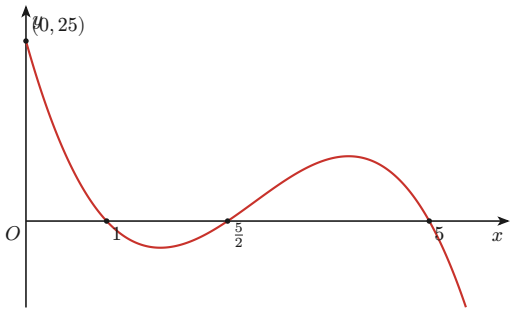
故曲线左上右下。三个零点互不相同，曲线依次向下、向上、向下穿过横轴。

方法：先看因式分解式，逐个令因子为零，再把所得数从小到大排好。

辨析：零点是使函数值为零的横坐标，横轴交点是纵坐标为零的点。

答：横轴交点为$(1,0)$、$\left(\frac{5}{2},0\right)$、$(5,0)$，纵轴交点为$(0,25)$；图象如图。

实线 $y=(1-x)(x-5)(2x-5)$



1；$\frac{5}{2}$；5；$(0,25)$

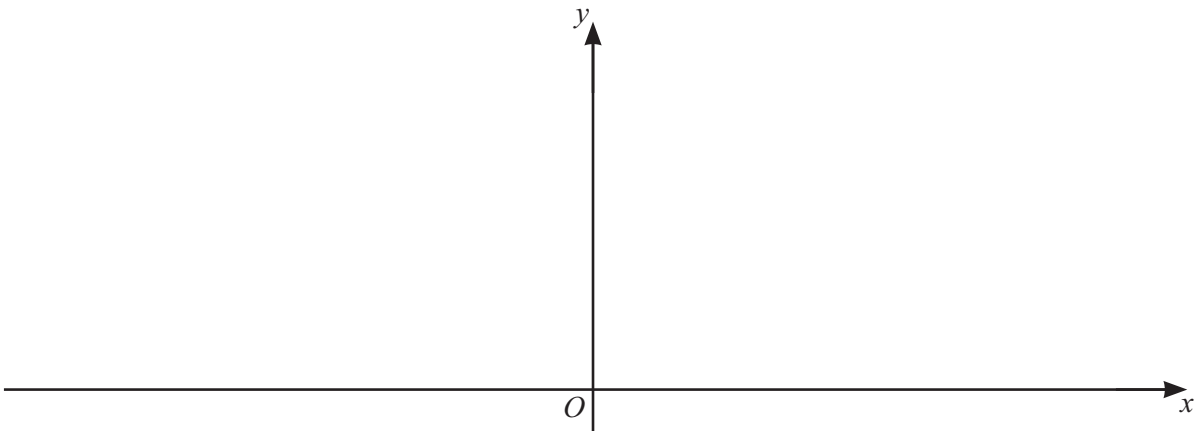
针对练习

1. [2026 · May/June 0606/21 Q1(a)]

提示：看式前分数和各因子的首项，比较两个负零点的大小。

(a) On the axes, sketch the graph of $y=\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)(2x+5)$.

State the intercepts with the coordinate axes.



(a) 在所给坐标轴上，画出函数

$$y=\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)(2x+5)$$

的图象草图，并标明图象与两坐标轴的交点。

图中横轴标为x，纵轴标为y，原点标为O。

✓ **答案** 横轴交点为$(-3,0)$、$\left(-\frac{5}{2},0\right)$、$\left(\frac{1}{2},0\right)$，纵轴交点为$(0,-5)$；曲线左下右上。

解析 令$y=0$，得

$$\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)(2x+5)=0$$

由乘积为零，得

$$2x-1=0 \text{ 或 } x+3=0 \text{ 或 } 2x+5=0$$

$$x=\frac{1}{2} \text{ 或 } x=-3 \text{ 或 } x=-\frac{5}{2}$$

令$x=0$，得

$$y=\frac{1}{3}(2\times 0-1)(0+3)(2\times 0+5)=-5$$

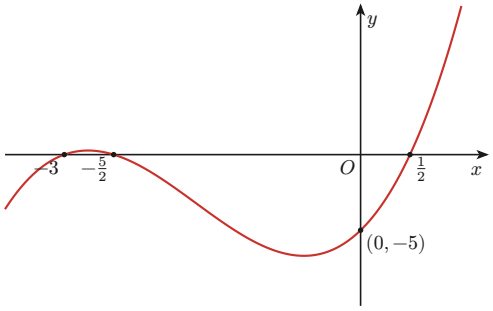
最高次项为

$$\frac{1}{3}\times 2x\times x\times 2x=\frac{4}{3}x^3$$

故曲线左下右上。按$-3\leftarrow\frac{5}{2}<\frac{1}{2}$排列零点，曲线依次向上、向下、向上穿过横轴。

答：横轴交点为$(-3,0)$、$\left(-\frac{5}{2},0\right)$、$\left(\frac{1}{2},0\right)$，纵轴交点为$(0,-5)$；曲线左下右上。图象如图。

实线 $y=\left(\frac{1}{3}\right)(2x-1)(x+3)(2x+5)$

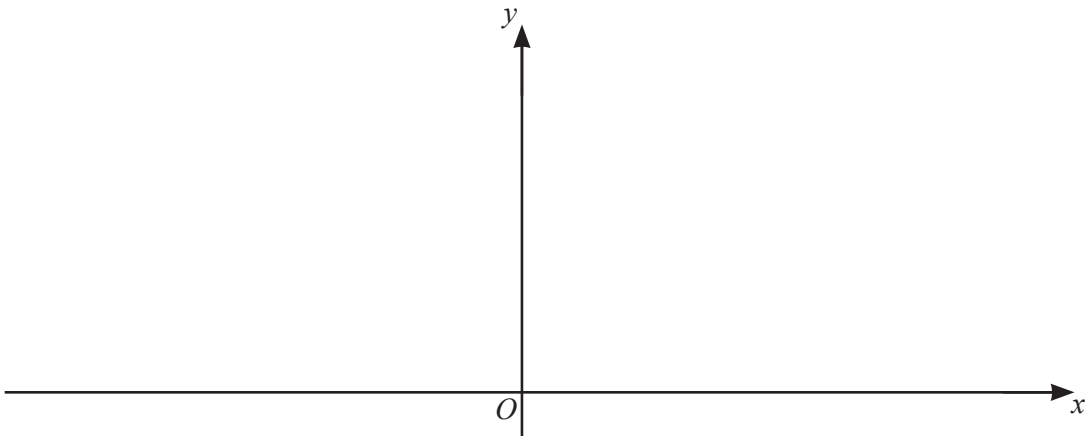


-3；$-\frac{5}{2}$；$\frac{1}{2}$；$(0,-5)$

2. [2024 · May/June 0606/11 Q1(a)]

提示：看式前负号怎样影响两端，代零时逐项核对正负。

(a) On the axes, sketch the graph of $y=-\frac{1}{5}(x+2)(2x-1)(x+5)$, stating the intercepts with the axes.



(a) 在所给坐标轴上，画出函数

$$y=-\frac{1}{5}(x+2)(2x-1)(x+5)$$

的图象草图，并标明图象与两坐标轴的交点。

图中横轴标为x，纵轴标为y，原点标为O。

✓ **答案** 横轴交点为$(-5,0)$、$(-2,0)$、$\left(\frac{1}{2},0\right)$，纵轴交点为$(0,2)$；曲线左上右下。

解析 令$y=0$，得

$$-\frac{1}{5}(x+2)(2x-1)(x+5)=0$$

由乘积为零，得

$$x+2=0\text{ 或 }2x-1=0\text{ 或 }x+5=0$$

$$x=-2 \text{ 或 } x=\frac{1}{2} \text{ 或 } x=-5$$

令$x=0$，得

$$y=-\frac{1}{5}(0+2)(2\times 0-1)(0+5)=2$$

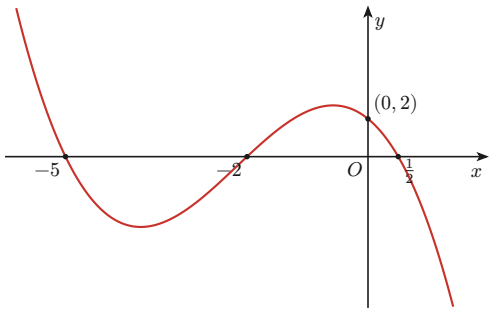
最高次项为

$$-\frac{1}{5}\times x\times 2x\times x=-\frac{2}{5}x^3$$

故曲线左上右下。按$-5\leftarrow 2<\frac{1}{2}$排列零点，曲线依次向下、向上、向下穿过横轴。

答：横轴交点为$(-5,0)$、$(-2,0)$、$\left(\frac{1}{2},0\right)$，纵轴交点为$(0,2)$；曲线左上右下。图象如图。

实线 $y=-\left(\frac{1}{5}\right)(x+5)(x+2)(2x-1)$

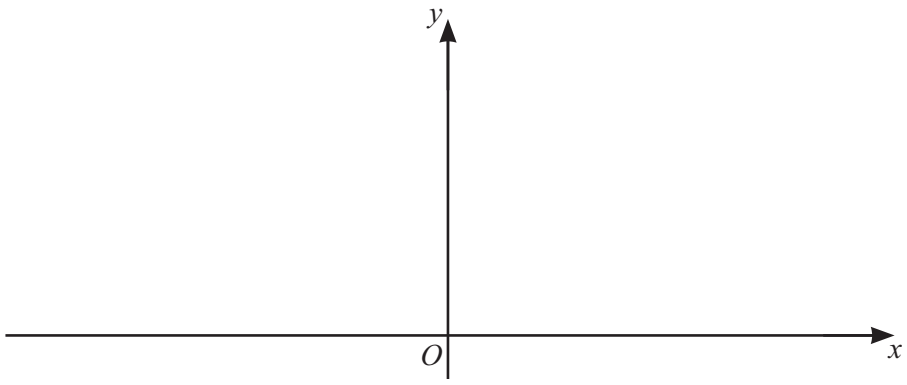


-5；-2；$\frac{1}{2}$；$(0,2)$

3. [2024 · May/June 0606/22 Q1(a)]

提示：看一减横坐标这一因子的首项符号，再比较各零点大小。

(a) On the axes, sketch the graph of $y=(2x-5)(x+3)(1-x)$, stating the intercepts with the coordinate axes.



(a) 在所给坐标轴上，画出函数

$y=(2x-5)(x+3)(1-x)$

的图象草图，并标明图象与两坐标轴的交点。

图中横轴标为x，纵轴标为y，原点标为O。

✓ **答案** 横轴交点为$(-3,0)$、$(1,0)$、$\left(\frac{5}{2},0\right)$，纵轴交点为$(0,-15)$；曲线左上右下。

解析 令$y=0$，得

$$(2x-5)(x+3)(1-x)=0$$

由乘积为零，得

$$2x-5=0 \text{ 或 } x+3=0 \text{ 或 } 1-x=0$$

$$x=\frac{5}{2} \text{ 或 } x=-3 \text{ 或 } x=1$$

令$x=0$，得

$$y=(2\times 0-5)(0+3)(1-0)=-15$$

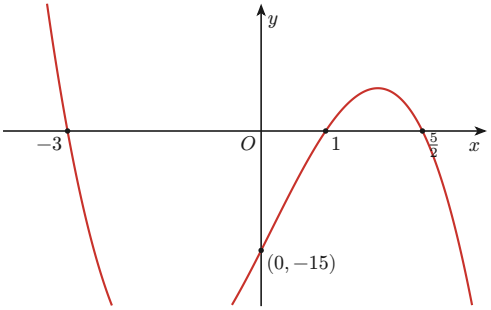
最高次项为

$$2x\times x\times(-x)=-2x^3$$

故曲线左上右下。按$-3<1<\frac{5}{2}$排列零点，曲线依次向下、向上、向下穿过横轴。

答：横轴交点为$(-3,0)$、$(1,0)$、$\left(\frac{5}{2},0\right)$，纵轴交点为$(0,-15)$；曲线左上右下。图象如图。

实线 $y=(2x-5)(x+3)(1-x)$

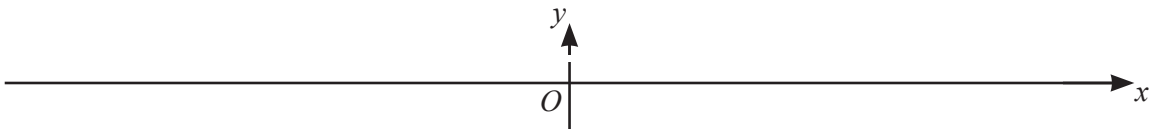


-3；1；$\frac{5}{2}$；$(0,-15)$

4. [2021 · May/June 0606/11 Q1(a)]

提示：先求横截距，再令横坐标为零求纵截距。

(a) On the axes, sketch the graph of $y=5(x+1)(3x-2)(x-2)$, stating the intercepts with the coordinate axes.



(a) 在所给坐标轴上，画出函数$y=5(x+1)(3x-2)(x-2)$的图象草图，并写出图象与两坐标轴的交点。
图中横轴标为x，纵轴标为y，原点标为O。

✓ **答案** 横轴交点为$(-1,0)$、$\left(\frac{2}{3},0\right)$、$(2,0)$，纵轴交点为$(0,20)$；曲线左下右上，依次向上、向下、向上穿过横轴。

解析 令$y=0$，得

$$5(x+1)(3x-2)(x-2)=0$$

由乘积为零，得

$$x+1=0 \text{或} 3x-2=0 \text{或} x-2=0$$

$$x=-1 \text{或} x=\frac{2}{3} \text{或} x=2$$

横轴交点从左到右为$(-1,0)$、$\left(\frac{2}{3},0\right)$、$(2,0)$。

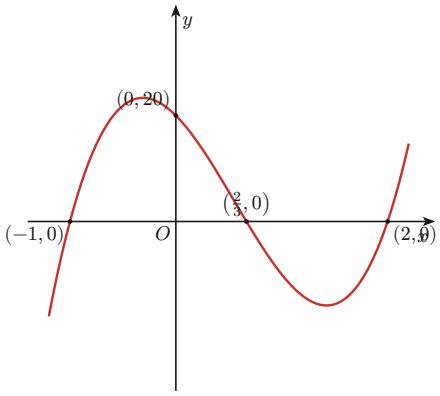
令$x=0$，得

$$y=5\times 1\times(-2)\times(-2)=20$$

纵轴交点为$(0,20)$。最高次项为

$$5\times x\times 3x\times x=15x^3$$

故曲线左下右上。由各因子的正负，得
$x\leftarrow 1$时，$y<0$；
$-1<x<\frac{2}{3}$时，$y>0$；
$\frac{2}{3}<x<2$时，$y<0$；
$x>2$时，$y>0$。
曲线在前两个零点之间形成极大值，在后两个零点之间形成极小值。用光滑曲线经过四个交点，依次向上、向下、向上穿过横轴。定义域和值域均为$\mathbb{R}$，无有限端点，无渐近线。
答：横轴交点为$(-1,0)$、$\left(\frac{2}{3},0\right)$、$(2,0)$，纵轴交点为$(0,20)$；图象为左下右上的三次曲线。



题型 7　比较三次曲线与水平线读取不等式区间

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **纵坐标的比较：**本例比较三次曲线的函数值与 7 的大小。函数值就是对应点的_____。

$$y=(x+2)(x-1)(x-3)$$

② **因式求交点：**求横轴交点，令 $y=0$，使各因式分别为零。求纵轴交点，令 $x=0$。

$$(x+2)(x-1)(x-3)=0$$

$$x=-2\text{ 或 }x=1\text{ 或 }x=3$$

$$y=(0+2)(0-1)(0-3)=6$$

③ **三次曲线草图：**三个零点互异时，曲线依次穿过三个横轴交点。本例最高次项为 $x\cdot x\cdot x=x^3$。设最高次项为 ax^3，两端方向如下。

$a>0$	$a<0$
左端向下，右端向上	左端向上，右端向下

④ **水平直线交点：**本例右端为 7，在图中画水平直线 $y=7$。曲线与直线交点的横坐标，就是下列方程的解。

$$(x+2)(x-1)(x-3)=7$$

右端换成常数 k 时，所画直线为_____。

⑤ **按高低选区段：**比较同一横坐标处曲线与直线的高度。本例取 $x=0$，得到 $y=6<7$，该点在直线下方。

$y>k$	$y<k$
选曲线在直线_____的区段	选曲线在直线下方的区段

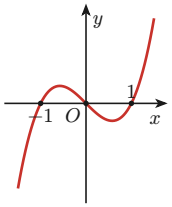
⑥ **区间端点取舍：**交点处满足 $y=k$，是否保留端点由不等号决定。各区段写出横坐标范围，不相连的区段用“或”连接。

不等号为 $>$ 或 $<$	不等号为 $\geq$ 或 $\leq$
_____交点处的横坐标	保留交点处的横坐标

⑦

一次因式决定横截距

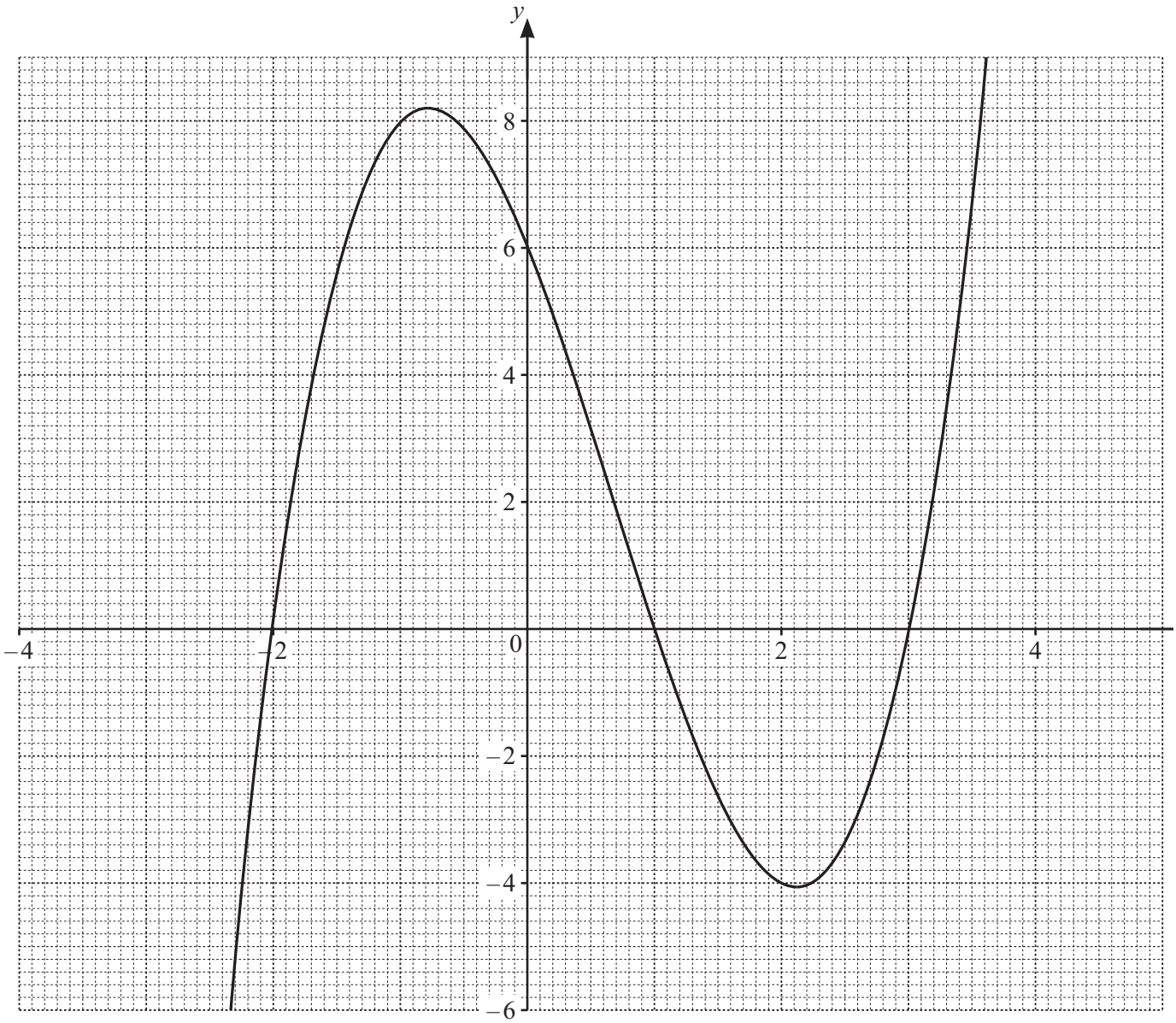
$y=(x+1)x(x-1)$



填空：①纵坐标　②$y=k$　③上方　④不保留

点石成金　题目出现三次函数图象或三个一次因式的乘积不等式时，先确定比较用的水平直线。

例 1　[2026 · February/March 0606/22 Q3]



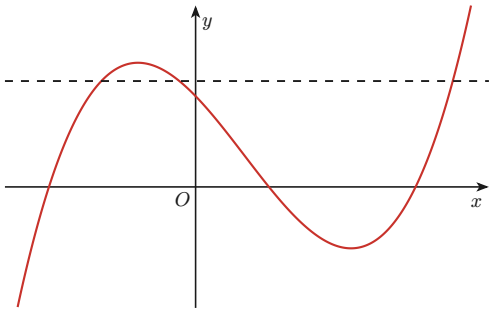
The diagram shows the graph of $y=(x+2)(x-1)(x-3)$.

By drawing a suitable line on the diagram, solve the inequality $(x+2)(x-1)(x-3)>7$.

图中给出了函数 $y=(x+2)(x-1)(x-3)$ 的图象，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。在图中画一条适当的直线，解不等式 $(x+2)(x-1)(x-3)>7$。

解答　在图中画水平直线 $y=7$。
由图读得三个交点的横坐标约为
$x=-1.3,\quad x=-0.2,\quad x=3.5$。
原不等式要求 $y>7$，取曲线在直线上方的区段。
不等号为 $>$，三个交点均不保留。
答：$-1.3<x<-0.2$ 或 $x>3.5$。

实线 $y=(x+2)(x-1)(x-3)$；虚线 $y=7$



方法：先看不等号右端的数，画出对应水平线，再比较同一横坐标处的高低。

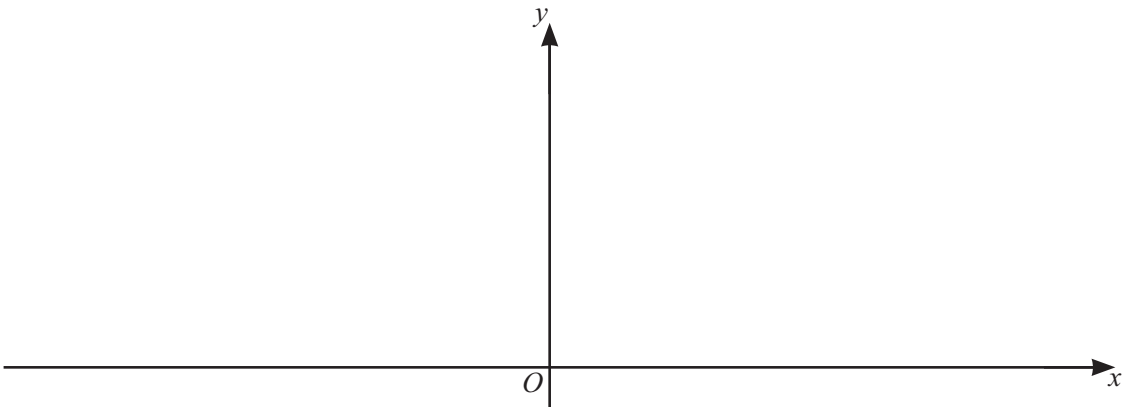
辨析：横轴交点是函数值为零的位置，所画水平线交点是函数值为七的位置。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/12 Q1(b)]

提示：看最高次项判断两端方向，再比较曲线与横轴的高低。

(a) On the axes, sketch the graph of $y=(1-x)(x-5)(2x-5)$, stating the intercepts with the axes.



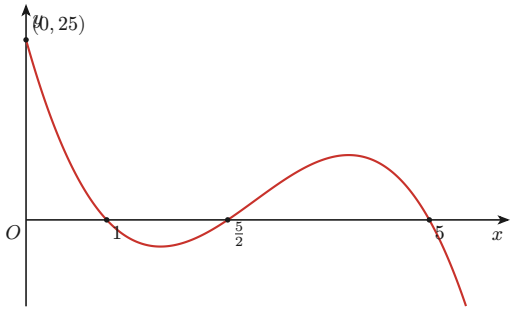
(b) Hence solve the inequality $(1-x)(x-5)(2x-5)\leqslant 0$.

(a) 在所给坐标轴上，画出函数 $y=(1-x)(x-5)(2x-5)$ 的草图，并写出图象与两条坐标轴的交点。图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，O 为原点。
(b) 由此解不等式 $(1-x)(x-5)(2x-5)\leq 0$。

✓ **答案**　$1\leq x\leq \frac{5}{2}$ 或 $x\geq 5$。

解析　令 $y=0$，得
$(1-x)(x-5)(2x-5)=0$，
$x=1$ 或 $x=\frac{5}{2}$ 或 $x=5$。
横轴交点为 $(1,0)$、$\left(\frac{5}{2},0\right)$、$(5,0)$。
令 $x=0$，得
$y=(1-0)(0-5)(2\cdot 0-5)=25$。
纵轴交点为 $(0,25)$。
最高次项为
$(-x)\cdot x\cdot(2x)=-2x^3$。
曲线左端向上、右端向下，依次穿过三个横轴交点，并经过 $(0,25)$。
由草图，曲线在横轴上或横轴下方的区段为
$1\leq x\leq \frac{5}{2}$ 或 $x\geq 5$。
答：$1\leq x\leq \frac{5}{2}$ 或 $x\geq 5$。

实线 $y=(1-x)(x-5)(2x-5)$



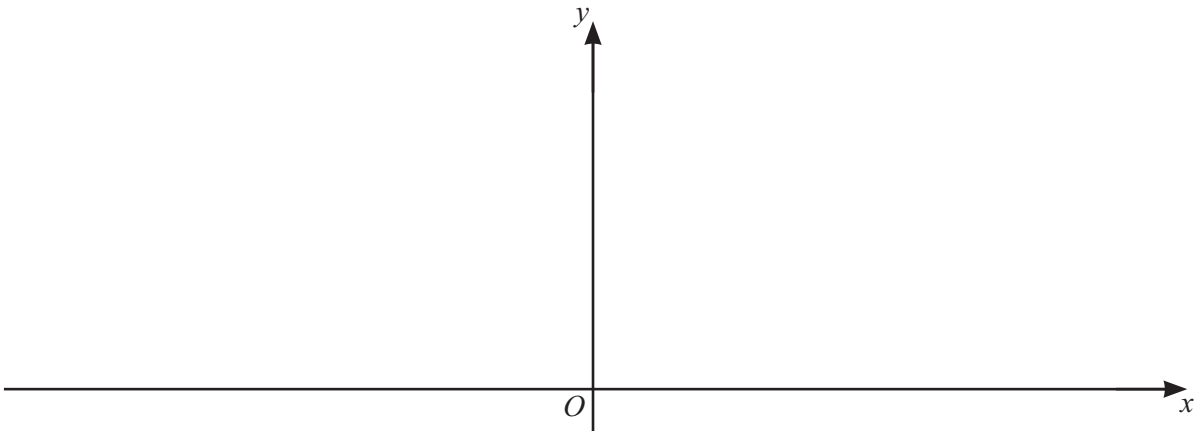
1；$\frac{5}{2}$；5；$(0,25)$

2. [2026 · May/June 0606/21 Q1(b)]

提示：以三个零点分段，比较各段与横轴的高低及端点取舍。

(a) On the axes, sketch the graph of $y=\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)(2x+5)$.

State the intercepts with the coordinate axes.



(b) Solve the inequality $\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)(2x+5)>0$.

(a) 在所给坐标轴上，画出函数 $y=\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)(2x+5)$ 的草图。写出图象与两条坐标轴的交点。图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，O 为原点。

(b) 解不等式 $\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)(2x+5)>0$。

✓ **答案** $-3<x<-\frac{5}{2}$ 或 $x>\frac{1}{2}$。

解析 令 $y=0$，得

$\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)(2x+5)=0$，

$x=-3$ 或 $x=-\frac{5}{2}$ 或 $x=\frac{1}{2}$。

横轴交点为 $(-3,0)$、$\left(-\frac{5}{2},0\right)$、$\left(\frac{1}{2},0\right)$。

令 $x=0$，得

$y=\frac{1}{3}(2\cdot0-1)(0+3)(2\cdot0+5)=-5$。

纵轴交点为 $(0,-5)$。

最高次项为

$\frac{1}{3}\cdot(2x)\cdot x\cdot(2x)=\frac{4}{3}x^3$。

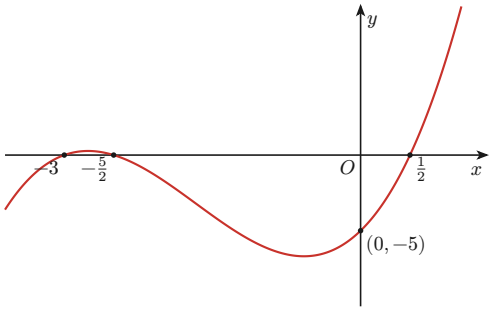
曲线左端向下、右端向上，依次穿过三个横轴交点，并经过 $(0,-5)$。

原不等式要求 $y>0$，取曲线在横轴上方的区段。

不等号为 $>$，三个横轴交点均不保留。

答：$-3<x<-\frac{5}{2}$ 或 $x>\frac{1}{2}$。

实线 $y=\left(\frac{1}{3}\right)(2x-1)(x+3)(2x+5)$

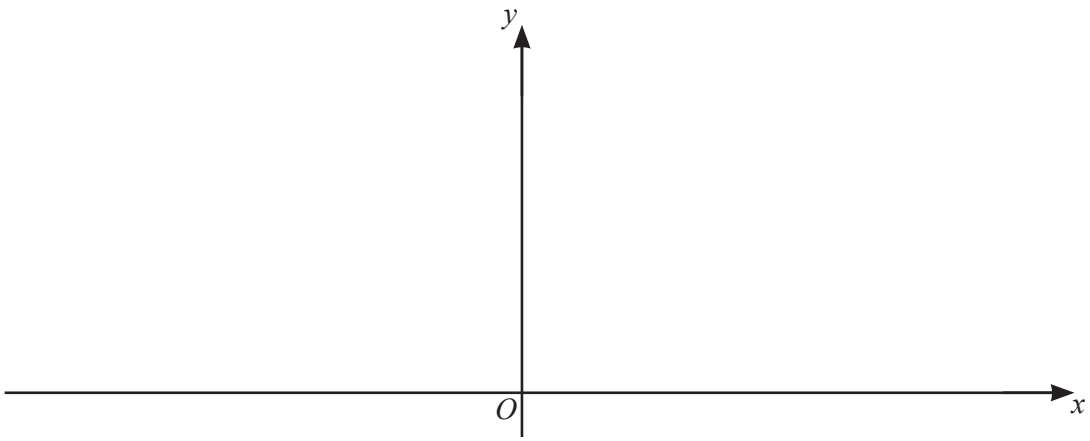


-3；$-\frac{5}{2}$；$\frac{1}{2}$；$(0,-5)$

3. [2024 · May/June 0606/11 Q1(b)]

提示：看负的最高次项系数定走向，再按不等号比较高度。

(a) On the axes, sketch the graph of $y=-\frac{1}{5}(x+2)(2x-1)(x+5)$, stating the intercepts with the axes.



(b) Hence solve the inequality $-\frac{1}{5}(x+2)(2x-1)(x+5)\geqslant 0$.

(a) 在所给坐标轴上，画出函数 $y=-\frac{1}{5}(x+2)(2x-1)(x+5)$ 的草图，并写出图象与两条坐标轴的交点。图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，O 为原点。

(b) 由此解不等式 $-\frac{1}{5}(x+2)(2x-1)(x+5)\geq 0$。

✓ **答案** $x\leq -5$ 或 $-2\leq x\leq \frac{1}{2}$。

解析 令 $y=0$，得

$-\frac{1}{5}(x+2)(2x-1)(x+5)=0$，

$x=-5$ 或 $x=-2$ 或 $x=\frac{1}{2}$。

横轴交点为 $(-5,0)$、$(-2,0)$、$\left(\frac{1}{2},0\right)$。

令 $x=0$，得

$y=-\frac{1}{5}(0+2)(2\cdot 0-1)(0+5)=2$。

纵轴交点为 $(0,2)$。

最高次项为

$-\frac{1}{5}\cdot x\cdot(2x)\cdot x=-\frac{2}{5}x^3$。

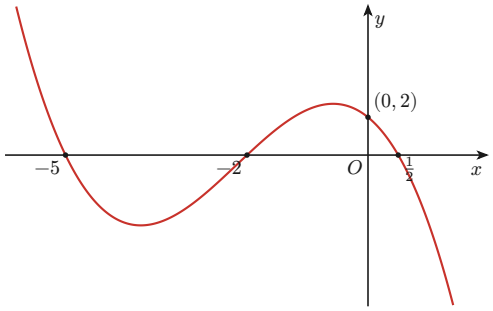
曲线左端向上、右端向下，依次穿过三个横轴交点，并经过 $(0,2)$。

原不等式要求 $y\geq 0$，取曲线在横轴上或横轴上方的区段。

不等号为 $\geq$，三个横轴交点均保留。

答：$x\leq -5$ 或 $-2\leq x\leq \frac{1}{2}$。

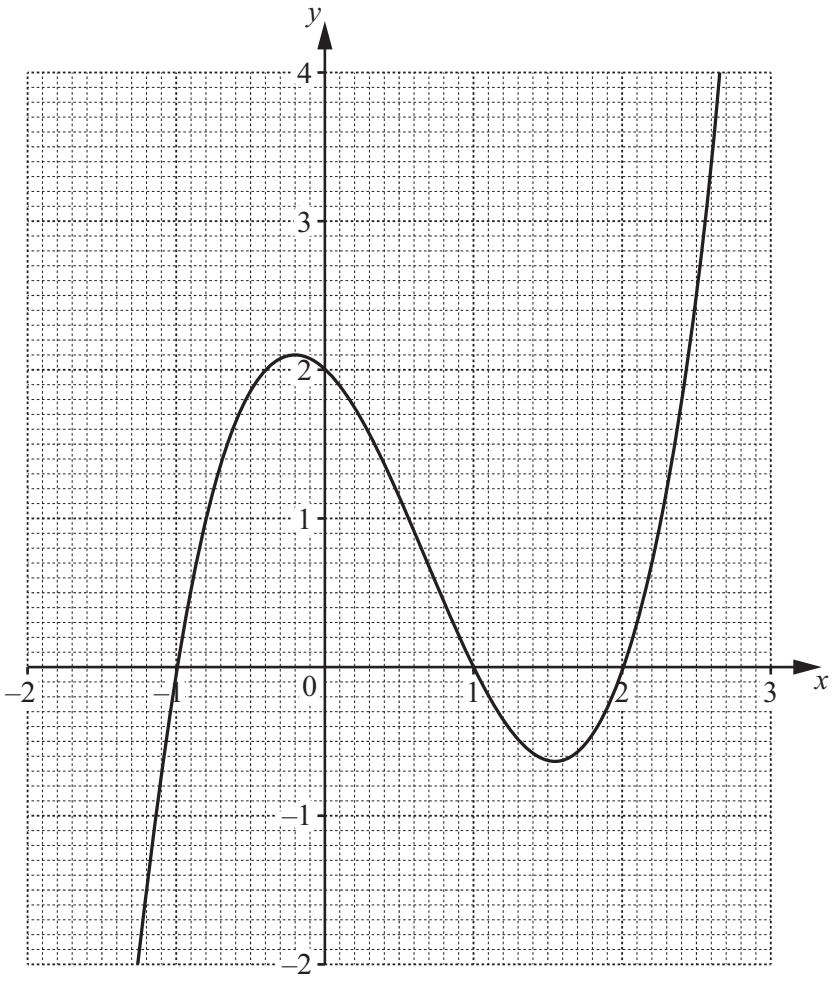
实线 $y=-\left(\frac{1}{5}\right)(x+5)(x+2)(2x-1)$



-5；-2；$\frac{1}{2}$；$(0,2)$

4. [2024 · October/November 0606/23 Q1]

提示：画纵坐标为一的水平线，比较曲线在各交点之间的高度。



The diagram shows the graph of $y=(x+1)(x-1)(x-2)$. Use the graph to solve the inequality $(x+1)(x-1)(x-2)<1$.

图中给出了函数 $y=(x+1)(x-1)(x-2)$ 的图象，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。利用图象解不等式 $(x+1)(x-1)(x-2)<1$。

✓ **答案** $x<-0.8$ 或 $0.55<x<2.25$。

解析 在图中画水平直线 $y=1$。

由图读得三个交点的横坐标约为

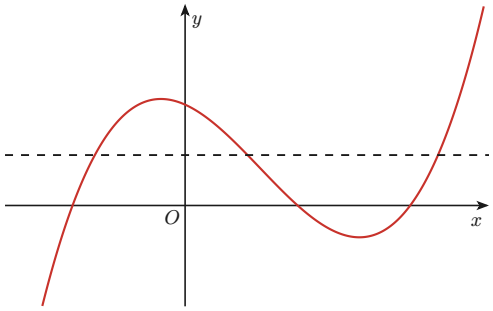
$x=-0.8$，　$x=0.55$，　$x=2.25$。

原不等式要求 $y<1$，取曲线在直线下方的区段。

不等号为 $<$，三个交点均不保留。

答：$x<-0.8$ 或 $0.55<x<2.25$。

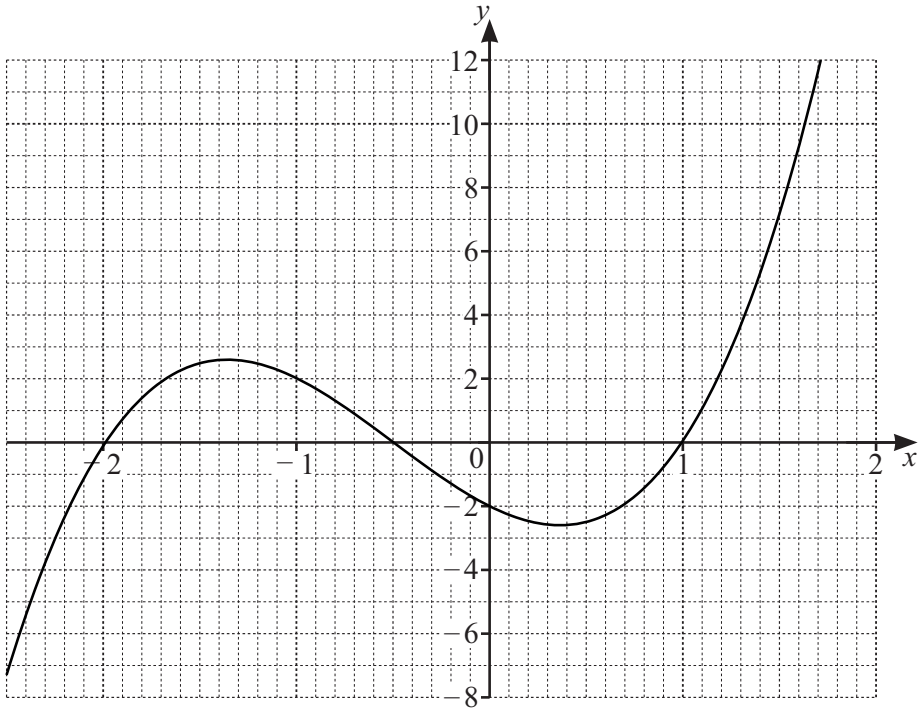
实线 $y=(x+1)(x-1)(x-2)$；虚线 $y=1$



5. [2025 · May/June 0606/13 Q1(b)]

提示：先用零点确定各因式，再读水平线与曲线的位置。

(a)



The diagram shows the graph of $y=(2x+a)(x+b)(x+c)$ where a, b and c are integers.

Find values for a, b and c.

(b) Use the graph to find the values of x for which $y \geqslant 2$.

（a）图像表示 $y=(2x+a)(x+b)(x+c)$，其中 a、b、c 均为整数。求 a、b 和 c 的值。（b）利用图像，求使 $y \geq 2$ 的 x 的取值范围。

✓ **答案** （a）$a=1$，b,c 为 $2,-1$（次序可交换）；（b）约 $-1.7 \leq x \leq -1$ 或 $x \geq 1.2$。

解析 图像与横轴的交点横坐标为 -2、$-\frac{1}{2}$、1。因 b、c 是整数，$x+b$ 与 $x+c$ 的零点均为整数。因此 $-\frac{1}{2}$ 是因式 $2x+a$ 的零点，故

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)+a=0$$

$$a=1$$

另外两个因式对应 -2 与 1，所以 $b=2, c=-1$，或 $b=-1, c=2$。曲线为

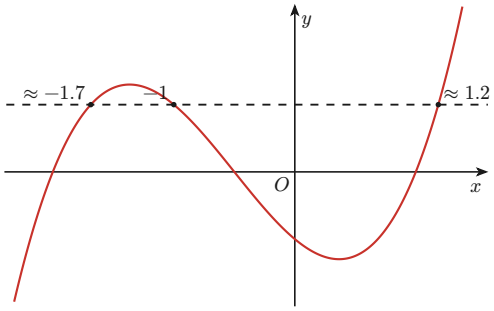
$$y=(2x+1)(x+2)(x-1)$$

画水平直线 $y=2$，从图中读出三个交点的横坐标约为 -1.7、-1、1.2。曲线位于直线上或直线上方的区段给出

$$-1.7 \leq x \leq -1 \quad \text{或} \quad x \geq 1.2$$

其中非整数边界为图解近似值。

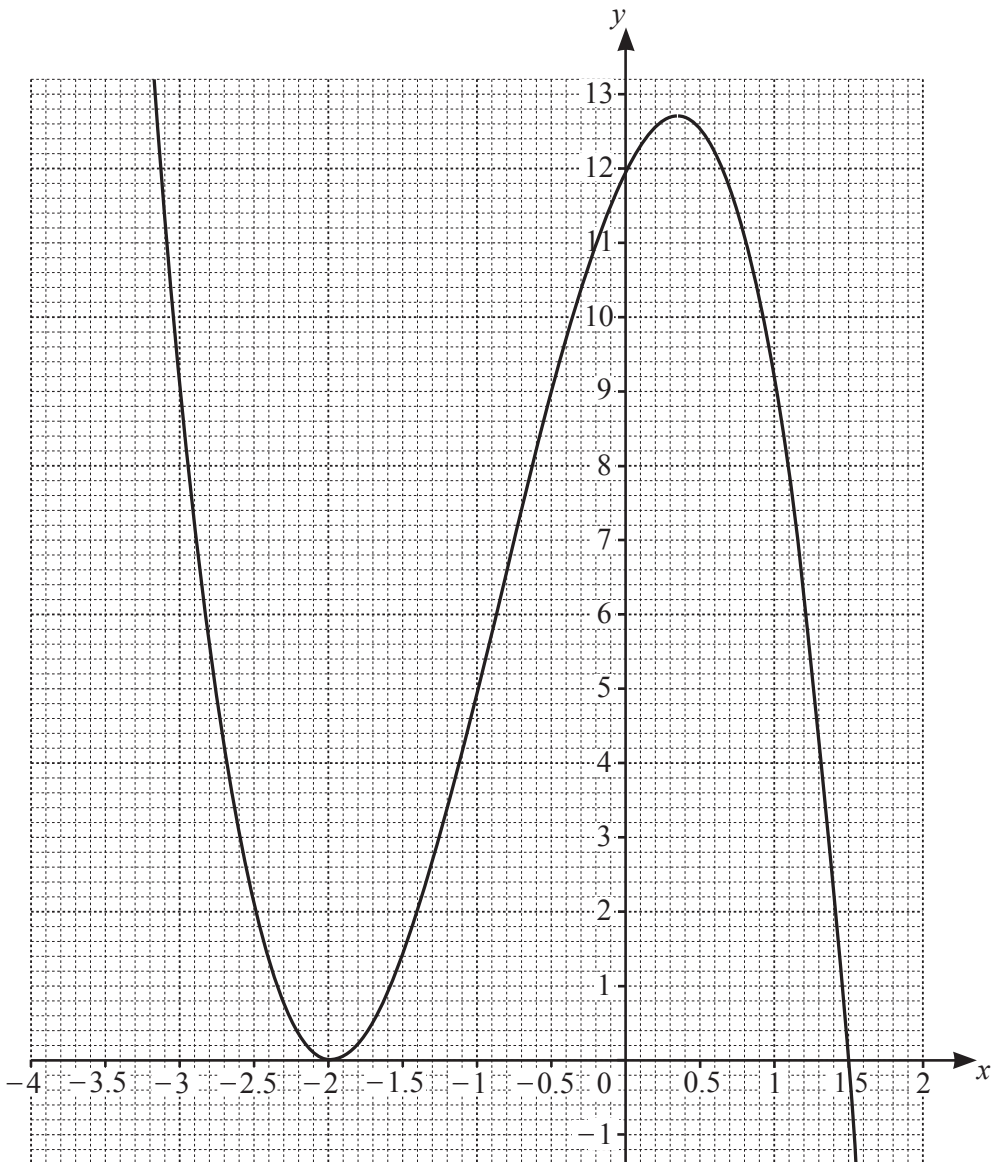
实线 $y=(2x+1)(x+2)(x-1)$；虚线 $y=2$



≈ -1.7；-1；≈ 1.2

6. [2023 · May/June 0606/21 Q3(b)]

提示：看纵坐标为九的水平线，比较曲线高度并判断交点取舍。



The diagram shows the graph of $y=\mathrm{h}(x)$ where $\mathrm{h}(x)=(x+a)^2(b+cx)$ and a, b and c are integers.
The curve meets the x-axis at the points $(-2, 0)$ and $(1.5, 0)$ and the y-axis at the point $(0, 12)$.

(b) Use the graph to solve the inequality $\mathrm{h}(x) \leqslant 9$.

图中给出了函数 $y=h(x)$ 的图象，其中 $h(x)=(x+a)^2(b+cx)$，且 a、b、c 均为整数。曲线与 x 轴交于 $(-2,0)$ 和 $(1.5,0)$，与 y 轴交于 $(0,12)$。图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。

(b) 利用图象解不等式 $h(x) \leq 9$。

✓ **答案**　$-3 \le x \le -0.5$ 或 $x \ge 1$。

解析　在图中画水平直线 $y = 9$。

由图读得三个交点的横坐标为

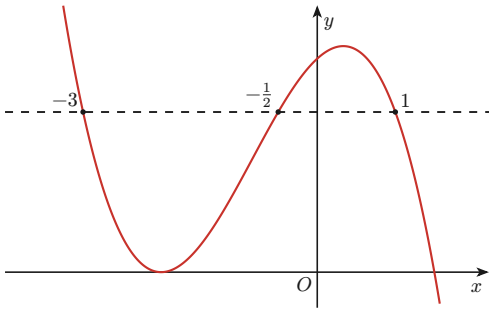
$x = -3,\quad x = -0.5,\quad x = 1$。

原不等式要求 $h(x) \le 9$，取曲线在直线上或直线下方的区段。

不等号为 $\le$，三个交点均保留。

答：$-3 \le x \le -0.5$ 或 $x \ge 1$。

实线 $y = (x+2)^2(3-2x)$；虚线 $y = 9$



-3；$-\frac{1}{2}$；1

题型 8　由零点、驻点画三次曲线草图

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **求轴上交点：**曲线由下式给出。令纵坐标为零求横轴交点，令横坐标为零求纵轴交点。横轴交点为 _____、_____，纵轴交点为 _____。

$$y = (5-x)(x+2)^2$$

$$y = 0:\quad (5-x)(x+2)^2 = 0$$

$$x = 0:\quad y = (5-0)(0+2)^2 = 20$$

② **区分触轴穿轴：**例中两个零点处，可据因式两侧的符号判别。

$x = -2$

平方因式不变号，曲线在 $(-2,0)$ 处与横轴相切。

$x = 5$

一次因式变号，曲线在 $(5,0)$ 处穿过横轴。

③ **展开式的求导：**导数记作 y'，表示曲线的切线斜率。展开后逐项求导，其中 a, C 为常数，n 为正整数。

$$(ax^n)' = anx^{n-1},\quad C' = 0$$

$$y = (5-x)(x^2+4x+4) = -x^3+x^2+16x+20$$

$$y' = -3x^2+2x+16 = -(x+2)(3x-8)$$

④ **求曲线的驻点：**切线水平的点称为驻点，此时导数为 _____。解出横坐标后，代回原式求纵坐标。

$$-(x+2)(3x-8) = 0$$

$$x = -2 \quad 或 \quad x = \frac{8}{3}$$

$$x = -2:\quad y = 0$$

$$x=\frac{8}{3}:\quad y=\left(5-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{8}{3}+2\right)^2=\frac{1372}{27}$$

⑤ **确定曲线走向：**由导数符号确定各段升降。按横坐标顺序描出交点和驻点，用光滑曲线连接。三次项系数决定图象两端的走向。

横坐标范围	$x<-2$	$-2<x<\frac{8}{3}$	$x>\frac{8}{3}$
导数符号	$-$	$+$	$-$
曲线走向	下降	上升	下降

x^3 的系数为负

左端向上，右端向下

x^3 的系数为正

左端向下，右端向上

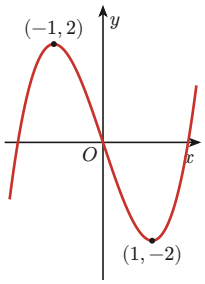
⑥ **限定曲线范围：**位移为 s、时间为 t，速度记作 v。位移用厘米、时间用秒时，速度用厘米每秒。给定范围时，代入端点并只画范围内曲线，包含的有限端点用实心点。

$$v=\frac{ds}{dt}$$

$$0\le x\le 1:\quad y(0)=20,\quad y(1)=(5-1)(1+2)^2=36$$

⑦ 驻点与局部增减

$$f(x)=x^3-3x,\quad f'(x)=3x^2-3$$



填空：①$(-2,0)$　②$(5,0)$　③$(0,20)$　④0

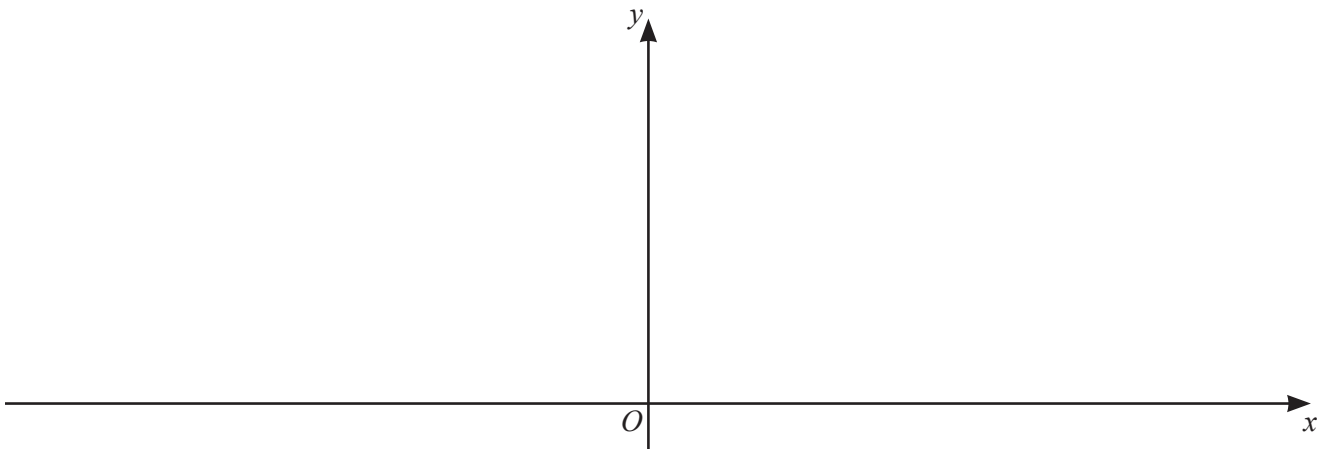
点石成金　题目出现已因式分解的三次函数并要求画草图时，先求坐标轴交点和驻点，再判定触轴、穿轴及各段走向。

例 1　[2023 · February/March 0606/12 Q2(b)]

A curve has equation $y=(5-x)(x+2)^2$.

(a) Find the x-coordinates of the stationary points on the curve.

(b) On the axes below, sketch the graph of $y=(5-x)(x+2)^2$, stating the coordinates of the points where the curve meets the axes.



一条曲线的方程为
$y=(5-x)(x+2)^2$。
(a) 求曲线上驻点的横坐标。
(b) 在下方坐标轴上，画出曲线 $y=(5-x)(x+2)^2$ 的草图，并写出曲线与坐标轴交点的坐标。
图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，O 为原点。

解答 展开得

$$y=-x^3+x^2+16x+20$$

$$y'=-3x^2+2x+16=-(x+2)(3x-8)$$

驻点处切线水平，故

$$-(x+2)(3x-8)=0$$

$$x=-2 \quad 或 \quad x=\frac{8}{3}$$

令纵坐标为零，得

$$(5-x)(x+2)^2=0$$

$$x=-2 \quad 或 \quad x=5$$

令横坐标为零，得

$$y=5\times 2^2=20$$

故曲线与坐标轴的交点为

$$(-2,0),\quad (5,0),\quad (0,20)$$

将另一驻点的横坐标代入原式，得

$$y=\left(5-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{8}{3}+2\right)^2=\frac{1372}{27}$$

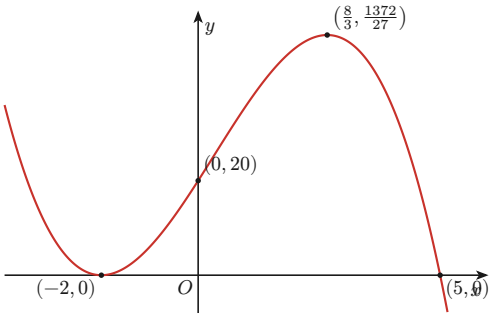
当 $x<-2$ 时，导数为负；当 $-2<x<\frac{8}{3}$ 时，导数为正；当 $x>\frac{8}{3}$ 时，导数为负。
曲线从左上方下降，在 $(-2,0)$ 处与横轴相切，再经过 $(0,20)$ 上升至 $\left(\frac{8}{3},\frac{1372}{27}\right)$，随

方法：先看原式的因式与次数，求轴上交点，再展开求导找驻点。
辨析：触轴是零点两侧函数值同号，穿轴是零点两侧函数值异号。
拓展：驻点未必是极值点，还需比较两侧导数符号。

后下降，穿过 $(5,0)$ 后向右下方延伸。

答：（a）驻点的横坐标为 -2 和 $\frac{8}{3}$；（b）草图如上，与坐标轴交于 $(-2,0)$、$(5,0)$ 和 $(0,20)$。

实线 $y=(5-x)(x+2)^2$



$(-2,0)$；$(5,0)$；$(0,20)$；$(\frac{8}{3},\frac{1372}{27})$

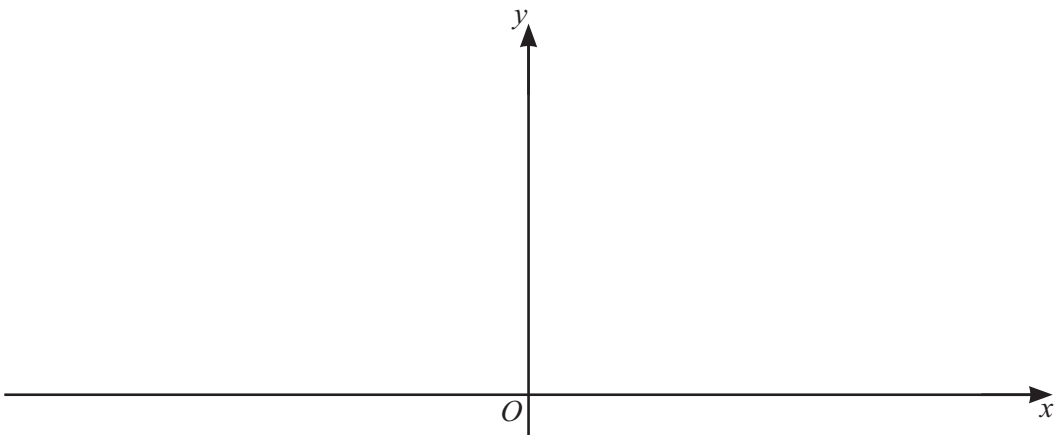
针对练习

1. [2025 · February/March 0606/22 Q2(b)]

提示：看各零点对应因式的次数，比较零点两侧函数值的符号。

(a) Find the x-coordinates of the stationary points on the curve $y=\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2$.

(b) On the axes, sketch the graph of $y=\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2$ stating the intercepts with the coordinate axes.



（a）求曲线 $y=\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2$ 上驻点的横坐标。

（b）在所给坐标轴上，画出曲线 $y=\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2$ 的草图，并标明它与坐标轴的交点。

图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，O 为原点。

✓ **答案**　（a）$x=-2$ 或 $x=\frac{1}{3}$；（b）与坐标轴交于 $(-2,0)$、$\left(\frac{3}{2},0\right)$、$(0,6)$，在 $(-2,0)$ 处与横轴相切，在 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 处穿过横轴，左端向上，右端向下。

解析　展开得

$$y=-x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+6$$

$$y'=-3x^2-5x+2=-(x+2)(3x-1)$$

令导数为零，得

$$-(x+2)(3x-1)=0$$

$$x=-2 \quad 或 \quad x=\frac{1}{3}$$

令纵坐标为零，得

$$\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2=0$$

$$x=-2 \quad 或 \quad x=\frac{3}{2}$$

令横坐标为零，得

$$y=\frac{1}{2}\times 3\times 2^2=6$$

两驻点的纵坐标分别为

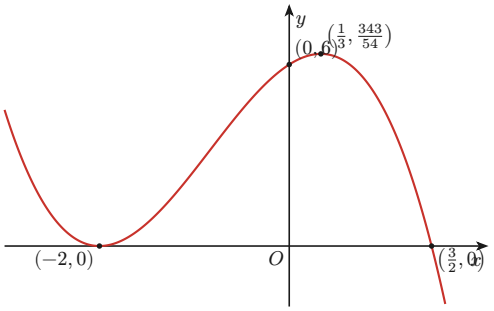
$$y(-2)=0$$

$$y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+2\right)^2=\frac{343}{54}$$

当 $x<-2$ 时，导数为负；当 $-2<x<\frac{1}{3}$ 时，导数为正；当 $x>\frac{1}{3}$ 时，导数为负。
曲线从左上方下降，在 $(-2,0)$ 处与横轴相切，经过 $(0,6)$ 上升至 $\left(\frac{1}{3},\frac{343}{54}\right)$，再下降穿过 $\left(\frac{3}{2},0\right)$。

答：（a）驻点的横坐标为 -2 和 $\frac{1}{3}$；（b）草图如上，横轴交点为 $(-2,0)$、$\left(\frac{3}{2},0\right)$，纵轴交点为 $(0,6)$。

实线 $y=\left(\frac{1}{2}\right)(3-2x)(x+2)^2$



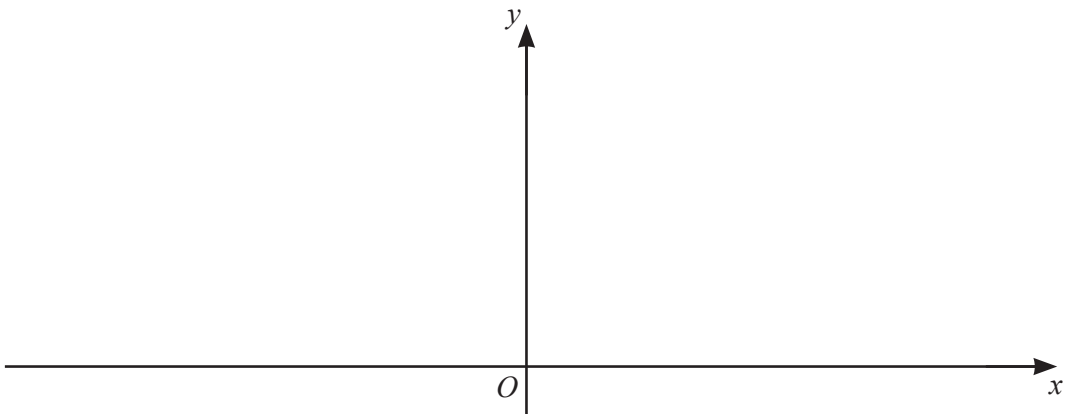
$(-2,0)$；$\left(\frac{3}{2},0\right)$；$(0,6)$；$\left(\frac{1}{3},\frac{343}{54}\right)$

2. [2023 · October/November 0606/13 Q6(b)]
提示：将交点与驻点按横坐标排序，再比较各段导数的正负。

The polynomial $\mathrm{q}(x)$ is given by $\mathrm{q}(x)=-\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)^2$.

(a) Find the x-coordinates of the stationary points on the curve $y=\mathrm{q}(x)$.

(b) On the axes, sketch the graph of $y = \mathrm{q}(x)$ stating the intercepts with the coordinate axes.



多项式 $q(x)$ 定义为
$q(x) = -\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)^2$。
(a) 求曲线 $y = q(x)$ 上驻点的横坐标。
(b) 在所给坐标轴上，画出曲线 $y = q(x)$ 的草图，并标明它与坐标轴的交点。
图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，O 为原点。

✓ **答案** (a) $x = -3$ 或 $x = -\frac{2}{3}$；(b) 与坐标轴交于 $(-3,0)$、$\left(\frac{1}{2},0\right)$、$(0,3)$，在 $(-3,0)$ 处与横轴相切，在 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 处穿过横轴，左端向上，右端向下。

解析 展开得

$$q(x) = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{3}x^2 - 4x + 3$$

$$q'(x) = -2x^2 - \frac{22}{3}x - 4 = -\frac{2}{3}(x+3)(3x+2)$$

令导数为零，得

$$-\frac{2}{3}(x+3)(3x+2) = 0$$

$$x = -3 \quad 或 \quad x = -\frac{2}{3}$$

令纵坐标为零，得

$$-\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)^2 = 0$$

$$x = -3 \quad 或 \quad x = \frac{1}{2}$$

令横坐标为零，得

$$q(0) = -\frac{1}{3} \times (-1) \times 3^2 = 3$$

两驻点的纵坐标分别为

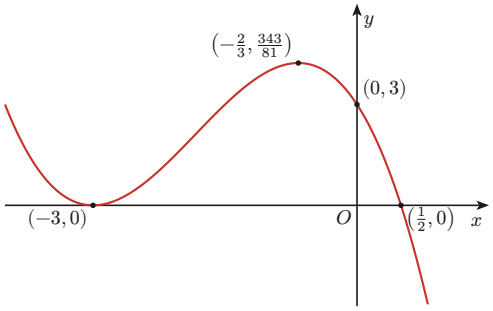
$$q(-3) = 0$$

$$q\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}-1\right)\left(-\frac{2}{3}+3\right)^2=\frac{343}{81}$$

当 $x<-3$ 时，导数为负；当 $-3<x<-\frac{2}{3}$ 时，导数为正；当 $x>-\frac{2}{3}$ 时，导数为负。
曲线从左上方下降，在 $(-3,0)$ 处与横轴相切，再上升至 $\left(-\frac{2}{3},\frac{343}{81}\right)$，随后下降，经过 $(0,3)$ 并穿过 $\left(\frac{1}{2},0\right)$。

答：(a) 驻点的横坐标为 -3 和 $-\frac{2}{3}$；(b) 草图如上，横轴交点为 $(-3,0)$、$\left(\frac{1}{2},0\right)$，纵轴交点为 $(0,3)$。

实线 $y=-\left(\frac{1}{3}\right)(2x-1)(x+3)^2$

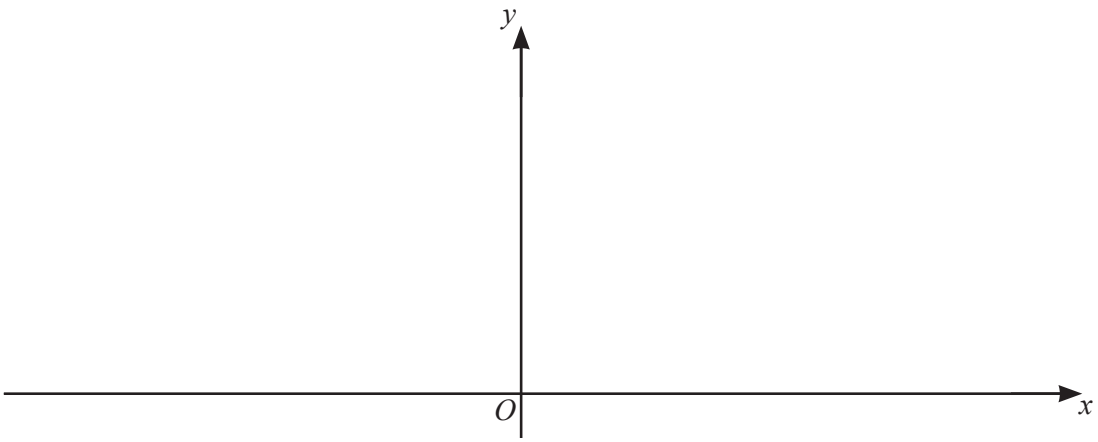


$(-3,0)$；$\left(\frac{1}{2},0\right)$；$(0,3)$；$\left(-\frac{2}{3},\frac{343}{81}\right)$

3. [2024 · May/June 0606/13 Q3(b)]
提示：看三次项系数定两端，再比较驻点两侧导数的符号。

(a) Find the coordinates of the stationary points on the curve $y=(2x+1)^2(x-3)$.

(b) On the axes, sketch the graph of $y=(2x+1)^2(x-3)$, stating the intercepts with the axes.



(a) 求曲线 $y=(2x+1)^2(x-3)$ 上驻点的坐标。
(b) 在所给坐标轴上，画出曲线 $y=(2x+1)^2(x-3)$ 的草图，并标明它与坐标轴的交点。
图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，O 为原点。

✓ **答案** (a) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$、$\left(\frac{11}{6},-\frac{686}{27}\right)$；(b) 与坐标轴交于 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$、$(3,0)$、$(0,-3)$，在 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 处与横轴相切，在 $(3,0)$ 处穿过横轴，左端向下，右端向上。

解析 展开得

$$y=(4x^2+4x+1)(x-3)=4x^3-8x^2-11x-3$$

$$y'=12x^2-16x-11=(2x+1)(6x-11)$$

令导数为零，得

$$(2x+1)(6x-11)=0$$

$$x=-\frac{1}{2}\quad 或\quad x=\frac{11}{6}$$

代回原式，得

$$y\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$y\left(\frac{11}{6}\right)=\left(2\times\frac{11}{6}+1\right)^2\left(\frac{11}{6}-3\right)=\left(\frac{14}{3}\right)^2\left(-\frac{7}{6}\right)=-\frac{686}{27}$$

故驻点为

$$\left(-\frac{1}{2},0\right),\quad\left(\frac{11}{6},-\frac{686}{27}\right)$$

令纵坐标为零，得

$$(2x+1)^2(x-3)=0$$

$$x=-\frac{1}{2}\quad 或\quad x=3$$

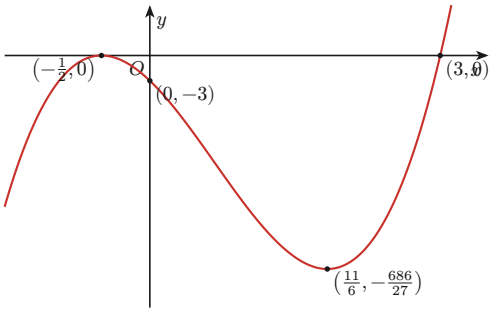
令横坐标为零，得

$$y=1^2\times(-3)=-3$$

当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，导数为正；当 $-\frac{1}{2}<x<\frac{11}{6}$ 时，导数为负；当 $x>\frac{11}{6}$ 时，导数为正。
曲线从左下方上升，在 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 处与横轴相切，再经过 $(0,-3)$ 下降至 $\left(\frac{11}{6},-\frac{686}{27}\right)$，随后上升穿过 $(3,0)$。

答：（a）驻点为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 和 $\left(\frac{11}{6},-\frac{686}{27}\right)$；（b）草图如上，横轴交点为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$、$(3,0)$，纵轴交点为 $(0,-3)$。

实线 $y=(2x+1)^2(x-3)$



$\left(-\frac{1}{2},0\right)$；$(3,0)$；$(0,-3)$；$\left(\frac{11}{6},-\frac{686}{27}\right)$

4. [2023 · May/June 0606/13 Q9(b)]
提示：先看时间范围筛选零点，再用速度正负判断位移升降。

In this question lengths are in centimetres and time is in seconds.

A particle P moves in a straight line such that its displacement s, from a fixed point at a time t, is given by $s=3(t+2)(t-4)^2$ for $0\leqslant t\leqslant 5$.

(a) Find the values of t for which the velocity, v, of P is zero.

(b) On the axes below, sketch the displacement–time graph of P, stating the intercepts with the axes.



本题中，长度单位为厘米，时间单位为秒。
质点 P 沿直线运动。在时刻 t，它相对于某一固定点的位移 s 为
$s=3(t+2)(t-4)^2,\quad 0\le t\le 5$。
(a) 求质点 P 的速度 v 为零时的 t 值。
(b) 在下方坐标轴上，画出质点 P 的位移与时间关系图象的草图，并标明它与坐标轴的交点。
图中横轴标为 t，纵轴标为 s；原点标为 0，时间轴上还标有 5。

✓ **答案**　(a) $t=0$ 或 $t=4$，单位为秒；(b) 在 $0\le t\le 5$ 内，图象从 $(0,96)$ 下降至 $(4,0)$，与时间轴相切后上升至端点 $(5,21)$；与两轴的交点为 $(0,96)$、$(4,0)$。

解析　位移展开为

$$s=3(t+2)(t^2-8t+16)=3t^3-18t^2+96$$

速度是位移对时间的导数，故

$$v=\frac{ds}{dt}=9t^2-36t=9t(t-4)$$

令速度为零，得

$$9t(t-4)=0$$

$$t=0\quad 或\quad t=4$$

两值均在 $0\le t\le 5$ 内。
令位移为零，得

$$3(t+2)(t-4)^2=0$$

$$t=-2\quad 或\quad t=4$$

因 $t=-2$ 不在所给范围内，时间轴交点为 $(4,0)$。
代入两个时间端点，得

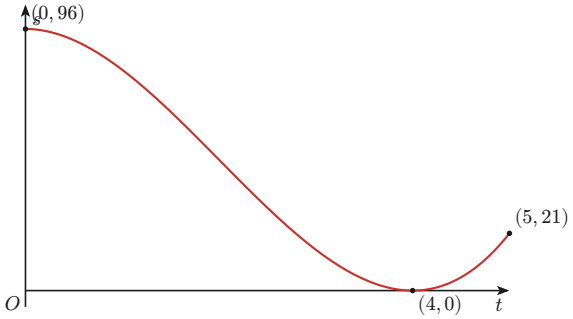
$$s(0)=3\times 2\times(-4)^2=96$$

$$s(5) = 3 \times 7 \times 1^2 = 21$$

当 $0 < t < 4$ 时，速度为负，位移减小；当 $4 < t \le 5$ 时，速度为正，位移增大。
图象从 $(0, 96)$ 处水平起始，下降至 $(4, 0)$，与时间轴相切后上升至 $(5, 21)$，两端均用实心点。

答：(a) 速度为零的时刻为 0 秒和 4 秒；(b) 草图如上，与位移轴交于 $(0, 96)$，与时间轴交于 $(4, 0)$，终点为 $(5, 21)$。

实线 $s = 3(t + 2)(t - 4)^2$



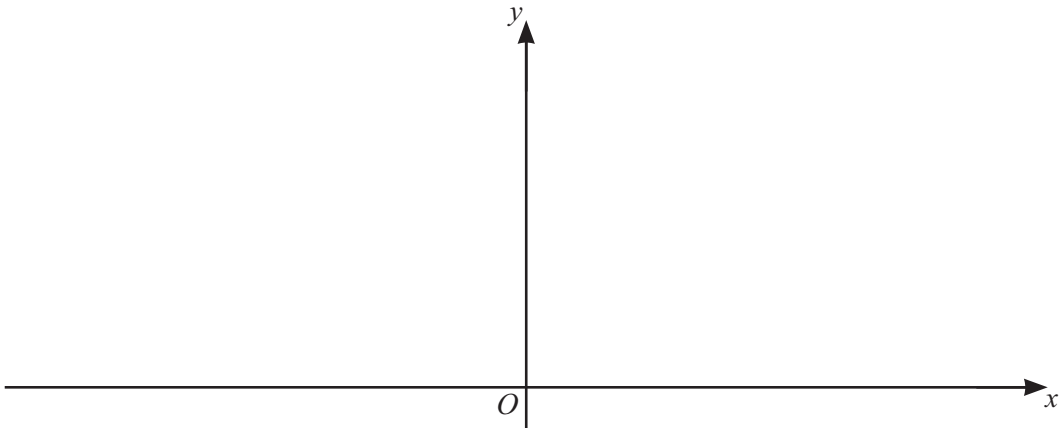
$(0, 96)$；$(4, 0)$；$(5, 21)$

5. [2024 · October/November 0606/12 Q2(b)]
提示：看平方因式对应的零点，比较其左右两段曲线的升降。

It is given that $y = \mathrm{f}(x)$, where $\mathrm{f}(x) = (2x-5)(x-1)^2$.

(a) Find the coordinates of the stationary points on the curve $y = \mathrm{f}(x)$.

(b) On the axes, sketch the graph of $y = \mathrm{f}(x)$, stating the intercepts with the axes.



已知 $y = f(x)$，其中
$f(x) = (2x - 5)(x - 1)^2$。
(a) 求曲线 $y = f(x)$ 上驻点的坐标。
(b) 在所给坐标轴上，画出曲线 $y = f(x)$ 的草图，并标明它与坐标轴的交点。
图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，O 为原点。

✓ **答案** (a) $(1, 0)$、$(2, -1)$；(b) 与坐标轴交于 $(1, 0)$、$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$、$(0, -5)$，在 $(1, 0)$ 处与横轴相切，在 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 处穿过横轴，左端向下，右端向上。

解析 展开得

$$f(x) = (2x - 5)(x^2 - 2x + 1) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2)$$

令导数为零，得

$$6(x-1)(x-2)=0$$

$$x=1 \quad 或 \quad x=2$$

代回原式，得

$$f(1)=0$$

$$f(2)=(4-5)(2-1)^2=-1$$

故驻点为

$$(1,0),\quad (2,-1)$$

令纵坐标为零，得

$$(2x-5)(x-1)^2=0$$

$$x=1 \quad 或 \quad x=\frac{5}{2}$$

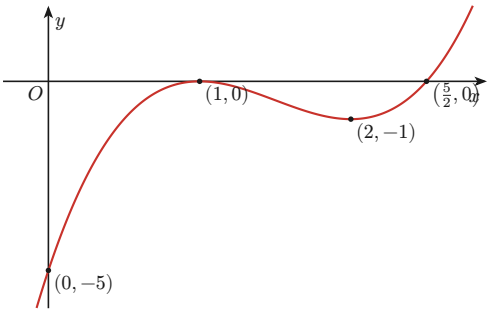
令横坐标为零，得

$$f(0)=(-5)(-1)^2=-5$$

当 $x<1$ 时，导数为正；当 $1<x<2$ 时，导数为负；当 $x>2$ 时，导数为正。
曲线从左下方上升，经过 $(0,-5)$，在 $(1,0)$ 处与横轴相切，再下降至 $(2,-1)$，随后上升穿过 $\left(\frac{5}{2},0\right)$。

答：（a）驻点为 $(1,0)$ 和 $(2,-1)$；（b）草图如上，横轴交点为 $(1,0)$、$\left(\frac{5}{2},0\right)$，纵轴交点为 $(0,-5)$。

实线 $y=(2x-5)(x-1)^2$



$(1,0)$；$\left(\frac{5}{2},0\right)$；$(0,-5)$；$(2,-1)$

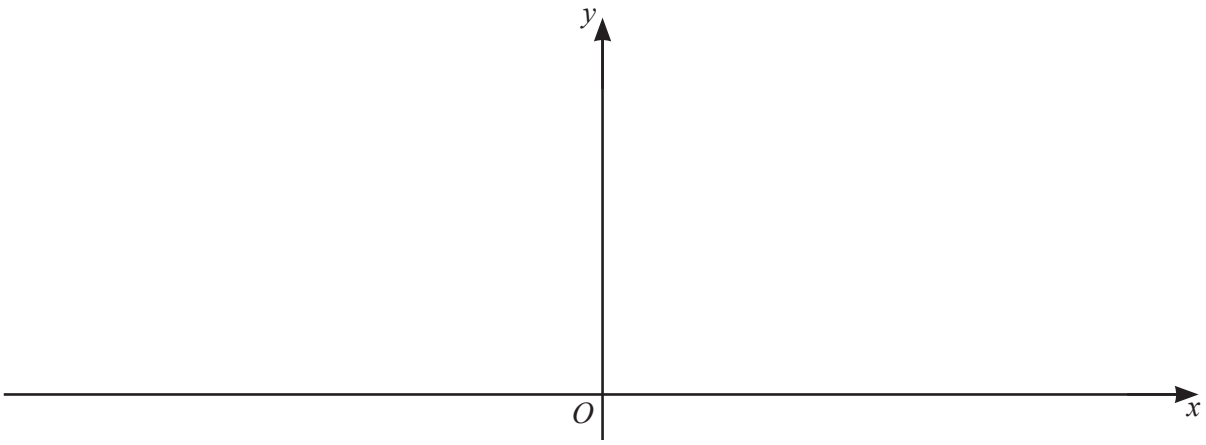
6. [2023 · October/November 0606/11 Q7(c)]
提示：比较两个驻点与纵轴的位置，确定纵轴交点落在哪一段。

A curve has equation $y=\mathrm{f}(x)$, where $\mathrm{f}(x)=(2x+1)(3x-2)^2$.

(a) Show that $\mathrm{f}'(x)$ can be written in the form $2(3x-2)(px+q)$, where p and q are integers.

(b) Hence find the coordinates of the stationary points on the curve.

(c) On the axes below, sketch the graph of $y=\mathrm{f}(x)$, stating the intercepts with the coordinate axes.



一条曲线的方程为 $y=f(x)$，其中
$f(x)=(2x+1)(3x-2)^2$。
(a) 证明 $f'(x)$ 可写成 $2(3x-2)(px+q)$ 的形式，其中 p 和 q 为整数。
(b) 由此求曲线上驻点的坐标。
(c) 在下方坐标轴上，画出曲线 $y=f(x)$ 的草图，并标明它与坐标轴的交点。
图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，O 为原点。

✓ **答案**　(a) $f'(x)=2(3x-2)(9x+1)$，其中 $p=9$、$q=1$；(b) $\left(\frac{2}{3},0\right)$、$\left(-\frac{1}{9},\frac{343}{81}\right)$；(c) 与坐标轴交于 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$、$\left(\frac{2}{3},0\right)$、$(0,4)$，在 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 处穿过横轴，在 $\left(\frac{2}{3},0\right)$ 处与横轴相切，左端向下，右端向上。

解析　展开得

$$f(x)=(2x+1)(9x^2-12x+4)=18x^3-15x^2-4x+4$$

$$f'(x)=54x^2-30x-4=2(27x^2-15x-2)=2(3x-2)(9x+1)$$

故所求形式成立，且

$$p=9,\quad q=1$$

由此令导数为零，得

$$2(3x-2)(9x+1)=0$$

$$x=\frac{2}{3}\quad\text{或}\quad x=-\frac{1}{9}$$

代回原式，得

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

$$f\left(-\frac{1}{9}\right)=\left(1-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)^2=\frac{7}{9}\times\frac{49}{9}=\frac{343}{81}$$

故驻点为

$$\left(\frac{2}{3},0\right),\quad\left(-\frac{1}{9},\frac{343}{81}\right)$$

令纵坐标为零，得

$$(2x+1)(3x-2)^2=0$$

$$x=-\frac{1}{2}\quad 或\quad x=\frac{2}{3}$$

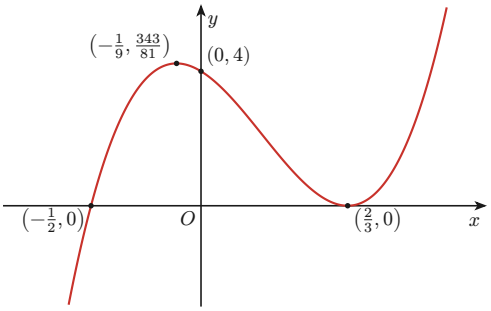
令横坐标为零，得

$$f(0)=1\times(-2)^2=4$$

当 $x<-\frac{1}{9}$ 时，导数为正；当 $-\frac{1}{9}<x<\frac{2}{3}$ 时，导数为负；当 $x>\frac{2}{3}$ 时，导数为正。
曲线从左下方上升，穿过 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$，到达 $\left(-\frac{1}{9},\frac{343}{81}\right)$ 后下降，经过 $(0,4)$，在 $\left(\frac{2}{3},0\right)$ 处与横轴相切，再向右上方延伸。

答：(a) $f'(x)=2(3x-2)(9x+1)$，其中 $p=9$、$q=1$；(b) 驻点为 $\left(\frac{2}{3},0\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{9},\frac{343}{81}\right)$；(c) 草图如上，横轴交点为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$、$\left(\frac{2}{3},0\right)$，纵轴交点为 $(0,4)$。

实线 $y=(2x+1)(3x-2)^2$



$\left(-\frac{1}{2},0\right)$；$\left(\frac{2}{3},0\right)$；$(0,4)$；$\left(-\frac{1}{9},\frac{343}{81}\right)$

7. [2025 · May/June 0606/22 Q2(a)]

提示：先看时间取值范围，再比较起点和各驻点之间的导数符号。

In this question, all lengths are in metres and time is in seconds.

A particle P moves in a straight line such that its displacement s from a fixed point O at time t is given by $s=(t-4)^2(t-1)$ for $t\geqslant 0$.

(a) On the axes, sketch the displacement–time graph of P, stating the intercepts with the axes.



本题中，所有长度的单位为米，时间单位为秒。
质点 P 沿直线运动。在时刻 t，它相对于固定点 O 的位移 s 为
$s=(t-4)^2(t-1)$，$t\geq 0$。
(a) 在所给坐标轴上，画出质点 P 的位移与时间关系图象的草图，并标明它与坐标轴的交点。
图中横轴标为 t，纵轴标为 s，O 为坐标原点。

✓ **答案** 图象从实心端点 $(0,-16)$ 起，上升穿过 $(1,0)$，到达 $(2,4)$ 后下降，在 $(4,0)$ 处与时间轴相切，再向右上方延伸。与坐标轴的交点为 $(0,-16)$、$(1,0)$、$(4,0)$，仅画 $t\geq 0$ 的部分。

解析 令位移为零，得

$$(t-4)^2(t-1)=0$$

$$t=1 \quad 或 \quad t=4$$

两值均满足 $t\geq 0$，故时间轴交点为

$$(1,0),\quad (4,0)$$

令时间为零，得

$$s(0)=(-4)^2(-1)=-16$$

故位移轴交点为 $(0,-16)$。

展开并求导，得

$$s=t^3-9t^2+24t-16$$

$$\frac{ds}{dt}=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$$

令导数为零，得

$$t=2 \quad 或 \quad t=4$$

$$s(2)=(2-4)^2(2-1)=4$$

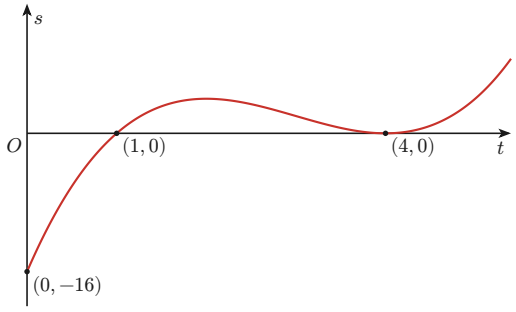
$$s(4)=0$$

当 $0\leq t<2$ 时，导数为正；当 $2<t<4$ 时，导数为负；当 $t>4$ 时，导数为正。

图象从实心端点 $(0,-16)$ 起，上升穿过 $(1,0)$，到达 $(2,4)$ 后下降，在 $(4,0)$ 处与时间轴相切，再向右上方延伸。

答：草图如上，位移轴交点为 $(0,-16)$，时间轴交点为 $(1,0)$ 和 $(4,0)$，仅保留 $t\geq 0$ 的部分。

实线 $s=(t-1)(t-4)^2$



$(0,-16)$；$(1,0)$；$(4,0)$

题型 9 用水平线与极值比较确定实根个数

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **多项式求导：** 本题曲线由一个一次因式与一个平方因式相乘得到。先展开，再逐项求导；导数表示曲线的斜率，记为 $f'(x)$。

$$f(x)=(2x+1)(3x-2)^2=18x^3-15x^2-4x+4$$

幂次乘到系数，再将幂次减一；常数项的导数为_____。

$$f'(x)=18\times 3x^2-15\times 2x-4=54x^2-30x-4$$

② **驻点坐标：**曲线上斜率为零的点称为驻点。令导数为零，求出横坐标，再代回原函数。

$$f'(x)=2(3x-2)(9x+1)=0$$

$$x=\frac{2}{3}\quad 或\quad x=-\frac{1}{9}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=0,\quad f\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{343}{81}$$

驻点坐标为_____。

③ **坐标轴交点：**与横轴相交时纵坐标为零，与纵轴相交时横坐标为零。将相应坐标代入原式。

令 $y=0$

$$(2x+1)(3x-2)^2=0$$

横轴交点为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$、$\left(\frac{2}{3},0\right)$

令 $x=0$

$$y=(2\times 0+1)(3\times 0-2)^2=4$$

纵轴交点为 $(0,4)$

因式 $2x+1$ 出现一次，曲线在相应零点穿过横轴。因式 $3x-2$ 出现两次，曲线在相应零点与横轴相切。

④ **曲线起落判断：**导数为正时曲线递增，为负时曲线递减。标出截距和驻点，再按下表连接。

横坐标范围	导数符号	曲线变化
$x<-\frac{1}{9}$	$+$	递增
$-\frac{1}{9}<x<\frac{2}{3}$	$-$	递减
$x>\frac{2}{3}$	$+$	递增

三次项决定曲线两端的方向。

三次项系数为正

左端向下，右端向上

三次项系数为负

左端向上，右端向下

⑤ **水平线交点：**方程右侧的 k 表示一个固定实数。作水平线，与曲线相交。

$$f(x)=k$$

上式表示曲线 $y=f(x)$ 与水平线 $y=k$ 相交。不同实根的个数等于_____。

⑥ **实根个数比较：**本例极小值为零，极大值为 $\frac{343}{81}$。分别记极小值为 m、极大值为 M，比较水平线与这两个高度。

$$m=0,\quad M=\frac{343}{81}$$

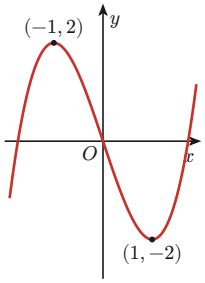
水平线的位置	不同交点数	不同实根数
$k<m$ 或 $k>M$	1	1
$k=m$ 或 $k=M$	2	2
$m<k<M$	3	3

相切点只计一个交点，本例有三个不同实根时，参数范围为_____。

⑦

驻点与局部增减

$f(x)=x^3-3x,\quad f'(x)=3x^2-3$



填空：①0　②$(-\frac{1}{9},\frac{343}{81})$、$(\frac{2}{3},0)$　③水平线与曲线的不同交点数　④$0<k<\frac{343}{81}$

点石成金　题目出现三次曲线与方程实根个数时，先求驻点的纵坐标，再比较水平线与极大值、极小值的位置。

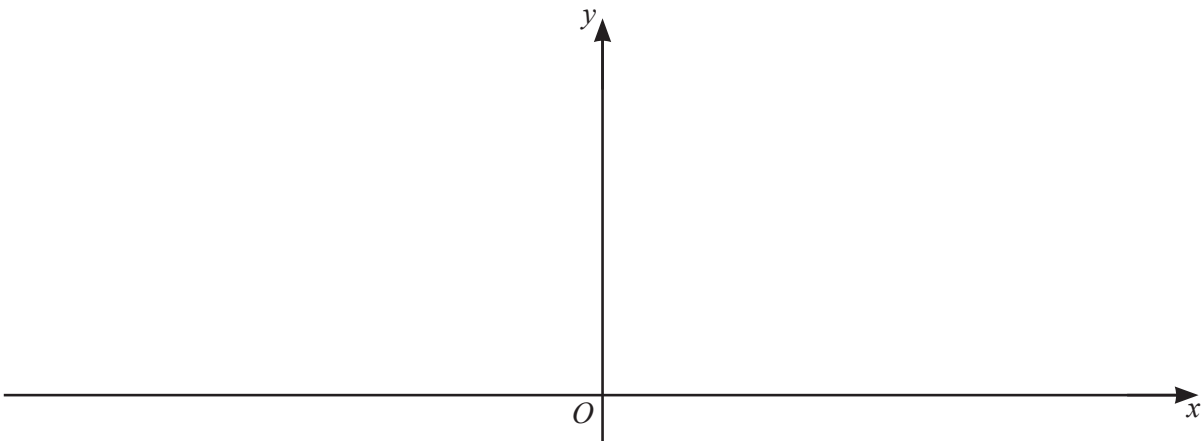
例 1　[2023 · October/November 0606/11 Q7(d)]

A curve has equation $y=\mathrm{f}(x)$, where $\mathrm{f}(x)=(2x+1)(3x-2)^2$.

(a) Show that $\mathrm{f}'(x)$ can be written in the form $2(3x-2)(px+q)$, where p and q are integers.

(b) Hence find the coordinates of the stationary points on the curve.

(c) On the axes below, sketch the graph of $y=\mathrm{f}(x)$, stating the intercepts with the coordinate axes.



(d) Find the values of k such that the equation $\mathrm{f}(x)=k$ has 3 distinct solutions.

7

一条曲线的方程为 $y=f(x)$，其中 $f(x)=(2x+1)(3x-2)^2$。

(a) 证明 $f'(x)$ 可以写成 $2(3x-2)(px+q)$ 的形式，其中 p 和 q 是整数。

(b) 由此求出曲线上各驻点的坐标。

(c) 在下方所给坐标轴上画出曲线 $y=f(x)$ 的草图，并写出曲线与坐标轴的交点。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

(d) 求使方程 $f(x)=k$ 有三个不同解的 k 的取值范围。

解答　展开原式，得

$$f(x)=(2x+1)(9x^2-12x+4)=18x^3-15x^2-4x+4$$

逐项求导并提取公因式，得

$$f'(x)=54x^2-30x-4=2(27x^2-15x-2)=2(3x-2)(9x+1)$$

故所求形式成立，其中

方法：先看方程右侧的常数，从求导找驻点起手，再比较高度。

辨析：极值是局部最高或最低的函数值，极值点是对应的坐标点。

$$p=9,\quad q=1$$

由驻点处导数为零，得

$$2(3x-2)(9x+1)=0$$

$$x=\frac{2}{3}\quad 或\quad x=-\frac{1}{9}$$

代入原式，得

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(2\times\frac{2}{3}+1\right)\left(3\times\frac{2}{3}-2\right)^2=0$$

$$f\left(-\frac{1}{9}\right)=\left(2\times\left(-\frac{1}{9}\right)+1\right)\left(3\times\left(-\frac{1}{9}\right)-2\right)^2=\frac{7}{9}\times\left(-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{343}{81}$$

故驻点为

$$\left(\frac{2}{3},0\right),\quad\left(-\frac{1}{9},\frac{343}{81}\right)$$

令纵坐标为零，得

$$(2x+1)(3x-2)^2=0$$

$$x=-\frac{1}{2}\quad 或\quad x=\frac{2}{3}$$

令横坐标为零，得

$$f(0)=4$$

故与坐标轴的交点为

$$\left(-\frac{1}{2},0\right),\quad\left(\frac{2}{3},0\right),\quad(0,4)$$

导数的符号依次为

$$x<-\frac{1}{9}:\quad f'(x)>0$$

$$-\frac{1}{9}<x<\frac{2}{3}:\quad f'(x)<0$$

$$x>\frac{2}{3}:\quad f'(x)>0$$

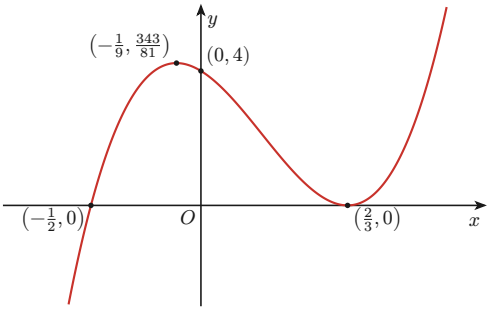
曲线先递增，再递减，最后递增。草图左端向下，右端向上；在 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 穿过横轴，在 $\left(-\frac{1}{9},\frac{343}{81}\right)$ 达到极大值，经过 $(0,4)$，在 $\left(\frac{2}{3},0\right)$ 与横轴相切后上升。
方程的不同实根对应水平线与曲线的不同交点。要有三个不同交点，水平线须位于两个极值高度之间。

$$0<k<\frac{343}{81}$$

当水平线经过任一驻点时，仅有两个不同交点，故两端均不取等号。

答：所求范围为 $0 < k < \frac{343}{81}$。

实线 $y = (2x+1)(3x-2)^2$



$(-\frac{1}{2}, 0)$；$(\frac{2}{3}, 0)$；$(0, 4)$；$(-\frac{1}{9}, \frac{343}{81})$

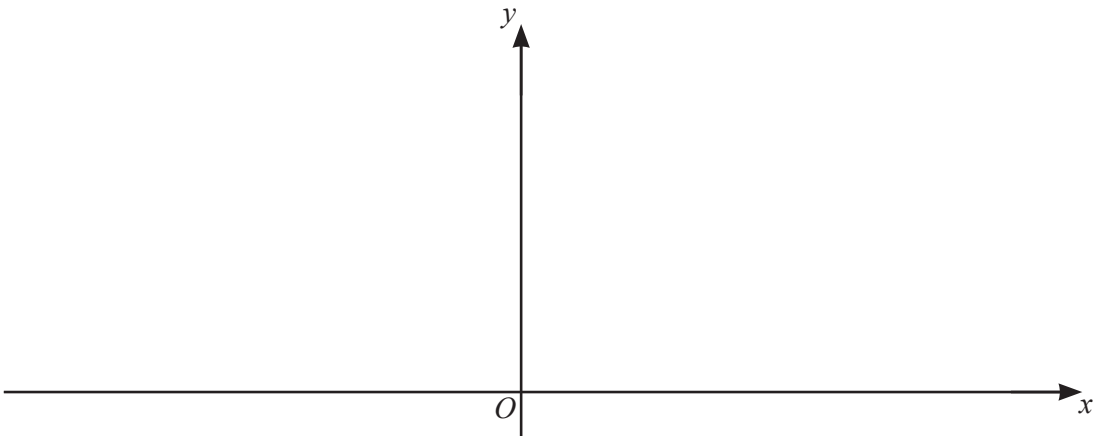
针对练习

1. [2024 · May/June 0606/13 Q3(c)]

提示：看两个转折处的高度，分区移动水平线并数交点。

(a) Find the coordinates of the stationary points on the curve $y = (2x+1)^2(x-3)$.

(b) On the axes, sketch the graph of $y = (2x+1)^2(x-3)$, stating the intercepts with the axes.



(c) Write down the values of k for which the equation $(2x+1)^2(x-3) = k$ has exactly one solution.

(a) 求曲线 $y = (2x+1)^2(x-3)$ 上各驻点的坐标。

(b) 在所给坐标轴上画出曲线 $y = (2x+1)^2(x-3)$ 的草图，并写出曲线与坐标轴的交点。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

(c) 写出使方程 $(2x+1)^2(x-3) = k$ 恰有一个解的 k 的取值范围。

✓ **答案** (a) $(-\frac{1}{2}, 0)$、$(\frac{11}{6}, -\frac{686}{27})$。 (b) 横轴交点为 $(-\frac{1}{2}, 0)$、$(3, 0)$，纵轴交点为 $(0, -3)$；曲线左端向下、右端向上，在前一横轴交点处相切，在后一横轴交点处穿过。 (c) $k < -\frac{686}{27}$ 或 $k > 0$。

解析 展开并逐项求导，得

$$y = (2x+1)^2(x-3) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 12x^2 - 16x - 11 = (2x+1)(6x-11)$$

由驻点处导数为零，得

$$(2x+1)(6x-11) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad 或 \quad x = \frac{11}{6}$$

分别代入原式，得

$$y=\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)^2\left(-\frac{1}{2}-3\right)=0$$

$$y=\left(2\times\frac{11}{6}+1\right)^2\left(\frac{11}{6}-3\right)=\left(\frac{14}{3}\right)^2\times\left(-\frac{7}{6}\right)=-\frac{686}{27}$$

故驻点为

$$\left(-\frac{1}{2},0\right),\quad\left(\frac{11}{6},-\frac{686}{27}\right)$$

令纵坐标为零，得

$$(2x+1)^2(x-3)=0$$

$$x=-\frac{1}{2}\quad\text{或}\quad x=3$$

令横坐标为零，得

$$y=(2\times0+1)^2(0-3)=-3$$

故与坐标轴的交点为

$$\left(-\frac{1}{2},0\right),\quad(3,0),\quad(0,-3)$$

导数的符号依次为

$$x<-\frac{1}{2}:\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$$

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{11}{6}:\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$$

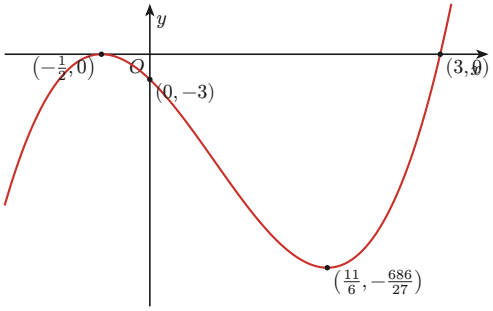
$$x>\frac{11}{6}:\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$$

草图左端向下，右端向上；曲线上升至 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$，与横轴相切后下降，经过 $(0,-3)$，在 $\left(\frac{11}{6},-\frac{686}{27}\right)$ 转而上升，最后在 $(3,0)$ 穿过横轴。
极大值为零，极小值为 $-\frac{686}{27}$。水平线高于极大值或低于极小值时，与曲线恰有一个交点。

$$k>0\quad\text{或}\quad k<-\frac{686}{27}$$

等于任一极值时均有两个不同交点，故不取等号。
答：$k>0$ 或 $k<-\frac{686}{27}$。

实线 $y=(2x+1)^2(x-3)$



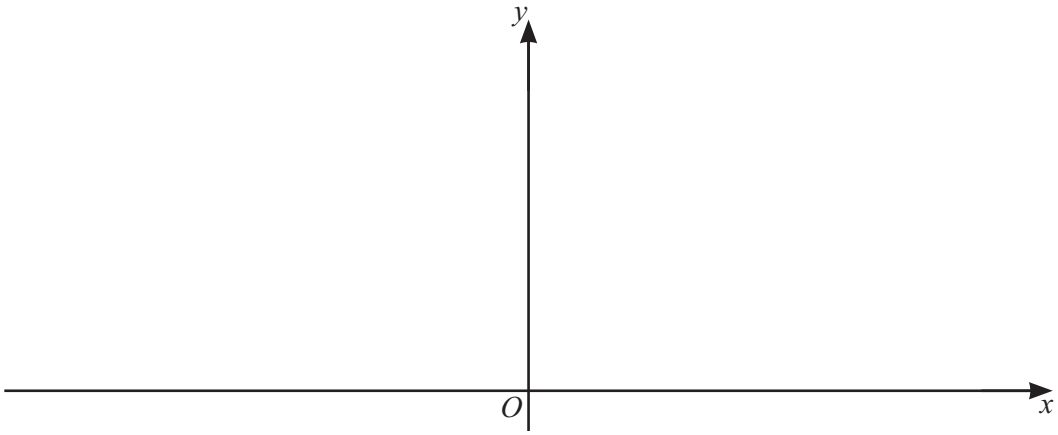
$(-\frac{1}{2},0)$；$(3,0)$；$(0,-3)$；$(\frac{11}{6},-\frac{686}{27})$

2. [2025 · February/March 0606/22 Q2(c)]

提示：看曲线的三段走势，比较同一水平线能经过几段。

(a) Find the x-coordinates of the stationary points on the curve $y=\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2$.

(b) On the axes, sketch the graph of $y=\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2$ stating the intercepts with the coordinate axes.



(c) Find the values of k for which the equation $\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2=k$ has three real and distinct roots.

2

(a) 求曲线 $y=\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2$ 上各驻点的横坐标。

(b) 在所给坐标轴上画出曲线 $y=\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2$ 的草图，并写出曲线与坐标轴的交点。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

(c) 求使方程 $\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2=k$ 有三个互不相同的实根的 k 的取值范围。

✓ **答案** (a) $x=-2$、$x=\frac{1}{3}$。 (b) 横轴交点为 $(-2,0)$、$(\frac{3}{2},0)$，纵轴交点为 $(0,6)$；极小值点为 $(-2,0)$，极大值点为 $(\frac{1}{3},\frac{343}{54})$；曲线左端向上、右端向下。 (c) $0<k<\frac{343}{54}$。

解析 展开并逐项求导，得

$$y=\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2=-x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+6$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-3x^2-5x+2=-(3x-1)(x+2)$$

由驻点处导数为零，得

$$-(3x-1)(x+2)=0$$

$$x=-2 \quad 或 \quad x=\frac{1}{3}$$

令纵坐标为零，得

$$\frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2=0$$

$$x=-2 \quad 或 \quad x=\frac{3}{2}$$

令横坐标为零，得

$$y=\frac{1}{2}\times 3\times 2^2=6$$

故与坐标轴的交点为

$$(-2,0),\quad \left(\frac{3}{2},0\right),\quad (0,6)$$

求两个驻点的纵坐标，得

$$y(-2)=\frac{1}{2}(3-2\times(-2))(-2+2)^2=0$$

$$y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+2\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{7}{3}\times\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{343}{54}$$

导数的符号依次为

$$x<-2:\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$$

$$-2<x<\frac{1}{3}:\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$$

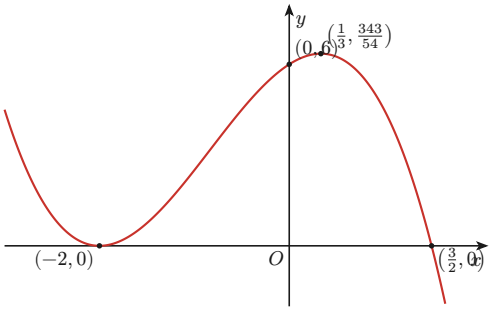
$$x>\frac{1}{3}:\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$$

草图左端向上，右端向下；曲线下降至 $(-2,0)$，与横轴相切后上升，经过 $(0,6)$，在 $\left(\frac{1}{3},\frac{343}{54}\right)$ 转而下降，最后在 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 穿过横轴。
水平线在极小值零与极大值 $\frac{343}{54}$ 之间时，与曲线有三个不同交点。

$$0<k<\frac{343}{54}$$

等于任一极值时均有两个不同交点，故不取等号。
答：$0<k<\frac{343}{54}$。

实线 $y=\left(\frac{1}{2}\right)(3-2x)(x+2)^2$



$(-2,0)$；$\left(\frac{3}{2},0\right)$；$(0,6)$；$\left(\frac{1}{3},\frac{343}{54}\right)$

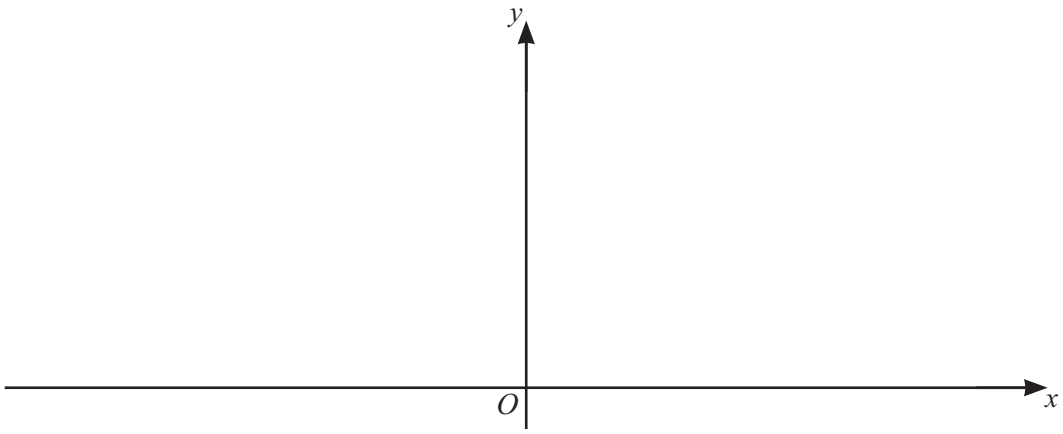
3. [2024 · October/November 0606/12 Q2(c)]

提示：比较水平线与两个驻点的高度，另查等高时的交点数。

It is given that $y=\mathrm{f}(x)$, where $\mathrm{f}(x)=(2x-5)(x-1)^2$.

(a) Find the coordinates of the stationary points on the curve $y=\mathrm{f}(x)$.

(b) On the axes, sketch the graph of $y=\mathrm{f}(x)$, stating the intercepts with the axes.



(c) Hence find the values of k for which $\mathrm{f}(x)=k$ has exactly one solution.

2

已知 $y=f(x)$，其中 $f(x)=(2x-5)(x-1)^2$。

(a) 求曲线 $y=f(x)$ 上各驻点的坐标。

(b) 在所给坐标轴上画出曲线 $y=f(x)$ 的草图，并写出曲线与坐标轴的交点。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

(c) 由此求出使方程 $f(x)=k$ 恰有一个解的 k 的取值范围。

✓ **答案**　(a) $(1,0)$、$(2,-1)$。　(b) 横轴交点为 $(1,0)$、$\left(\frac{5}{2},0\right)$，纵轴交点为 $(0,-5)$；曲线左端向下、右端向上，在 $(1,0)$ 与横轴相切，在 $\left(\frac{5}{2},0\right)$ 穿过横轴。　(c) $k<-1$ 或 $k>0$。

解析　展开并逐项求导，得

$$f(x)=(2x-5)(x-1)^2=2x^3-9x^2+12x-5$$

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

由驻点处导数为零，得

$$6(x-1)(x-2)=0$$

$$x=1 \quad 或 \quad x=2$$

代入原式，得

$$f(1)=(2\times1-5)(1-1)^2=0$$

$$f(2)=(2\times2-5)(2-1)^2=-1$$

故驻点为

$$(1,0),\quad (2,-1)$$

令纵坐标为零，得

$$(2x-5)(x-1)^2=0$$

$$x=1\quad 或\quad x=\frac{5}{2}$$

令横坐标为零，得

$$f(0)=(-5)(-1)^2=-5$$

故与坐标轴的交点为

$$(1,0),\quad \left(\frac{5}{2},0\right),\quad (0,-5)$$

导数的符号依次为

$$x<1:\quad f'(x)>0$$

$$1<x<2:\quad f'(x)<0$$

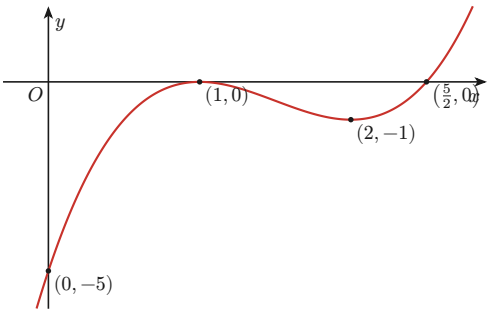
$$x>2:\quad f'(x)>0$$

草图左端向下，右端向上；曲线经过 $(0,-5)$，上升至 $(1,0)$，与横轴相切后下降，在 $(2,-1)$ 转而上升，最后在 $\left(\frac{5}{2},0\right)$ 穿过横轴。
由草图，水平线低于极小值或高于极大值时，与曲线恰有一个交点。

$$k<-1\quad 或\quad k>0$$

等于任一极值时均有两个不同交点，故不取等号。
答：$k<-1$ 或 $k>0$。

实线 $y=(2x-5)(x-1)^2$



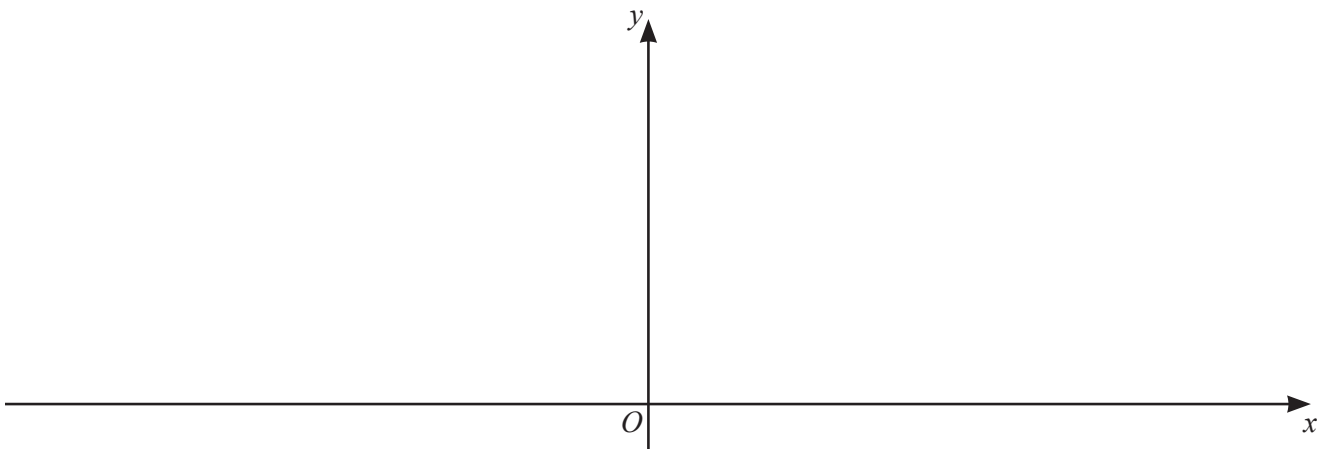
$(1,0)$；$\left(\frac{5}{2},0\right)$；$(0,-5)$；$(2,-1)$

4. [2023 · February/March 0606/12 Q2(c)]
提示：先把曲线表达式放在等号左侧，再比较常数与极值。

A curve has equation $y=(5-x)(x+2)^2$.

(a) Find the x-coordinates of the stationary points on the curve.

(b) On the axes below, sketch the graph of $y=(5-x)(x+2)^2$, stating the coordinates of the points where the curve meets the axes.



(c) Find the values of k for which the equation $k=(5-x)(x+2)^2$ has one distinct root only.

2
一条曲线的方程为 $y=(5-x)(x+2)^2$。
(a) 求曲线上各驻点的横坐标。
(b) 在下方所给坐标轴上画出曲线 $y=(5-x)(x+2)^2$ 的草图，并写出曲线与坐标轴相交各点的坐标。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。
(c) 求使方程 $k=(5-x)(x+2)^2$ 只有一个不同实根的 k 的取值范围。

✓ **答案** (a) $x=-2$、$x=\frac{8}{3}$。 (b) 与坐标轴的交点为 $(-2,0)$、$(5,0)$、$(0,20)$；极小值点为 $(-2,0)$，极大值点为 $\left(\frac{8}{3},\frac{1372}{27}\right)$；曲线左端向上、右端向下。 (c) $k<0$ 或 $k>\frac{1372}{27}$。

解析 展开并逐项求导，得

$$y=(5-x)(x+2)^2=-x^3+x^2+16x+20$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-3x^2+2x+16=-(3x-8)(x+2)$$

由驻点处导数为零，得

$$-(3x-8)(x+2)=0$$

$$x=-2 \quad 或 \quad x=\frac{8}{3}$$

令纵坐标为零，得

$$(5-x)(x+2)^2=0$$

$$x=-2 \quad 或 \quad x=5$$

令横坐标为零，得

$$y=5\times 2^2=20$$

故与坐标轴的交点为

$$(-2,0),\quad (5,0),\quad (0,20)$$

求两个驻点的纵坐标，得

$$y(-2)=(5+2)(-2+2)^2=0$$

$$y\left(\frac{8}{3}\right)=\left(5-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{8}{3}+2\right)^2=\frac{7}{3}\times\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{1372}{27}$$

导数的符号依次为

$$x<-2:\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$$

$$-2<x<\frac{8}{3}:\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$$

$$x>\frac{8}{3}:\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$$

草图左端向上，右端向下；曲线下降至 $(-2,0)$，与横轴相切后上升，经过 $(0,20)$，在 $\left(\frac{8}{3},\frac{1372}{27}\right)$ 转而下降，最后在 $(5,0)$ 穿过横轴。
将所求方程的两侧交换，得

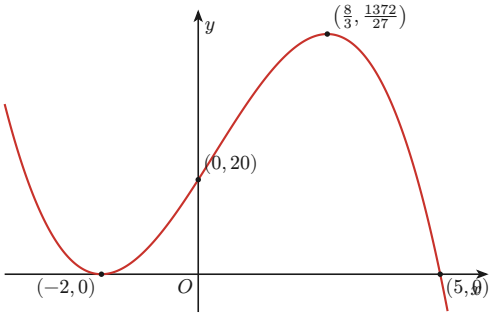
$$(5-x)(x+2)^2=k$$

只有一个不同实根，等价于水平线与曲线只有一个交点，故水平线须低于极小值或高于极大值。

$$k<0\quad 或\quad k>\frac{1372}{27}$$

等于任一极值时，除相切点外还有一个交点，共有两个不同实根，故不取等号。
答：$k<0$ 或 $k>\frac{1372}{27}$。

实线 $y=(5-x)(x+2)^2$



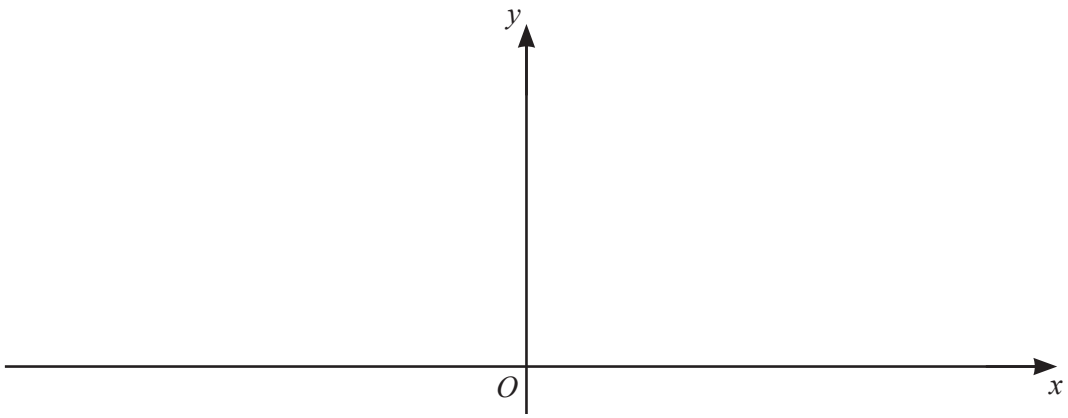
$(-2,0)$；$(5,0)$；$(0,20)$；$\left(\frac{8}{3},\frac{1372}{27}\right)$

5. [2023 · October/November 0606/13 Q6(c)]
提示：看水平线经过驻点时，曲线其余部分是否还有交点。

The polynomial $\mathrm{q}(x)$ is given by $\mathrm{q}(x)=-\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)^2$.

(a) Find the x-coordinates of the stationary points on the curve $y=\mathrm{q}(x)$.

(b) On the axes, sketch the graph of $y = \mathrm{q}(x)$ stating the intercepts with the coordinate axes.



(c) Find the values of k such that $q(x) = k$ has exactly one solution.

6

多项式 $q(x)$ 定义为 $q(x) = -\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)^2$。

(a) 求曲线 $y = q(x)$ 上各驻点的横坐标。

(b) 在所给坐标轴上画出曲线 $y = q(x)$ 的草图，并写出曲线与坐标轴的交点。图中横轴标为 x，纵轴标为 y，原点标为 O。

(c) 求使方程 $q(x) = k$ 恰有一个解的 k 的取值范围。

✓ **答案** (a) $x = -3$、$x = -\frac{2}{3}$。 (b) 横轴交点为 $(-3,0)$、$\left(\frac{1}{2},0\right)$，纵轴交点为 $(0,3)$；极小值点为 $(-3,0)$，极大值点为 $\left(-\frac{2}{3},\frac{343}{81}\right)$；曲线左端向上、右端向下。 (c) $k<0$ 或 $k>\frac{343}{81}$。

解析 展开并逐项求导，得

$$q(x) = -\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)^2 = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{3}x^2 - 4x + 3$$

$$q'(x) = -2x^2 - \frac{22}{3}x - 4 = -\frac{2}{3}(x+3)(3x+2)$$

由驻点处导数为零，得

$$-\frac{2}{3}(x+3)(3x+2) = 0$$

$$x = -3 \quad 或 \quad x = -\frac{2}{3}$$

令纵坐标为零，得

$$-\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)^2 = 0$$

$$x = -3 \quad 或 \quad x = \frac{1}{2}$$

令横坐标为零，得

$$q(0) = -\frac{1}{3} \times (-1) \times 3^2 = 3$$

故与坐标轴的交点为

$$(-3,0), \quad \left(\frac{1}{2},0\right), \quad (0,3)$$

求两个驻点的纵坐标，得

$$q(-3)=-\frac{1}{3}(2\times(-3)-1)(-3+3)^2=0$$

$$q\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}-1\right)\left(-\frac{2}{3}+3\right)^2=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{7}{3}\right)\times\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{343}{81}$$

导数的符号依次为

$$x<-3:\quad q'(x)<0$$

$$-3<x<-\frac{2}{3}:\quad q'(x)>0$$

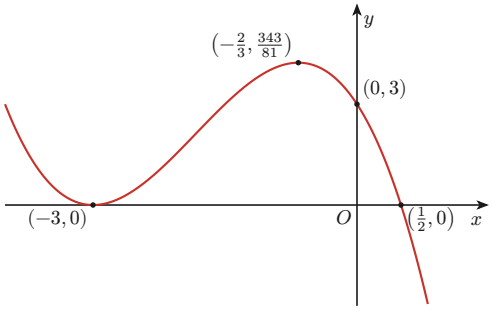
$$x>-\frac{2}{3}:\quad q'(x)<0$$

草图左端向上，右端向下；曲线下降至 $(-3,0)$，与横轴相切后上升，在 $\left(-\frac{2}{3},\frac{343}{81}\right)$ 转而下降，经过 $(0,3)$，最后在 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 穿过横轴。
极小值为零，极大值为 $\frac{343}{81}$。水平线低于极小值或高于极大值时，与曲线恰有一个交点。

$$k<0\quad 或\quad k>\frac{343}{81}$$

等于任一极值时均有两个不同交点，故不取等号。
答：$k<0$ 或 $k>\frac{343}{81}$。

实线 $y=-\left(\frac{1}{3}\right)(2x-1)(x+3)^2$



$(-3,0)$；$\left(\frac{1}{2},0\right)$；$(0,3)$；$\left(-\frac{2}{3},\frac{343}{81}\right)$

第 5 章 联立方程

Chapter 5

5.1 联立方程

题型 1 代入消元得到二次方程，求根后回代

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **对数等式还原：**题中的 lg 表示以 10 为底的对数。真数 $x+2y$ 必须大于 _____。由对数式还原得：

$$\lg(x+2y)=0$$

$$x+2y=10^0=1$$

② **代入消去一元：**将上式移项，用含 y 的式子表示 x。代入另一方程，消去 _____，得到只含 y 的方程。平方展开时，中间项也要保留。

$$x=1-2y$$

$$(1-2y)^2=1-4y+4y^2$$

$$(1-2y)^2+4(1-2y)y+y=1$$

③ **分式方程去分母：**分母不能等于 _____，先写出取值限制。以下 u、v 为未知数，两边同乘 uv。各项分别约去分母，得到整式方程。

$$u\neq 0,\quad v\neq 0$$

$$\frac{u}{v}-\frac{v}{u}=1$$

$$u^2-v^2=uv$$

④ **二次方程求根：**下式中 t 为未知数，三项系数依次为 $1,4,1$。一般式中的 a,b,c 表示三项系数，使用求根公式须满足下列条件。代入系数后，先算根号内的数，再化简根式。

$$t^2+4t+1=0$$

$$at^2+bt+c=0,\quad a\neq 0,\quad b^2-4ac\geq 0$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$t=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times 1\times 1}}{2\times 1}=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$$

⑤ **根式分母有理化：**分母含有根式时，分子、分母同乘根号项符号相反的式子。所乘式子的有理数部分保持不变，根号项符号应 _____。利用平方差公式，分母中的根式被消去。

$$\left(-2+\sqrt{3}\right)\left(-2-\sqrt{3}\right)=4-3=1$$

$\frac{1}{-2+\sqrt{3}}=\frac{-2-\sqrt{3}}{4-3}=-2-\sqrt{3}$ | $\frac{1}{-2-\sqrt{3}}=\frac{-2+\sqrt{3}}{4-3}=-2+\sqrt{3}$

⑥ **回代配成数对：**本例求得的每个 y 值，都要代回原来表示 x 的式子。同一次回代所得的两个值写成有序数对 (x,y)，前项是 _____。不同根对应的数值分别配对。

$y=0$
$x=1-2\times 0=1$
$(x,y)=(1,0)$

$y=\frac{1}{4}$
$x=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$
$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

⑦ **同底幂先比较指数：**当底数 $b>0$ 且 $b\neq 1$ 时，b^t 随 t 严格单调，因此 $b^u=b^v$ 可推出 $u=v$。先把不同底数化成同一底数，例如

$25^{u-v}=5^{u+2}$

$5^{2u-2v}=5^{u+2}$

$2u-2v=u+2$

$u=2v+2$

再将这个一次关系代入另一方程，消去一个未知量。

填空：①0　②x　③0　④相反　⑤x

点石成金　题目出现两个未知数的联立方程，且一式能表示一个未知数时，先将表示式代入另一式消元。

例 1　[2025 · May/June 0606/11 Q4(b)]

(b) Solve the simultaneous equations

$$\lg(x+2y)=0$$
$$x^2+4xy+y=1.$$

(b) 解下列联立方程：

$\lg(x+2y)=0$

$x^2+4xy+y=1$

解答　由对数式得

$$x+2y=10^0=1$$

$$x=1-2y$$

方法：看对数式，先还原成一次关系，再代入另一式消元。

辨析：真数是对数括号内的式子，对数值是取对数后的结果。

代入另一方程得

$$(1-2y)^2+4(1-2y)y+y=1$$

$$1-4y+4y^2+4y-8y^2+y=1$$

$$4y^2-y=0$$

$$y(4y-1)=0$$

由乘积为零得

$$y=0 \quad 或 \quad y=\frac{1}{4}$$

当 $y=0$ 时，

$$x=1-2\times 0=1$$

当 $y=\frac{1}{4}$ 时，

$$x=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

两组数值均有 $x+2y=1>0$，符合对数的取值条件。
答：$(x,y)=(1,0)$ 或 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/11 Q8]
提示：看分母的取值限制，去分母后用一次关系消元。

Solve the simultaneous equations $\dfrac{x}{2y}-\dfrac{4y}{x}=-1$ and $x=1-6y$.

解下列联立方程：

$$\frac{x}{2y}-\frac{4y}{x}=-1$$

$$x=1-6y$$

✓ **答案** $(x,y)=\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$。

解析 由分母不为零，得

$$x\neq 0,\quad y\neq 0$$

将分式方程两边同乘 $2xy$，得

$$x^2-8y^2=-2xy$$

$$x^2+2xy-8y^2=0$$

代入 $x=1-6y$，得

$$(1-6y)^2+2(1-6y)y-8y^2=0$$

$$1-12y+36y^2+2y-12y^2-8y^2=0$$

$$16y^2-10y+1=0$$

$$(8y-1)(2y-1)=0$$

$$y=\frac{1}{8}\quad 或\quad y=\frac{1}{2}$$

当 $y=\frac{1}{8}$ 时，

$$x=1-6\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

当 $y=\frac{1}{2}$ 时，

$$x=1-6\times\frac{1}{2}=-2$$

两组数值均满足 $x\neq 0$、$y\neq 0$。
答：$(x,y)=\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$。

2. [2024 · May/June 0606/21 Q4(b)]
提示：看倒数关系如何消元，回代时比共轭式的根号项符号。

DO NOT USE A CALCULATOR IN THIS QUESTION.

(b) Find the coordinates of the points where the curve with equation $2x^2+83xy=x^3y-20x$ intersects the curve with equation $y=\frac{1}{x}$. Give each of your answers in the form $a+b\sqrt{c}$, where a and b are rational and c is the smallest integer possible.

本题不得使用计算器。
（b）求方程为

$$2x^2+83xy=x^3y-20x$$

的曲线与方程为

$$y=\frac{1}{x}$$

的曲线的交点坐标。每个答案均写成 $a+b\sqrt{c}$ 的形式，其中 a 和 b 为有理数，c 为尽可能小的整数。

✓ **答案** $\left(-10+\sqrt{17},\frac{-10-\sqrt{17}}{83}\right)$ 和 $\left(-10-\sqrt{17},\frac{-10+\sqrt{17}}{83}\right)$。

解析 由 $y=\frac{1}{x}$，得 $x\neq 0$。代入另一曲线的方程，得

$$2x^2+83x\times\frac{1}{x}=x^3\times\frac{1}{x}-20x$$

$$2x^2+83=x^2-20x$$

$$x^2+20x+83=0$$

由求根公式得

$$x=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\times1\times83}}{2\times1}$$

$$x=\frac{-20\pm\sqrt{68}}{2}=\frac{-20\pm2\sqrt{17}}{2}=-10\pm\sqrt{17}$$

$\because$

$$\left(-10+\sqrt{17}\right)\left(-10-\sqrt{17}\right)=100-17=83\neq0$$

$\therefore$ 两个 x 值均不为零。
当 $x=-10+\sqrt{17}$ 时，

$$y=\frac{1}{-10+\sqrt{17}}=\frac{-10-\sqrt{17}}{\left(-10+\sqrt{17}\right)\left(-10-\sqrt{17}\right)}=\frac{-10-\sqrt{17}}{83}$$

当 $x=-10-\sqrt{17}$ 时，

$$y=\frac{1}{-10-\sqrt{17}}=\frac{-10+\sqrt{17}}{\left(-10-\sqrt{17}\right)\left(-10+\sqrt{17}\right)}=\frac{-10+\sqrt{17}}{83}$$

17 不含大于 1 的平方因数，根式已化至最简。
答：交点坐标为 $\left(-10+\sqrt{17},\frac{-10-\sqrt{17}}{83}\right)$ 和 $\left(-10-\sqrt{17},\frac{-10+\sqrt{17}}{83}\right)$。

3. [2022 · May/June 0606/11 Q8(a)]
提示：将直线给出的纵坐标代入曲线方程，消去一个未知量。

DO NOT USE A CALCULATOR IN THIS QUESTION.

(a) Find the exact coordinates of the points of intersection of the curve $y = x^2 + 2\sqrt{5}x - 20$ and the line $y = 3\sqrt{5}x + 10$.

本题不得使用计算器。
(a) 求曲线$y = x^2 + 2\sqrt{5}x - 20$与直线$y = 3\sqrt{5}x + 10$的交点的精确坐标。

✓ **答案** $\left(3\sqrt{5}, 55\right)$和$\left(-2\sqrt{5}, -20\right)$。

解析 将直线方程代入曲线方程，得

$$3\sqrt{5}x + 10 = x^2 + 2\sqrt{5}x - 20$$

$$x^2 - \sqrt{5}x - 30 = 0$$

由求根公式，得

$$x = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2 - 4 \times 1 \times (-30)}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{125}}{2} = \frac{\sqrt{5} \pm 5\sqrt{5}}{2}$$

$$x = 3\sqrt{5} \quad 或 \quad x = -2\sqrt{5}$$

当$x = 3\sqrt{5}$时，

$$y = 3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} + 10 = 55$$

当$x = -2\sqrt{5}$时，

$$y = 3\sqrt{5} \times \left(-2\sqrt{5}\right) + 10 = -20$$

答：交点的精确坐标为$\left(3\sqrt{5}, 55\right)$和$\left(-2\sqrt{5}, -20\right)$。

4. [2025 · October/November 0606/22 Q1(a)]
提示：先消去纵坐标，求出横坐标后再回代。

The line $y = 4x - 3$ meets the curve $y = 3 + 5x - 2x^2$ at the points A and B.

(a) Find the coordinates of A and B.

直线$y = 4x - 3$与曲线$y = 3 + 5x - 2x^2$相交于A、B两点。
(a) 求A和B的坐标。

✓ **答案** A、B的坐标为$\left(-\frac{3}{2}, -9\right)$和$(2, 5)$，次序不限。

解析 将直线方程代入曲线方程，得

$$4x - 3 = 3 + 5x - 2x^2$$

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

$$(2x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x=-\frac{3}{2}\quad 或\quad x=2$$

当$x=-\frac{3}{2}$时，

$$y=4\times\left(-\frac{3}{2}\right)-3=-9$$

当$x=2$时，

$$y=4\times 2-3=5$$

答：A、B的坐标为$\left(-\frac{3}{2},-9\right)$和$(2,5)$，次序不限。

5. [2024 · October/November 0606/11 Q2(b)]

提示：先将各底数统一，再比较指数得到一次关系。

(a) Given that $256^{x+y}\times 16^{-2x}=8^{-x+3y}$, show that $y=3x$.

(b) Hence find the exact solutions of the following simultaneous equations.

$$256^{x+y}\times 16^{-2x}=8^{-x+3y}$$

$$x^2+3y^2=56$$

(a) 已知

$256^{x+y}\times 16^{-2x}=8^{-x+3y}$

证明$y=3x$。

(b) 进而求下列联立方程的精确解。

$256^{x+y}\times 16^{-2x}=8^{-x+3y}$

$x^2+3y^2=56$

✓ **答案** $(x,y)=\left(\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$或$\left(-\sqrt{2},-3\sqrt{2}\right)$。

解析 将各底数写成2的幂，得

$$256=2^8$$

$$16=2^4$$

$$8=2^3$$

原指数方程可写成

$$2^{8(x+y)}\times 2^{-8x}=2^{3(-x+3y)}$$

$$2^{8y}=2^{-3x+9y}$$

由同底数幂相等，得

$$8y=-3x+9y$$

$$y=3x$$

将$y=3x$代入另一方程，得

$$x^2+3(3x)^2=56$$

$$28x^2 = 56$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

当$x = \sqrt{2}$时，

$$y = 3\sqrt{2}$$

当$x = -\sqrt{2}$时，

$$y = -3\sqrt{2}$$

答：精确解为$(x, y) = \left(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$或$\left(-\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)$。

第 6 章 对数与指数函数

Chapter 6

6.1 对数与指数函数

题型 1 由对数遍历实数写值域

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **真数取正条件：**例题中，对数括号内的式子称为真数。对数有意义时，真数须_____。

$$3x-4>0$$

② **定义域的端点：**允许的自变量构成定义域。解真数大于零的不等式，再与题设比较。

$$3x-4>0$$

$$x>\frac{4}{3}$$

题设为严格不等式，故端点允许取等号。

$$a=\frac{4}{3}$$

③ **自然对数运算：**例题中的 ln 表示以 e 为底的对数。底数 e 约为 2.718，求对数是求指数。

$$e^0=1,\quad e^1=e,\quad e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$\ln 1=0,\quad \ln e=1,\quad \ln\left(\frac{1}{e}\right)=-1$$

④ **对数取遍实数：**记号 $\mathbb{R}$ 表示全体实数。真数遍历所有正数时，自然对数可取_____。对任意实数 u，取真数 t 如下。

$$t=e^u>0$$

$$\ln t=\ln(e^u)=u$$

⑤ **倍乘后的值域：**取上述端点时，例题的真数遍历所有正数。对数值乘以 2 后仍可取任意实数。所有可能的函数值构成值域，本例值域为_____。

$$x>\frac{4}{3},\quad 3x-4\in(0,\infty)$$

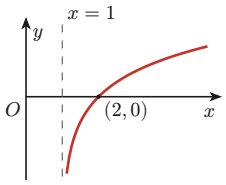
$$\ln(3x-4)\in\mathbb{R}$$

$$2\ln(3x-4)\in\mathbb{R}$$

⑥

对数函数的边界与取值

$$y=\ln(x-1),\quad x>1$$



填空：①大于零　②任意实数　③$\mathbb{R}$

点石成金　题目出现对数函数并要求值域时，先由真数大于零确定定义域，再判断真数能否遍历所有正数。

例 1　[2023 · May/June 0606/12 Q8(b)]

It is given that $\mathrm{f}(x)=2\ln(3x-4)$ for $x>a$.

(a) Write down the least possible value of a.

(b) Write down the range of f.

已知函数
$f(x)=2\ln(3x-4),\quad x>a$

(a) 写出 a 的最小可能值。
(b) 写出 f 的值域。

解答　由对数的真数大于零，得

$$3x-4>0$$

$$x>\frac{4}{3}$$

与题设比较，得 a 的最小值为

$$a=\frac{4}{3}$$

方法：先看对数括号内的式子，列出真数大于零，再查真数的取值范围。

辨析：定义域是自变量的取值范围，值域是函数值的取值范围。

拓展：对数函数与同底指数函数互为反函数。

取此值时，随着 x 遍历定义域，真数遍历所有正数。

$$3x-4\in(0,\infty)$$

故自然对数可取任意实数，乘以 2 后仍可取任意实数。
答：(a) $\frac{4}{3}$；(b) f 的值域为 $\mathbb{R}$。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/22 Q9(b)]

提示：看真数随自变量的取值范围，核查是否覆盖所有正数。

It is given that $\mathrm{f}(x)=\ln(2x+5)$ for $x>a$, where a is a constant.

(a) Write down the least possible value of a.

(b) Using your value of a, write down the range of f.

已知函数
$f(x)=\ln(2x+5),\quad x>a$

其中 a 为常数。

(a) 写出 a 的最小可能值。
(b) 使用所得的 a 值，写出 f 的值域。

✓ **答案** (a) $-\frac{5}{2}$；(b) $\mathbb{R}$。

解析 由对数的真数大于零，得

$$2x+5>0$$

$$x>-\frac{5}{2}$$

与题设比较，得 a 的最小值为

$$a=-\frac{5}{2}$$

取此值时，随着 x 遍历定义域，真数遍历所有正数。

$$2x+5\in(0,\infty)$$

故自然对数可取任意实数。
答：(a) $-\frac{5}{2}$；(b) f 的值域为 $\mathbb{R}$。

2. [2025 · May/June 0606/12 Q9(b)]
提示：先查真数的取值范围，再比较倍乘前后的函数值范围。

It is given that $\mathrm{f}(x)=2\ln(3x-4)$, for $x>a$, and that f^{-1} exists.

(a) Find the least possible value of a.

(b) For your value of a, find the range of f.

已知函数
$f(x)=2\ln(3x-4),\quad x>a$

且反函数 f^{-1} 存在。
(a) 求 a 的最小可能值。
(b) 对于所得的 a 值，求 f 的值域。

✓ **答案** (a) $\frac{4}{3}$；(b) $\mathbb{R}$。

解析 由对数的真数大于零，得

$$3x-4>0$$

$$x>\frac{4}{3}$$

在此范围内，函数严格递增，满足反函数存在的条件。故 a 的最小值为

$$a=\frac{4}{3}$$

取此值时，随着 x 遍历定义域，真数遍历所有正数。

$$3x-4\in(0,\infty)$$

故自然对数可取任意实数，乘以 2 后仍可取任意实数。
答：(a) $\frac{4}{3}$；(b) f 的值域为 $\mathbb{R}$。

3. [2022 · May/June 0606/11 Q3(a)]
提示：由给定的自变量范围，判断真数能否遍历所有正数。

A function f is such that $\mathrm{f}(x)=\ln(2x+1)$, for $x>-\frac{1}{2}$.

(a) Write down the range of f.

已知函数f满足

$f(x)=\ln(2x+1),\quad x>-\frac{1}{2}$

(a) 写出f的值域。

✓ **答案** $\mathbb{R}$

解析 由题设定义域，得

$$x>-\frac{1}{2}$$

$$2x+1\in(0,\infty)$$

真数遍历所有正数，故自然对数可取任意实数。
答：f的值域为$\mathbb{R}$。

4. [2022 · February/March 0606/12 Q9(a)(ii)]
提示：先由真数大于零求定义域端点，再看真数的取值范围。

(a) The function f is such that $\mathrm{f}(x)=\ln(5x+2)$, for $x>a$, where a is as small as possible.

(i) Write down the value of a.

(ii) Hence find the range of f.

(a) 已知函数f满足
$f(x)=\ln(5x+2),\quad x>a$

其中a尽可能小。
(i) 写出a的值。
(ii) 由此求f的值域。

✓ **答案** $\mathbb{R}$

解析 由对数的真数大于零，得

$$5x+2>0$$

$$x>-\frac{2}{5}$$

与题设比较，得

$$a=-\frac{2}{5}$$

取此值时，真数遍历所有正数。

$$5x+2\in(0,\infty)$$

故自然对数可取任意实数。
答：f的值域为$\mathbb{R}$。

5. [2022 · October/November 0606/12 Q8(b)]
提示：先求定义域端点；对数值加上常数后，再判断值域。

A function f(x) is such that $\mathrm{f}(x)=\ln(2x+3)+\ln 4$, for $x>a$, where a is a constant.

(a) Write down the least possible value of a.

(b) Using your value of a, write down the range of f.

已知函数f满足
$f(x)=\ln(2x+3)+\ln 4,\quad x>a$

其中a为常数。
(a) 写出a的最小可能值。
(b) 使用所得的a值，写出f的值域。

✓ **答案** $\mathbb{R}$

解析 由对数的真数大于零，得

$$2x+3>0$$

$$x>-\frac{3}{2}$$

与题设比较，得a的最小可能值为

$$a=-\frac{3}{2}$$

取此值时，真数遍历所有正数。

$$2x+3\in(0,\infty)$$

$$\ln(2x+3)\in\mathbb{R}$$

加上常数$\ln 4$后，函数值仍遍历全体实数。
答：f的值域为$\mathbb{R}$。

题型 2 由指数项的取值边界写值域或逆函数定义域

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **函数的值域：**题中 $x\in\mathbb{R}$ 表示 x 可取全体实数。将 x 代入下式得到输出 $f(x)$。

$$f(x)=e^{2x+1}$$

全部输出组成函数的_____。

② **指数项边界：**e 是约等于 2.718 的常数。当 x 取遍实数时，下式取遍所有正数。

$$e^{2x+1}>0$$

下界 0 _____取到，且输出没有上界。

③ **整体加常数：**指数项外加常数时，将取值不等式两边加上该常数。

$$e^{2x+1}>0$$

两边加 1 →

$$1+e^{2x+1}>1$$

所得不等式给出新函数的值域。

④ **输入受到限制：**底数 $2>1$，2^x 随 x 增大而增大。以 $x\geq -2$ 为例，代入允许取到的左端点。

$$2^x \geq 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

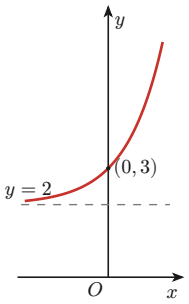
$$1 + 2^x \geq 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

值域包含下界，取值不等式用_____。

⑤ **逆函数定义域：** f^{-1} 表示 f 的逆函数。逆函数把原函数的输出作为输入，其定义域等于原函数的_____。

⑥ 指数项恒正

$$y = 2 + e^x$$



填空：①值域　②不能　③≥　④值域

点石成金　题目出现指数函数的值域或逆函数的定义域时，先确定指数项的取值边界及边界能否取到。

例 1　[2026 · May/June 0606/13 Q8(b)]

A function f is defined by $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$ for $x \in \mathbb{R}$.

(b) Find the domain of f^{-1}.

函数 f 定义为
$f(x) = e^{2x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$

(b) 求 f^{-1} 的定义域。

解答　当 x 取遍实数时，

$$2x + 1 \in \mathbb{R}$$

∴ 指数项取遍所有正数，f 的值域为

$$f(x) > 0$$

由逆函数的定义域等于原函数的值域，
答：f^{-1} 的定义域为 $x > 0$。

方法：先看输入范围，从指数项的边界及能否取到起手。

辨析：原函数值域是输出范围，逆函数定义域是这些输出作为输入的范围。

针对练习

1. [2024 · February/March 0606/12 Q4(a)]
提示：看指数能否遍历实数，再看指数项外加了什么常数。

A function f is such that $\mathrm{f}(x) = 2 + \mathrm{e}^{-3x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

(a) Write down the range of f.

函数 f 满足
$f(x) = 2 + e^{-3x}, \quad x \in \mathbb{R}$

(a) 写出 f 的值域。

✓ **答案**

$$f(x) > 2$$

解析 当 x 取遍实数时，$-3x$ 取遍实数，故指数项取遍所有正数。

$$e^{-3x} > 0$$

$$f(x) = 2 + e^{-3x} > 2$$

答：f 的值域为 $f(x) > 2$。

2. [2026 · May/June 0606/22 Q8(a)]
提示：看底数判断增减，再看输入左端点能否取到。

The function f is defined, for $x \geqslant -1$, by $\mathrm{f}(x) = 1 + 2^x$.

(a) Find the range of f.

函数 f 在 $x \geq -1$ 时定义为
$f(x) = 1 + 2^x$

(a) 求 f 的值域。

✓ **答案**

$$f(x) \geq 1.5$$

解析 ∵ 底数 $2 > 1$，2^x 随 x 增大而增大，且 $x \geq -1$，
∴

$$2^x \geq 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 1 + 2^x \geq 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$

当 $x = -1$ 时等号成立，且 $f(x)$ 没有上界。
答：f 的值域为 $f(x) \geq 1.5$。

3. [2021 · May/June 0606/11 Q5(b)]
提示：指数项取遍所有正数，再处理式外的常数。

The functions f and g are defined as follows.

$$\mathrm{f}(x) = x^2 + 4x \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{g}(x) = 1 + \mathrm{e}^{2x} \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}$$

(b) Write down the range of g.

函数f和g定义如下：
$f(x)=x^2+4x,\quad x\in\mathbb{R}$

$g(x)=1+e^{2x},\quad x\in\mathbb{R}$

(b) 写出g的值域。

✓ **答案** $g(x)>1$。

解析 当x取遍全体实数时，$2x$取遍全体实数，故e^{2x}取遍所有正数。

$$e^{2x}>0$$

两边加1，得

$$g(x)=1+e^{2x}>1$$

下界1不能取到，且函数值没有上界。

答：g的值域为$g(x)>1$。

4. [2022 · October/November 0606/13 Q6(a)]

提示：先写指数项的取值范围，再将两边减去常数。

A function f(x) is such that $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{3x}-4$, for $x\in\mathbb{R}$.

(a) Find the range of f.

函数f满足$f(x)=e^{3x}-4$，其中$x\in\mathbb{R}$。

(a) 求f的值域。

✓ **答案** $f(x)>-4$。

解析 当x取遍全体实数时，$3x$取遍全体实数，故e^{3x}取遍所有正数。

$$e^{3x}>0$$

两边减4，得

$$f(x)=e^{3x}-4>-4$$

下界-4不能取到，且函数值没有上界。

答：f的值域为$f(x)>-4$。

5. [2023 · February/March 0606/22 Q8(a)(i)]

提示：由输入范围确定指数项边界，再求原函数值域。

The function f is defined for $x\geqslant 0$ by $\mathrm{f}(x)=5-2\mathrm{e}^{-x}$.

(a) (i) Find the domain of f^{-1}.

函数f在$x\geq 0$上定义为$f(x)=5-2e^{-x}$。

(a) (i) 求f^{-1}的定义域。

✓ **答案** $3\leq x<5$。

解析 由$x\geq 0$，得

$$-x\leq 0$$

指数函数e^x随x增大而增大，故

$$0<e^{-x}\leq 1$$

乘以−2时不等号反向，再加5，得

$$-2 \le -2e^{-x} < 0$$

$$3 \le 5 - 2e^{-x} < 5$$

当$x = 0$时，

$$f(0) = 5 - 2e^{0} = 3$$

当x增大时，e^{-x}连续减小并趋近0，故$f(x)$连续增大并趋近5，但不能取到5。因此f的值域为$3 \le f(x) < 5$。
由逆函数的定义域等于原函数的值域，得
答：f^{-1}的定义域为$3 \le x < 5$。

题型 3　用积、商、幂法则合成单个对数

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **对数的含义：**例题中的 $\lg x$ 以 10 为底，x 为真数。对数表示底数应取的指数。

$$10^3 = 1000, \quad \lg 1000 = 3$$

$$2^2 = 4, \quad \log_2 4 = 2$$

底数须为正且不为 1，真数须为_____。

② **系数移作指数：**对数前的系数移作真数的_____。例题中的平方须连同系数一起处理。

$$3\lg x = \lg x^3$$

$$2\lg y^2 = \lg\left((y^2)^2\right) = \lg y^4$$

设底数为 b，真数为 M，系数为 k。

$$k\log_b M = \log_{b(M^k)}$$

③ **常数化为对数：**常数与对数同在一式，先把常数写成同底对数。

以 10 为底：

$$3 = \lg 1000$$

$$2 = \lg 100$$

以 2 为底：

$$2 = \log_2 4$$

④ **同底对数合并：**真数 M、N 均为正，同底对数按下列法则合并。

相加化为_____：

$$\lg x^3 + \lg 1000 = \lg(1000x^3)$$

$$\log_b M + \log_b N = \log_{b(MN)}$$

相减化为_____：

$$\lg x^3 - \lg y^4 = \lg\left(\frac{x^3}{y^4}\right)$$

$$\log_b M - \log_b N = \log_{b(\frac{M}{N})}$$

⑤ **分数指数化根：**系数为 $\frac{1}{2}$，移作指数后化为平方根。字母为正时，平方的算术平方根等于该字母。

$$c > 0, \quad \sqrt{c^2} = c$$

$$\frac{1}{2}\lg(9c^2) = \lg\left((9c^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \lg\sqrt{9c^2} = \lg(3c)$$

⑥ **真数分式化简：**真数出现多项式的商，先因式分解，再约分。约去的因式须不为 0。

$$x>2,\quad x-2\neq 0$$

$$\frac{x^2-4}{(x-2)^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{x+2}{x-2}$$

填空：①正数　②指数　③积　④商

点石成金　题目出现将含常数与对数的式子写成单个对数时，先将系数移作指数，并把常数写成同底对数。

例 1　[2023 · February/March 0606/12 Q4(a)]

(a) Write $3\lg x-2\lg y^2-3$ as a single logarithm to base 10.

(a) 将 $3\lg x-2\lg y^2-3$ 写成一个以 10 为底的对数。

解答　由对数的真数为正，得

$x>0,\quad y\neq 0$。

由幂法则及 $3=\lg 1000$，得

$$3\lg x-2\lg y^2-3=\lg x^3-\lg y^4-\lg 1000$$

$$=\lg\left(\frac{x^3}{y^4}\right)-\lg 1000$$

$=\lg\left(\frac{x^3}{1000y^4}\right)$。

答：$\lg\left(\frac{x^3}{1000y^4}\right)$。

方法：先看对数前的系数和式末常数，从系数移作指数起手。

辨析：x 是真数，y 是被平方的字母；真数为正不代表 y 为正。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/13 Q4(a)]

提示：看对数的底数，把常数写成同底对数再合并。

(a) Write $3+4\log_2 a-\log_2 b$ as a single base 2 logarithm.

(a) 将 $3+4\log_2 a-\log_2 b$ 写成一个以 2 为底的对数。

答案

$$\log_2\left(\frac{8a^4}{b}\right)$$

解析　由对数的真数为正，得

$a>0,\quad b>0$。

由 $2^3=8$，得

$3=\log_2 8$。

由幂法则及积、商法则，得

$$3+4\log_2 a-\log_2 b=\log_2 8+\log_2 a^4-\log_2 b$$

$$=\log_2(8a^4)-\log_2 b$$

$=\log_2\left(\frac{8a^4}{b}\right)$。

答：$\log_2\left(\frac{8a^4}{b}\right)$。

2. [2025 · October/November 0606/12 Q5(a)]

提示：看两处减号，比较合并后哪些因子应在分母。

(a) Write $5\lg a-4\lg b-3$ as a single base 10 logarithm.

(a) 将 $5\lg a-4\lg b-3$ 写成一个以 10 为底的对数。

✓ **答案**

$$\lg\left(\frac{a^5}{1000b^4}\right)$$

解析 由对数的真数为正，得

$a>0,\quad b>0$。

由幂法则及 $3=\lg 1000$，得

$$5\lg a-4\lg b-3=\lg a^5-\lg b^4-\lg 1000$$

$$=\lg\left(\frac{a^5}{b^4}\right)-\lg 1000$$

$=\lg\left(\frac{a^5}{1000b^4}\right)$。

答：$\lg\left(\frac{a^5}{1000b^4}\right)$。

3. [2023 · October/November 0606/11 Q6(a)]

提示：看二分之一系数，先化根，再处理常数项。

(a) Write $3\lg x-\frac{1}{2}\lg 4+2$ as a single logarithm to base 10.

(a) 将 $3\lg x-\frac{1}{2}\lg 4+2$ 写成一个以 10 为底的对数。

✓ **答案**

$$\lg(50x^3)$$

解析 由对数的真数为正，得

$x>0$。

由幂法则，得

$\frac{1}{2}\lg 4=\lg\sqrt{4}=\lg 2$。

又 $2=\lg 100$，故

$$3\lg x-\frac{1}{2}\lg 4+2=\lg x^3-\lg 2+\lg 100$$

$$=\lg\left(\frac{100x^3}{2}\right)$$

$=\lg(50x^3)$。

答：$\lg(50x^3)$。

4. [2024 · May/June 0606/11 Q3(a)]

提示：看平方差与分母的平方，分解后比较相同因子。

(a) Write $1+\lg(x^2-1)-2\lg(x-1)$, where $x>1$, as a single logarithm to base 10. Give your answer in its simplest form.

(a) 已知 $x>1$，将 $1+\lg(x^2-1)-2\lg(x-1)$ 写成一个以 10 为底的对数。答案须为最简形式。

✓ **答案**

$$\lg\left(\frac{10(x+1)}{x-1}\right)$$

解析　由 $x>1$，得

$x-1>0,\quad x^2-1>0$。

由 $1=\lg 10$ 及幂法则，得

$$1+\lg(x^2-1)-2\lg(x-1)=\lg 10+\lg(x^2-1)-\lg((x-1)^2)$$

$$=\lg\left(\frac{10(x^2-1)}{(x-1)^2}\right)$$

$=\lg\left(\frac{10(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}\right)$。

因 $x-1\neq 0$，约分得

$\lg\left(\frac{10(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}\right)=\lg\left(\frac{10(x+1)}{x-1}\right)$。

答：$\lg\left(\frac{10(x+1)}{x-1}\right)$。

5. [2023 · May/June 0606/13 Q3(a)]

提示：看字母为正的条件，判断开平方后能否去绝对值。

(a) Write $3+2\lg a-\frac{1}{2}\lg\left(4b^2\right)$, where a and b are both positive, as a single logarithm to base 10. Give your answer in its simplest form.

(a) 已知 a、b 均为正数，将 $3+2\lg a-\frac{1}{2}\lg(4b^2)$ 写成一个以 10 为底的对数。答案须为最简形式。

✓ **答案**

$$\lg\left(\frac{500a^2}{b}\right)$$

解析　因 a、b 均为正，得

$\sqrt{4b^2}=2b$。

由幂法则，得

$\frac{1}{2}\lg(4b^2)=\lg\sqrt{4b^2}=\lg(2b)$。

又 $3=\lg 1000$，故

$$3+2\lg a-\frac{1}{2}\lg(4b^2)=\lg 1000+\lg a^2-\lg(2b)$$

$$=\lg\left(\frac{1000a^2}{2b}\right)$$

$=\lg\left(\frac{500a^2}{b}\right)$。

答：$\lg\left(\frac{500a^2}{b}\right)$。

题型 4　换成一个对数未知量，解二次方程后还原

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **认识对数记号：**例题中的 $\log_2 x$，表示使 $2^t=x$ 成立的指数 t。记一般底数为 a、真数为 b，有下列关系。lg 的底数为 10，ln 的底数为自然常数 e。

$2^5=32,\quad \log_2 32=$ _____。

$$\log_a b = t \iff a^t = b$$

② **确定取值范围：**真数必须为_____数，底数必须为正且不等于 1。先分别列出条件，再取共同范围。

出现 $\log_2 x$ 与 $\log_x 2$：

$x > 0, \quad x \neq$ _____。

出现 $\log_2(x+1)$ 与 $\log_{x+1} 2$：

$$x+1 > 0, \quad x+1 \neq 1$$

$$x > -1, \quad x \neq 0$$

③ **统一对数未知：**例题中底数与真数互换，令 $t = \log_2 x$。由换底公式，另一项可写成 t 的倒数。真数含平方时，由指数关系把平方移作系数。

$$\log_x 2 = \frac{\ln 2}{\ln x} = \frac{1}{\frac{\ln x}{\ln 2}} = \frac{1}{t} \quad (t \neq 0)$$

$$\log_2(x^2) = \log_2\left((2^t)^2\right) = \log_2(2^{2t}) = 2t$$

$$\log_a(u^2) = 2\log_a u \quad (a > 0, a \neq 1, u > 0)$$

④ **化为二次方程：**例题换元后含 t 与 $\frac{1}{t}$。因 $t \neq 0$，两边乘 t，再移项、分解因式。

$$t - 4 = \frac{5}{t}$$

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$(t-5)(t+1) = 0$$

$$t = 5 \quad 或 \quad t = -1$$

⑤ **还原原来未知：**求出的 t 是对数值，须改写成指数式。真数含 $x+1$ 时，再减去 1。遇到分数指数，先化成根式；负指数再取倒数。

$t = \log_2 x$

$x = 2^t$

$t = \log_2(x+1)$

$x + 1 = 2^t$

$$x = 2^t - 1$$

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$$

$$2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

⑥ **建立交点方程：**题中两曲线相交，同一交点的 y 相等。令 $t = \ln x$，先将分母中的平方移作系数。所得方程仍可两边乘 t 整理。

$$4\ln x = 5 - \frac{3}{\ln(x^2)}$$

$$\ln(x^2) = 2\ln x = 2t$$

$$4t = 5 - \frac{3}{2t} \quad (t \neq 0)$$

填空：①5　②正　③1

点石成金　题目出现底数与真数互换的两个对数，或同底对数及其倒数时，先换成同一个对数未知量。

例 1　[2025 · October/November 0606/11 Q3(a)]

(a) Solve the equation $\log_2 x - 4 = 5\log_x 2$.

（a）解方程 $\log_2 x - 4 = 5\log_x 2$。

解答　由对数的真数与底数条件，得 $x > 0$ 且 $x \neq 1$。

令 $t = \log_2 x$，则 $t \neq 0$。由换底公式，得

$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x} = \frac{1}{t}$。

原方程化为

$t - 4 = \frac{5}{t}$。

两边乘 t，移项得

$t^2 - 4t - 5 = 0$，

$(t-5)(t+1) = 0$，

$t = 5$　或　$t = -1$。

还原得

$x = 2^5 = 32$　或　$x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$。

两值均满足 $x > 0$ 且 $x \neq 1$。

答：$x = 32$ 或 $x = \frac{1}{2}$。

方法：先看底数与真数互换的两项，设其中一项为对数未知量。

辨析：t 是换元后的对数值，x 是还原后待求的真数。

拓展：底数大于一时，负的对数值对应零与一之间的真数。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/13 Q4(b)]

提示：看两项的底数与真数，比较换底后是否互为倒数。

(b) Solve the equation $\lg x = 4\log_x 10$.

（b）解方程 $\lg x = 4\log_x 10$。

✓ **答案**　$x = 100$ 或 $x = \frac{1}{100}$。

解析　由对数的真数与底数条件，得 $x > 0$ 且 $x \neq 1$。

令 $t = \lg x$，则 $t \neq 0$，且

$\log_x 10 = \frac{1}{\lg x} = \frac{1}{t}$。

原方程化为

$t = \frac{4}{t}$。

两边乘 t，得

$t^2 = 4$，

$t = 2$　或　$t = -2$。

还原得

$x = 10^2 = 100$　或　$x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$。

两值均满足 $x > 0$ 且 $x \neq 1$。

答：$x = 100$ 或 $x = \frac{1}{100}$。

2. [2025 · October/November 0606/12 Q5(b)]

提示：看互换的底数与真数，还原时区分真数与未知数。

(b) Solve the equation $\log_5(x+1) - \log_{(x+1)} 5 = 0$.

（b）解方程 $\log_5(x+1) - \log_{x+1} 5 = 0$。

✓ **答案**　$x = 4$ 或 $x = -\frac{4}{5}$。

解析　由对数的真数与底数条件，得

$x + 1 > 0$，　$x + 1 \neq 1$，

故 $x > -1$ 且 $x \neq 0$。

令 $t = \log_5(x+1)$，则 $t \neq 0$，且

$\log_{x+1} 5 = \frac{1}{t}$。
原方程化为
$t - \frac{1}{t} = 0$。
两边乘 t，得
$t^2 - 1 = 0$，
$(t-1)(t+1) = 0$，
$t = 1$　或　$t = -1$。
还原得
$x + 1 = 5$　或　$x + 1 = \frac{1}{5}$，
$x = 4$　或　$x = -\frac{4}{5}$。
两值均满足 $x > -1$ 且 $x \neq 0$。
答：$x = 4$ 或 $x = -\frac{4}{5}$。

3. [2025 · February/March 0606/12 Q9]
提示：看倒数项前的系数，乘去分母后核对各项符号。

Solve the equation $\log_2(x+1) - 4\log_{(x+1)} 2 = 3$.

解方程 $\log_2(x+1) - 4\log_{x+1} 2 = 3$。

✓ **答案**　$x = 15$ 或 $x = -\frac{1}{2}$。
解析　由对数的真数与底数条件，得 $x > -1$ 且 $x \neq 0$。
令 $t = \log_2(x+1)$，则 $t \neq 0$，且
$\log_{x+1} 2 = \frac{1}{t}$。
原方程化为
$t - \frac{4}{t} = 3$。
两边乘 t，移项得
$t^2 - 3t - 4 = 0$，
$(t-4)(t+1) = 0$，
$t = 4$　或　$t = -1$。
还原得
$x + 1 = 2^4 = 16$　或　$x + 1 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$，
$x = 15$　或　$x = -\frac{1}{2}$。
两值均满足 $x > -1$ 且 $x \neq 0$。
答：$x = 15$ 或 $x = -\frac{1}{2}$。

4. [2026 · February/March 0606/12 Q10(a)]
提示：看真数中的平方，移作系数后比较同类对数项。

(a) Given that $\log_5(x^2) - \log_5 x - 3\log_x 5 = 2$, find x.

(a) 已知 $\log_5(x^2) - \log_5 x - 3\log_x 5 = 2$，求 x。

✓ **答案**　$x = 125$ 或 $x = \frac{1}{5}$。
解析　由 $\log_5 x$ 与 $\log_x 5$ 的条件，得 $x > 0$ 且 $x \neq 1$。
令 $t = \log_5 x$，则 $t \neq 0$，且
$\log_5(x^2) = 2\log_5 x = 2t$，
$\log_x 5 = \frac{1}{t}$。
原方程化为
$2t - t - \frac{3}{t} = 2$，
$t - \frac{3}{t} = 2$。
两边乘 t，移项得
$t^2 - 2t - 3 = 0$，
$(t-3)(t+1) = 0$，

$t=3$ 或 $t=-1$。

还原得

$x=5^3=125$ 或 $x=5^{-1}=\frac{1}{5}$。

两值均满足 $x>0$ 且 $x\neq 1$。

答：$x=125$ 或 $x=\frac{1}{5}$。

5. [2024 · May/June 0606/11 Q3(b)]

提示：看还原时的分数指数，区分开方、取倒数与减一。

(b) Solve the equation $4\log_5(x+1)=9\log_{(x+1)}5$, giving your answers in the form $a+b\sqrt{c}$, where a, b and c are constants.

(b) 解方程 $4\log_5(x+1)=9\log_{x+1}5$，答案写成 $a+b\sqrt{c}$ 的形式，其中 a、b、c 为常数。

✓ **答案** $x=-1+5\sqrt{5}$ 或 $x=-1+\frac{\sqrt{5}}{25}$。

解析 由对数的真数与底数条件，得 $x>-1$ 且 $x\neq 0$。

令 $t=\log_5(x+1)$，则 $t\neq 0$，且

$\log_{x+1}5=\frac{1}{t}$。

原方程化为

$4t=\frac{9}{t}$。

两边乘 t，得

$4t^2=9$，

$t=\frac{3}{2}$ 或 $t=-\frac{3}{2}$。

当 $t=\frac{3}{2}$ 时，

$x+1=5^{\frac{3}{2}}=5\sqrt{5}$，

$x=-1+5\sqrt{5}$。

当 $t=-\frac{3}{2}$ 时，

$x+1=5^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{5\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{25}$，

$x=-1+\frac{\sqrt{5}}{25}$。

两值均满足 $x>-1$ 且 $x\neq 0$。

答：$x=-1+5\sqrt{5}$ 或 $x=-1+\frac{\sqrt{5}}{25}$。

6. [2025 · May/June 0606/13 Q6]

提示：看两曲线的纵坐标表达式，列等式后按对分母系数。

Find the x-coordinates of the points of intersection of the following curves.

$$y=4\ln x \quad \text{and} \quad y=5-\frac{3}{\ln\left(x^2\right)}$$

Give your answers in exact form.

求下列两条曲线交点的横坐标：

$y=4\ln x$ 和 $y=5-\frac{3}{\ln(x^2)}$。

答案用精确形式表示。

✓ **答案** $x=e^{\frac{1}{2}}$ 或 $x=e^{\frac{3}{4}}$。

解析 由 $\ln x$ 有意义且分母不为零，得 $x>0$ 且 $x\neq 1$。

交点处两曲线的 y 相等，故

$4\ln x=5-\frac{3}{\ln(x^2)}$。

因 $x>0$，有

$\ln(x^2)=2\ln x$。

令 $t=\ln x$，则 $t\neq 0$，原方程化为

$4t=5-\frac{3}{2t}$。

两边乘 $2t$，移项得

$8t^2-10t+3=0$，

$(4t-3)(2t-1)=0$，

$t=\frac{3}{4}$ 或 $t=\frac{1}{2}$。
还原得
$x=e^{\frac{3}{4}}$ 或 $x=e^{\frac{1}{2}}$。
两值均满足 $x>0$ 且 $x\neq 1$。
答：交点的横坐标为 $e^{\frac{1}{2}}$ 和 $e^{\frac{3}{4}}$。

7. [2023 · February/March 0606/12 Q4(b)]
提示：看对数项与倒数项，比较两边分母后选同乘式。

(b) Solve the equation $\log_3 x+\log_x 3=\frac{5}{2}$.

(b) 解方程 $\log_3 x+\log_x 3=\frac{5}{2}$。

✓ **答案** $x=\sqrt{3}$ 或 $x=9$。
解析 由对数的真数与底数条件，得 $x>0$ 且 $x\neq 1$。
令 $t=\log_3 x$，则 $t\neq 0$，且
$\log_x 3=\frac{1}{t}$。
原方程化为
$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$。
两边乘 $2t$，移项得
$2t^2-5t+2=0$，
$(2t-1)(t-2)=0$，
$t=\frac{1}{2}$ 或 $t=2$。
还原得
$x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ 或 $x=3^2=9$。
两值均满足 $x>0$ 且 $x\neq 1$。
答：$x=\sqrt{3}$ 或 $x=9$。

8. [2024 · February/March 0606/12 Q2(b)]
提示：看换元后的平方关系，核对正负两支是否都已还原。

(b) Find the exact solutions of the equation $4\log_3 x=9\log_x 3$.

(b) 求方程 $4\log_3 x=9\log_x 3$ 的精确解。

✓ **答案** $x=3^{\frac{3}{2}}$ 或 $x=3^{-\frac{3}{2}}$。
解析 由对数的真数与底数条件，得 $x>0$ 且 $x\neq 1$。
令 $t=\log_3 x$，则 $t\neq 0$，且
$\log_x 3=\frac{1}{t}$。
原方程化为
$4t=\frac{9}{t}$。
两边乘 t，得
$4t^2=9$，
$t=\frac{3}{2}$ 或 $t=-\frac{3}{2}$。
还原得
$x=3^{\frac{3}{2}}$ 或 $x=3^{-\frac{3}{2}}$。
两值均满足 $x>0$ 且 $x\neq 1$。
答：$x=3^{\frac{3}{2}}$ 或 $x=3^{-\frac{3}{2}}$。

9. [2023 · October/November 0606/11 Q6(b)]
提示：看倒数项与对数项的位置，移项后逐项核对符号。

(b) Solve the equation $2\log_a 4 - 3\log_4 a - 5 = 0$, giving your answers in exact form.

(b) 解方程 $2\log_a 4 - 3\log_4 a - 5 = 0$，答案用精确形式表示。

✓ **答案** $a = \frac{1}{16}$ 或 $a = 4^{\frac{1}{3}}$。

解析 由对数的真数与底数条件，得 $a > 0$ 且 $a \neq 1$。

令 $t = \log_4 a$，则 $t \neq 0$，且

$\log_a 4 = \frac{1}{t}$。

原方程化为

$\frac{2}{t} - 3t - 5 = 0$。

两边乘 t，整理得

$3t^2 + 5t - 2 = 0$,

$(3t - 1)(t + 2) = 0$,

$t = \frac{1}{3}$ 或 $t = -2$。

还原得

$a = 4^{\frac{1}{3}}$ 或 $a = 4^{-2} = \frac{1}{16}$。

两值均满足 $a > 0$ 且 $a \neq 1$。

答：$a = \frac{1}{16}$ 或 $a = 4^{\frac{1}{3}}$。

10. [2023 · May/June 0606/13 Q3(b)]
提示：看右侧常数项，乘去分母后比较各项次数。

(b) Given that $2\log_c 3 = 7 + 4\log_3 c$, find the possible values of the positive constant c, giving your answers in exact form.

(b) 已知 $2\log_c 3 = 7 + 4\log_3 c$，求正常数 c 的可能值，答案用精确形式表示。

✓ **答案** $c = \frac{1}{9}$ 或 $c = 3^{\frac{1}{4}}$。

解析 因 c 为正数，且 $\log_c 3$ 的底数不等于 1，故 $c > 0$ 且 $c \neq 1$。

令 $t = \log_3 c$，则 $t \neq 0$，且

$\log_c 3 = \frac{1}{t}$。

原方程化为

$\frac{2}{t} = 7 + 4t$。

两边乘 t，移项得

$4t^2 + 7t - 2 = 0$,

$(4t - 1)(t + 2) = 0$,

$t = \frac{1}{4}$ 或 $t = -2$。

还原得

$c = 3^{\frac{1}{4}}$ 或 $c = 3^{-2} = \frac{1}{9}$。

两值均为正数且不等于 1。

答：$c = \frac{1}{9}$ 或 $c = 3^{\frac{1}{4}}$。

题型 5 合并对数后去对数，解二次方程并验根

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **真数取正条件：**例题中的两个真数都须大于零。

$$5x - 2 > 0, x > 0$$

$$x > \frac{2}{5}$$

真数必须为_____，底数须为正且不等于 1。

② **换底统一底数：**例题中 $25 = 5^2$，用换底公式化为同底。

$$\log_{25} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 25} = \frac{1}{2}\log_5 x$$

分母中的对数也可换底，如 $t > 0$ 且 $t \neq 1$ 时：

$$\frac{1}{\log_t 8} = \frac{\log_2 t}{\log_2 8} = \frac{1}{3}\log_2 t$$

常用对数记为 $\lg M$，其中 $M > 0$。

$$\lg M = \log_{10} M$$

③ **合并同底对数：**对数前的系数可移作真数的指数。

$$2\log_5(5x-2) = \log_5((5x-2)^2)$$

同底对数相加合成积，相减合成_____。

相加：

$\log_5 2 + \log_5 3 = \log_5 6$

$\log_a M + \log_a N = \log_{a(MN)}$

其中 $M, N > 0$，$a > 0$ 且 $a \neq 1$。

相减：

$\log_5 6 - \log_5 2 = \log_5 3$

$\log_a M - \log_a N = \log_{a(\frac{M}{N})}$

④ **两边去掉对数：**例题两边乘 2，合并后得：

$$\log_5\left(\frac{(5x-2)^2}{x}\right) = 1 = \log_5 5$$

$$\frac{(5x-2)^2}{x} = 5$$

同底对数相等 $\xrightarrow{\text{去对数}}$ 正的真数_____。右边为常数时，也可先写成同底对数。

$$1 = \lg 10, \frac{1}{2} = \log_9 3$$

⑤ **求二次方程根：**去对数后，展开并移项，化为二次方程。

能分解因式时，令各因式等于零。

$(5x-1)(5x-4) = 0$

$x = \frac{1}{5}$ 或 $x = \frac{4}{5}$

不能方便分解时，用求根公式。

$Az^2 + Bz + C = 0$

$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

$A \neq 0, B^2 - 4AC \geq 0$

右栏中 A, B, C 为系数，如：

$$2z^2 + 4z + 1 = 0$$

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

⑥ **筛选合法的根：**所得的根须满足原式条件。例题要求：

$$x > \frac{2}{5}$$

$x = \frac{1}{5}$ 不符合条件，舍去。

$x = \frac{4}{5}$ 符合条件，保留。

未知数作底数时，还须排除底数为_____的值。

填空：①正数　②商　③相等　④1

点石成金　题目出现含未知数的对数方程，且有不同底数、对数前的系数或分母中的对数时，先换底并合并对数。

例 1　[2025 · October/November 0606/13 Q9(a)]

Solve the following equations.

(a) $\log_5(5x-2) - \log_{25} x = \frac{1}{2}$

解下列方程。

(a) $\log_5(5x-2) - \log_{25} x = \frac{1}{2}$。

解答　由真数大于零，得

$$5x-2>0, x>0$$

$$x>\frac{2}{5}$$

由换底公式，得

$$\log_{25} x=\frac{1}{2}\log_5 x$$

原方程化为

$$\log_5(5x-2)-\frac{1}{2}\log_5 x=\frac{1}{2}$$

$$2\log_5(5x-2)-\log_5 x=1$$

$$\log_5\left(\frac{(5x-2)^2}{x}\right)=\log_5 5$$

由同底对数的真数相等，得

$$(5x-2)^2=5x$$

$$25x^2-25x+4=0$$

$$(5x-1)(5x-4)=0$$

$$x=\frac{1}{5}\text{ 或 }x=\frac{4}{5}$$

∵原式要求

$$x>\frac{2}{5}$$

∴舍去 $x=\frac{1}{5}$，保留 $x=\frac{4}{5}$。
答：$x=\frac{4}{5}$。

方法：先看两个真数的取值限制，再把底数二十五换成五。

辨析：代数根是二次方程的根，原方程的根是满足原式条件的代数根。

拓展：底数大于一时对数函数递增，介于零与一之间时递减。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/12 Q9(b)]
提示：看对数前的系数，合并后将各根与真数条件比较。

(b) Solve the equation $2\log_5 2x=1+\log_5(9x-10)$.

(b) 解方程：$2\log_5(2x)=1+\log_5(9x-10)$。

✓ **答案**

$$x=\frac{5}{4}\text{ 或 }x=10$$

解析　由真数大于零，得

$$2x>0, 9x-10>0$$

$$x > \frac{10}{9}$$

原方程化为

$$2\log_5(2x) - \log_5(9x-10) = 1$$

$$\log_5\left(\frac{(2x)^2}{9x-10}\right) = \log_5 5$$

由同底对数的真数相等，得

$$4x^2 = 5(9x-10)$$

$$4x^2 - 45x + 50 = 0$$

$$(4x-5)(x-10) = 0$$

$$x = \frac{5}{4} \text{ 或 } x = 10$$

两根均大于 $\frac{10}{9}$，符合原式条件。
答：$x = \frac{5}{4}$ 或 $x = 10$。

2. [2025 · May/June 0606/13 Q4]
提示：看分母对数的底数，换底后核对底数与真数条件。

Solve the equation $\dfrac{2}{\log_x 10} - \lg(x+4) = \lg 2$ for $x > 0$.

在 $x > 0$ 的条件下，解方程：$\frac{2}{\log_x 10} - \lg(x+4) = \lg 2$。

✓ **答案**

$$x = 4$$

解析 由题设及对数的底数条件，得

$$x > 0, x \neq 1$$

由换底公式，得

$$\frac{1}{\log_x 10} = \lg x$$

原方程化为

$$2\lg x - \lg(x+4) = \lg 2$$

$$\lg\left(\frac{x^2}{x+4}\right) = \lg 2$$

由同底对数的真数相等，得

$$x^2 = 2(x+4)$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2)=0$$

$$x=4 \text{ 或 } x=-2$$

$\because x>0$，$\therefore$舍去 $x=-2$。
$x=4$ 符合原式条件。
答：$x=4$。

3. [2024 · October/November 0606/21 Q5]
提示：看分母中的对数，换底后按加减号分配积与商。

Given that $\log_a(p+1)+\dfrac{1}{\log_p a}-\log_a(p+2)+\log_a 5=\log_a 12$, find the value of p.

已知 $\log_{a(p+1)}+\frac{1}{\log_p a}-\log_{a(p+2)}+\log_a 5=\log_a 12$，求 p 的值。

✓ **答案**

$$p=3$$

解析 由对数的底数及真数条件，得

$$a>0, a\neq 1, p>0, p\neq 1$$

由换底公式，得

$$\frac{1}{\log_p a}=\frac{\log_a p}{\log_a a}=\log_a p$$

原方程化为

$$\log_{a(p+1)}+\log_a p-\log_{a(p+2)}+\log_a 5=\log_a 12$$

$$\log_{a\left(5\frac{p(p+1)}{p+2}\right)}=\log_a 12$$

由同底对数的真数相等，得

$$5p(p+1)=12(p+2)$$

$$5p^2-7p-24=0$$

$$(p-3)(5p+8)=0$$

$$p=3 \text{ 或 } p=-\frac{8}{5}$$

$\because p>0$，$\therefore$舍去 $p=-\frac{8}{5}$。
$p=3$ 符合原式条件。
答：$p=3$。

4. [2025 · May/June 0606/11 Q8(b)]
提示：看一百二十五与五的幂关系，验根时兼查底数限制。

(a) Write down the set of values of x for which $\log_5(12x-4)$ exists.

(b) Solve the equation $\log_5(12x-4)=\dfrac{6}{\log_x 125}+1$.

(a) 写出使 $\log_5(12x-4)$ 有意义的 x 的取值范围。
(b) 解方程：$\log_5(12x-4)=\frac{6}{\log_x 125}+1$。

✓ **答案** (a) $x>\frac{1}{3}$；(b) $x=0.4$ 或 $x=2$

解析 (a) 由真数大于零，得

$$12x-4>0$$

$$x>\frac{1}{3}$$

答：$x>\frac{1}{3}$。

(b) 由真数及底数条件，得

$$x>\frac{1}{3}, x\neq 1$$

由换底公式，得

$$\frac{6}{\log_x 125}=\frac{6\log_5 x}{\log_5 125}=2\log_5 x$$

原方程化为

$$\log_5(12x-4)=2\log_5 x+1$$

$$\log_5(12x-4)=\log_5(x^2)+\log_5 5$$

$$\log_5(12x-4)=\log_5(5x^2)$$

由同底对数的真数相等，得

$$12x-4=5x^2$$

$$5x^2-12x+4=0$$

$$(5x-2)(x-2)=0$$

$$x=\frac{2}{5}\text{ 或 }x=2$$

两根均大于 $\frac{1}{3}$ 且不等于 1，符合原式条件。
答：$x=0.4$ 或 $x=2$。

5. [2023 · October/November 0606/22 Q4(b)]
提示：看右侧分数，先写成底数为九的对数再比较真数。

Solve the following equations.

(b) $2\log_9 y-\log_9(4y-9)=\dfrac{1}{2}$

解下列方程。
(b) $2\log_9 y-\log_9(4y-9)=\frac{1}{2}$。

✓ **答案**

$$y = 3 \text{ 或 } y = 9$$

解析 由真数大于零，得

$$y > 0, 4y - 9 > 0$$

$$y > \frac{9}{4}$$

合并对数，得

$$\log_9\left(\frac{y^2}{4y-9}\right) = \frac{1}{2}$$

$\because$

$$\frac{1}{2} = \log_9 3$$

$\therefore$

$$\frac{y^2}{4y-9} = 3$$

$$y^2 = 12y - 27$$

$$y^2 - 12y + 27 = 0$$

$$(y-3)(y-9) = 0$$

$$y = 3 \text{ 或 } y = 9$$

两根均大于 $\frac{9}{4}$，符合原式条件。
答：$y = 3$ 或 $y = 9$。

6. [2023 · May/June 0606/12 Q5(b)]
提示：看所得二次式的系数，用求根公式后比较较小根与下界。

(b) Solve the equation $2\lg(2x+5) - \lg(x+2) = 1$, giving your answers in exact form.

(b) 解方程 $2\lg(2x+5) - \lg(x+2) = 1$，答案用精确形式表示。

✓ **答案**

$$x = \frac{-5+\sqrt{5}}{4} \text{ 或 } x = \frac{-5-\sqrt{5}}{4}$$

解析 由真数大于零，得

$$2x + 5 > 0, x + 2 > 0$$

$$x > -2$$

合并对数，得

$$\lg\left(\frac{(2x+5)^2}{x+2}\right)=1=\lg 10$$

由同底对数的真数相等，得

$$(2x+5)^2=10(x+2)$$

$$4x^2+20x+25=10x+20$$

$$4x^2+10x+5=0$$

由求根公式，得

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\times4\times5}}{2\times4}$$

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{20}}{8}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{4}$$

$\because$

$$\sqrt{5}<3$$

$$\frac{-5-\sqrt{5}}{4}>\frac{-5-3}{4}=-2$$

$\therefore$ 两根均大于 -2，符合原式条件。

答：$x=\frac{-5+\sqrt{5}}{4}$ 或 $x=\frac{-5-\sqrt{5}}{4}$。

题型 6　化成同底幂并比较指数

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **底数的条件：**当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时，指数函数 a^x 是一一函数。相同底数的两个幂相等，可比较它们的指数。

$$a^u=a^v\xrightarrow{\text{比较指数}}u=v$$

② **将底数统一：**先把各底数写成同一正数的幂，再处理指数。母例右边为

$$512=2^9$$

③ **同底幂相除：**指数相减，减去的整个指数须加括号。例如

$$\frac{2^{u+3}}{2^{1-u}}=2^{(u+3)-(1-u)}=2^{2u+2}$$

④ **幂的乘方：**指数相乘；同底数幂相乘时，指数相加。例如

$$(2^3)^{u+1}\times(2^2)^u=2^{3(u+1)+2u}=2^{5u+3}$$

⑤ **比较指数求解：**两边已经是同底数的幂时，令指数相等，再解代数方程。例如

$$2^{2u+1}=2^7$$

$$2u+1=7,\quad u=\underline{\qquad}$$

⑥ **含两个未知量：**先由同底比较求线性关系，再代入另一式。例如

$$e^{2u+v}\times e^{u-2v}=1=e^0$$

$$3u-v=0,\quad v=3u$$

若另有 $u^2v=81$，则

$$u^2(3u)=81,\quad u^3=27$$
$$u=3,\quad v=9$$

实数的立方根唯一，故 $u^3=27$ 只给出实根 $u=3$。

填空：①3

点石成金　题目出现指数中含未知数的幂相等，且底数能化成同一正数时，先化成同底幂。

例 1　[2023 · October/November 0606/23 Q3(b)]

(b) Solve the equation $\dfrac{2^{t+4}}{2^{1-2t}}=512$.

(b) 解方程 $\frac{2^{t+4}}{2^{1-2t}}=512$。

解答　将右边化成以 2 为底的幂，得

$$512=2^9$$

由同底幂相除，得

$$\frac{2^{t+4}}{2^{1-2t}}=2^{(t+4)-(1-2t)}=2^{3t+3}$$

因此

$$2^{3t+3}=2^9$$

两边底数相同，比较指数，得

$$3t+3=9$$

$$t=2$$

答：$t=2$。

方法：先统一底数，按相除法则合并左边的指数，再比较两边的指数。

辨析：减去分母指数时，须把它作为一个整体加括号，负号作用到每一项。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/11 Q2(a)]

提示：看各底数能写成 2 的几次幂，再比较两边合并后的指数。

(a) Given that $256^{x+y}\times16^{-2x}=8^{-x+3y}$, show that $y=3x$.

(a) 已知 $256^{x+y}\times16^{-2x}=8^{-x+3y}$，证明 $y=3x$。

答案

$$y=3x$$

解析　将各底数化成以 2 为底的幂，得

$$(2^8)^{x+y}\times(2^4)^{-2x}=(2^3)^{-x+3y}$$

由幂的乘方及同底幂相乘，得

$$2^{8(x+y)-8x}=2^{3(-x+3y)}$$

两边底数相同，比较指数，得

$$8(x+y)-8x=3(-x+3y)$$

$$8x + 8y - 8x = -3x + 9y$$

$$8y = -3x + 9y$$

$$y = 3x$$

答：$y = 3x$。

2. [2024 · May/June 0606/11 Q9(a)]

提示：先合并指数乘积，求出两个未知量的线性关系。

(a) Solve the following simultaneous equations.

$$e^{x+y} \times e^{3x-2y} = 1$$

$$x^2 y = 256$$

（a）解下列联立方程：

$e^{x+y} \times e^{3x-2y} = 1$

$x^2 y = 256$

✓ **答案** $x = 4,\quad y = 16$。

解析 同底数幂相乘，指数相加，得

$$e^{(x+y)+(3x-2y)} = e^{4x-y} = 1 = e^0$$

比较指数，得

$$4x - y = 0,\quad y = 4x$$

代入第二个方程，得

$$x^2(4x) = 256$$

$$4x^3 = 256,\quad x^3 = 64$$

$$x = 4$$

再代回 $y = 4x$，得 $y = 16$。答：唯一实解为 $x = 4$、$y = 16$。

3. [2022 · May/June 0606/22 Q5(a)]

提示：先将各数写成同底幂，再合并指数。

(a) Solve the equation $\dfrac{625^{\frac{x^3-1}{2}}}{125^{x^3}} = 5$.

（a）解方程

$\dfrac{625^{\frac{x^3-1}{2}}}{125^{x^3}} = 5$

✓ **答案** $x = -\sqrt[3]{3}$。

解析 将各底数写成以 5 为底的幂，得

$$625 = 5^4$$

$$125 = 5^3$$

原方程可写为

$$\frac{(5^4)^{\frac{x^3-1}{2}}}{(5^3)^{x^3}} = 5^1$$

由幂的乘方及同底幂相除，得

$$5^{2(x^3-1)-3x^3}=5^1$$

$$5^{-x^3-2}=5^1$$

两边底数相同，比较指数，得

$$-x^3-2=1$$

$$x^3=-3$$

$$x=-\sqrt[3]{3}$$

答：$x=-\sqrt[3]{3}$。

题型 7　令一个指数幂为未知量，解二次方程再回代

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **指数拆分合并：**例题中两个指数互为_____，将负指数写成倒数。

$$e^{1-2x}=e^{-(2x-1)}=\frac{1}{e^{2x-1}}$$

底数为正数时，指数中的和、差可拆开。

$a^{u+v}=a^ua^v$　　$a^{u-v}=\frac{a^u}{a^v}$

例如，将两个指数都写成含同一个幂的形式。

$$e^{2x-5}=\frac{e^{2x-4}}{e}$$

$$e^{2x-3}=ee^{2x-4}$$

② **不同底数改写：**题中出现底数 2、8、64，先写成同底数幂。

$$8=2^3,\quad 64=2^6$$

幂的乘方，将指数相乘。

$$(a^u)^v=a^{uv}\quad(a>0)$$

例如，将较高次的指数幂写成平方。

$$4^{3x+1}=2^{6x+2}=4\left(2^{3x}\right)^2$$

$$9^{x+\frac{1}{2}}=3^{2x+1}=3\left(3^x\right)^2$$

③ **整体换元整理：**例题中反复出现同一个指数幂，作换元。$t=e^{2x-1}>$_____

将原方程写成含 t 的方程，两边乘 t。

$$10t-11=\frac{6}{t}$$

$$10t^2-11t-6=0$$

④ **二次方程取根：**将二次方程因式分解，再令各因式为零。

$$(5t+2)(2t-3)=0$$

$$t=-\frac{2}{5}\quad 或\quad t=\frac{3}{2}$$

指数幂恒为正数，舍去负根，保留 $t=$ _____。

⑤ **取对数还原：**例题中求得指数幂的值后，用自然对数 ln 还原指数。

$$e^{2x-1}=\frac{3}{2}$$

$$2x-1=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

设 u 为指数，k 为求得的正数。

$e^u=k$

$u=\ln k$

| $a^u=k$

| $u=\frac{\ln k}{\ln a}$

其中 $k>0$，$a>0$ 且 $a\neq 1$。

⑥ **倒数指数还原：**指数中含 $\frac{1}{x}$ 时，先写 $x\neq 0$。同底数幂相等时，令指数相等，再解关于 x 的方程。

$$4^{\frac{1}{x}}=2$$

$$2^{\frac{2}{x}}=2^1$$

$$\frac{2}{x}=1$$

$$x=2$$

填空：①相反数　②0　③$\frac{3}{2}$

点石成金　题目出现同底数的指数幂、平方或倒数时，先统一底数，令一个指数幂为未知量。

例 1　[2024 · May/June 0606/11 Q9(b)]

(b) Solve the equation $10e^{(2x-1)}-11=6e^{(1-2x)}$, giving your answer in exact form.

(b) 解下列方程，答案用精确形式表示。

$10e^{2x-1}-11=6e^{1-2x}$

解答　设 $t=e^{2x-1}$，则 $t>0$，且 $e^{1-2x}=\frac{1}{t}$。

原方程化为 $10t-11=\frac{6}{t}$。

两边乘 t，得 $10t^2-11t-6=0$，

$(5t+2)(2t-3)=0$，

$t=-\frac{2}{5}$　或　$t=\frac{3}{2}$。

由 $t>0$，舍去 $t=-\frac{2}{5}$，得 $e^{2x-1}=\frac{3}{2}$，

$2x-1=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$，

$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$。

答：$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$。

方法：先设一个指数幂为未知量，再用倒数表示另一项。

辨析：换元后的幂值须为正，原未知量可为负。

拓展：正底数不为一时，同底数幂相等则指数相等。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/13 Q2]

提示：先比较两项指数，把多出的一次幂移到系数中。

Solve the equation $3\left(2^{2x+1}\right)-11\left(2^{x}\right)+3=0$, giving your answers correct to 2 decimal places.

解下列方程，答案精确到小数点后两位。

$3(2^{2x+1})-11(2^{x})+3=0$

✓ **答案** $x=-1.58$ 或 $x=0.58$。

解析 由指数运算法则，得 $2^{2x+1}=2(2^{x})^{2}$。

设 $t=2^{x}$，则 $t>0$，原方程化为 $6t^{2}-11t+3=0$，

$(3t-1)(2t-3)=0$，

$t=\frac{1}{3}$ 或 $t=\frac{3}{2}$。

两个根均为正数，故 $2^{x}=\frac{1}{3}$ 或 $2^{x}=\frac{3}{2}$。

取对数，得 $x=\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln 2}\approx-1.58$，

或 $x=\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln 2}\approx 0.58$。

答：$x=-1.58$ 或 $x=0.58$，均精确到小数点后两位。

2. [2026 · May/June 0606/13 Q3(b)]

提示：看指数中的减二，改写平方项时保留对应的除数。

(b) Solve the equation $2^{2x-2}+3(2^{x})-40=0$.

(b) 解方程。

$2^{2x-2}+3(2^{x})-40=0$

✓ **答案** $x=3$。

解析 由指数运算法则，得 $2^{2x-2}=\frac{(2^{x})^{2}}{4}$。

设 $t=2^{x}$，则 $t>0$，原方程化为 $\frac{t^{2}}{4}+3t-40=0$。

两边乘 4，得 $t^{2}+12t-160=0$，

$(t+20)(t-8)=0$，

$t=-20$ 或 $t=8$。

由 $t>0$，舍去 $t=-20$，得 $2^{x}=8$，

$2^{x}=2^{3}$，

$x=3$。

答：$x=3$。

3. [2026 · February/March 0606/12 Q10(b)]
提示：先把八写成二的幂，再比较两项中含未知量的指数。

(b) Solve the equation $2\times 8^{2x+1}-3\times 2^{3x+4}-64=0$.

(b) 解方程。

$2\times 8^{2x+1}-3\times 2^{3x+4}-64=0$

✓ **答案** $x=\frac{2}{3}$。

解析 将底数 8 写成 2^3，得 $2\times 8^{2x+1}=2\times 2^{6x+3}=16(2^{3x})^2$，

$3\times 2^{3x+4}=48\times 2^{3x}$。

设 $t=2^{3x}$，则 $t>0$，原方程化为 $16t^2-48t-64=0$，

$t^2-3t-4=0$，

$(t-4)(t+1)=0$，

$t=4$ 或 $t=-1$。

由 $t>0$，舍去 $t=-1$，得 $2^{3x}=4$，

$2^{3x}=2^2$，

$3x=2$，

$x=\frac{2}{3}$。

答：$x=\frac{2}{3}$。

4. [2024 · October/November 0606/22 Q5(b)]
提示：先看两项指数的符号关系，再用同一个未知量表示。

Solve the following equations.

(b) $e^{2x+1}-10e^{-2x-1}=3$

解下列方程。

(b) $e^{2x+1}-10e^{-2x-1}=3$

✓ **答案** $x=\frac{\ln 5-1}{2}\approx 0.305$。

解析 设 $t=e^{2x+1}$，则 $t>0$，且 $e^{-2x-1}=\frac{1}{t}$。

原方程化为 $t-\frac{10}{t}=3$。

两边乘 t，得 $t^2-3t-10=0$，

$(t-5)(t+2)=0$，

$t=5$ 或 $t=-2$。

由 $t>0$，舍去 $t=-2$，得 $e^{2x+1}=5$，

$2x+1=\ln 5$，

$x=\frac{\ln 5-1}{2}\approx 0.305$。

答：$x=\frac{\ln 5-1}{2}\approx 0.305$。

5. [2024 · October/November 0606/21 Q3(a)]
提示：先排除使分母为零的取值，再比较两项指数。

(a) Solve the equation $8^{\frac{1}{x}} - 2 \times 8^{-\frac{1}{x}} = 1$.

(a) 解方程。

$8^{\frac{1}{x}} - 2 \times 8^{-\frac{1}{x}} = 1$

✓ **答案** $x = 3$。

解析 原式中含 $\frac{1}{x}$，故 $x \neq 0$。设 $t = 8^{\frac{1}{x}}$，则 $t > 0$，且 $8^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{t}$。

原方程化为 $t - \frac{2}{t} = 1$。

两边乘 t，得 $t^2 - t - 2 = 0$，

$(t-2)(t+1) = 0$，

$t = 2$ 或 $t = -1$。

由 $t > 0$，舍去 $t = -1$，得 $8^{\frac{1}{x}} = 2$，

$2^{\frac{3}{x}} = 2^1$，

$\frac{3}{x} = 1$，

$x = 3$。

所得 x 满足 $x \neq 0$。

答：$x = 3$。

6. [2025 · October/November 0606/13 Q9(b)]
提示：以中间的指数为基准，比较其余指数与它的差。

Solve the following equations.

(b) $e^{3y-7} + \frac{4}{e^3} = \frac{5}{e^{3y-1}}$

解下列方程。

(b) $e^{3y-7} + \frac{4}{e^3} = \frac{5}{e^{3y-1}}$

✓ **答案** $y = \frac{4}{3}$。

解析 设 $t = e^{3y-4}$，则 $t > 0$，且 $e^{3y-7} = \frac{t}{e^3}$，

$e^{3y-1} = e^3 t$。

原方程化为 $\frac{t}{e^3} + \frac{4}{e^3} = \frac{5}{e^3 t}$。

两边乘 $e^3 t$，得 $t^2 + 4t = 5$，

$t^2 + 4t - 5 = 0$，

$(t+5)(t-1) = 0$，

$t = -5$ 或 $t = 1$。

由 $t > 0$，舍去 $t = -5$，得 $e^{3y-4} = 1$，

$e^{3y-4} = e^0$，

$3y - 4 = 0$，

$y = \frac{4}{3}$。

答：$y = \frac{4}{3}$。

7. [2025 · May/June 0606/23 Q13]

提示：先把六十四写成二的幂，再找平方项对应的指数幂。

Solve the equation $64^{x+\frac{1}{3}}+2^{3x}-3=0$.

解方程。

$64^{x+\frac{1}{3}}+2^{3x}-3=0$

✓ **答案** $x=\log_8\left(\frac{3}{4}\right)\approx -0.138$。

解析 将底数 64 写成 2^6，得 $64^{x+\frac{1}{3}}=2^{6x+2}=4(2^{3x})^2$。

设 $t=2^{3x}$，则 $t>0$，原方程化为 $4t^2+t-3=0$，

$(4t-3)(t+1)=0$，

$t=\frac{3}{4}$ 或 $t=-1$。

由 $t>0$，舍去 $t=-1$，得 $2^{3x}=\frac{3}{4}$，

$8^x=\frac{3}{4}$。

取对数，得 $x=\log_8\left(\frac{3}{4}\right)\approx -0.138$。

答：$x=\log_8\left(\frac{3}{4}\right)\approx -0.138$。

8. [2023 · May/June 0606/21 Q4(b)]

提示：看两项指数是否互为相反数，取根后逐个比较正负。

(b) Solve the equation $e^{2x}-4+3e^{-2x}=0$, giving your answers in exact form.

(b) 解下列方程，答案用精确形式表示。

$e^{2x}-4+3e^{-2x}=0$

✓ **答案** $x=0$ 或 $x=\frac{\ln 3}{2}$。

解析 设 $t=e^{2x}$，则 $t>0$，且 $e^{-2x}=\frac{1}{t}$。

原方程化为 $t-4+\frac{3}{t}=0$。

两边乘 t，得 $t^2-4t+3=0$，

$(t-1)(t-3)=0$，

$t=1$ 或 $t=3$。

两个根均为正数，故 $e^{2x}=1$ 或 $e^{2x}=3$。

当 $e^{2x}=1$ 时，$2x=\ln 1=0$，

$x=0$。

当 $e^{2x}=3$ 时，$2x=\ln 3$，

$x=\frac{\ln 3}{2}$。

答：$x=0$ 或 $x=\frac{\ln 3}{2}$。

题型 8 先撤去外层对数或指数，再解内层代数方程

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **真数大于零：** 式子 $\ln(2x+5)$ 有意义，须使真数大于 _____。

$$2x+5>0\equiv x>-\frac{5}{2}$$

若定义域写成 $x>a$，则 a 的最小值为 _____。

复合函数代入：$fg(x)$ 表示复合函数，先算 g 再算 f。将内层结果整体代入外层的自变量处。

$$fg(x)=f(g(x))=\ln(2(x^2+1)+5)=\ln(2x^2+7)$$

重复复合仍按同一方式代入，例如：

$$p(x)=2x+1$$

$$p(p(x)) = 2(2x+1)+1 = 4x+3$$

撤去外层运算：ln 表示自然对数，底数记为 e。对数式先移项并除以系数，再用互逆关系。下式中，u 表示待求的实数。

对数形式（$u>0$）	指数形式
$2\ln u + 1 = 7$	$3^u = 27 = 3^3$
$\ln u = 3$	$u = 3$
$u = e^3$	

解出内层方程：外层撤去后，按方程形式求解。平方形式取正、负平方根，一般二次式可先因式分解。

平方形式	一般二次式
$x^2 = \frac{e^4-7}{2}$	$x^2+2x-3=0$
$x = \pm\sqrt{\frac{e^4-7}{2}}$	$(x+3)(x-1)=0$
	$x=-3$ 或 $x=1$

反函数取单支：设函数 q 的定义域为 $x \geq k$，且反函数 q^{-1} 存在。

$$q(x) = x^2+2x = (x+1)^2-1$$

每个函数值须只对应一个自变量，故从顶点取右支。于是 k 的最小值为 _____，值域为：

$$q(x) \geq -1$$

定义域筛选根：复合函数的定义域须满足内层与外层的限制。续取函数 r，定义域为 $x > -2$。

$$r(x) = 3^x$$

$$q(x) \geq -1 > -2$$

$$rq \text{ 的定义域为 } x \geq -1$$

解 $q(x)=3$，还须按 $x \geq -1$ 筛选根。

$$q(x) = 3 \equiv x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

$$x=-3 \text{ 或 } x=1$$

$$x \geq -1 \quad \therefore x = 1$$

← 填空：①0　②$-\frac{5}{2}$　③-1

点石成金　题目出现复合函数等于常数的对数或指数方程时，先逐层代入，再撤去外层运算。

例 1　[2025 · October/November 0606/22 Q9(c)]

It is given that $\mathrm{f}(x)=\ln(2x+5)$ for $x>a$, where a is a constant.

(a) Write down the least possible value of a.

It is also given that $\mathrm{g}(x)=x^2+1$ for $x\in\mathbb{R}$.

(c) Using your value of a, solve the equation $\mathrm{fg}(x)=4$.
Give your answers in exact form.

已知函数

$$f(x)=\ln(2x+5)\quad(x>a)$$

其中 a 为常数。
(a) 写出 a 的最小可能值。
又已知函数

$$g(x)=x^2+1\quad(x\in\mathbb{R})$$

(c) 使用所得的 a 值，解方程 $fg(x)=4$。答案用精确形式表示。

解答　由对数的真数大于零，得

$$2x+5>0$$

$$x>-\frac{5}{2}$$

故 a 的最小值为 $-\frac{5}{2}$。
由 $g(x)=x^2+1$，得

$$fg(x)=f(g(x))=\ln(2(x^2+1)+5)=\ln(2x^2+7)$$

代入方程，得

$$\ln(2x^2+7)=4$$

$$2x^2+7=e^4$$

$$x^2=\frac{e^4-7}{2}$$

因 $e^4>7$，得

$$x=\pm\sqrt{\frac{e^4-7}{2}}$$

两解均满足

$$g(x)=x^2+1\geq 1>-\frac{5}{2}$$

故两解均符合定义域。
答：(a) $a=-\frac{5}{2}$；(c) $x=\pm\sqrt{\frac{e^4-7}{2}}$。

方法：先看复合顺序，将内层整体代入，再孤立对数项。

辨析：定义域是允许输入的集合，值域是可能输出的集合。

拓展：平方方程开方后须考虑正负两支，再按原定义域筛选。

针对练习

1. [2023 · May/June 0606/12 Q8(d)]

提示：先看重复复合的层数，再比各层输出与下一层输入范围。

It is given that $f(x) = 2\ln(3x-4)$ for $x > a$.

(a) Write down the least possible value of a.

It is given that $g(x) = 2x-3$ for $x \geqslant 3$.

(d) (i) Find an expression for $g(g(x))$.

(ii) Hence solve the equation $fg(g(x)) = 4$ giving your answer in exact form.

已知函数

$$f(x) = 2\ln(3x-4) \quad (x > a)$$

(a) 写出 a 的最小可能值。

又已知函数

$$g(x) = 2x-3 \quad (x \geq 3)$$

(d)(i) 求 $g(g(x))$ 的表达式。

(ii) 由此解方程 $f(g(g(x))) = 4$，答案用精确形式表示。

✓ **答案** (a) $a = \frac{4}{3}$；(d)(i) $g(g(x)) = 4x-9$；(ii) $x = \frac{e^2+31}{12}$。

解析 由对数的真数大于零，得

$$3x-4 > 0$$

$$x > \frac{4}{3}$$

故 a 的最小值为 $\frac{4}{3}$。

由 $g(x) = 2x-3$，得

$$g(g(x)) = 2(2x-3)-3 = 4x-9$$

当 $x \geq 3$ 时，

$$g(x) = 2x-3 \geq 3$$

$$g(g(x)) = 4x-9 \geq 3 > \frac{4}{3}$$

故复合函数各层均有意义。

代入方程，得

$$f(g(g(x))) = 2\ln(3(4x-9)-4) = 4$$

$$2\ln(12x-31) = 4$$

$$\ln(12x-31) = 2$$

$$12x-31 = e^2$$

$$x = \frac{e^2+31}{12}$$

因 $e^2 > 5$，

$$\frac{e^2+31}{12} > \frac{5+31}{12} = 3$$

所得解符合定义域。

答：(a) $a = \frac{4}{3}$；(d)(i) $g(g(x)) = 4x - 9$；(ii) $x = \frac{e^2+31}{12}$。

2. [2026 · May/June 0606/11 Q6(d)]

提示：先看顶点与所取分支，再将方程各根与定义域比较。

The function f is such that $\mathrm{f}(x) = 3x^2 + 8x$ for $x \geqslant k$, where k is a constant.
It is given that f^{-1} exists.
k has the least possible value for which f^{-1} exists.

(a) Find the value of k.

(b) Find the range of f.

(d) The function g is such that $\mathrm{g}(x) = 3^x$ for $x > -6$.

(i) Write down the domain of gf.

(ii) Solve the equation $\mathrm{gf}(x) = 27$.

函数 f 满足

$$f(x) = 3x^2 + 8x \quad (x \geq k)$$

其中 k 为常数。已知反函数 f^{-1} 存在，且 k 取使 f^{-1} 存在的最小可能值。
(a) 求 k 的值。
(b) 求 f 的值域。
(d) 函数 g 满足

$$g(x) = 3^x \quad (x > -6)$$

(i) 写出 gf 的定义域。
(ii) 解方程 $gf(x) = 27$。

✓ **答案** (a) $k = -\frac{4}{3}$；(b) $f(x) \geq -\frac{16}{3}$；(d)(i) $x \geq -\frac{4}{3}$；(ii) $x = \frac{1}{3}$。

解析 配方得

$$f(x) = 3x^2 + 8x = 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}$$

抛物线的顶点横坐标为 $-\frac{4}{3}$。
由 f^{-1} 存在，f 的每个函数值须只对应一个自变量。
定义域为 $x \geq k$，故须从顶点或其右侧取单调分支。
因此 k 的最小值为

$$k = -\frac{4}{3}$$

当 $x = -\frac{4}{3}$ 时，f 取得最小值 $-\frac{16}{3}$。
故 f 的值域为

$$f(x) \geq -\frac{16}{3}$$

由 g 的定义域，复合函数 gf 须满足

$$x \geq -\frac{4}{3}$$

$$f(x) > -6$$

而

$$f(x) \geq -\frac{16}{3} > -6$$

故 gf 的定义域为 $x \geq -\frac{4}{3}$。
由方程 $gf(x) = 27$，得

$$3^{3x^2+8x} = 27 = 3^3$$

$$3x^2 + 8x = 3$$

$$3x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$(3x - 1)(x + 3) = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ 或 } x = -3$$

因 $-3 \leftarrow \frac{4}{3}$，舍去 $x = -3$；$x = \frac{1}{3}$ 符合定义域。
答：(a) $k = -\frac{4}{3}$；(b) $f(x) \geq -\frac{16}{3}$；(d)(i) $x \geq -\frac{4}{3}$；(ii) $x = \frac{1}{3}$。

3. [2024 · February/March 0606/12 Q2(a)]
提示：先用同底对数的运算法则，将两边各合成一个对数。

(a) Given that $\log_p a + \log_p 12 - \log_p 6 = 3\log_p 4$, find the value of a.

(a) 已知
$\log_p a + \log_p 12 - \log_p 6 = 3\log_p 4$

求 a 的值。(3 分)

✓ **答案** $a = 32$

解析 对数有意义，故 $p > 0$、$p \neq 1$，且 $a > 0$。
由同底对数的运算法则，得

$$\log_p a + \log_p 12 - \log_p 6 = \log_{p(\frac{12a}{6})} = \log_{p(2a)}$$

$$3\log_p 4 = \log_{p(4^3)} = \log_p 64$$

原方程可写为

$$\log_{p(2a)} = \log_p 64$$

同底对数相等，真数相等，故

$$2a = 64$$

$$a = 32$$

所得 a 为正，符合真数条件。
答：$a = 32$。

4. [2026 · May/June 0606/11 Q8(b)]
提示：先把外层对数式改写成指数式。

(b) Solve the equation $\log_2(\log_3 x) = 2$.

(b) 解方程
$\log_2(\log_3 x) = 2$

(3 分)

✓ **答案** $x = 81$
解析 由外层对数与指数的互逆关系，得

$$\log_3 x = 2^2 = 4$$

再撤去内层对数，得

$$x = 3^4 = 81$$

此时两层对数的真数分别为 81 和 4，均大于 0，符合条件。
答：$x = 81$。

5. [2023 · October/November 0606/12 Q8(b)]
提示：先看对数项外的系数与常数，开方后再比原输入范围。

(b) It is given that $\mathrm{g}(x) = \ln(2x^2 + 5)$ for $x \geqslant 0$,

$\mathrm{h}(x) = 3x - 2$ for $x \geqslant 0$.

Solve the equation $\mathrm{hg}(x) = 4$ giving your answer in exact form.

(b) 已知
$g(x) = \ln(2x^2 + 5) \quad (x \geq 0)$

$h(x) = 3x - 2 \quad (x \geq 0)$

解方程 $hg(x) = 4$，答案用精确形式表示。

✓ **答案** $x = \sqrt{\frac{e^2 - 5}{2}}$
解析 由 $x \geq 0$，得

$$2x^2 + 5 \geq 5$$

$$g(x) = \ln(2x^2 + 5) \geq \ln 5 > 0$$

故 $g(x)$ 满足 h 的定义域限制。
由复合函数的定义，得

$$hg(x) = h(g(x)) = 3\ln(2x^2 + 5) - 2$$

代入方程，得

$$3\ln(2x^2 + 5) - 2 = 4$$

$$3\ln(2x^2 + 5) = 6$$

$$\ln(2x^2+5)=2$$

$$2x^2+5=e^2$$

$$x^2=\frac{e^2-5}{2}$$

因 $e^2>5$，且 $x\geq 0$，得

$$x=\sqrt{\frac{e^2-5}{2}}$$

答：$x=\sqrt{\frac{e^2-5}{2}}$。

题型 9　两边取对数，解指数中的代数式

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **指数幂化简：**例题以自然常数 e 为底，分子是幂的平方，分母是根式。先把分子、分母化成同底数幂。

$$\left(e^{x+1}\right)^2=e^{2x+2}$$

$$\sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\left(e^{x+1}\right)^2}{\sqrt{e^x}}=e^{2x+2-\frac{x}{2}}=e^{\frac{3x}{2}+2}$$

同底数幂相除，指数_____。

② **自然对数求解：**把例题的整个指数记作 u，方程便成为下面的形式。ln 表示以 e 为底的自然对数，真数须_____。

$$e^u=10 \quad\Leftrightarrow\quad u=\ln 10$$

$$e^u=A \quad\Leftrightarrow\quad u=\ln A \quad (A>0)$$

③ **异底指数转化：**等式两边含不同底数的幂时，均取自然对数。乘积取对数化成_____，幂的指数移到前面。以下用实数 t 演示取对数后的整理。

$$2^{t-1}=3\times 5^t$$

$$(t-1)\ln 2=\ln 3+t\ln 5$$

$$t(\ln 2-\ln 5)=\ln 3+\ln 2=\ln 6$$

$$t=\frac{\ln 6}{\ln 2-\ln 5}$$

④ **平方指数求解：**指数含平方项时，取对数后先求平方的值。以下用实数 t 演示开平方。

$$e^{t^2+1}=e^5$$

$$t^2+1=\ln(e^5)=5$$

$$t^2 = 4$$

$$t = \pm 2$$

平方等于正数时，有_____个实数解。

⑤ **两点确定直线：**横坐标记为 X，纵坐标记为 Y。以过 $(0,2)$、$(2,1)$ 的直线作演示，记斜率为 m、纵截距为 b。先求纵坐标差与横坐标差的比，再代入一点求截距。

$$m = \frac{1-2}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

$$b = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 = 2$$

$$Y = mX + b = -\frac{1}{2}X + 2$$

⑥ **对数图象还原：**本题横坐标为 $X = x^2$，纵坐标为 $Y = \ln(3y)$。代入直线方程，再改写为指数式。

$$Y = mX + b$$

$$\ln(3y) = mx^2 + b$$

$$3y = e^{mx^2+b} = e^b e^{mx^2}$$

$$y = \frac{e^b}{3} e^{mx^2}$$

写成 $y = ke^{ax^2}$ 时，$k =$ _____，$a = m$。

填空：①相减　②大于零　③和　④2　⑤$\frac{e^b}{3}$

点石成金　题目出现未知数在指数中，且指数项之间为乘除关系时，先用指数运算法则化简，再两边取对数。

例 1　[2023 · October/November 0606/22 Q4(a)]

Solve the following equations.

(a) $\dfrac{\left(e^{x+1}\right)^2}{\sqrt{e^x}} = 10$

解下列方程。

(a) $\frac{\left(e^{x+1}\right)^2}{\sqrt{e^x}} = 10$

解答　由指数运算法则，得

$$\frac{\left(e^{x+1}\right)^2}{\sqrt{e^x}} = e^{2x+2-\frac{x}{2}} = e^{\frac{3x}{2}+2}$$

原方程化为

$$e^{\frac{3x}{2}+2} = 10$$

两边取自然对数，得

方法：先看分式中的底数，将平方与根式都改写成同底数幂。

辨析：幂的平方是指数乘二，幂的平方根是指数除以二。

拓展：指数函数与相应的对数函数互为反函数。

$$\frac{3x}{2}+2=\ln 10$$

$$x=2\frac{\ln 10-2}{3}$$

答：$x=2\frac{\ln 10-2}{3}$。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/11 Q3(b)]

提示：先看两边指数中的平方项，相除时给分母指数整体加括号。

(b) Solve the equation $e^{x^2-3}=25e^{7-x^2}$.

(b) 解方程

$e^{x^2-3}=25e^{7-x^2}$

✓ **答案**

$$x=\pm\sqrt{5+\ln 5}$$

解析 两边同除以正数 e^{7-x^2}，得

$$\frac{e^{x^2-3}}{e^{7-x^2}}=25$$

$$e^{2x^2-10}=25$$

两边取自然对数，得

$$2x^2-10=\ln 25=2\ln 5$$

$$x^2=5+\ln 5$$

因 $5+\ln 5>0$，开平方得

$$x=\pm\sqrt{5+\ln 5}$$

答：$x=\pm\sqrt{5+\ln 5}$。

2. [2023 · May/June 0606/21 Q4(a)]

提示：看两边幂的底数，取对数后将含未知数的项归到同侧。

(a) Solve the equation $5^{2y-1}=6\times 3^y$, giving your answer correct to 3 decimal places.

(a) 解方程，答案精确到小数点后 3 位。

$5^{2y-1}=6\times 3^y$

✓ **答案**

$$y=1.604$$

解析 两边均为正数，取自然对数，得

$$(2y-1)\ln 5=\ln 6+y\ln 3$$

$$2y\ln 5-y\ln 3=\ln 6+\ln 5$$

$$y(2\ln 5-\ln 3)=\ln 30$$

因 $2\ln 5-\ln 3=\ln\left(\frac{25}{3}\right)>0$，得

$$y=\frac{\ln 30}{2\ln 5-\ln 3}\approx 1.604$$

答：$y=1.604$，精确到小数点后 3 位。

3. [2026 · May/June 0606/21 Q4(c)]

提示：先看坐标轴代表的量，还原纵坐标时保留真数中的系数。

It is given that x and y are variables.

When $\ln 3y$ is plotted against x^2 a straight line is obtained.

This straight line passes through the points (4.64, 12.24) and (6.84, 8.94).

(a) Show that $y=ke^{ax^2}$ where k and a are exact constants.

(c) Find the values of x when $y=10$.

已知 x 和 y 是变量。
以 x^2 为横坐标、$\ln(3y)$ 为纵坐标作图，所得图象是一条直线。
该直线经过点 $(4.64, 12.24)$ 和 $(6.84, 8.94)$。
(a) 证明

$$y=ke^{ax^2}$$

其中 k 和 a 为精确常数。
(c) 求 $y=10$ 时 x 的值。

✓ **答案** (a) $k=\frac{e^{19.2}}{3}$，$a=-\frac{3}{2}$；(c) $x\approx\pm 3.25$。

解析 (a) 横坐标为 x^2，纵坐标为 $\ln(3y)$，故直线斜率为

$$m=\frac{8.94-12.24}{6.84-4.64}=-\frac{3.30}{2.20}=-\frac{3}{2}$$

设纵截距为 b，代入点 $(4.64, 12.24)$，得

$$12.24=-\frac{3}{2}\times 4.64+b$$

$$b=12.24+6.96=19.2$$

因此

$$\ln(3y)=-\frac{3}{2}x^2+19.2$$

$$3y=e^{19.2-\frac{3}{2}x^2}=e^{19.2}e^{-\frac{3}{2}x^2}$$

$$y=\frac{e^{19.2}}{3}e^{-\frac{3}{2}x^2}$$

这与 $y=ke^{ax^2}$ 的形式相同，其中

$$k=\frac{e^{19.2}}{3}$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

(c) 将 $y = 10$ 代入对数关系式，得

$$\ln 30 = -\frac{3}{2}x^2 + 19.2$$

$$x^2 = \frac{2}{3}(19.2 - \ln 30)$$

右边为正数，故

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}(19.2 - \ln 30)} \approx \pm 3.25$$

答：(a) $k = \frac{e^{19.2}}{3}$，$a = -\frac{3}{2}$，均为精确常数；(c) $x \approx \pm 3.25$。

4. [2022 · May/June 0606/21 Q1(a)]
提示：未知数在指数中，两边取自然对数。

(a) Solve the equation $5^{w-1} = 12$, giving your answer correct to 2 decimal places.

(a) 解方程$5^{w-1} = 12$，答案保留两位小数。

✓ **答案** $w = 2.54$

解析 两边取自然对数，得

$$(w-1)\ln 5 = \ln 12$$

$$w - 1 = \frac{\ln 12}{\ln 5}$$

$$w = 1 + \frac{\ln 12}{\ln 5} \approx 2.54$$

答：$w = 2.54$，保留两位小数。

5. [2022 · October/November 0606/22 Q2]
提示：两边同除以右边的指数幂，合并同底数幂。

Solve the equation $4e^{2x-3} = 7e^{5-x}$.

解方程$4e^{2x-3} = 7e^{5-x}$。

✓ **答案** $x = \frac{8+\ln(\frac{7}{4})}{3} \approx 2.85$

解析 由$e^{5-x} > 0$，两边同除以$4e^{5-x}$，得

$$\frac{e^{2x-3}}{e^{5-x}} = \frac{7}{4}$$

$$e^{3x-8} = \frac{7}{4}$$

两边取自然对数，得

$$3x - 8 = \ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$x=\frac{8+\ln\left(\frac{7}{4}\right)}{3}\approx 2.85$$

答：$x=\frac{8+\ln\left(\frac{7}{4}\right)}{3}\approx 2.85$。

题型 10　先反解指数外面的代数运算，再取对数求自变量

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **复合次序：**例题中的 $gf(x)$ 表示 $g(f(x))$。先代入函数_____，再代入函数_____。

$$gf(x)=g(2e^x+5)=\sqrt{2e^x+4}$$

② **消去根号：**根式等于 3，两边平方，消去根号。

$$\sqrt{2e^x+4}=3\xrightarrow{\text{两边平方}}2e^x+4=9$$

分数指数的分母对应根式，分子对应幂。对 $u\geq 0$，例如

$$u^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{u}\right)^3=27$$

$$\sqrt{u}=3$$

$$u=9$$

③ **分离指数：**指数项外有加法和乘法，先减去常数，再除以系数。

$$2e^x+4=9\xrightarrow{\text{两边减 4}}2e^x=5\xrightarrow{\text{两边除以 2}}e^x=\frac{5}{2}$$

④ **取自然对数：**ln 表示以 e 为底的自然对数。两边取自然对数，利用对数与指数互逆求解。

$$\ln(e^x)=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

由此得 $x=$_____。

⑤ **指数含系数：**指数中含有自变量的系数，取对数后再除以该系数。

$$e^{-2x}=3\xrightarrow{\text{取自然对数}}-2x=\ln 3\xrightarrow{\text{两边除以负 2}}x=-\frac{\ln 3}{2}$$

⑥ **平方根取舍：**平方项等于正数，开平方有正负两支。依据原式中该项的取值范围舍去不合条件的一支。

$$(e^x+1)^2=4,\quad e^x+1>1$$

正根：$e^x+1=2$　　负根：$e^x+1=-2$，舍去

填空：①f　②g　③$\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

点石成金　题目出现含指数的复合函数方程时，先展开复合函数，反解指数外的运算，再取对数求自变量。

例 1　[2025 · February/March 0606/22 Q7(b)]

It is given that $\mathrm{f}(x)=2\mathrm{e}^x+a$ for $x\geqslant 0$, where a is an integer

and $\mathrm{g}(x)=\sqrt{x-1}$ for $x\geqslant 1$.

(b) In the case where $a=5$, solve the equation $\mathrm{gf}(x)=3$.
Give your answer correct to 3 decimal places.

已知
$f(x)=2e^x+a,\quad x\geq 0$，
其中 a 为整数；且
$g(x)=\sqrt{x-1},\quad x\geq 1$。
(b) 当 $a=5$ 时，解方程 $gf(x)=3$。答案精确到小数点后 3 位。

解答 由 $a=5$ 得
$f(x)=2e^x+5$。
由 $gf(x)=g(f(x))$ 得
$\sqrt{2e^x+4}=3$，
两边平方，得
$2e^x+4=9$，
$2e^x=5$，
$e^x=\frac{5}{2}$。
两边取自然对数，得
$x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)\approx 0.916$。
所得 $x>0$，且 $f(x)=10\geq 1$，符合定义域要求。
答：$x=0.916$，精确到小数点后 3 位。

方法：先看复合函数的外层，消去根号，再分离指数项取对数。

辨析：gf 是先代入 f 再代入 g，fg 是先代入 g 再代入 f。

针对练习

1. [2024 · February/March 0606/12 Q4(d)]
提示：先反解最外层的幂，再反解指数。

A function f is such that $\mathrm{f}(x)=2+\mathrm{e}^{-3x}$, $x\in\mathbb{R}$.

A function g is such that $\mathrm{g}(x)=x^{\frac{3}{2}}+4$, $x\geqslant 0$.

(d) Find the exact solution of the equation $\mathrm{gf}(x)=12$.

函数 f 满足 $f(x)=2+e^{-3x}$，$x\in\mathbb{R}$。函数 g 满足 $g(x)=x^{\frac{3}{2}}+4$，$x\geq 0$。（d）求方程 $gf(x)=12$ 的精确解。

✓ **答案** $x=-\frac{\ln 2}{3}$

解析 $gf(x)$ 表示先求 $f(x)$，再将其输入 g。由题意，

$$(2+e^{-3x})^{\frac{3}{2}}+4=12$$

$$(2+e^{-3x})^{\frac{3}{2}}=8$$

因 $2+e^{-3x}>0$，两边取 $\frac{2}{3}$ 次幂，得

$$2+e^{-3x}=8^{\frac{2}{3}}=4$$

$$e^{-3x}=2$$

两边取自然对数，得

$$-3x=\ln 2$$

$$x=-\frac{\ln 2}{3}$$

此时 $f(x)=4\geq 0$，满足 g 的定义域。答：$x=-\frac{\ln 2}{3}$。

2. [2023 · October/November 0606/21 Q9(a)]
提示：开平方后，将正负两支与指数加一的取值范围比较。

The functions f and g are defined as follows, for all real values of x.

$$\mathrm{f}(x)=2x^2-1$$
$$\mathrm{g}(x)=\mathrm{e}^x+1$$

(a) Solve the equation $\mathrm{fg}(x)=8$.

函数 f 和 g 对所有实数 x 定义如下：
$f(x)=2x^2-1$，
$g(x)=e^x+1$。
（a）解方程 $fg(x)=8$。

✓ **答案**

$$x=\ln\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-1\right)$$

解析　由 $fg(x)=f(g(x))$ 得

$2(e^x+1)^2-1=8$，

$(e^x+1)^2=\frac{9}{2}$，

$e^x+1=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$。

$\because e^x>0$，$\therefore e^x+1>1$，负根舍去，得

$e^x+1=\frac{3}{\sqrt{2}}$，

$e^x=\frac{3}{\sqrt{2}}-1$。

$\because \frac{3}{\sqrt{2}}-1>0$，两边取自然对数，得

$x=\ln\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-1\right)$。

答：$x=\ln\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-1\right)$。

第 7 章 直线图

Chapter 7

7.1 直线图

题型 1 用中点和垂直斜率求垂直平分线及线上坐标

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **垂直平分线：**线段 AB 的端点为 $A(-2,3)$、$B(8,-3)$。经过其中点且与它垂直的直线，称为垂直平分线。

② **中点坐标计算：**把 AB 的中点记作 M。中点的横、纵坐标分别取两端点相应坐标的_____。

$$\left(\frac{-2+8}{2},\frac{3+(-3)}{2}\right)=(3,0)$$

③ **直线斜率计算：**直线的斜率用_____除以横坐标差求得。两次相减的点序相同，横坐标差不为零。设 AB 的斜率为 m_1。

$$m_1=\frac{-3-3}{8-(-2)}=-\frac{3}{5}$$

④ **垂直斜率计算：**设垂直平分线的斜率为 m_2。两条斜率均存在的垂直直线，斜率互为_____。

$$m_1m_2=-1$$

$$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{-\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}$$

⑤ **直线方程列写：**垂直平分线经过 $M(3,0)$，斜率为 $\frac{5}{3}$。用纵坐标差等于斜率乘横坐标差列式。以 (x,y) 表示线上任一点，得

$$y-0=\frac{5}{3}(x-3)$$

⑥ **坐标代入求值：**线上点的坐标满足_____。把给出的坐标代入，求另一个坐标。

已知横坐标为 0：

$$y=\frac{5}{3}(0-3)=-5$$

已知纵坐标为 5：

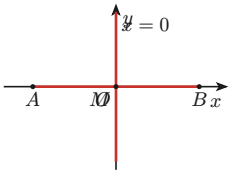
$$5=\frac{5}{3}(x-3)$$

$$x-3=5\times\frac{3}{5}=3$$

$$x=6$$

⑦ 中点与垂直关系

$A(-2,0)$，$B(2,0)$，$M(0,0)$



填空：①平均数 ②纵坐标差 ③负倒数 ④直线方程

点石成金　题目出现垂直平分线及线上点的一个坐标时，先求线段中点和垂直平分线的斜率。

例 1　[2026 · May/June 0606/12 Q2(a)]

Points A and B have coordinates $A(-2, 3)$ and $B(8, -3)$.

(a) The perpendicular bisector of AB passes through the point $C(0, c)$.

Find the value of c.

点 A 和 B 的坐标分别为 $A(-2,3)$ 和 $B(8,-3)$。
(a) 线段 AB 的垂直平分线经过点 $C(0,c)$。求 c 的值。

解答　设 AB 的中点为 M，其坐标为

$$\left(\frac{-2+8}{2}, \frac{3+(-3)}{2}\right) = (3, 0)$$

方法：先看两端点坐标，分别求中点与原线段斜率，再列垂直平分线方程。

辨析：平分是经过线段中点，垂直是与原线段所在直线成直角。

设 AB 的斜率为 m_1，则

$$m_1 = \frac{-3-3}{8-(-2)} = -\frac{3}{5}$$

由垂直直线的斜率互为负倒数，垂直平分线的斜率为

$$m_2 = -\frac{1}{-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

垂直平分线经过 $M(3,0)$，其方程为

$$y = \frac{5}{3}(x-3)$$

将 $C(0,c)$ 代入，得

$$c = \frac{5}{3}(0-3) = -5$$

答：$c = -5$。

针对练习

1. [2026 · February/March 0606/22 Q2(a)]

提示：看两端点的坐标差，求斜率时核对两次相减的点序。

Points A and B have coordinates $(1, 3)$ and $(-7, 1)$.
The point P with coordinates $(2, a)$ lies on the perpendicular bisector of AB.

(a) Find the value of a.

点 A 和 B 的坐标分别为 $(1,3)$ 和 $(-7,1)$。点 P 的坐标为 $(2,a)$，它在线段 AB 的垂直平分线上。
(a) 求 a 的值。

✓ **答案**

$$a = -18$$

解析　设 AB 的中点为 M，其坐标为

$$\left(\frac{1+(-7)}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (-3, 2)$$

设 AB 的斜率为 m_1，则

$$m_1 = \frac{1-3}{-7-1} = \frac{1}{4}$$

由垂直直线的斜率互为负倒数，垂直平分线的斜率为

$$m_2 = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$$

垂直平分线经过 $M(-3, 2)$，其方程为

$$y - 2 = -4(x + 3)$$

将 $P(2, a)$ 代入，得

$$a - 2 = -4(2 + 3) = -20$$

$$a = -18$$

答：$a = -18$。

2. [2021 · February/March 0606/12 Q3(a)]

提示：垂直平分线经过线段中点，且与线段所在直线垂直。

The line AB is such that the points A and B have coordinates $(-4, 6)$ and $(2, 14)$ respectively.

(a) The point C, with coordinates $(7, a)$ lies on the perpendicular bisector of AB. Find the value of a.

直线AB上的点A和B的坐标分别为$(-4, 6)$和$(2, 14)$。

(a) 点C的坐标为$(7, a)$，它位于线段AB的垂直平分线上。求a的值。

✓ **答案** $a = 4$

解析 设AB的中点为M，则

$$M\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{6+14}{2}\right) = M(-1, 10)$$

直线AB的斜率为

$$m_1 = \frac{14-6}{2-(-4)} = \frac{4}{3}$$

由垂直直线的斜率互为负倒数，垂直平分线的斜率为

$$m_2 = -\frac{1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

垂直平分线经过$M(-1, 10)$，其方程为

$$y - 10 = -\frac{3}{4}(x + 1)$$

代入$C(7, a)$，得

$$a - 10 = -\frac{3}{4}(7 + 1) = -6$$

$$a = 4$$

答：$a = 4$。

3. [2022 · October/November 0606/13 Q13(a)]

提示：先求线段中点和垂直平分线的斜率，再代入横坐标。

The points P and Q have coordinates $(5, -12)$ and $(15, -6)$ respectively. The point R lies on the line l, the perpendicular bisector of the line PQ. The x-coordinate of R is 7.

(a) Find the y-coordinate of R.

点P和Q的坐标分别为$(5, -12)$和$(15, -6)$。直线l是线段PQ的垂直平分线，点R位于直线l上，R的横坐标为7。

(a) 求R的纵坐标。

✓ **答案** -4

解析 设PQ的中点为M，则

$$M\left(\frac{5+15}{2}, \frac{-12+(-6)}{2}\right) = M(10, -9)$$

直线PQ的斜率为

$$m_1 = \frac{-6-(-12)}{15-5} = \frac{3}{5}$$

由垂直直线的斜率互为负倒数，直线l的斜率为

$$m_2 = -\frac{1}{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

直线l经过$M(10, -9)$，其方程为

$$y + 9 = -\frac{5}{3}(x - 10)$$

代入$x = 7$，得

$$y + 9 = -\frac{5}{3}(7 - 10) = 5$$

$$y = -4$$

答：R的纵坐标为-4。

4. [2023 · October/November 0606/13 Q2]

提示：看端点纵坐标的分母，中点取平均与斜率作差分开算。

The perpendicular bisector of the line joining the points $\left(-3, \frac{2}{3}\right)$ and $\left(6, -\frac{7}{3}\right)$ passes through the point $(2, k)$. Find the value of k.

连接点 $\left(-3, \frac{2}{3}\right)$ 和 $\left(6, -\frac{7}{3}\right)$ 的线段的垂直平分线经过点 $(2, k)$。求 k 的值。

✓ **答案**

$$k = \frac{2}{3}$$

解析 设连接两点的线段的中点为 M，其坐标为

$$\left(\frac{-3+6}{2}, \frac{\frac{2}{3}+\left(-\frac{7}{3}\right)}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}\right)$$

设连接两点的直线的斜率为 m_1，则

$$m_1 = \frac{\left(-\frac{7}{3}\right) - \frac{2}{3}}{6 - (-3)} = -\frac{1}{3}$$

由垂直直线的斜率互为负倒数，垂直平分线的斜率为

$$m_2 = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$$

垂直平分线经过 $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}\right)$，其方程为

$$y + \frac{5}{6} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

将点 $(2, k)$ 代入，得

$$k + \frac{5}{6} = 3\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$k = \frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$$

答：$k = \frac{2}{3}$。

5. [2023 · May/June 0606/11 Q3(a)]

提示：看已知的是纵坐标，代入后比较该点与中点的纵坐标差。

The points A and B have coordinates $(2, 5)$ and $(10, -15)$ respectively. The point P lies on the perpendicular bisector of the line AB. The y-coordinate of P is -9.

(a) Find the x-coordinate of P.

点 A 和 B 的坐标分别为 $(2, 5)$ 和 $(10, -15)$。点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，P 的纵坐标为 -9。

(a) 求 P 的横坐标。

✓ **答案**

$$-4$$

解析 设 AB 的中点为 M，其坐标为

$$\left(\frac{2 + 10}{2}, \frac{5 + (-15)}{2}\right) = (6, -5)$$

设 AB 的斜率为 m_1，则

$$m_1 = \frac{-15 - 5}{10 - 2} = -\frac{5}{2}$$

由垂直直线的斜率互为负倒数，垂直平分线的斜率为

$$m_2 = -\frac{1}{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

垂直平分线经过 $M(6, -5)$，其方程为

$$y + 5 = \frac{2}{5}(x - 6)$$

设 P 的横坐标为 p，将 $P(p,-9)$ 代入，得

$$-9+5=\frac{2}{5}(p-6)$$

$$p-6=-4\times\frac{5}{2}=-10$$

$$p=-4$$

答：P 的横坐标为 -4。

题型 2　联立直线与曲线后求交点连线的垂直平分线

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **联立求交点：**直线与曲线交于 A,B，交点同时满足两式。将直线中的 y 代入曲线，求横坐标，再求纵坐标。

$$3x+4=2x^2+8x+1$$

$$2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)=0$$

交点的横坐标为 _____。

② **乘积平方展开：**曲线含有 xy 或 y^2 时，用直线的表达式替换 y。沿用例题中的直线，替换后分别展开。

含有乘积 xy：

$xy=x(3x+4)=3x^2+4x$

含有平方 y^2：

$y^2=(3x+4)^2=9x^2+24x+16$

③ **求线段中点：**例题两交点为 $A(-3,-5)$ 与 $B\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right)$。中点的横、纵坐标分别取两端对应坐标的平均值。

$$x_M=\frac{-3+\frac{1}{2}}{2}=-\frac{5}{4}$$

$$y_M=\frac{-5+\frac{11}{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

故线段 AB 的中点 M 为 _____。

④ **求垂线斜率：**直线 $y=3x+4$ 的斜率为 3，记垂线斜率为 m。两条非竖直直线互相垂直，斜率之积为 -1。

$$3m=-1$$

垂直平分线的斜率为 _____。

⑤ **写直线方程：**垂直平分线经过中点 M，斜率为 m。记 M 的坐标为 (x_0,y_0)，用点斜式写方程。要求整数系数时，去分母并移项。

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

例题中代入得

$y-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{5}{4}\right)$。

⑥ **代入点的坐标：**点在直线上，其横、纵坐标满足直线方程。以 $y=3x+4$ 为例，分别演示已知一个坐标时的代入。

点 $(p,1)$ 在直线上：

$1=3p+4$

点 $(1,q)$ 在直线上：

$q=3\times1+4=7$

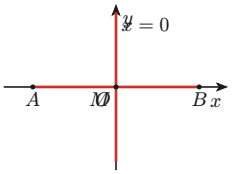
$3p=-3$

$p=-1$

⑦

中点与垂直关系

$A(-2,0),\quad B(2,0),\quad M(0,0)$



填空：①$\frac{1}{2}$ 或 -3　②$\left(-\frac{5}{4},\frac{1}{4}\right)$　③$-\frac{1}{3}$

点石成金　题目出现直线与曲线交于两点，且涉及交点连线的垂直平分线时，先联立求交点，再求中点与垂线斜率。

例 1　[2025 · October/November 0606/23 Q6]

The line $y=3x+4$ meets the curve $y=2x^2+8x+1$ at two points A and B.

Find the equation of the perpendicular bisector of AB, giving your answer in the form $ax+by+c=0$, where a, b and c are integers.

直线 $y=3x+4$ 与曲线 $y=2x^2+8x+1$ 交于 A、B 两点。
求线段 AB 的垂直平分线方程，答案写成 $ax+by+c=0$ 的形式，其中 a、b、c 均为整数。

解答　将 $y=3x+4$ 代入曲线方程，得

$$3x+4=2x^2+8x+1$$

$$2x^2+5x-3=0$$

$$(2x-1)(x+3)=0$$

$x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-3$。
分别代入直线方程，得两交点为
$A(-3,-5),\quad B\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right)$。
设线段 AB 的中点为 M，则

$$x_M=\frac{-3+\frac{1}{2}}{2}=-\frac{5}{4}$$

$y_M=\frac{-5+\frac{11}{2}}{2}=\frac{1}{4}$。
∵ 直线 AB 的斜率为 3，
∴ 垂直平分线的斜率为 $-\frac{1}{3}$。
垂直平分线经过 $M\left(-\frac{5}{4},\frac{1}{4}\right)$，故

$$y-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{5}{4}\right)$$

$$12y-3=-4x-5$$

$$4x+12y+2=0$$

$2x+6y+1=0$。
答：垂直平分线的方程为 $2x+6y+1=0$。

方法：先看直线方程，用它替换曲线中的纵坐标，求出交点。

辨析：中点是两端坐标分别取平均得到的点，垂直平分线是过中点且垂直于线段的直线。

拓展：垂直平分线上任一点到线段两端的距离相等。

针对练习

1. [2023 · May/June 0606/13 Q4]

提示：看乘积项替换后的展开，再将已知纵坐标代入垂线方程。

The straight line $y = 3x - 11$ and the curve $xy = 4 - 3x - 2x^2$ intersect at the points A and B. The point C, with coordinates $(a, -8)$ where a is a constant, lies on the perpendicular bisector of the line AB. Find the value of a.

直线 $y = 3x - 11$ 与曲线 $xy = 4 - 3x - 2x^2$ 交于 A、B 两点。点 C 的坐标为 $(a, -8)$，其中 a 为常数。点 C 在线段 AB 的垂直平分线上。求 a 的值。

✓ **答案**

$$a = -1$$

解析 将 $y = 3x - 11$ 代入曲线方程，得

$$x(3x - 11) = 4 - 3x - 2x^2$$

$$3x^2 - 11x = 4 - 3x - 2x^2$$

$$5x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$(5x + 2)(x - 2) = 0$$

$x = -\frac{2}{5}$ 或 $x = 2$。

分别代入直线方程，得两交点为

$A\left(-\frac{2}{5}, -\frac{61}{5}\right)$，$B(2, -5)$。

设线段 AB 的中点为 M，则

$$x_M = \frac{-\frac{2}{5} + 2}{2} = \frac{4}{5}$$

$y_M = \frac{-\frac{61}{5} - 5}{2} = -\frac{43}{5}$。

$\because$ 直线 AB 的斜率为 3，

$\therefore$ 垂直平分线的斜率为 $-\frac{1}{3}$，其方程为

$y + \frac{43}{5} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{4}{5}\right)$。

点 $C(a, -8)$ 在垂直平分线上，代入得

$$-8 + \frac{43}{5} = -\frac{1}{3}\left(a - \frac{4}{5}\right)$$

$$\frac{3}{5} = -\frac{1}{3}\left(a - \frac{4}{5}\right)$$

$$a - \frac{4}{5} = -\frac{9}{5}$$

$a = -1$。

答：$a = -1$。

2. [2024 · October/November 0606/13 Q8(a)]
提示：看中点位置与原直线斜率，再将已知横坐标代入垂线方程。

The straight line $y = 2x + 1$ intersects the curve $y + xy + 3x^2 = 15$ at the points A and B. The point C with coordinates $\left(\frac{21}{10}, k\right)$ lies on the perpendicular bisector of AB.

(a) Find the exact value of k.

直线 $y = 2x + 1$ 与曲线 $y + xy + 3x^2 = 15$ 交于 A、B 两点。点 C 的坐标为 $\left(\frac{21}{10}, k\right)$，它在线段 AB 的垂直平分线上。

(a) 求 k 的精确值。

✓ **答案**

$$k = -\frac{4}{5}$$

解析 将 $y = 2x + 1$ 代入曲线方程，得

$$2x + 1 + x(2x + 1) + 3x^2 = 15$$

$$5x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$(5x - 7)(x + 2) = 0$$

$x = \frac{7}{5}$ 或 $x = -2$。

分别代入直线方程，得两交点为

$A(-2, -3)$，$B\left(\frac{7}{5}, \frac{19}{5}\right)$。

设线段 AB 的中点为 M，则

$$x_M = \frac{-2 + \frac{7}{5}}{2} = -\frac{3}{10}$$

$y_M = \frac{-3 + \frac{19}{5}}{2} = \frac{2}{5}$。

$\because$ 直线 AB 的斜率为 2，

$\therefore$ 垂直平分线的斜率为 $-\frac{1}{2}$，其方程为

$y - \frac{2}{5} = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{10}\right)$。

点 $C\left(\frac{21}{10}, k\right)$ 在垂直平分线上，代入得

$$k - \frac{2}{5} = -\frac{1}{2}\left(\frac{21}{10} + \frac{3}{10}\right)$$

$$k - \frac{2}{5} = -\frac{6}{5}$$

$k = -\frac{4}{5}$。

答：k 的精确值为 $-\frac{4}{5}$。

3. [2024 · May/June 0606/12 Q7(a)]
提示：看平方展开的交叉项与乘积项前的负号，再合并同类项。

(a) The line $y = 3x - 2$ intersects the curve $2x^2 - xy + y^2 = 2$ at the points A and B. The point C with coordinates $\left(k, \frac{7}{8}\right)$ lies on the perpendicular bisector of the line AB. Find the exact value of k.

(a) 直线 $y = 3x - 2$ 与曲线 $2x^2 - xy + y^2 = 2$ 交于 A、B 两点。点 C 的坐标为 $\left(k, \frac{7}{8}\right)$，它在线段 AB 的垂直平分线上。求 k 的精确值。

✓ **答案**

$$k=-\frac{19}{8}$$

解析　将 $y=3x-2$ 代入曲线方程，得

$$2x^2-x(3x-2)+(3x-2)^2=2$$

$$2x^2-3x^2+2x+9x^2-12x+4=2$$

$$8x^2-10x+2=0$$

$$4x^2-5x+1=0$$

$$(4x-1)(x-1)=0$$

$x=\frac{1}{4}$ 或 $x=1$。
分别代入直线方程，得两交点为
$A\left(\frac{1}{4},-\frac{5}{4}\right)$，　$B(1,1)$。
设线段 AB 的中点为 M，则

$$x_M=\frac{\frac{1}{4}+1}{2}=\frac{5}{8}$$

$y_M=\frac{-\frac{5}{4}+1}{2}=-\frac{1}{8}$。
∵ 直线 AB 的斜率为 3，
∴ 垂直平分线的斜率为 $-\frac{1}{3}$，其方程为
$y+\frac{1}{8}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{8}\right)$。
点 $C\left(k,\frac{7}{8}\right)$ 在垂直平分线上，代入得

$$\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{3}\left(k-\frac{5}{8}\right)$$

$$1=-\frac{1}{3}\left(k-\frac{5}{8}\right)$$

$$k-\frac{5}{8}=-3$$

$k=-\frac{19}{8}$。
答：k 的精确值为 $-\frac{19}{8}$。

题型 3　用垂足为中点求关于直线的反射点

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **中点坐标计算：**本例中，$A(2,5)$、$B(10,-15)$ 的中点记为 M。将两点的横坐标、纵坐标分别取 _____。

$$M\left(\frac{2+10}{2},\frac{5+(-15)}{2}\right)=M(6,-5)$$

② **两点直线斜率：**两点横坐标不同时，斜率等于纵坐标差除以 _____。用 m_{AB} 表示直线 AB 的斜率，两处相减的顺序一致。

$$m_{AB}=\frac{-15-5}{10-2}=-\frac{5}{2}$$

③ **垂直斜率关系：**两条直线的斜率均存在且互相垂直时，斜率乘积为 _____。本例用 m 表示垂直平分线的斜率。

$$\left(-\frac{5}{2}\right)m=-1$$

$$m=\frac{2}{5}$$

④ **垂直平分线式：**AB 的垂直平分线经过 $M(6,-5)$，斜率为 $\frac{2}{5}$。线上任一点 (x,y) 与 M 的坐标差满足下式。将题给的横坐标或纵坐标代入，求另一坐标。

$$y-(-5)=\frac{2}{5}(x-6)$$

$$y+5=\frac{2}{5}(x-6)$$

⑤ **反射坐标计算：**本例的反射点记为 R，设 $P(p,q)$、$R(r,s)$。因 $PM\perp AB$，M 是 PR 的 _____。由中点坐标反求另一端点坐标。

$$\frac{p+r}{2}=6,\quad \frac{q+s}{2}=-5$$

$$r=12-p,\quad s=-10-q$$

⑥ **交点坐标求法：**直线与曲线的交点同时满足两个方程。例如直线与曲线的方程如下，将直线方程代入曲线。

$$y=2x-1,\quad x^2+y^2=2$$

$$x^2+(2x-1)^2=2$$

$$5x^2-4x-1=5x^2-5x+x-1=(5x+1)(x-1)=0$$

令各因式分别为零，再回代求纵坐标。

$x=-\frac{1}{5}$

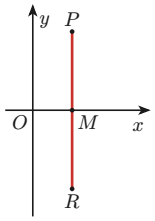
$y=2\times\left(-\frac{1}{5}\right)-1=-\frac{7}{5}$

$x=1$

$y=2\times1-1=1$

⑦ 垂足平分对应点连线

$$P(1,2),\quad M(1,0),\quad R(1,-2)$$



填空：①平均值　②横坐标差　③−1　④中点

点石成金　题目出现点在 AB 的垂直平分线上，且求它关于直线 AB 的反射点时，先求 AB 的中点。

例 1　[2023 · May/June 0606/11 Q3(b)]

The points A and B have coordinates $(2, 5)$ and $(10, -15)$ respectively. The point P lies on the perpendicular bisector of the line AB. The y-coordinate of P is -9.

(a) Find the x-coordinate of P.

(b) The point R is the reflection of P in the line AB. Find the coordinates of R.

点 A 和 B 的坐标分别为 $(2,5)$ 和 $(10,-15)$。点 P 位于线段 AB 的垂直平分线上，P 的纵坐标为 -9。
(a) 求 P 的横坐标。
(b) 点 R 是点 P 关于直线 AB 的反射点。求 R 的坐标。

解答　设 AB 的中点为 M，由中点坐标得

$$M\left(\frac{2+10}{2}, \frac{5+(-15)}{2}\right) = M(6, -5)$$

直线 AB 的斜率为

$$m_{AB} = \frac{-15-5}{10-2} = -\frac{5}{2}$$

由垂直直线的斜率乘积为 -1，得垂直平分线的斜率为 $\frac{2}{5}$，其方程为

$$y + 5 = \frac{2}{5}(x - 6)$$

代入 $y = -9$，得

$$-9 + 5 = \frac{2}{5}(x - 6)$$

$$x - 6 = -10$$

$$x = -4$$

$\therefore P(-4, -9)$。
$\because PM \perp AB$，且 R 是 P 关于直线 AB 的反射点，$\therefore M$ 是 PR 的中点。设 $R(r, s)$，则

$$\frac{-4+r}{2} = 6, \quad \frac{-9+s}{2} = -5$$

$$r = 16, \quad s = -1$$

答：(a) P 的横坐标为 -4；(b) $R(16, -1)$。

方法：看点在垂直平分线上的条件，先求线段中点。

辨析：垂直平分线是点所在的直线，反射轴是原线段所在的直线。

拓展：反射轴上的任一点到一对对称点的距离相等。

针对练习

1. [2026 · February/March 0606/22 Q2(b)]
提示：看线段中点，比较反射前后两点到中点的坐标差。

Points A and B have coordinates $(1, 3)$ and $(-7, 1)$.
The point P with coordinates $(2, a)$ lies on the perpendicular bisector of AB.

(a) Find the value of a.

(b) The point Q is the reflection of P in the line AB.

Find the coordinates of Q.

点 A 和 B 的坐标分别为 $(1,3)$ 和 $(-7,1)$。
坐标为 $(2,a)$ 的点 P 位于线段 AB 的垂直平分线上。
(a) 求 a 的值。
(b) 点 Q 是点 P 关于直线 AB 的反射点。求 Q 的坐标。

✓ **答案** (a) $a=-18$；(b) $Q(-8,22)$。

解析 设 AB 的中点为 M，由中点坐标得

$$M\left(\frac{1+(-7)}{2},\frac{3+1}{2}\right)=M(-3,2)$$

直线 AB 的斜率为

$$m_{AB}=\frac{1-3}{-7-1}=\frac{1}{4}$$

由垂直直线的斜率乘积为 -1，得垂直平分线的斜率为 -4，其方程为

$$y-2=-4(x+3)$$

代入 $P(2,a)$，得

$$a-2=-4(2+3)=-20$$

$$a=-18$$

$\therefore P(2,-18)$。
$\because PM\perp AB$，且 Q 是 P 关于直线 AB 的反射点，$\therefore M$ 是 PQ 的中点。设 $Q(r,s)$，则

$$\frac{2+r}{2}=-3,\quad \frac{-18+s}{2}=2$$

$$r=-8,\quad s=22$$

答：(a) $a=-18$；(b) $Q(-8,22)$。

2. [2024 · May/June 0606/12 Q7(b)]
提示：先由两交点找中点，再比较中点两侧的坐标差。

(a) The line $y=3x-2$ intersects the curve $2x^2-xy+y^2=2$ at the points A and B. The point C with coordinates $\left(k,\frac{7}{8}\right)$ lies on the perpendicular bisector of the line AB. Find the exact value of k.

(b) The point D lies on the perpendicular bisector of AB such that D is a reflection of C in the line AB. Find the coordinates of D.

(a) 直线 $y=3x-2$ 与曲线 $2x^2-xy+y^2=2$ 相交于点 A 和 B。坐标为 $\left(k,\frac{7}{8}\right)$ 的点 C 位于线段 AB 的垂直平分线上。求 k 的精确值。
(b) 点 D 位于 AB 的垂直平分线上，且 D 是 C 关于直线 AB 的反射点。求 D 的坐标。

✓ **答案** (a) $k=-\frac{19}{8}$；(b) $D\left(\frac{29}{8},-\frac{9}{8}\right)$。

解析 将 $y=3x-2$ 代入曲线方程，得

$$2x^2-x(3x-2)+(3x-2)^2=2$$

$$8x^2-10x+2=0$$

$$8x^2 - 8x - 2x + 2 = 2(4x - 1)(x - 1) = 0$$

$\therefore x = \frac{1}{4}$ 或 $x = 1$。
当 $x = \frac{1}{4}$ 时，

$$y = 3 \times \frac{1}{4} - 2 = -\frac{5}{4}$$

当 $x = 1$ 时，

$$y = 3 \times 1 - 2 = 1$$

故两交点的坐标为 $\left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right)$、$(1, 1)$。设 AB 的中点为 M，则

$$M\left(\frac{\frac{1}{4}+1}{2}, \frac{-\frac{5}{4}+1}{2}\right) = M\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right)$$

$\because$ 直线 AB 的斜率为 3，$\therefore$ 垂直平分线的斜率为 $-\frac{1}{3}$，其方程为

$$y + \frac{1}{8} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{8}\right)$$

代入 $C\left(k, \frac{7}{8}\right)$，得

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{3}\left(k - \frac{5}{8}\right)$$

$$k - \frac{5}{8} = -3$$

$$k = \frac{5}{8} - 3 = -\frac{19}{8}$$

$\therefore C\left(-\frac{19}{8}, \frac{7}{8}\right)$。
$\because CM \perp AB$，且 D 是 C 关于直线 AB 的反射点，$\therefore M$ 是 CD 的中点。设 $D(r, s)$，则

$$\frac{-\frac{19}{8}+r}{2} = \frac{5}{8}, \quad \frac{\frac{7}{8}+s}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$r = 2 \times \frac{5}{8} + \frac{19}{8} = \frac{29}{8}$$

$$s = 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{7}{8} = -\frac{9}{8}$$

答：(a) $k = -\frac{19}{8}$；(b) $D\left(\frac{29}{8}, -\frac{9}{8}\right)$。

3. [2021 · February/March 0606/12 Q3(b)]
提示：先求出点 C，再利用两条直线的交点是线段 CD 的中点列式。

The line AB is such that the points A and B have coordinates $(-4, 6)$ and $(2, 14)$ respectively.

(a) The point C, with coordinates $(7, a)$ lies on the perpendicular bisector of AB. Find the value of a.

(b) Given that the point D also lies on the perpendicular bisector of AB, find the coordinates of D such that the line AB bisects the line CD.

直线AB上的点A和B的坐标分别为$(-4,6)$和$(2,14)$。
(a) 点C的坐标为$(7,a)$，它位于线段AB的垂直平分线上。求a的值。
(b) 已知点D也位于线段AB的垂直平分线上。若直线AB平分线段CD，求D的坐标。

✓ **答案** $D(-9,16)$

解析 设AB的中点为M，则

$$M\left(\frac{-4+2}{2},\frac{6+14}{2}\right)=M(-1,10)$$

直线AB的斜率为

$$m_1=\frac{14-6}{2-(-4)}=\frac{4}{3}$$

其垂直平分线的斜率为

$$m_2=-\frac{1}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}$$

垂直平分线经过$M(-1,10)$，其方程为

$$y-10=-\frac{3}{4}(x+1)$$

代入$C(7,a)$，得

$$a-10=-\frac{3}{4}(7+1)=-6$$

$$a=4$$

$\therefore C(7,4)$。
$\because C$、D均在AB的垂直平分线上，$\therefore$ 直线CD与AB交于M。又AB平分CD，$\therefore M$是CD的中点。设D的坐标为(d,e)，则

$$\frac{7+d}{2}=-1$$

$$d=-2-7=-9$$

$$\frac{4+e}{2}=10$$

$$e=20-4=16$$

答：$D(-9,16)$。

题型 4 计算变换坐标，描点画最佳直线

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **平方横坐标：**本例横轴标为 x^2，将表中 x 的值_____。

$$1.5^2=2.25$$

所得的 2.25 是描点时的横坐标。

② **自然对数计算：**本例纵轴标为 $\ln y$，ln 表示以 e 为底的自然对数。自然对数只对_____求值，用计算器的 ln 键计算。

$$e \approx 2.71828$$

$$\ln 2.0 \approx 0.693$$

③ **变换坐标配对：**同一列的两个数，变换后仍配成一对。坐标中先写横坐标，再写纵坐标。

横轴为 x^2，纵轴为 $\ln y$。

$(1.5^2, \ln 11.3) \approx (2.25, 2.425)$

横轴为 $\ln x$，纵轴为 $\ln y$。

$(\ln 1.5, \ln 11.3) \approx (0.405, 2.425)$

④ **负数坐标定位：**横轴标为 $\ln x$ 时，正数取对数后也可能得到负数。

$$\ln 0.5 \approx -0.693$$

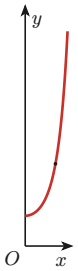
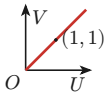
横坐标为负，点位于纵轴左侧。

⑤ **变换数据列表：**按原表各列计算，保持同列数据的对应关系。变换值保留三位小数，列出描点坐标。

⑥ **描点画直线：**按两轴各自刻度描出各点。用_____画出贴近各点的最佳拟合直线。各点在直线两侧的偏离尽量均衡，直线不必经过原点。

填空：①平方　②正数　③直尺

先变换坐标，再读取直线

	原变量关系	变换后的关系
图像		
记号	$U = x^2$，　$V = \ln y$	
关系式	$y = e^{x^2}$	$V = U$
直线参数	斜率 1，纵截距 0	

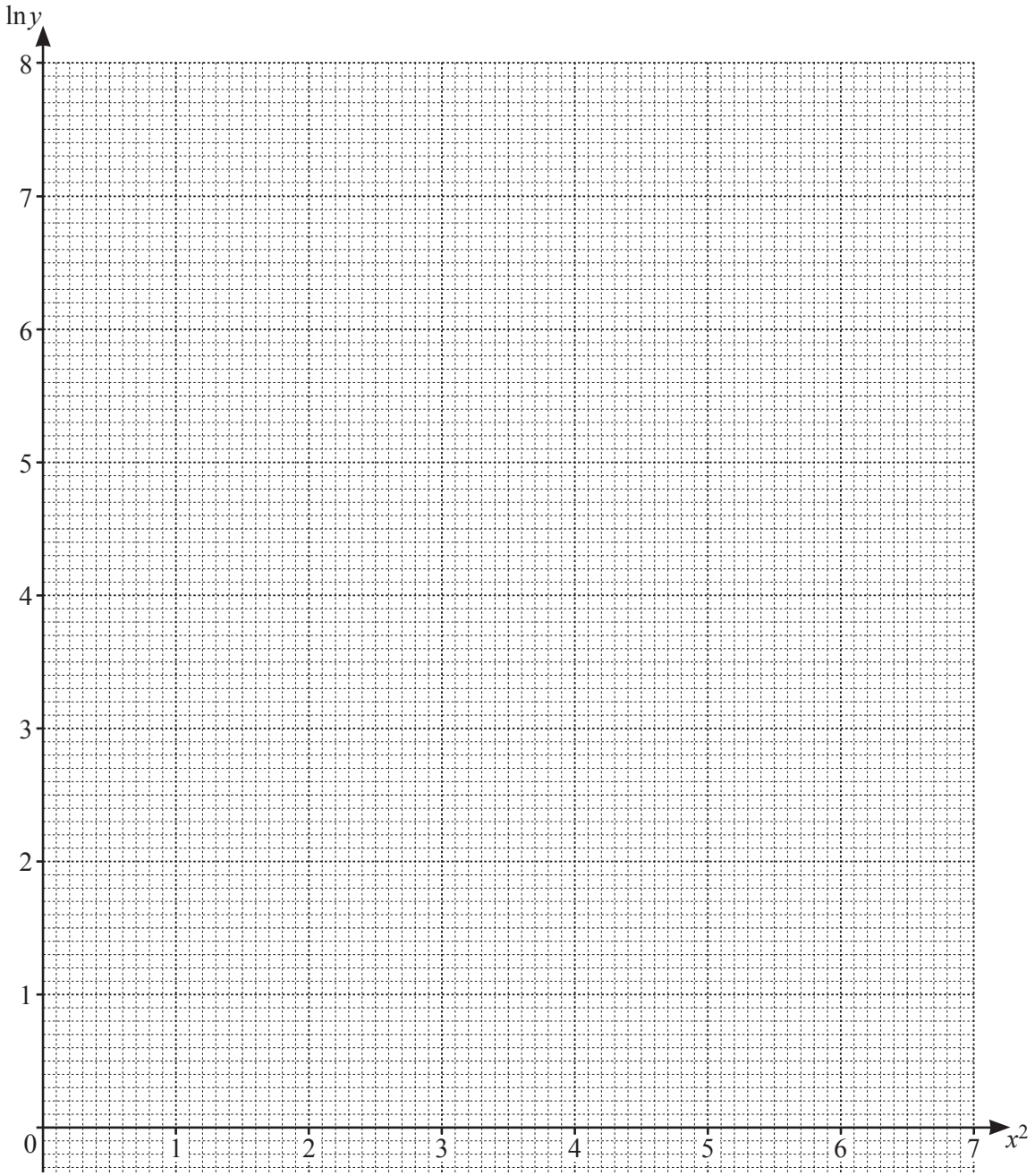
点石成金　题目出现用数据画直线图，且坐标轴标有平方或自然对数时，先按两轴标记计算每组数据的变换坐标。

例 1　[2023 · February/March 0606/12 Q5(a)]

The table shows values of the variables x and y, which are related by an equation of the form $y = Ab^{x^2}$, where A and b are constants.

x	1	1.5	2	2.5
y	2.0	11.3	128	2896

(a) Use the data to draw a straight line graph of $\ln y$ against x^2.



表中给出了变量 x 和 y 的值，它们满足下列形式的方程，其中 A 和 b 为常数。

$$y = Ab^{x^2}$$

x	1	1.5	2	2.5
y	2.0	11.3	128	2896

(a) 利用这些数据，画出以 x^2 为横坐标、$\ln y$ 为纵坐标的直线图。

图中横轴标为 x^2，标数为 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$；纵轴标为 $\ln y$，标数为 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$。

解答 横轴为 x^2，纵轴为 $\ln y$，由表中数据得

$$1.5^2 = 2.25$$

$$\ln 11.3 \approx 2.425$$

方法：先看两轴标记，横坐标算平方，纵坐标取自然对数。

辨析：平方是原数自乘，对数是求对应底数的指数。

其余各列同法计算，得

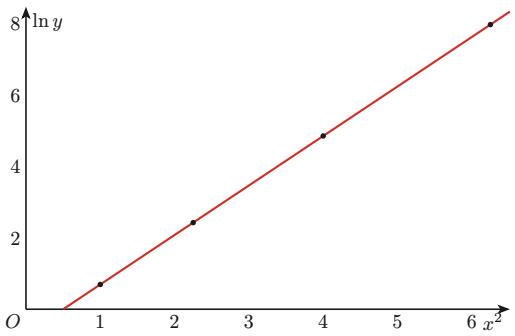
x^2	1.000	2.250	4.000	6.250

$\ln y$	0.693	2.425	4.852	7.971

在图中描出表中四点，用直尺画一条贴近各点的直线。

答：所画最佳拟合直线约经过 $(0.50, 0)$ 和 $(6.25, 7.97)$。

数据点与一条拟合直线

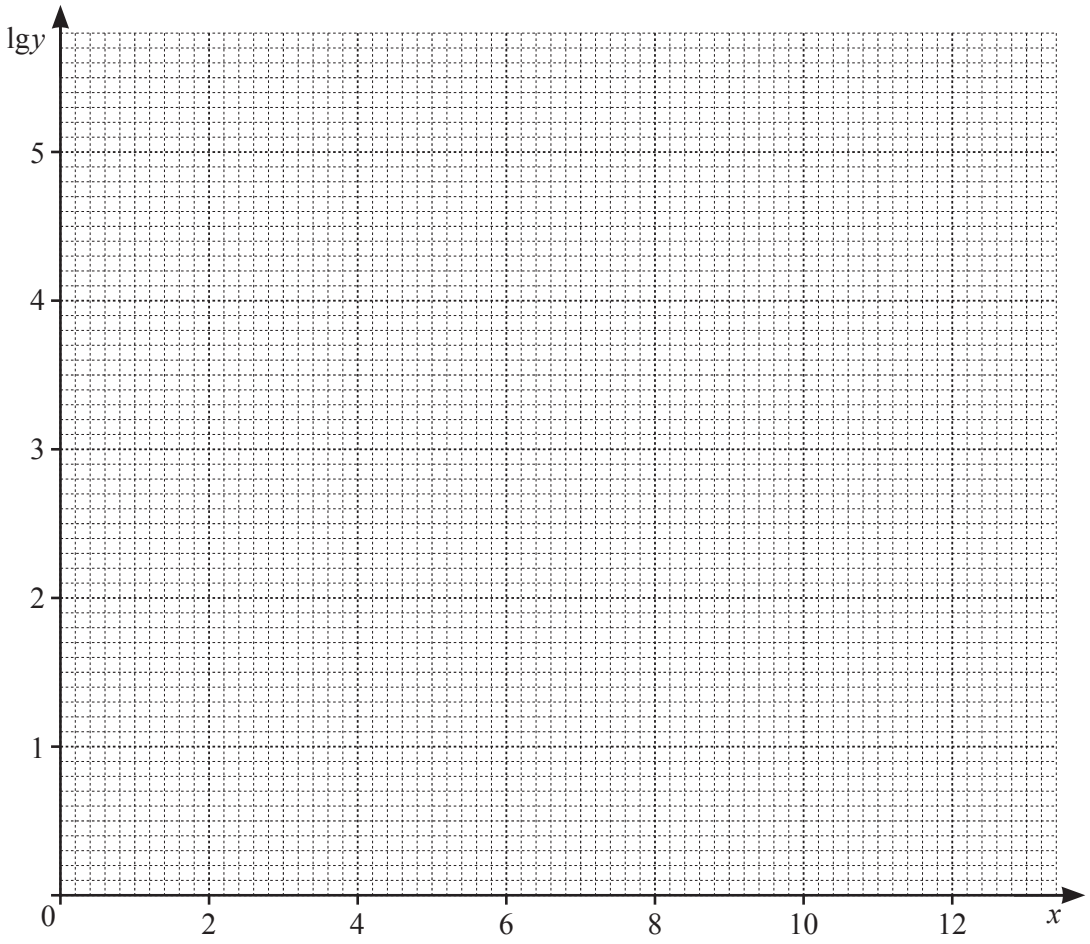


例 2 [2024 · February/March 0606/22 Q8(a)]

Variables y and x are known to be connected by the relationship $y = Ab^x$ where A and b are constants. The table shows values of y for certain values of x.

x	1	3	5	10	12
y	38	150	600	20 500	82 000

(a) Draw the graph of $\lg y$ against x.



已知变量 y 和 x 满足下列关系，其中 A 和 b 为常数。

$$y = Ab^x$$

下表给出了 x 取某些值时对应的 y 值。

x	1	3	5	10	12
y	38	150	600	20 500	82 000

(a) 画出 $\lg y$ 对 x 的图象。
横轴标为 x，已标刻度为 $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$；纵轴标为 $\lg y$，已标刻度为 $1, 2, 3, 4, 5$。

解答 计算表中各个 y 值的常用对数，得

$$\lg 38 \approx 1.6$$
$$\lg 150 \approx 2.2$$
$$\lg 600 \approx 2.8$$
$$\lg 20500 \approx 4.3$$
$$\lg 82000 \approx 4.9$$

方法：先看两轴标注，再将表中同列数据变换后配对描点。

辨析：lg 是以 10 为底的对数，ln 是以 e 为底的对数。

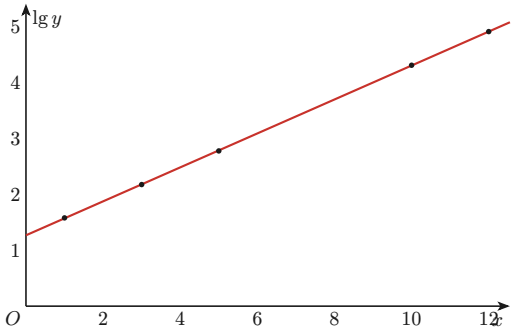
拓展：实数范围内，对数中的数必须为正数。

以 x 为横坐标、$\lg y$ 为纵坐标，描出五个点：

$$(1, 1.6),\quad (3, 2.2),\quad (5, 2.8),\quad (10, 4.3),\quad (12, 4.9)$$

用直尺画出经过点群中部的直线。
答：所求图象如图。

数据点与一条拟合直线



针对练习

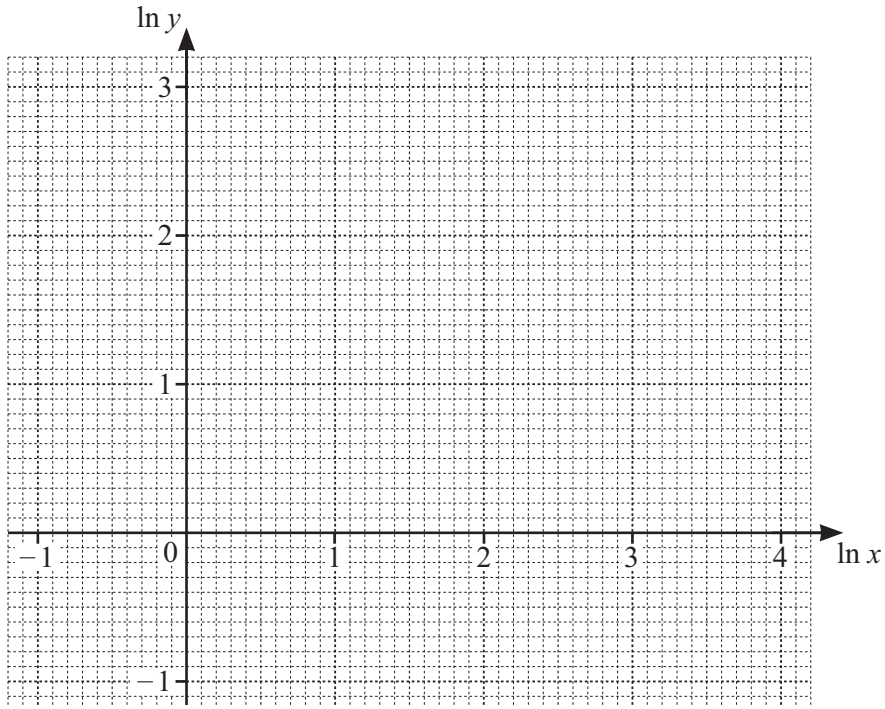
1. [2025 · October/November 0606/23 Q9(a)]

提示：看横轴标记，比较原横坐标与 1 的大小，判断对数正负。

Two variables, x and y, are related by an equation of the form $y = Ax^b$, where A and b are constants. The following pairs of values of x and y are given.

x	0.61	4.48	12.18	33.1
y	1.65	4.47	7.39	12.17

(a) On the axes below, use these values to draw the straight-line graph of $\ln y$ against $\ln x$.



两个变量 x 和 y 满足下列形式的方程，其中 A 和 b 为常数。

$$y = Ax^b$$

给出的 x、y 的对应值如下。

x	0.61	4.48	12.18	33.1
y	1.65	4.47	7.39	12.17

(a) 在下方坐标系中，利用这些数值画出以 $\ln x$ 为横坐标、$\ln y$ 为纵坐标的直线图。
图中横轴标为 $\ln x$，标数为 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$；纵轴标为 $\ln y$，标数为 $-1, 0, 1, 2, 3$。

✓ **答案** 描点坐标为 $(-0.494, 0.501)$、$(1.500, 1.497)$、$(2.500, 2.000)$、$(3.500, 2.499)$；最佳拟合直线约经过 $(0, 0.75)$ 和 $(4, 2.75)$。

解析 横轴为 $\ln x$，纵轴为 $\ln y$，由表中数据得

$$\ln 0.61 \approx -0.494$$

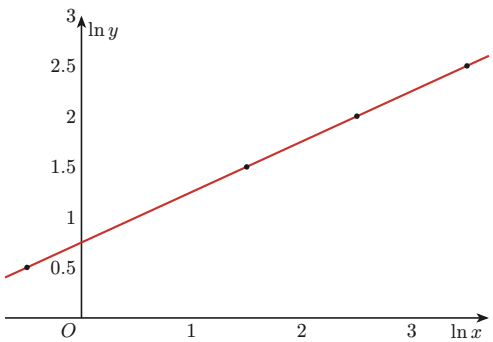
$$\ln 1.65 \approx 0.501$$

其余各列同法计算，得

$\ln x$	-0.494	1.500	2.500	3.500
$\ln y$	0.501	1.497	2.000	2.499

第一点的横坐标为负，将该点描在纵轴左侧。描出其余三点，用直尺画一条贴近各点的直线。
答：所画最佳拟合直线约经过 $(0, 0.75)$ 和 $(4, 2.75)$。

数据点与一条拟合直线



2. [2024 · May/June 0606/22 Q8(a)]

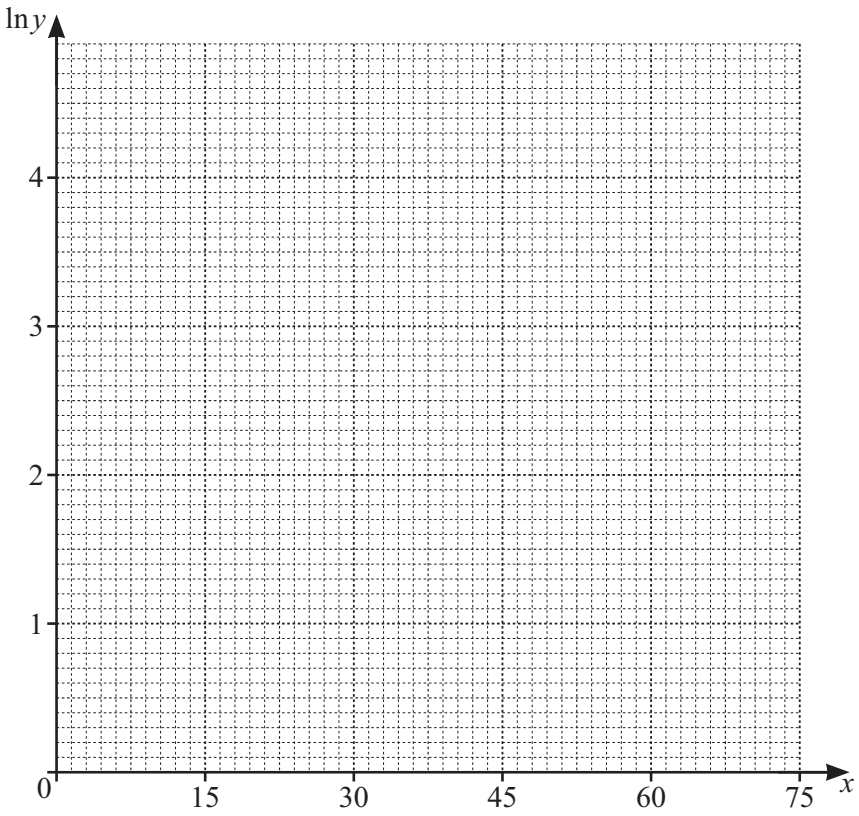
提示：看纵轴的对数符号，拟合时比较线两侧点的分布。

An experiment was carried out and values of y for certain values of x were recorded. The table shows the values recorded.

x	15	30	45	60	75
y	10	13	22	35	50

The relationship between y and x is modelled by $y = Ae^{kx}$, where A and k are constants.

(a) Draw a straight line graph for $\ln y$ against x.



进行一项实验，记录了 x 取某些值时对应的 y 值。记录的数据如下表。

x	15	30	45	60	75
y	10	13	22	35	50

y 与 x 的关系用下式建模，其中 A 和 k 为常数。

$$y = Ae^{kx}$$

(a) 画出 $\ln y$ 对 x 的直线图象。

横轴标为 x，已标刻度为 $0, 15, 30, 45, 60, 75$；纵轴标为 $\ln y$，已标刻度为 $1, 2, 3, 4$。

✓ **答案** 描点为 $(15, 2.30)$、$(30, 2.56)$、$(45, 3.09)$、$(60, 3.56)$、$(75, 3.91)$；最佳拟合直线约经过 $(0, 1.82)$ 和 $(75, 3.92)$。

解析 计算表中各个 y 值的自然对数，得

$$\ln 10 \approx 2.30$$
$$\ln 13 \approx 2.56$$
$$\ln 22 \approx 3.09$$
$$\ln 35 \approx 3.56$$
$$\ln 50 \approx 3.91$$

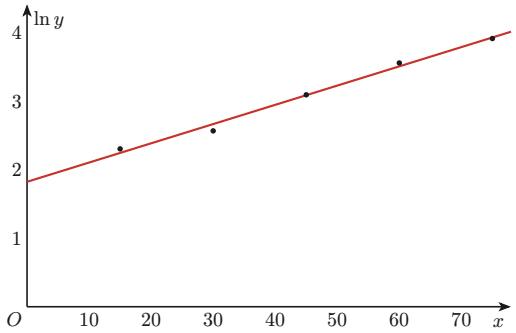
以 x 为横坐标、$\ln y$ 为纵坐标，描出五个点：

$$(15, 2.30),\quad (30, 2.56),\quad (45, 3.09),\quad (60, 3.56),\quad (75, 3.91)$$

各点近似排成直线，画出沿点群中部通过的最佳拟合直线。

答：所求直线图象如图。

数据点与一条拟合直线



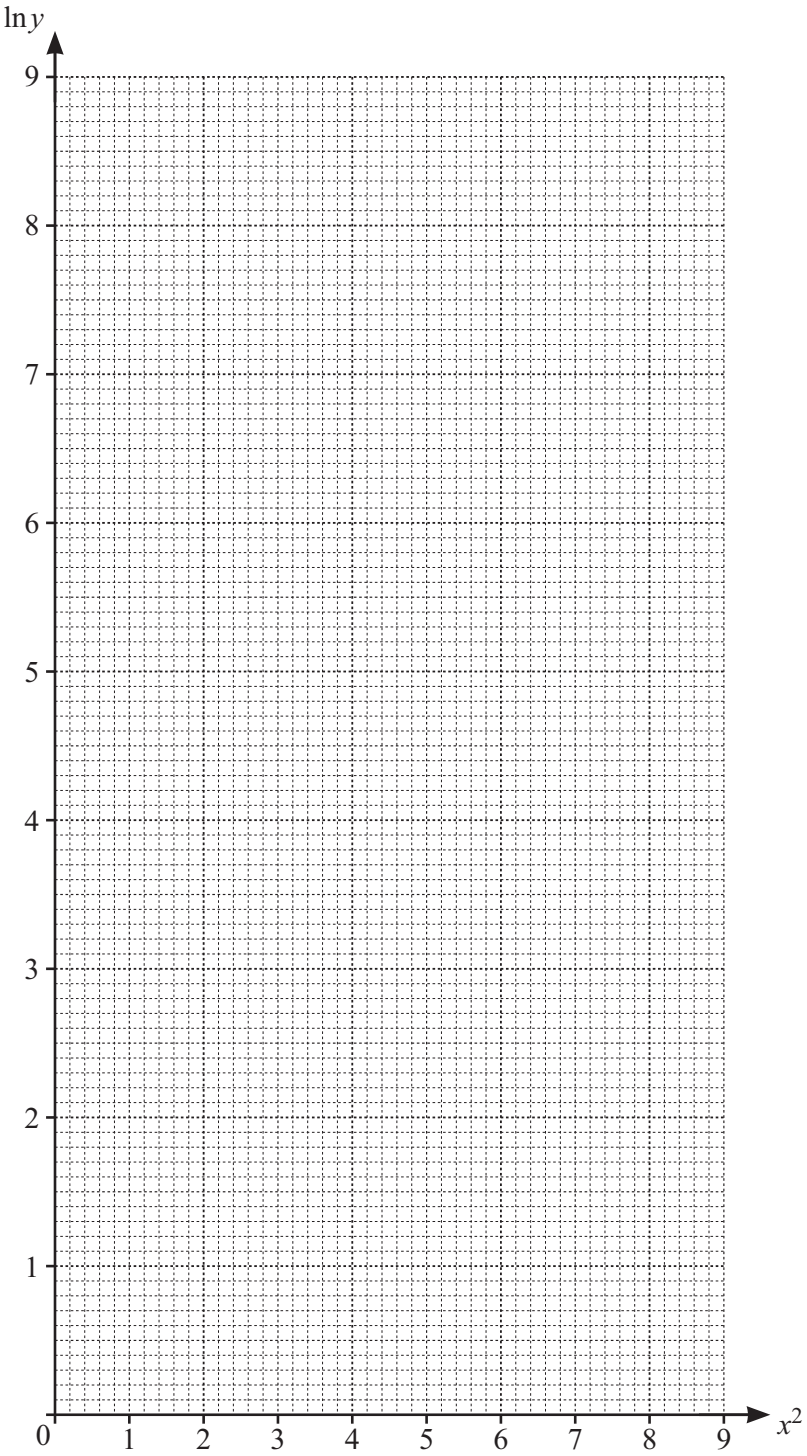
3. [2024 · October/November 0606/13 Q6(a)]

提示：看横轴的平方标记，比较变换后横坐标的间距。

The table shows the variables x and y which are related by the equation $y = Ab^{x^2}$, where A and b are constants.

x	1	1.5	2	2.5	3
y	14	33.3	112	532.8	3584

(a) Use the data to draw a straight line graph of $\ln y$ against x^2.



下表给出了变量 x 和 y 的值。它们满足下列关系，其中 A 和 b 为常数。

$$y = Ab^{x^2}$$

x	1	1.5	2	2.5	3
y	14	33.3	112	532.8	3584

(a) 利用这些数据，画出 $\ln y$ 对 x^2 的直线图象。

横轴标为 x^2，已标刻度为 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$；纵轴标为 $\ln y$，已标刻度为 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$。

✓ **答案** 描点为 $(1, 2.64)$、$(2.25, 3.51)$、$(4, 4.72)$、$(6.25, 6.28)$、$(9, 8.18)$；最佳拟合直线约经过 $(0, 1.95)$ 和 $(9, 8.18)$。

解析 横坐标为 x^2，纵坐标为 $\ln y$。将各个 x 值平方，得

$$1^2 = 1$$
$$1.5^2 = 2.25$$
$$2^2 = 4$$
$$2.5^2 = 6.25$$
$$3^2 = 9$$

计算各个 y 值的自然对数，得

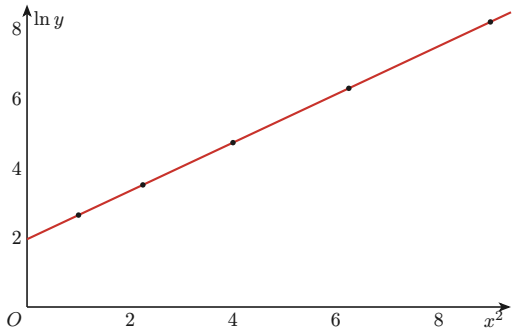
$$\ln 14 \approx 2.64$$
$$\ln 33.3 \approx 3.51$$
$$\ln 112 \approx 4.72$$
$$\ln 532.8 \approx 6.28$$
$$\ln 3584 \approx 8.18$$

依次配成坐标：

$$(1, 2.64),\quad (2.25, 3.51),\quad (4, 4.72),\quad (6.25, 6.28),\quad (9, 8.18)$$

描出五个点，画出沿点群中部通过的最佳拟合直线。
答：所求直线图象如图。

数据点与一条拟合直线

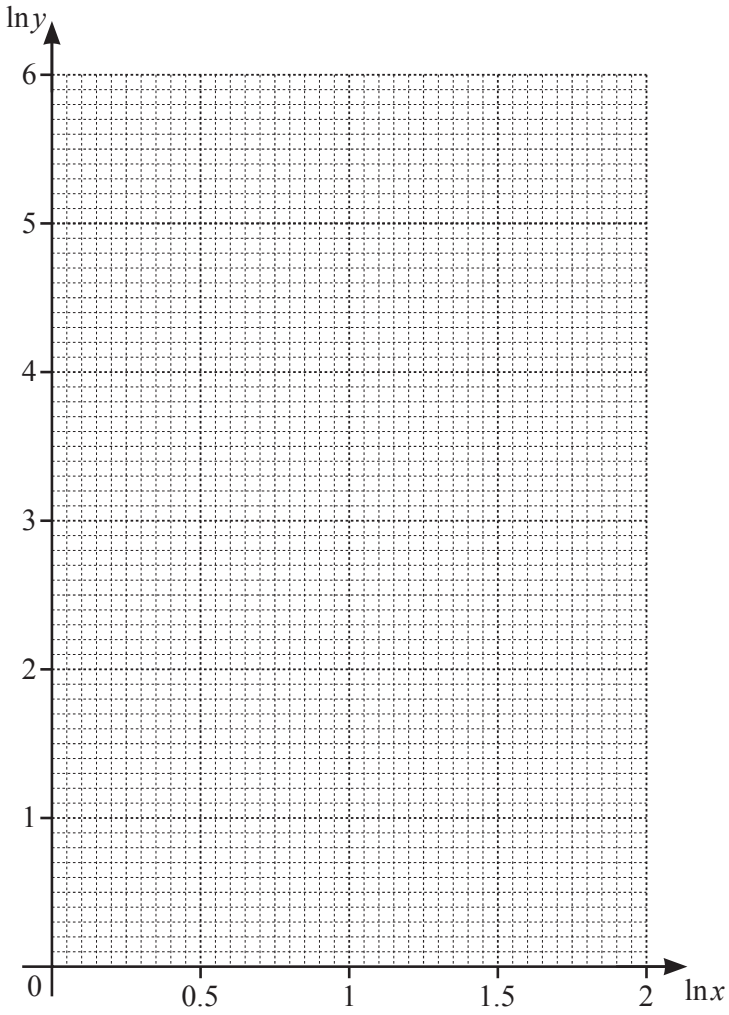


4. [2023 · May/June 0606/13 Q7(a)]
提示：分别看两轴刻度，比较每小格代表的数值再描点。

The table shows values of the variables x and y which are related by an equation of the form $y = Ax^b$, where A and b are constants.

x	1.5	2	2.5	3	4
y	13.8	27.5	46.9	72.6	145

(a) Use the data to draw a straight line graph of $\ln y$ against $\ln x$.



表中给出了变量 x 和 y 的值，它们满足下列形式的方程，其中 A 和 b 为常数。

$$y = Ax^b$$

x	1.5	2	2.5	3	4
y	13.8	27.5	46.9	72.6	145

(a) 利用这些数据，画出以 $\ln x$ 为横坐标、$\ln y$ 为纵坐标的直线图。
图中横轴标为 $\ln x$，标数为 $0, 0.5, 1, 1.5, 2$；纵轴标为 $\ln y$，标数为 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$。

✓ **答案** 描点坐标为 $(0.405, 2.625)$、$(0.693, 3.314)$、$(0.916, 3.848)$、$(1.099, 4.285)$、$(1.386, 4.977)$；最佳拟合直线约经过 $(0, 1.65)$ 和 $(1.80, 5.97)$。

解析 横轴为 $\ln x$，纵轴为 $\ln y$，由表中数据得

$$\ln 1.5 \approx 0.405$$

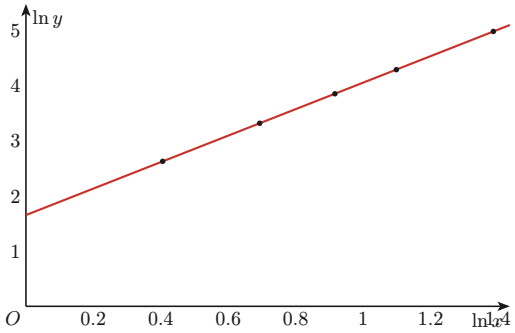
$$\ln 13.8 \approx 2.625$$

其余各列同法计算，得

$\ln x$	0.405	0.693	0.916	1.099	1.386
$\ln y$	2.625	3.314	3.848	4.285	4.977

按横轴每 0.5、纵轴每 1 的标数确定位置，描出表中五点。用直尺画一条贴近各点的直线。
答：所画最佳拟合直线约经过 $(0, 1.65)$ 和 $(1.80, 5.97)$。

数据点与一条拟合直线



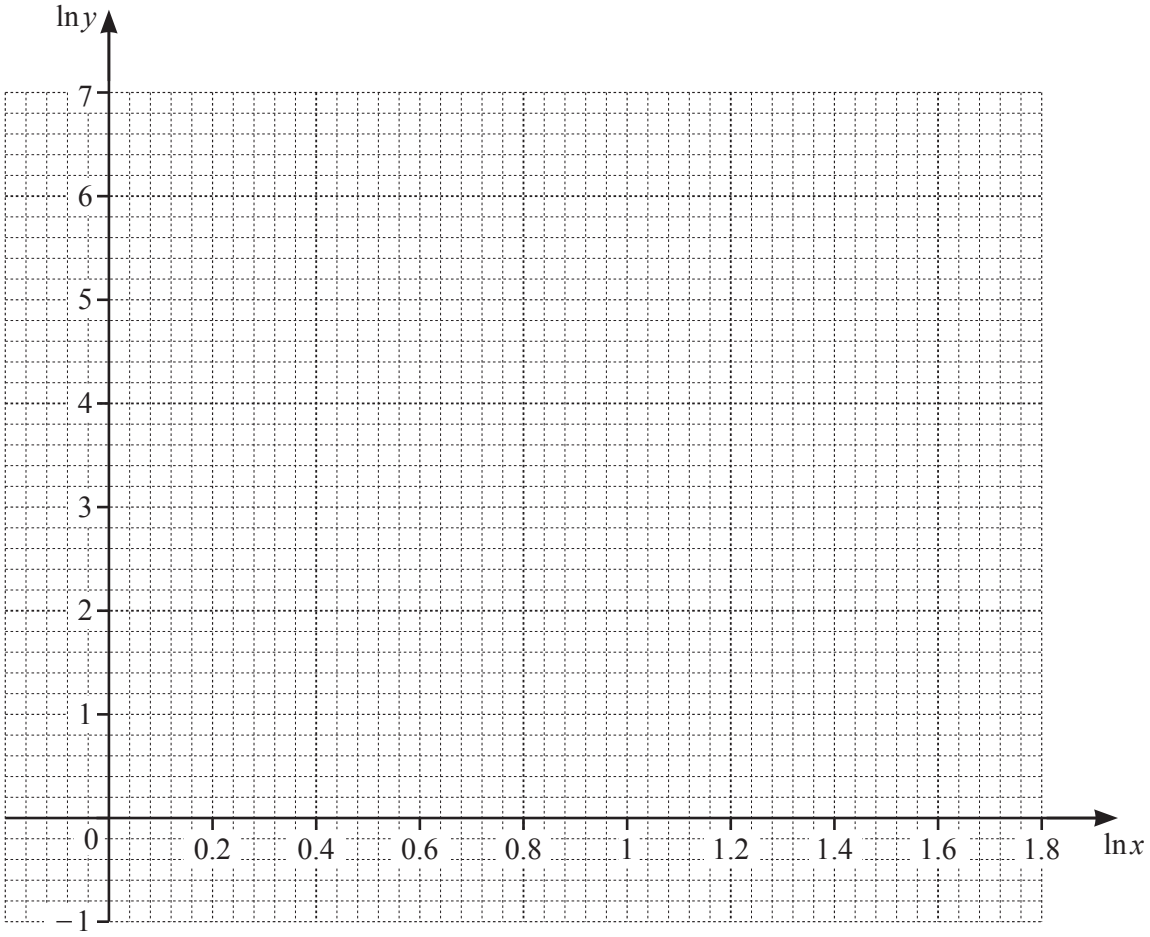
5. [2023 · October/November 0606/11 Q4(a)]

提示：先算首列的横坐标，再核对它与纵轴的位置关系。

x	1	2	3	4	5
y	20	57	104	160	224

The table shows values of the variables x and y, which are related by the equation $y = Ax^b$, where A and b are constants.

(a) Use the data to draw a straight line graph of $\ln y$ against $\ln x$.



x	1	2	3	4	5
y	20	57	104	160	224

表中给出了变量 x 和 y 的值，它们满足下列方程，其中 A 和 b 为常数。

$$y = Ax^b$$

(a) 利用这些数据，画出以 $\ln x$ 为横坐标、$\ln y$ 为纵坐标的直线图。
图中横轴标为 $\ln x$，标数为 $0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$；纵轴标为 $\ln y$，标数为 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$。

✓ **答案** 描点坐标为 $(0, 2.996)$、$(0.693, 4.043)$、$(1.099, 4.644)$、$(1.386, 5.075)$、$(1.609, 5.412)$；最佳拟合直线约经过 $(0, 3.00)$ 和 $(1.80, 5.70)$。

解析 横轴为 $\ln x$，纵轴为 $\ln y$，由表中数据得

$$\ln 1 = 0$$

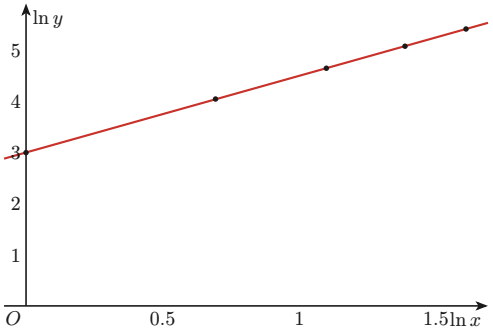
$$\ln 20 \approx 2.996$$

其余各列同法计算，得

$\ln x$	0	0.693	1.099	1.386	1.609
$\ln y$	2.996	4.043	4.644	5.075	5.412

第一点的横坐标为 0，将该点描在纵轴上。描出其余四点，用直尺画一条贴近各点的直线。
答：所画最佳拟合直线约经过 $(0, 3.00)$ 和 $(1.80, 5.70)$。

数据点与一条拟合直线



题型 5 由变换坐标直线求斜率、截距并还原关系式

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **辨认变换坐标：** 例题以 $\sqrt{x}$ 为横坐标，以 $\lg y$ 为纵坐标。lg 表示以 10 为底的对数。图上的点记录两轴变换后的值。

$$(1, 5) \quad \text{对应} \quad \sqrt{x} = 1, \quad \lg y = 5$$

横坐标对应的量是 _____。

② **求斜率与截距：** 将横、纵坐标分别记为 U, V。两点为 $(U_1, V_1), (U_2, V_2)$，且 $U_1 \neq U_2$。写出直线方程，其中 m 为斜率，c 为纵截距。

$$V = mU + c, \quad m = \frac{V_2 - V_1}{U_2 - U_1}, \quad c = V_1 - mU_1$$

例题代入得

$$m = \frac{8 - 5}{2.5 - 1}, \quad c = 5 - m \times 1$$

斜率为 _____，纵截距为 _____。

③ **还原对数关系：** 例题求出直线方程后，撤去纵坐标中的对数。ln 表示以 e 为底的对数，$e \approx 2.718$。以下 t 表示对数值。

$\lg y = t$
$y = 10^t$

$\ln y = t$
$y =$ _____

例题中的指数式可整理为

$$10^{3+2\sqrt{x}} = 10^3 \times 10^{2\sqrt{x}} = 1000 \times 100^{\sqrt{x}}$$

④ **还原变换纵量：** 纵坐标含平移或指数时，先撤去外层运算。取对数时，真数须大于零。下表演示三种还原。

变换后的关系	还原结果	成立条件
$\ln(y+2)=x^2+1$	$y=e^{x^2+1}-2$	$y+2=e^{x^2+1}>0$
$e^y=8-x^3$	$y=\ln(8-x^3)$	$8-x^3>0,\quad x<2$
$e^y=4-x^2$	$y=\ln(4-x^2)$	$x^2<4,\quad -2<x<2$

⑤ **变为直线形式：**积、商与乘方可按下式取对数，常用对数同样适用。

$$\ln(2\times 3^x)=\ln 2+x\ln 3$$

$$\ln 12-\ln 4=\ln\left(\frac{12}{4}\right)=\ln 3$$

$$e^{\ln 2+x\ln 3}=2\times 3^x$$

下表中 $A>0,b>0$，含 $\ln x$ 时还需 $x>0$。

原关系	直线方程	斜率与截距
$P=Ab^T$	$\lg P=(\lg b)T+\lg A$	$m=\lg b,\quad c=\lg A$
$y=Ax^b$	$\ln y=b\ln x+\ln A$	$m=b,\quad c=\ln A$
$y=Ab^{x^2}$	$\ln y=(\ln b)x^2+\ln A$	$m=\ln b,\quad c=\ln A$

⑥ **描点读取常数：**表格给出原坐标时，先计算两轴所需的数值。

$$(x,y)=(e,e^2)\quad \text{对应}\quad (\ln x,\ln y)=(1,2)$$

描点后作拟合直线，并在直线上取相距较远的两点求斜率。截距在图内时读取，在图外时用 $c=V_1-mU_1$ 求得。

⑦ **给定函数值反求自变量：**由母例的关系式 $y=10^{3+2\sqrt{x}}$，若 $y=10^5$，则

$$10^{3+2\sqrt{x}}=10^5$$

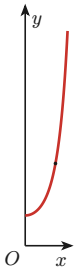
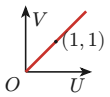
$$3+2\sqrt{x}=5$$

$$\sqrt{x}=1,\quad x=1$$

若还原的是立方，则取实立方根；例如 $\sqrt[3]{-8}=-2$。

⟵ 填空：①$\sqrt{x}$　②2　③3　④e^t

先变换坐标，再读取直线

	原变量关系	变换后的关系
图像		
记号	$U=x^2,\quad V=\ln y$	
关系式	$y=e^{x^2}$	$V=U$
直线参数	斜率 1，纵截距 0	

点石成金　题目出现变换坐标后的直线、两点或斜率时，先按两轴所示的量写出直线方程。

例 1　[2023 · May/June 0606/21 Q1]

Variables x and y are such that when $\lg y$ is plotted against $\sqrt{x}$ a straight line passing through the points (1, 5) and (2.5, 8) is obtained. Show that $y=A\times b^{\sqrt{x}}$ where A and b are constants to be found.

变量 x 和 y 满足：以 $\sqrt{x}$ 为横坐标、$\lg y$ 为纵坐标作图，得到一条经过点 $(1,5)$ 和 $(2.5,8)$ 的直线。证明 $y=A\times b^{\sqrt{x}}$，其中 A 和 b 为待求的常数，并求出它们的值。

解答　以 $\sqrt{x}$ 为横坐标，以 $\lg y$ 为纵坐标，设

$$\lg y = m\sqrt{x} + c$$

由两点求得斜率

$$m = \frac{8-5}{2.5-1} = 2$$

将 $(1,5)$ 代入，得

$$c = 5 - 2 \times 1 = 3$$

故

$$\lg y = 2\sqrt{x} + 3$$

$$y = 10^{2\sqrt{x}+3} = 10^3 \times (10^2)^{\sqrt{x}} = 1000 \times 100^{\sqrt{x}}$$

答：$A = 1000$，$b = 100$。

方法：先看两轴标注，用图上两点的纵坐标差除以横坐标差。

辨析：横坐标是平方根值，纵坐标是常用对数值。

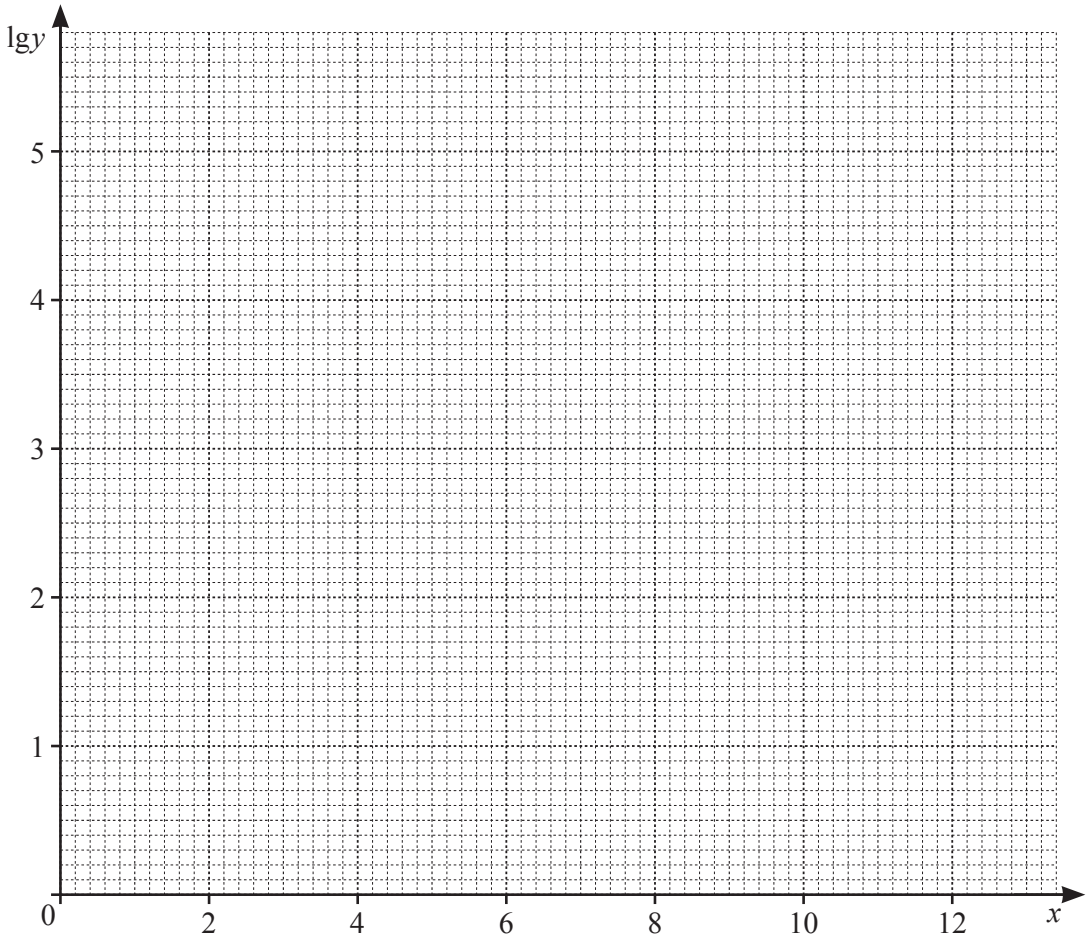
拓展：指数中的加法可拆成幂的乘法，常数项由此变成乘法系数。

例 2　[2024 · February/March 0606/22 Q8(b)]

Variables y and x are known to be connected by the relationship $y = Ab^x$ where A and b are constants. The table shows values of y for certain values of x.

x	1	3	5	10	12
y	38	150	600	20 500	82 000

(a) Draw the graph of $\lg y$ against x.



(b) Use your graph to find values of A and b, giving each to 1 significant figure.

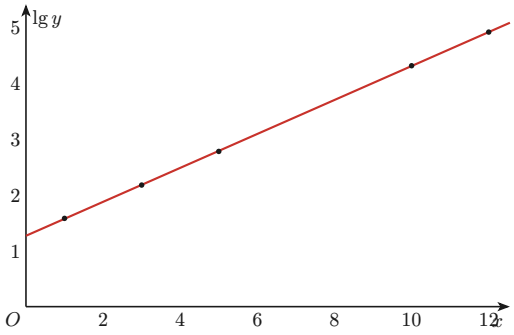
已知变量 y 与 x 满足关系式 $y = Ab^x$，其中 A 和 b 为常数。下表给出了若干个 x 值所对应的 y 值。x：$1, 3, 5, 10, 12$；y：$38, 150, 600, 20500, 82000$。(a) 以 x 为横坐标、$\lg y$ 为纵坐标，画出图象。图中横轴标有 $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$，纵轴标有 $1, 2, 3, 4, 5$。(b) 利用所画图象求出 A 和 b 的值，每个值均精确到 1 位有效数字。

解答　将各个 y 值取常用对数，保留三位小数，描点坐标为
$(1, 1.580), (3, 2.176), (5, 2.778), (10, 4.312), (12, 4.914)$。
描出各点并作拟合直线，延长直线，读得纵截距约为 1.3。取直线上相距较远的两点 $(0, 1.3)$、$(12, 4.9)$，得
$m \approx \frac{4.9-1.3}{12-0} = 0.30$。
所画直线的方程约为
$\lg y = 0.30x + 1.3$。
由题给关系式得
$\lg y = \lg(Ab^x) = (\lg b)x + \lg A$。
比较纵截距与斜率，得
$\lg A \approx 1.3$，
$A \approx 10^{1.3} \approx 19.95$；
$\lg b \approx 0.30$，
$b \approx 10^{0.30} \approx 1.995$。
答：取 1 位有效数字，$A = 20$，$b = 2$。

方法：先看纵轴所用的对数底数，再将指数关系展开成直线式。

辨析：斜率是底数的常用对数，纵截距是前置系数的常用对数。

数据点与一条拟合直线



例 3　[2025 · May/June 0606/23 Q3]

Variables x and y are such that when $\sqrt{y}$ is plotted against x^3 a straight line graph passing through the points (2, 5) and (10, 21) is obtained.

Find y in terms of x.

变量 x 和 y 满足：当以 x^3 为横坐标、$\sqrt{y}$ 为纵坐标作图时，得到一条经过点 $(2,5)$ 和 $(10,21)$ 的直线。求 y 关于 x 的表达式。

解答　设横坐标为 $X = x^3$，纵坐标为 $Y = \sqrt{y}$。由图象为直线，设

$$Y = mX + c$$

由直线经过 $(2,5)$ 和 $(10,21)$，得

$$m = \frac{21-5}{10-2} = 2$$

代入点 $(2,5)$，得

$$5 = 2 \times 2 + c$$

$$c = 1$$

故

$$Y = 2X + 1$$

代回原变量，得

$$\sqrt{y} = 2x^3 + 1$$

由平方根非负，得

$$2x^3 + 1 \geq 0$$

两边平方，得

$$y = (2x^3 + 1)^2$$

答：$y = (2x^3 + 1)^2$，其中 $2x^3 + 1 \geq 0$。

方法：先看两轴标注的变量形式，再用两点的坐标差求斜率。

辨析：横坐标是原变量的立方，纵坐标是原变量的平方根。

拓展：平方会丢失符号限制，还原时须保留平方根非负的条件。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/12 Q6(b)]

方法：先看横纵轴各表示什么量，再用两点求斜率和截距。

辨析：横坐标是 x^3，x 是横坐标的立方根，读点后还需还原。

When $\ln y$ is plotted against x^3, a straight line passing through the points $(2,5)$ and $(-8,25)$ is obtained.

(a) Find y in terms of x.

(b) Find the value of x when $y = \mathrm{e}^{25}$.

以 x^3 为横坐标、$\ln y$ 为纵坐标作图，得到一条经过点 $(2,5)$ 和 $(-8,25)$ 的直线。
(a) 用 x 表示 y。
(b) 当 $y = e^{25}$ 时，求 x 的值。

✓ **答案** (a) $y = e^{9-2x^3}$；(b) $x = -2$。

解析 设直线的斜率为 m，纵截距为 c，则

$$\ln y = mx^3 + c$$

由直线经过点 $(2,5)$ 和 $(-8,25)$，得

$$m = \frac{25-5}{-8-2} = -2$$

将 $x^3 = 2$，$\ln y = 5$ 代入，得

$$5 = -2 \times 2 + c$$

$$c = 9$$

因此

$$\ln y = 9 - 2x^3$$

$$y = e^{9-2x^3}$$

当 $y = e^{25}$ 时，

$$\ln y = \ln(e^{25}) = 25$$

$$9 - 2x^3 = 25$$

$$x^3 = -8$$

由 $(-2)^3 = -8$，得

$$x = -2$$

答：(a) $y = e^{9-2x^3}$；(b) $x = -2$。

2. [2025 · October/November 0606/22 Q4(a)]
提示：看纵轴的指数形式，还原时检查对数真数的正负。

Variables x and y are such that when e^y is plotted against x^3, a straight-line graph is obtained.

This line passes through the points (1, 13.5) and (7.5, 0.5).

(a) Find y in terms of x.

变量 x 和 y 满足：以 x^3 为横坐标、e^y 为纵坐标作图，得到一条直线。
这条直线经过点 $(1,13.5)$ 和 $(7.5,0.5)$。
(a) 用 x 表示 y。

✓ **答案** $y = \ln(15.5 - 2x^3)$，$x < \sqrt[3]{7.75}$。

解析 以 x^3 为横坐标，以 e^y 为纵坐标，设

$$e^y = mx^3 + c$$

由两点求得

$$m = \frac{0.5 - 13.5}{7.5 - 1} = -2$$

将 $(1, 13.5)$ 代入，得

$$c = 13.5 - (-2) \times 1 = 15.5$$

$$e^y = 15.5 - 2x^3$$

两边取自然对数，得

$$y = \ln(15.5 - 2x^3)$$

由 $e^y > 0$，得

$$15.5 - 2x^3 > 0$$

$$x^3 < 7.75$$

$$x < \sqrt[3]{7.75}$$

答：$y = \ln(15.5 - 2x^3)$，其中 $x < \sqrt[3]{7.75}$。

3. [2025 · October/November 0606/21 Q6]

提示：比较两点纵坐标的对数差，先合并为商的对数。

Variables x and y are such that when $\ln y$ is plotted against x a straight-line graph is obtained. The line passes through the points $(1, \ln 15)$ and $(2, \ln 75)$.

Show that $y = Ab^x$ where A and b are integers to be found.

变量 x 和 y 满足：以 x 为横坐标、$\ln y$ 为纵坐标作图，得到一条直线。这条直线经过点 $(1, \ln 15)$ 和 $(2, \ln 75)$。证明 $y = Ab^x$，其中 A 和 b 为待求的整数，并求出它们的值。

✓ **答案** $y = 3 \times 5^x$，$A = 3$，$b = 5$。

解析 以 x 为横坐标，以 $\ln y$ 为纵坐标，设

$$\ln y = mx + c$$

由两点求得

$$m = \frac{\ln 75 - \ln 15}{2 - 1} = \ln\left(\frac{75}{15}\right) = \ln 5$$

将 $(1, \ln 15)$ 代入，得

$$c = \ln 15 - \ln 5 = \ln\left(\frac{15}{5}\right) = \ln 3$$

$$\ln y = x \ln 5 + \ln 3$$

$$y = e^{x \ln 5 + \ln 3} = e^{\ln 3} \times \left(e^{\ln 5}\right)^x = 3 \times 5^x$$

答：$y = Ab^x$，其中整数 $A = 3$，$b = 5$。

4. [2025 · February/March 0606/22 Q5(a)]
提示：看已知斜率与图上点，再检查平方量的不等式范围。

When e^y is plotted against x^2, a straight-line graph with gradient -3 is obtained. The line passes through the point $(4.30, 5.85)$.

(a) Find y in terms of x.

以 x^2 为横坐标、e^y 为纵坐标作图，得到一条斜率为 -3 的直线。
这条直线经过点 $(4.30, 5.85)$。
(a) 用 x 表示 y。

✓ **答案** $y = \ln(18.75 - 3x^2)$，$-2.5 < x < 2.5$。

解析 以 x^2 为横坐标，以 e^y 为纵坐标，直线斜率为 -3，故设

$$e^y = -3x^2 + c$$

将图上的点 $(4.30, 5.85)$ 代入，得

$$c = 5.85 + 3 \times 4.30 = 18.75$$

$$e^y = 18.75 - 3x^2$$

两边取自然对数，得

$$y = \ln(18.75 - 3x^2)$$

由 $e^y > 0$，得

$$18.75 - 3x^2 > 0$$

$$x^2 < 6.25$$

$$-2.5 < x < 2.5$$

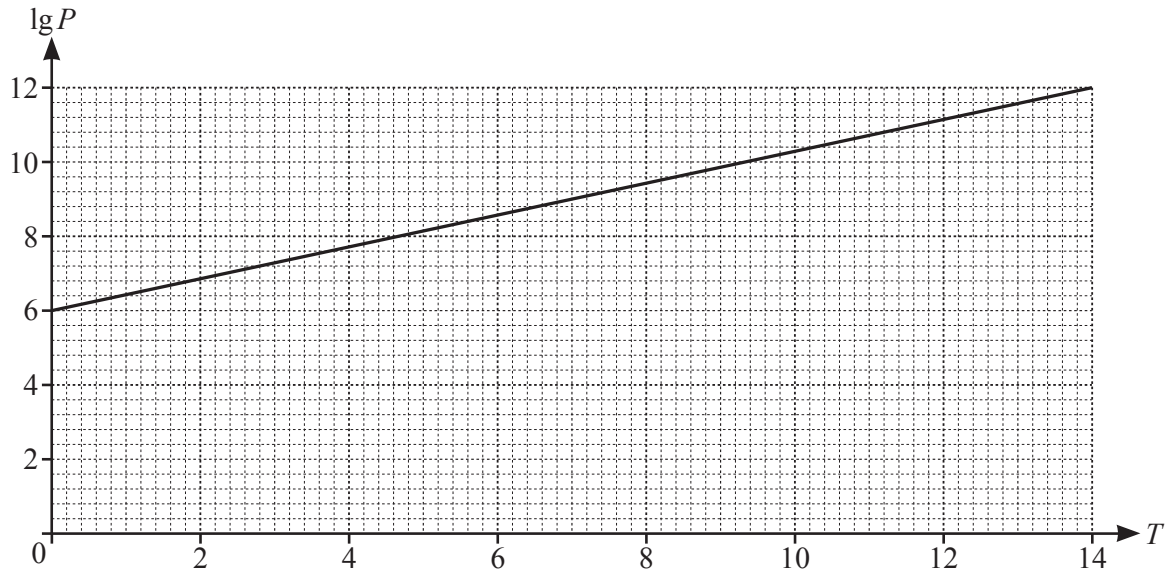
答：$y = \ln(18.75 - 3x^2)$，其中 $-2.5 < x < 2.5$。

5. [2023 · May/June 0606/22 Q5(b)]
提示：将取对数后的系数、常数项与斜率、纵截距逐项比较。

Variables P and T are known to be connected by the relationship $P = Ab^T$, where A and b are constants. Values of P are found for certain values of time, T.

(a) Show that a graph of $\lg P$ against T will be a straight line.

(b)



The diagram shows the graph of $\lg P$ against T. The graph passes through (0, 6) and (14, 12). Find the values of A and b.

已知变量 P 和 T 满足关系式 $P = Ab^T$，其中 A 和 b 为常数。在时间 T 的若干取值下，测得相应的 P 值。
(a) 证明以 T 为横坐标、$\lg P$ 为纵坐标的图象是一条直线。
(b) 图中横轴为 T，标有刻度 $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$；纵轴为 $\lg P$，标有刻度 $2, 4, 6, 8, 10, 12$。
图中给出了 $\lg P$ 对 T 的图象。这条直线经过 $(0, 6)$ 和 $(14, 12)$。
求 A 和 b 的值。

✓ **答案** (a) $\lg P = (\lg b)T + \lg A$，故图象为直线；(b) $A = 10^6$，$b = 10^{\frac{3}{7}}$。

解析 由 $P = Ab^T$，两边取常用对数，得

$$\lg P = \lg(Ab^T) = (\lg b)T + \lg A$$

其中 $\lg b$ 与 $\lg A$ 均为常数，故以 T 为横坐标、$\lg P$ 为纵坐标的图象为直线。由图上的两点，得

$$m = \frac{12 - 6}{14 - 0} = \frac{3}{7}$$

直线经过 $(0, 6)$，故

$$c = 6$$

比较斜率与纵截距，得

$$\lg b = \frac{3}{7}$$

$$\lg A = 6$$

$$b = 10^{\frac{3}{7}}$$

$$A = 10^6$$

答：图象为直线；$A = 10^6$，$b = 10^{\frac{3}{7}}$。

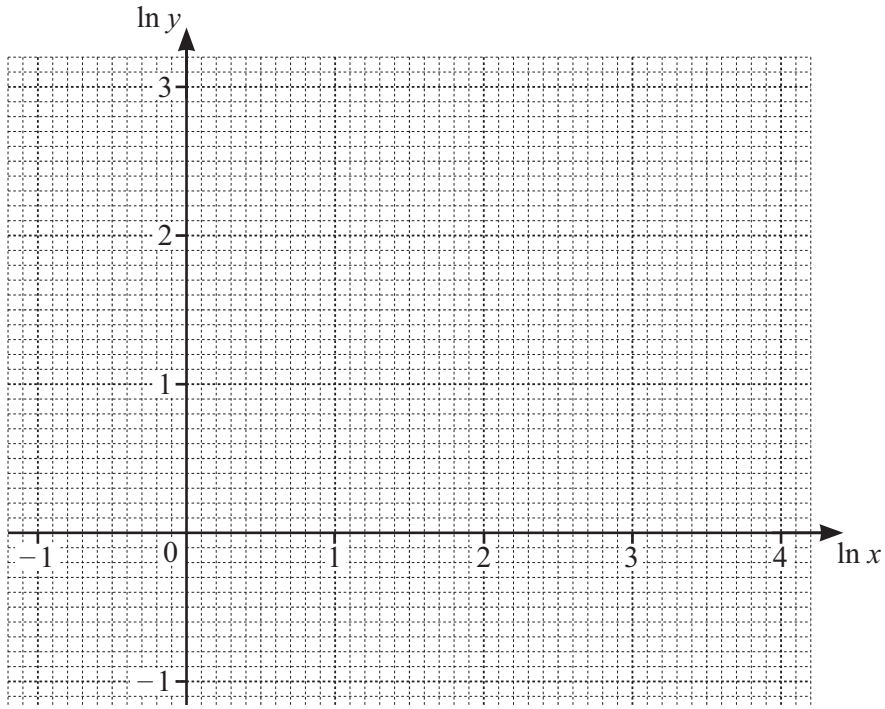
6. [2025 · October/November 0606/23 Q9(b)]

提示：看双对数坐标，比较幂指数与斜率、系数对数与截距。

Two variables, x and y, are related by an equation of the form $y = Ax^b$, where A and b are constants. The following pairs of values of x and y are given.

x	0.61	4.48	12.18	33.1
y	1.65	4.47	7.39	12.17

(a) On the axes below, use these values to draw the straight-line graph of $\ln y$ against $\ln x$.



(b) Use your graph to find the values of A and b.

两个变量 x 和 y 满足形如 $y = Ax^b$ 的方程，其中 A 和 b 为常数。
给出以下各组 x 和 y 的值。

x	0.61	4.48	12.18	33.1
y	1.65	4.47	7.39	12.17

(a) 在下面的坐标系中，利用这些数值画出 $\ln y$ 对 $\ln x$ 的直线图象。
图中横轴为 $\ln x$，标有刻度 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$；纵轴为 $\ln y$，标有刻度 $-1, 0, 1, 2, 3$。
(b) 利用所画图象求 A 和 b 的值。

✓ **答案** (a) 图上各点近似位于直线 $\ln y = 0.50 \ln x + 0.75$ 上；(b) $A \approx 2.12$，$b \approx 0.50$。

解析 由 $y = Ax^b$，取自然对数，得

$$\ln y = b \ln x + \ln A$$

计算两轴所需的数值，得

$\ln x$	−0.494	1.500	2.500	3.500
$\ln y$	0.501	1.497	2.000	2.499

描出表中各点并作拟合直线，所得直线约为

$$\ln y = 0.50 \ln x + 0.75$$

在直线上取近似点 $(0.5, 1.0)$ 和 $(2.5, 2.0)$，得

$$m \approx \frac{2.0 - 1.0}{2.5 - 0.5} = 0.50$$

由图读得纵截距

$$c \approx 0.75$$

比较直线方程，得

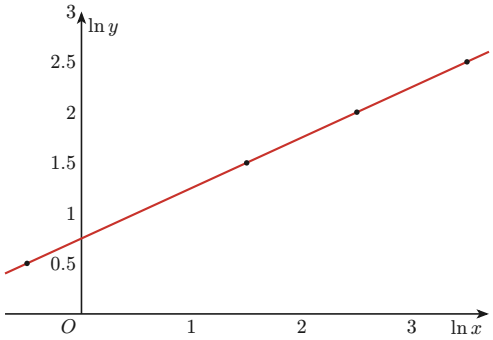
$$b = m \approx 0.50$$

$$\ln A = c \approx 0.75$$

$$A \approx e^{0.75} \approx 2.12$$

答：所画直线约为 $\ln y = 0.50 \ln x + 0.75$；$A \approx 2.12$，$b \approx 0.50$。

数据点与一条拟合直线



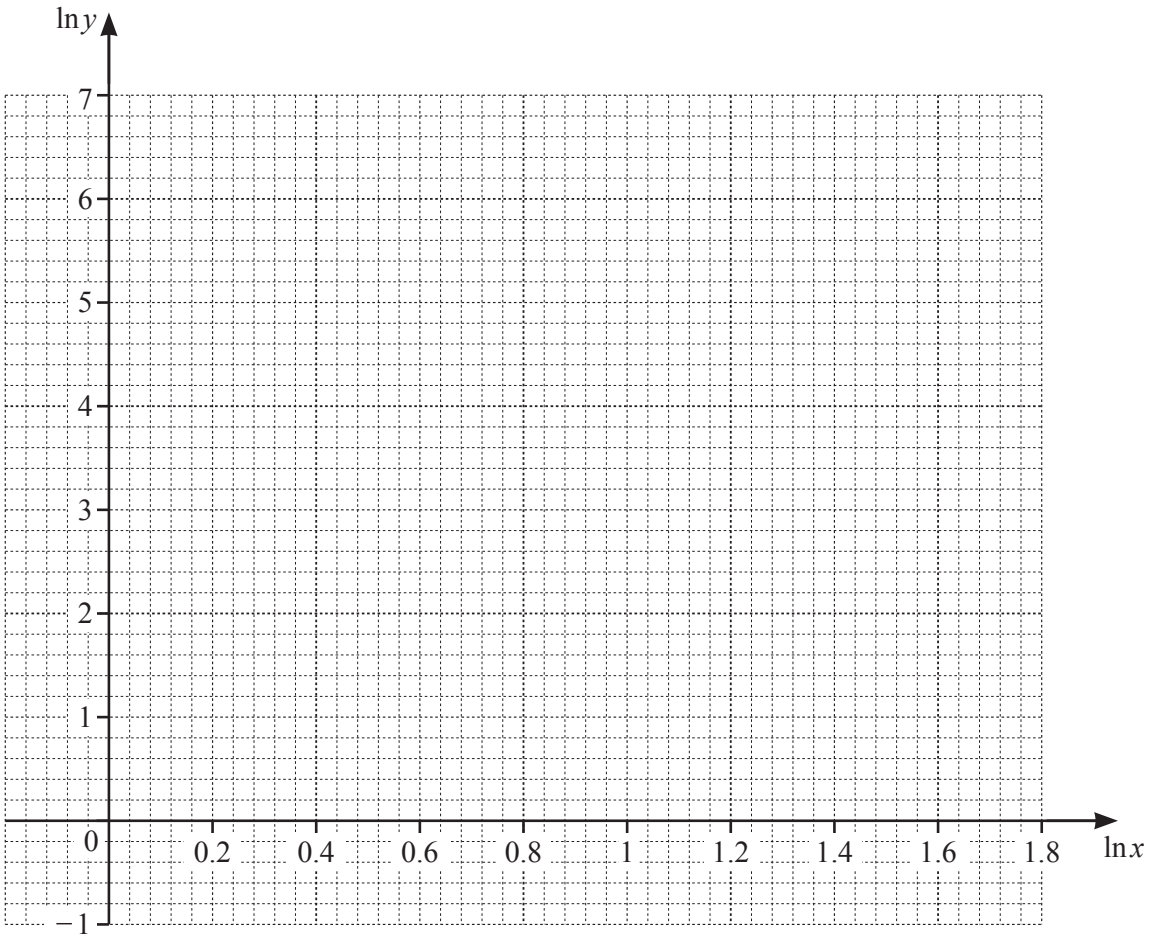
7. [2023 · October/November 0606/11 Q4(b)]

提示：在拟合直线上选较远两点，参数求出后再按要求取舍。

x	1	2	3	4	5
y	20	57	104	160	224

The table shows values of the variables x and y, which are related by the equation $y = Ax^b$, where A and b are constants.

(a) Use the data to draw a straight line graph of $\ln y$ against $\ln x$.



(b) Use your graph to estimate the values of A and b. Give your answers correct to 2 significant figures.

x	1	2	3	4	5
y	20	57	104	160	224

表中给出了变量 x 和 y 的数值，它们满足方程 $y = Ax^b$，其中 A 和 b 为常数。
(a) 利用这些数据，画出 $\ln y$ 对 $\ln x$ 的直线图象。
图中横轴为 $\ln x$，标有刻度 $0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$；纵轴为 $\ln y$，标有刻度 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$。
(b) 利用所画图象估计 A 和 b 的值。答案保留 2 位有效数字。

✓ **答案** (a) 图上各点近似位于直线 $\ln y = 1.5 \ln x + 3.0$ 上；(b) $A \approx 20$，$b \approx 1.5$，均保留 2 位有效数字。

解析 由 $y = Ax^b$，取自然对数，得

$$\ln y = b \ln x + \ln A$$

计算得

$\ln x$	0	0.693	1.099	1.386	1.609
$\ln y$	2.996	4.043	4.644	5.075	5.412

描出表中各点并作拟合直线，所得直线约为

$$\ln y = 1.5 \ln x + 3.0$$

在直线上取近似点 $(0, 3.0)$ 和 $(1.6, 5.4)$，得

$$m \approx \frac{5.4 - 3.0}{1.6 - 0} = 1.5$$

由图读得

$$c \approx 3.0$$

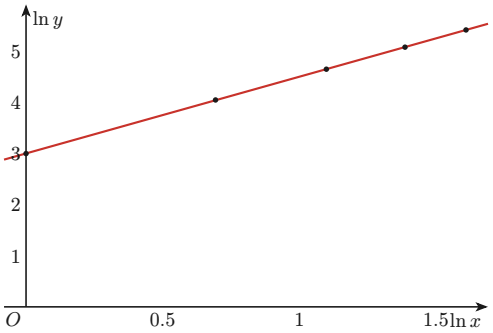
故

$$b = m \approx 1.5$$

$$A = e^c \approx e^3 \approx 20$$

答：所画直线约为 $\ln y = 1.5 \ln x + 3.0$；$A \approx 20$，$b \approx 1.5$，均保留 2 位有效数字。

数据点与一条拟合直线



8. [2024 · May/June 0606/22 Q8(b)]

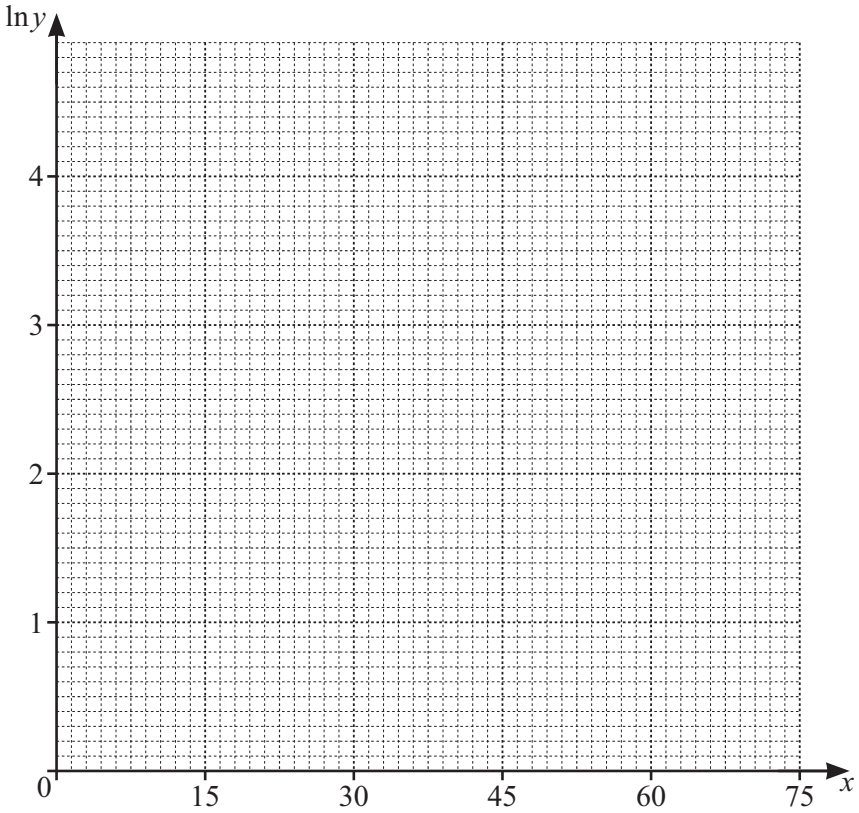
提示：看自然对数展开式，比较横坐标项与常数项。

An experiment was carried out and values of y for certain values of x were recorded. The table shows the values recorded.

x	15	30	45	60	75
y	10	13	22	35	50

The relationship between y and x is modelled by $y = Ae^{kx}$, where A and k are constants.

(a) Draw a straight line graph for $\ln y$ against x.



(b) Find the equation of the line in **part (a)** and hence find the values of A and k. Give each value correct to 1 significant figure.

进行一项实验，记录若干个 x 值所对应的 y 值。下表列出了记录的数据。x：$15, 30, 45, 60, 75$；y：$10, 13, 22, 35, 50$。y 与 x 的关系用下式建立模型，其中 A 和 k 为常数：$y = Ae^{kx}$。(a) 以 x 为横坐标、$\ln y$ 为纵坐标，画出直线图。图中横轴标有 $0, 15, 30, 45, 60, 75$，纵轴标有 $1, 2, 3, 4$。(b) 求出 (a) 中直线的方程，并由此求出 A 和 k 的值。每个值均精确到 1 位有效数字。

✓ **答案** 直线方程约为 $\ln y = 0.028x + 1.8$；$A = 6$，$k = 0.03$（均取 1 位有效数字）。

解析 将各个 y 值取自然对数，保留三位小数，描点坐标为

$(15, 2.303), (30, 2.565), (45, 3.091), (60, 3.555), (75, 3.912)$。

描出各点并作拟合直线，延长直线，读得纵截距约为 1.8。取直线上的两点约为 $(0, 1.8)$、$(75, 3.9)$，得

$m \approx \frac{3.9-1.8}{75-0} = 0.028$。

所画直线的方程约为

$\ln y = 0.028x + 1.8$。

由题给关系式得

$\ln y = \ln\left(Ae^{kx}\right) = \ln A + kx = kx + \ln A$。

比较纵截距与斜率，得

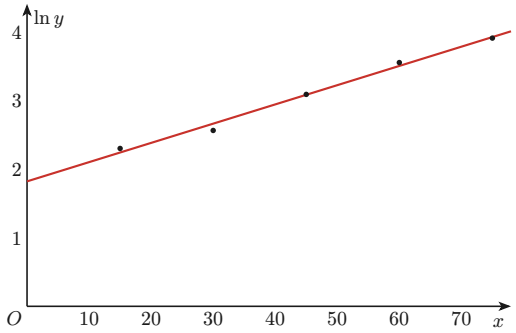
$\ln A \approx 1.8$，

$A \approx e^{1.8} \approx 6.050$；

$k \approx 0.028$。

答：直线方程约为 $\ln y = 0.028x + 1.8$；取 1 位有效数字，$A = 6$，$k = 0.03$。

数据点与一条拟合直线



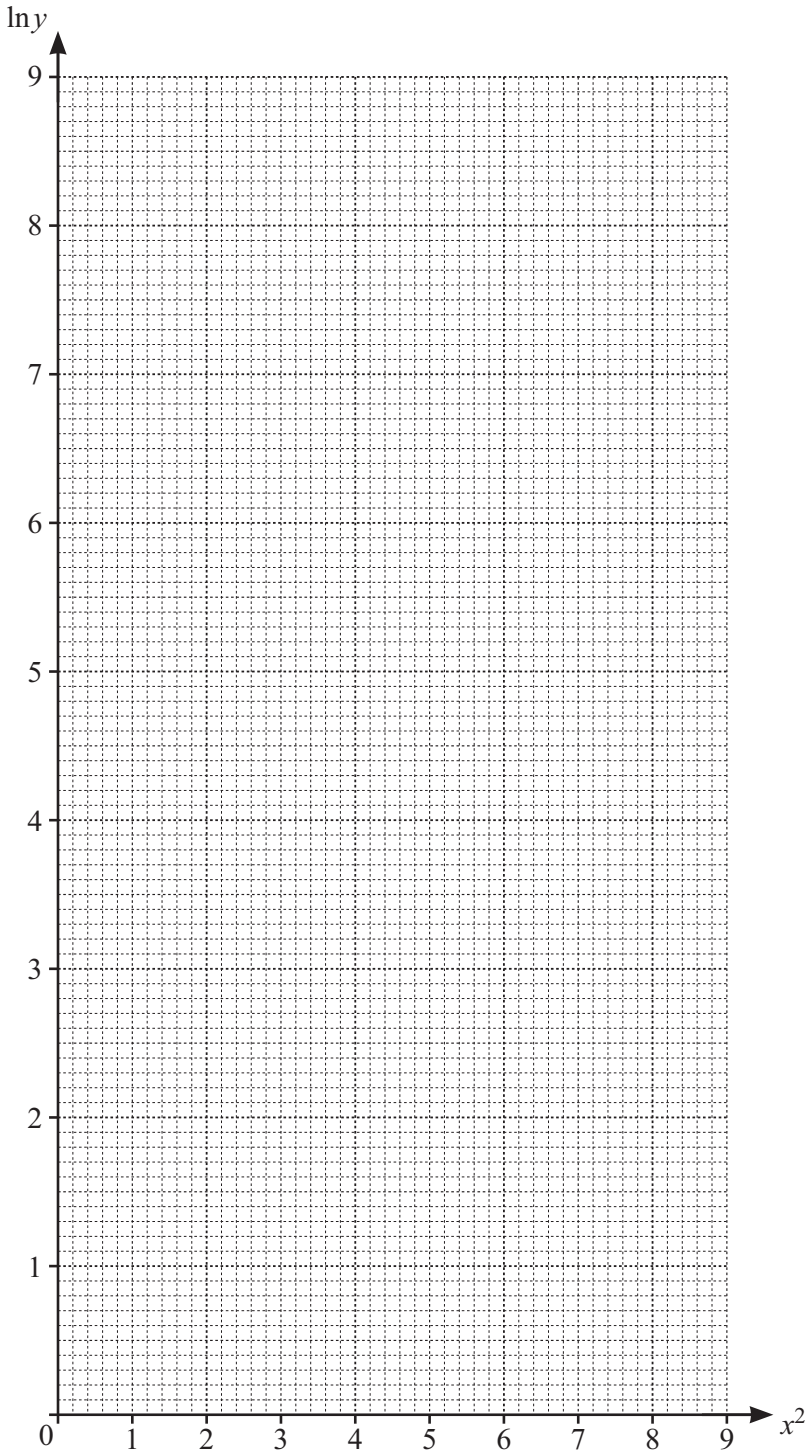
9. [2024 · October/November 0606/13 Q6(b)]

提示：看横轴的平方标记，比对展开式中斜率与截距的含义。

The table shows the variables x and y which are related by the equation $y = Ab^{x^2}$, where A and b are constants.

x	1	1.5	2	2.5	3
y	14	33.3	112	532.8	3584

(a) Use the data to draw a straight line graph of $\ln y$ against x^2.



(b) Use your graph to estimate the values of A and b. Give your answers correct to 1 significant figure.

下表中的变量 x 与 y 满足方程 $y = Ab^{x^2}$，其中 A 和 b 为常数。x：$1, 1.5, 2, 2.5, 3$；
y：$14, 33.3, 112, 532.8, 3584$。(a) 利用表中数据，以 x^2 为横坐标、$\ln y$ 为纵坐标，画出直线图。图中横轴标有 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$，纵轴标有 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$。(b) 利用所画图象估计 A 和 b 的值。答案均精确到 1 位有效数字。

✓ **答案** $A = 7$，$b = 2$（均取 1 位有效数字）。

解析 先求各个 x 值的平方，再将各个 y 值取自然对数，得

$x^2 = 1, 2.25, 4, 6.25, 9$。

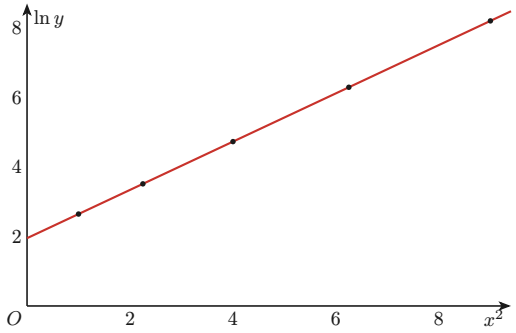
将纵坐标保留三位小数，描点坐标为

$(1, 2.639), (2.25, 3.506), (4, 4.718), (6.25, 6.278), (9, 8.184)$。

描出各点并作拟合直线，延长直线，读得纵截距约为 1.95。取直线上的两点约为 $(0, 1.95)$、$(9, 8.19)$，得

$m \approx \frac{8.19-1.95}{9-0} \approx 0.693$。
所画直线的方程约为
$\ln y = 0.693x^2 + 1.95$。
由题给关系式得
$\ln y = \ln\left(Ab^{x^2}\right) = (\ln b)x^2 + \ln A$。
比较纵截距与斜率，得
$\ln A \approx 1.95$，
$A \approx e^{1.95} \approx 7.029$；
$\ln b \approx 0.693$，
$b \approx e^{0.693} \approx 1.9997$。
答：取 1 位有效数字，$A = 7$，$b = 2$。

数据点与一条拟合直线



10. [2024 · May/June 0606/13 Q5(a)]
提示：看纵轴的指数形式，比较取对数后指数与原变量的关系。

When e^{2y} is plotted against x^3, a straight line graph that passes through the points (2, 5) and (6.4, 7.2) is obtained.

(a) Find y in terms of x.

当以 x^3 为横坐标、e^{2y} 为纵坐标作图时，得到一条经过点 $(2,5)$ 和 $(6.4,7.2)$ 的直线。
(a) 求 y 关于 x 的表达式。(4 分)

✓ **答案**

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^3}{2} + 4\right)$$

解析 设横坐标为 $X = x^3$，纵坐标为 $Y = e^{2y}$。由图象为直线，设

$$Y = mX + c$$

由直线经过 $(2,5)$ 和 $(6.4,7.2)$，得

$$m = \frac{7.2-5}{6.4-2} = \frac{2.2}{4.4} = \frac{1}{2}$$

代入点 $(2,5)$，得

$$5 = \frac{1}{2} \times 2 + c$$

$$c = 4$$

故

$$Y=\frac{1}{2}X+4$$

代回原变量，得

$$e^{2y}=\frac{x^3}{2}+4$$

由指数式恒正，得

$$\frac{x^3}{2}+4>0$$

两边取自然对数，得

$$2y=\ln\left(\frac{x^3}{2}+4\right)$$

$$y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^3}{2}+4\right)$$

答：$y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^3}{2}+4\right)$。

题型 6 在变换坐标直线上读数并还原原变量

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **幂式取对数：**表中 $x=2$ 时，$y=27.5$。自然对数记作 ln，两边取对数得：

$$\ln 27.5=\ln\left(A\times 2^b\right)=\ln A+b\ln 2$$

当 $x>0$、$A>0$ 时，同理可得：

$$\ln y=\ln\left(Ax^b\right)=\ln A+b\ln x$$

② **变换坐标描点：**纵轴为 $\ln y$，横轴为 $\ln x$，描点坐标写成 _____。例如，表中第一组数据变为：

$$(\ln 1.5,\ln 13.8)\approx(0.405,2.625)$$

描出各点，画一条贴近各点的最佳拟合直线。

③ **已知纵轴读横：**给出 $y=100$，先求它在纵轴上的位置。水平移至直线，再竖直移至横轴，读得的是 _____。

$$\ln y=\ln 100\approx 4.605$$

$$\ln x\approx 1.23$$

④ **对数还原原数：**e 是自然对数的底，约为 2.71828。本例读得 $\ln x\approx 1.23$，还原得：

$$x\approx e^{1.23}\approx 3.42$$

用 u、v 分别表示读得的两个对数值：

$\ln x=u$　　$\ln y=v$

$x=$ _____　　$y=e^v$

⑤ **已知横轴读纵：**给出 x，先求横坐标，再读纵坐标。以本例 $x=2.5$ 为例，竖直移至直线，再水平移至纵轴。

$$\ln x=\ln 2.5\approx 0.916$$

$$\ln y \approx 3.85$$

$$y \approx e^{3.85} \approx 47.0$$

⑥ **平方横轴读数：**横轴标为 x^2，如 $x = 1.2$ 时，先算横坐标。

$$x^2 = 1.2^2 = 1.44$$

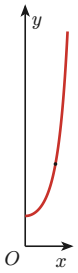
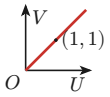
对于 $y = Ab^{x^2}$，其中 $A > 0$、$b > 0$，取对数得：

$$\ln y = \ln\left(Ab^{x^2}\right) = \ln A + x^2 \ln b$$

描点坐标为 _____，读得 $\ln y$ 后仍用指数还原。

⟵ 填空：①$(\ln x, \ln y)$　②$\ln x$　③e^u　④$(x^2, \ln y)$

先变换坐标，再读取直线

	原变量关系	变换后的关系
图像		
记号	$U = x^2$，　$V = \ln y$	
关系式	$y = e^{x^2}$	$V = U$
直线参数	斜率 1，纵截距 0	

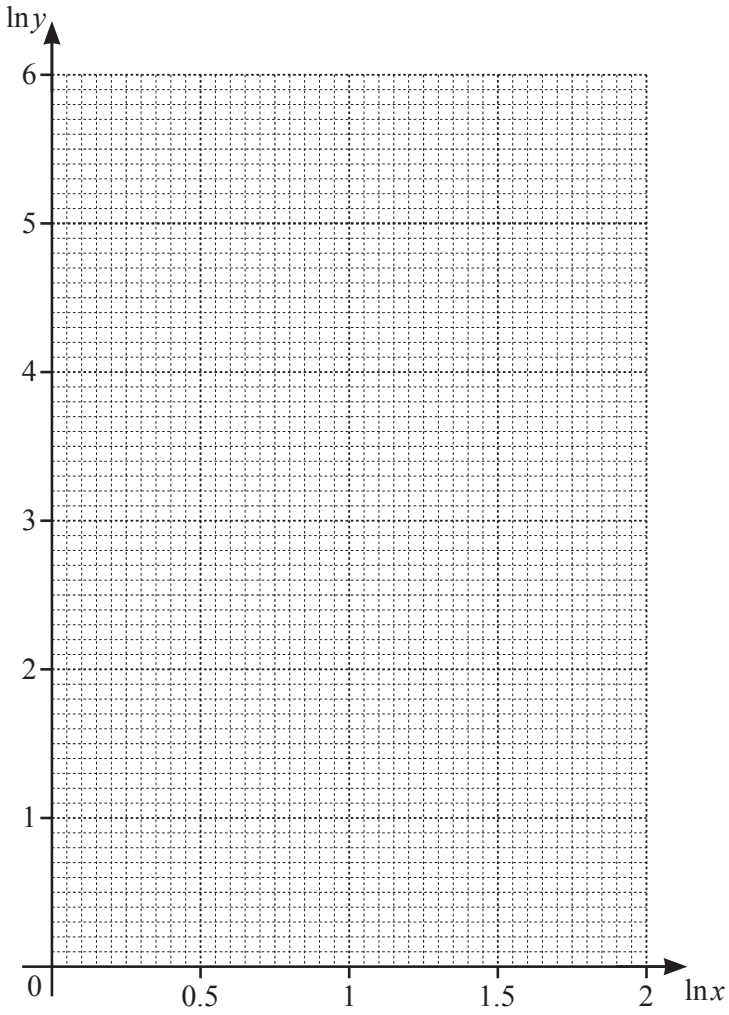
点石成金　题目出现对数坐标直线，并要求估计原变量时，先把已知数变成对应坐标，再沿直线读数并还原。

例 1　[2023 · May/June 0606/13 Q7(c)]

The table shows values of the variables x and y which are related by an equation of the form $y = Ax^b$, where A and b are constants.

x	1.5	2	2.5	3	4
y	13.8	27.5	46.9	72.6	145

(a) Use the data to draw a straight line graph of $\ln y$ against $\ln x$.



(c) Estimate the value of x when $y = 100$.

表中给出了变量 x 和 y 的值，它们满足形式为 $y = Ax^b$ 的方程，其中 A 和 b 为常数。

x : 1.5, 2, 2.5, 3, 4

y : 13.8, 27.5, 46.9, 72.6, 145

(a) 利用这些数据，绘制 $\ln y$ 对 $\ln x$ 的直线图。(3 分)
图中横轴为 $\ln x$，标有 $0, 0.5, 1, 1.5, 2$；纵轴为 $\ln y$，标有 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$。
(c) 估计当 $y = 100$ 时 x 的值。(2 分)

解答 由 $y = Ax^b$，两边取自然对数得

$$\ln y = \ln A + b \ln x$$

各组数据对应的坐标为

$$(\ln 1.5, \ln 13.8) \approx (0.405, 2.625)$$

$$(\ln 2, \ln 27.5) \approx (0.693, 3.314)$$

$$(\ln 2.5, \ln 46.9) \approx (0.916, 3.848)$$

$$(\ln 3, \ln 72.6) \approx (1.099, 4.285)$$

方法：先看两轴标注，将已知的纵轴原数取自然对数，再沿直线读横轴。

辨析：横轴读数是自然对数值，原变量是取指数还原后的数。

拓展：双对数直线的斜率等于幂指数，纵截距等于系数的自然对数。

$$(\ln 4, \ln 145) \approx (1.386, 4.977)$$

在横轴为 $\ln x$、纵轴为 $\ln y$ 的坐标系内描出各点，画最佳拟合直线。
当 $y = 100$ 时，

$$\ln y = \ln 100 \approx 4.605$$

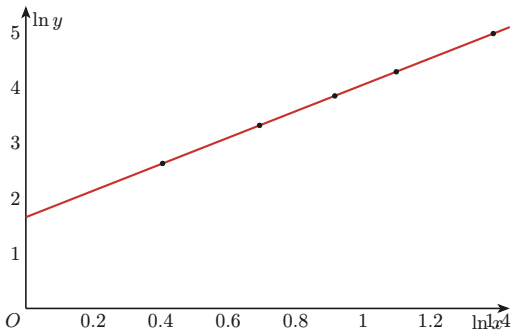
从纵轴上 4.605 处水平移至直线，再竖直移至横轴，读得

$$\ln x \approx 1.23$$

$$x \approx e^{1.23} \approx 3.42$$

答：当 $y = 100$ 时，$x \approx 3.42$。

数据点与一条拟合直线

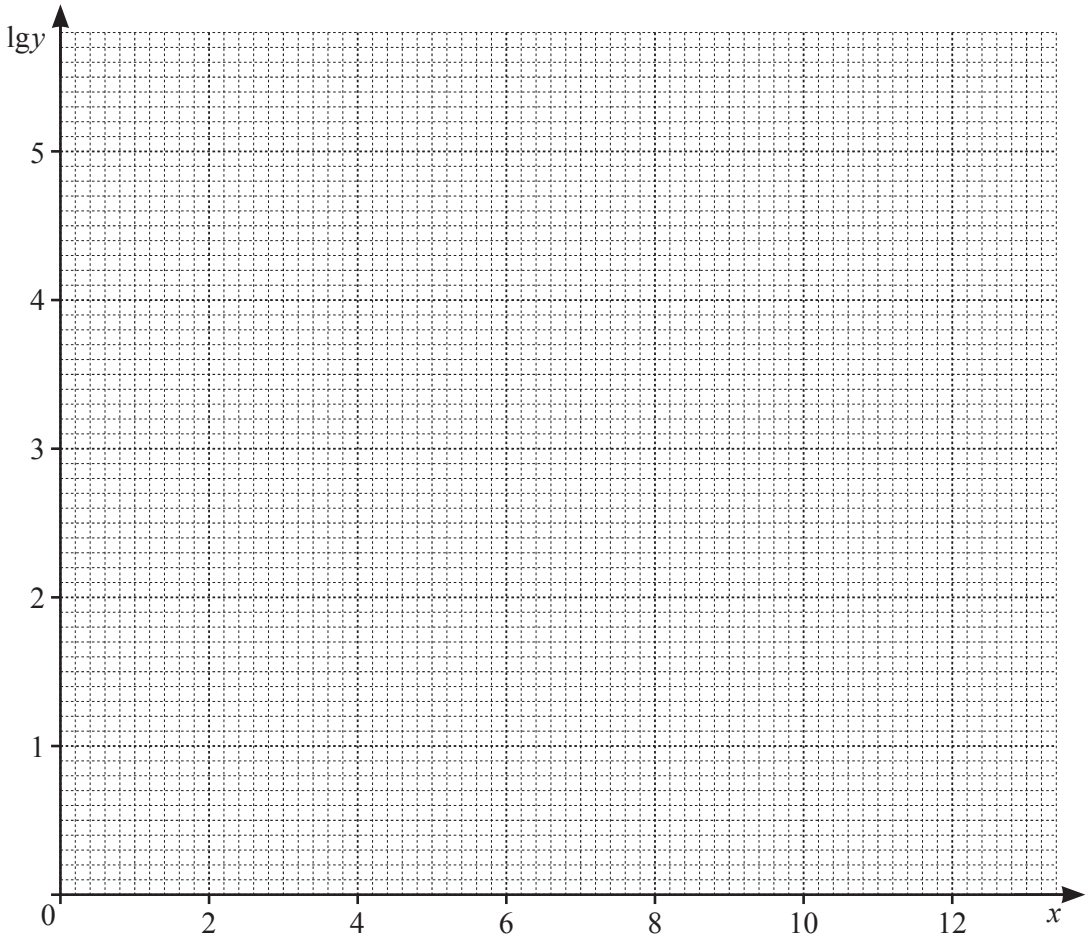


例 2　[2024 · February/March 0606/22 Q8(c)]

Variables y and x are known to be connected by the relationship $y = Ab^x$ where A and b are constants. The table shows values of y for certain values of x.

x	1	3	5	10	12
y	38	150	600	20 500	82 000

(a) Draw the graph of $\lg y$ against x.



(c) Find an estimate of x when $y = 1500$.

已知变量 y 和 x 满足下列关系，其中 A 和 b 为常数。

$$y = Ab^x$$

下表给出了若干 x 值所对应的 y 值。

x	1	3	5	10	12
y	38	150	600	20500	82000

(a) 画出 $\lg y$ 对 x 的图象。
图中横轴标为 x，标有刻度 $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$；纵轴标为 $\lg y$，标有刻度 $1, 2, 3, 4, 5$，原点标为 0。
(c) 估计下列条件下 x 的值。

$$y = 1500$$

解答 由表中数据得各点坐标

$$(1, 1.580), (3, 2.176), (5, 2.778), (10, 4.312), (12, 4.914)$$

描出上述各点，画出拟合直线。
当 y 为题给值时，

$$\lg y = \lg 1500 \approx 3.176$$

从纵轴上 3.176 处画水平线交拟合直线，再画竖直线交横轴，读得

$$x \approx 6.3$$

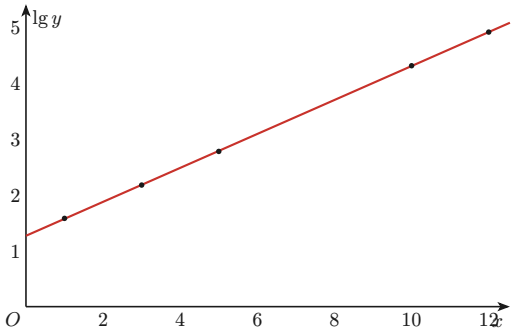
答：x 的估计值为 6.3。

方法：先看两轴标记，将给定的 y 取对数，再沿拟合直线反读横坐标。

辨析：lg 是以十为底的对数，ln 是以自然常数 e 为底的对数。

拓展：拟合直线反映整体趋势，不必穿过每个数据点。

数据点与一条拟合直线



针对练习

1. [2024 · May/June 0606/22 Q8(c)]

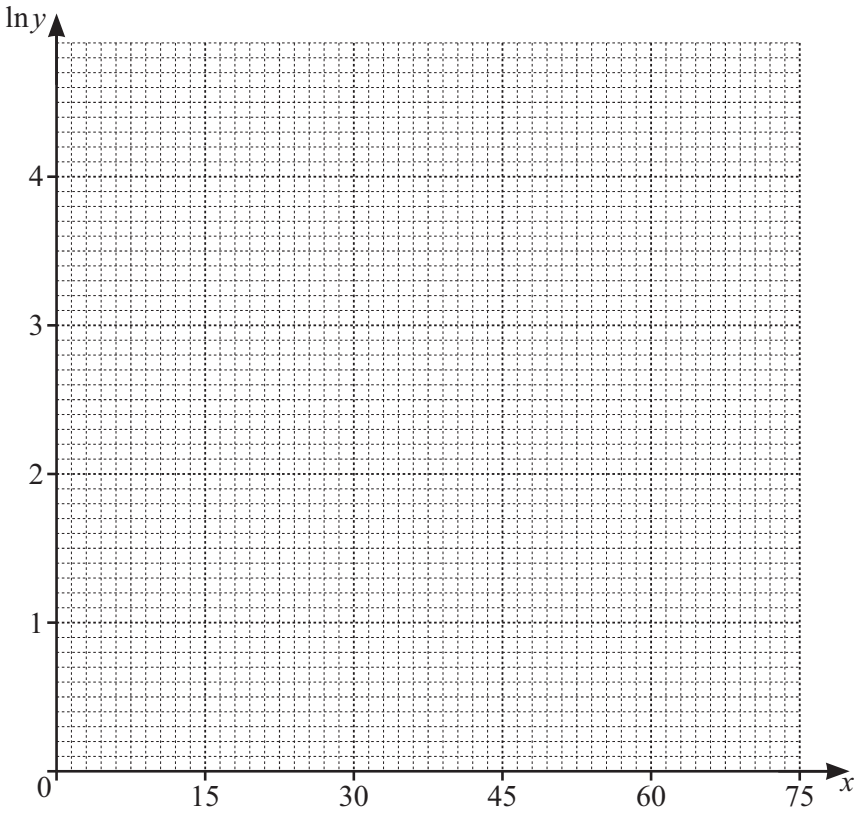
提示：先按对纵轴所用的对数，再找给定值对应的纵坐标。

An experiment was carried out and values of y for certain values of x were recorded. The table shows the values recorded.

x	15	30	45	60	75
y	10	13	22	35	50

The relationship between y and x is modelled by $y = Ae^{kx}$, where A and k are constants.

(a) Draw a straight line graph for $\ln y$ against x.



(c) Find the value of x for which $y = 17$.

进行了一项实验，记录了若干 x 值所对应的 y 值。下表列出了记录的数据。

x	15	30	45	60	75
y	10	13	22	35	50

y 与 x 的关系用下式建立模型，其中 A 和 k 为常数。

$$y = Ae^{kx}$$

(a) 画出 $\ln y$ 对 x 的直线图象。
图中横轴标为 x，标有刻度 $0, 15, 30, 45, 60, 75$；纵轴标为 $\ln y$，标有刻度 $1, 2, 3, 4$，原点标为 0。
(c) 求下列条件下 x 的值。

$$y = 17$$

✓ **答案** $x \approx 36$

解析 由表中数据得各点坐标

$$(15, 2.303), (30, 2.565), (45, 3.091), (60, 3.555), (75, 3.912)$$

描出上述各点，画出拟合直线。
当 y 为题给值时，

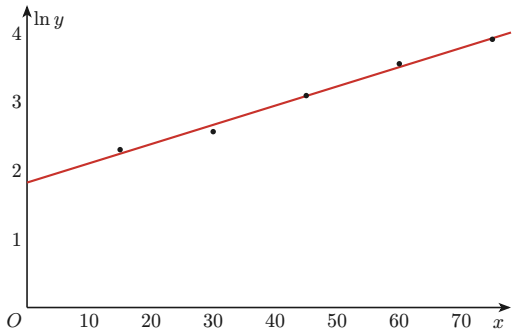
$$\ln y = \ln 17 \approx 2.833$$

从纵轴上 2.833 处画水平线交拟合直线，再画竖直线交横轴，读得

$$x \approx 36$$

答：x 约为 36。

数据点与一条拟合直线

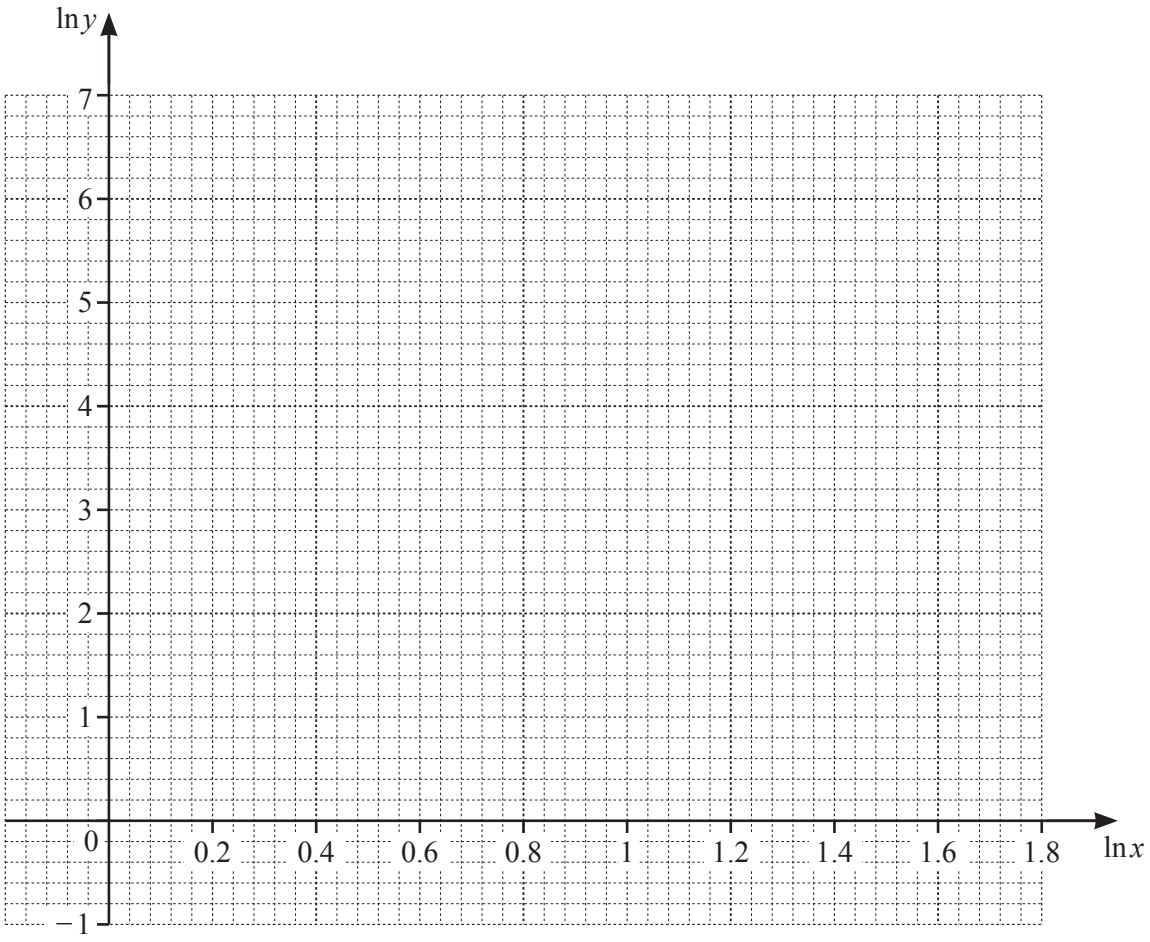


2. [2023 · October/November 0606/11 Q4(c)]
提示：从横轴的自然对数位置读纵轴，核对读数是否仍为对数。

x	1	2	3	4	5
y	20	57	104	160	224

The table shows values of the variables x and y, which are related by the equation $y = Ax^b$, where A and b are constants.

(a) Use the data to draw a straight line graph of $\ln y$ against $\ln x$.



(c) Use your graph to estimate the value of y when $x = 3.5$.

表中给出了变量 x 和 y 的值，它们满足方程 $y = Ax^b$，其中 A 和 b 为常数。

x : 1, 2, 3, 4, 5

y : 20, 57, 104, 160, 224

(a) 利用这些数据，绘制 $\ln y$ 对 $\ln x$ 的直线图。(3 分)

图中横轴为 $\ln x$，标有 $0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$；纵轴为 $\ln y$，标有 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$。

(c) 利用所画图象，估计当 $x = 3.5$ 时 y 的值。(2 分)

✓ **答案** (a) 描出 $(0, 2.996)$、$(0.693, 4.043)$、$(1.099, 4.644)$、$(1.386, 5.075)$、$(1.609, 5.412)$，画最佳拟合直线；(c) $y \approx 131$。

解析 由 $y = Ax^b$，两边取自然对数得

$$\ln y = \ln A + b \ln x$$

各组数据对应的坐标为

$$(\ln 1, \ln 20) \approx (0, 2.996)$$

$$(\ln 2, \ln 57) \approx (0.693, 4.043)$$

$$(\ln 3, \ln 104) \approx (1.099, 4.644)$$

$$(\ln 4, \ln 160) \approx (1.386, 5.075)$$

$$(\ln 5, \ln 224) \approx (1.609, 5.412)$$

在横轴为 $\ln x$、纵轴为 $\ln y$ 的坐标系内描出各点，画最佳拟合直线。
当 $x = 3.5$ 时，

$$\ln x = \ln 3.5 \approx 1.253$$

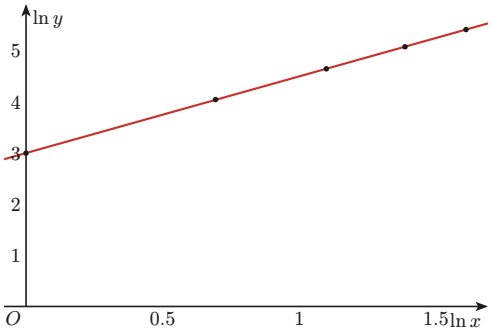
从横轴上 1.253 处竖直移至直线，再水平移至纵轴，读得

$$\ln y \approx 4.875$$

$$y \approx e^{4.875} \approx 131$$

答：当 $x = 3.5$ 时，$y \approx 131$。

数据点与一条拟合直线

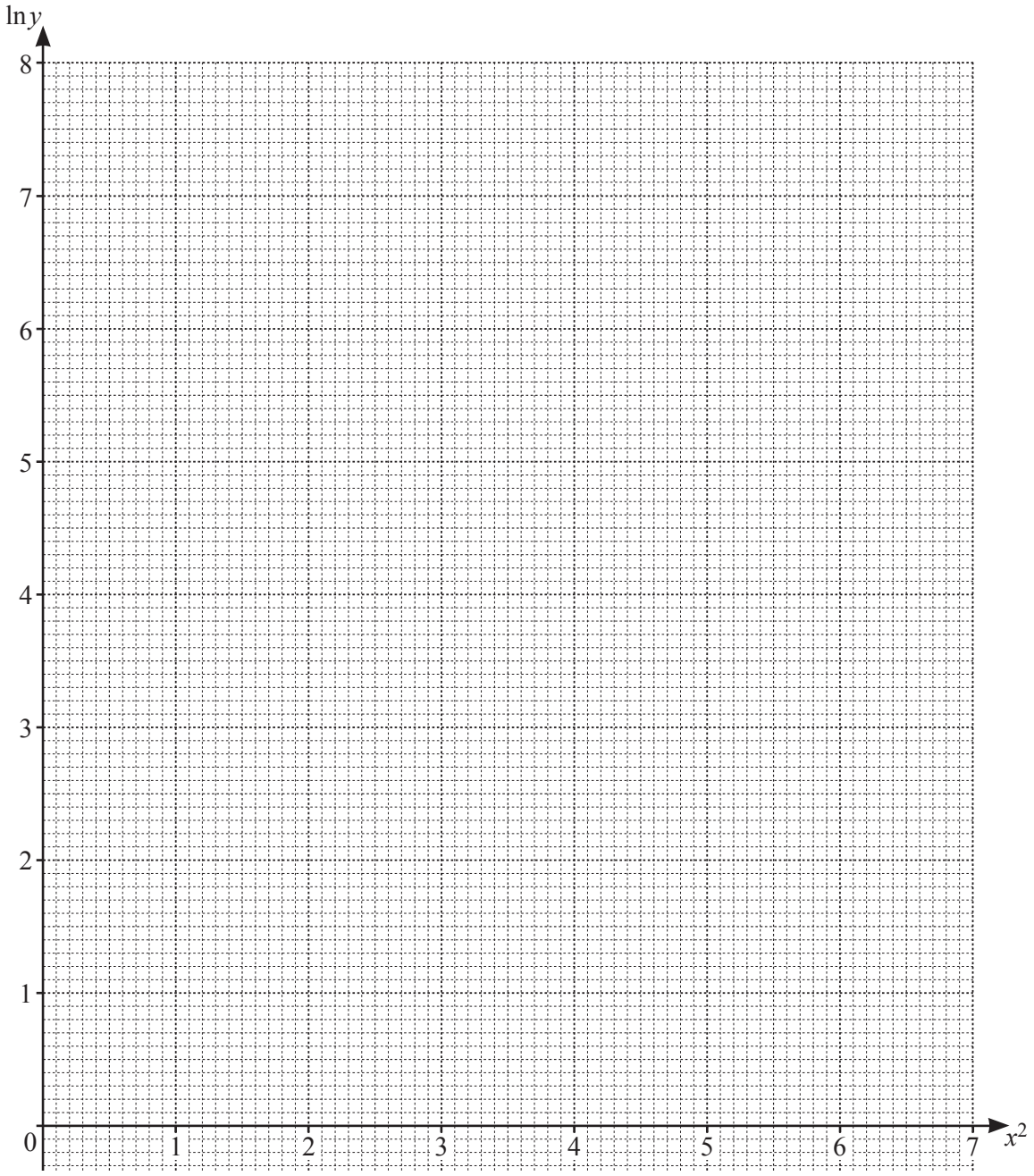


3. [2023 · February/March 0606/12 Q5(c)]
提示：先核对横轴是否为平方值，再看纵轴读数如何还原。

The table shows values of the variables x and y, which are related by an equation of the form $y = Ab^{x^2}$, where A and b are constants.

x	1	1.5	2	2.5
y	2.0	11.3	128	2896

(a) Use the data to draw a straight line graph of $\ln y$ against x^2.



(c) Estimate the value of y when $x = 1.75$.

表中给出了变量 x 和 y 的值，它们满足形式为 $y = Ab^{x^2}$ 的方程，其中 A 和 b 为常数。

x	1	1.5	2	2.5
y	2.0	11.3	128	2896

(a) 利用这些数据，绘制 $\ln y$ 对 x^2 的直线图。(2 分)
图中横轴为 x^2，标有 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$；纵轴为 $\ln y$，标有 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$。
(c) 估计当 $x = 1.75$ 时 y 的值。(2 分)

✓ **答案**　(a) 描出 $(1, 0.693)$、$(2.25, 2.425)$、$(4, 4.852)$、$(6.25, 7.971)$，画最佳拟合直线；(c) $y \approx 35$。

解析　由 $y = Ab^{x^2}$，两边取自然对数得

$$\ln y = \ln A + x^2 \ln b$$

各组数据对应的坐标为

$$(1^2, \ln 2.0) \approx (1, 0.693)$$

$$(1.5^2, \ln 11.3) \approx (2.25, 2.425)$$

$$(2^2, \ln 128) \approx (4, 4.852)$$

$$(2.5^2, \ln 2896) \approx (6.25, 7.971)$$

在横轴为 x^2、纵轴为 $\ln y$ 的坐标系内描出各点，画最佳拟合直线。
当 $x = 1.75$ 时，横坐标为

$$x^2 = 1.75^2 = 3.0625$$

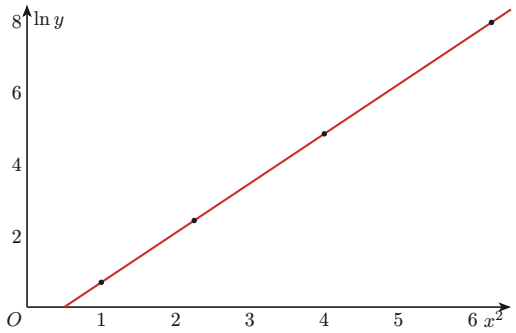
从横轴上 3.0625 处竖直移至直线，再水平移至纵轴，读得

$$\ln y \approx 3.55$$

$$y \approx e^{3.55} \approx 35$$

答：当 $x = 1.75$ 时，$y \approx 35$。

数据点与一条拟合直线

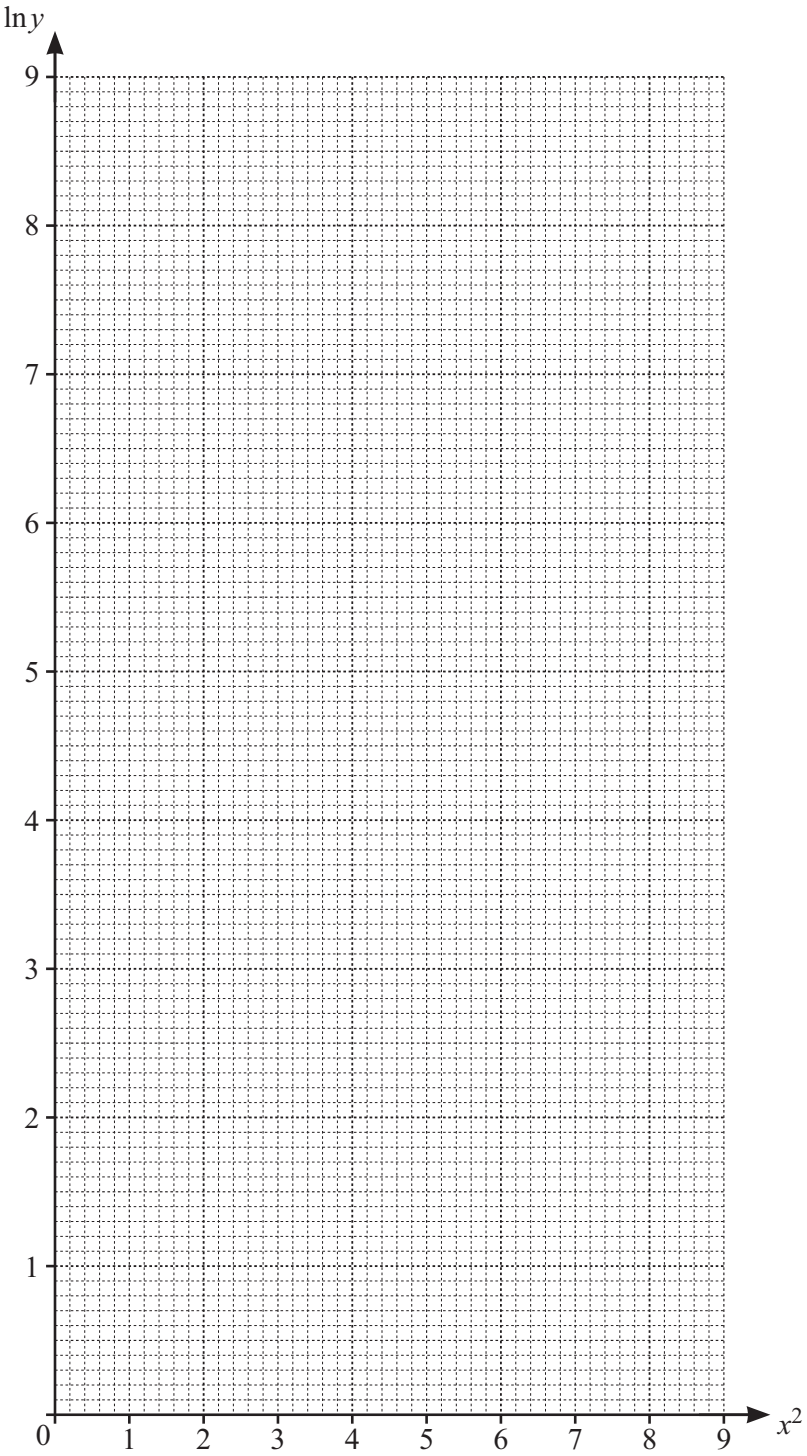


4. [2024 · October/November 0606/13 Q6(c)]
提示：先看横轴是否为平方值，再对照表中正负范围还原。

The table shows the variables x and y which are related by the equation $y = Ab^{x^2}$, where A and b are constants.

x	1	1.5	2	2.5	3
y	14	33.3	112	532.8	3584

(a) Use the data to draw a straight line graph of $\ln y$ against x^2.



(c) Use your graph to estimate the value of x when $y = 200$. Give your answer correct to 2 significant figures.

表中给出了变量 x 和 y，它们满足下列方程，其中 A 和 b 为常数。

$$y = Ab^{x^2}$$

x	1	1.5	2	2.5	3
y	14	33.3	112	532.8	3584

(a) 利用这些数据，画出 $\ln y$ 对 x^2 的直线图象。
图中横轴标为 x^2，标有从 0 到 9 的整数刻度；纵轴标为 $\ln y$，标有从 1 到 9 的整数刻度，原点标为 0。
(c) 利用所画图象，估计下列条件下 x 的值。答案精确到 2 位有效数字。

$$y = 200$$

✓ **答案** $x \approx 2.2$（2 位有效数字）

解析 横轴为 x^2，由表中数据得

$$x^2 = 1, 2.25, 4, 6.25, 9$$

对应各点的坐标为

$$(1, 2.639), (2.25, 3.506), (4, 4.718), (6.25, 6.278), (9, 8.184)$$

描出上述各点，画出拟合直线。

当 y 为题给值时，

$$\ln y = \ln 200 \approx 5.298$$

从纵轴上 5.298 处画水平线交拟合直线，再画竖直线交横轴，读得

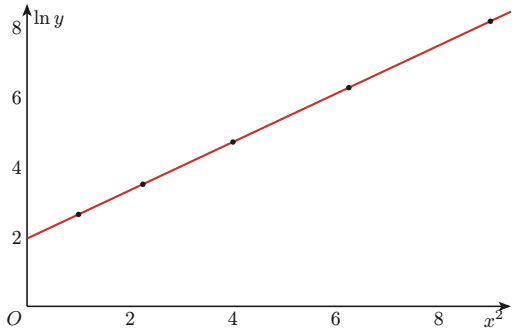
$$x^2 \approx 4.8$$

按表中 x 的正值范围，取正的平方根，得

$$x \approx \sqrt{4.8} \approx 2.2$$

答：x 的估计值为 2.2，精确到 2 位有效数字。

数据点与一条拟合直线



第 8 章 圆的坐标几何

Chapter 8

8.1 圆的坐标几何

题型 1 由圆心和半径条件写圆方程

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **直径确定圆心：**本例的 $A(-3,6)$、$B(7,-8)$ 是直径端点，圆心 C 是线段 AB 的中点。横、纵坐标分别取两端点坐标的平均值。

$$\left(\frac{-3+7}{2},\frac{6-8}{2}\right)=(2,-1)$$

圆心坐标为 _____。

② **两点确定半径：**圆心到圆上一点的距离为半径，用 r 表示。由勾股定理，半径平方为两点横、纵坐标差的平方和。

$$r^2=(-3-2)^2+(6+1)^2=25+49=74$$

若另一个圆以 $C(2,-1)$ 为圆心且过原点，则

$$r^2=(0-2)^2+(0+1)^2=5$$

③ **写出圆的方程：**本例圆上任一点 (x,y) 到圆心 $(2,-1)$ 的距离平方为 74。

$$(x-2)^2+(y+1)^2=74$$

一般地，圆心为 (h,k)、半径为 $r>0$ 的圆，其标准方程为

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

方程右侧填写 _____。

④ **平行切线定圆：**两条竖直或水平的平行切线，圆心在两线正中，半径为间距的一半。

竖直切线为 $x=-2$、$x=4$：

$$h=\frac{-2+4}{2}=1$$

$r=\frac{4-(-2)}{2}=3$

水平切线为 $y=-1$、$y=5$：

$$k=\frac{-1+5}{2}=2$$

$r=\frac{5-(-1)}{2}=3$

⑤ **代入直线方程：**求圆与直线的交点，把直线上的坐标关系代入圆方程。例如，圆为 $x^2+y^2=5$，直线为 $y=2x-5$，代入并整理得

$$x^2+(2x-5)^2=5\Leftrightarrow 5x^2-20x+20=0\Leftrightarrow 5(x-2)^2=0$$

⑥ **重根确定切点：**上式只有一个根，称为重根，代回直线方程求另一坐标。

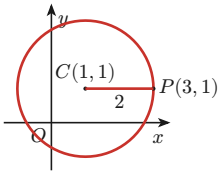
$$x=2,\quad y=2\times 2-5=-1$$

直线与圆只有一个公共点，故直线与圆相切，切点为 $(2,-1)$。

⑦

圆心、半径与标准方程

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4$$



填空：①$(2,-1)$　②半径的平方

点石成金　题目出现直径端点、圆心与圆上一点或平行切线，要求圆的方程时，先求圆心坐标和半径平方。

例 1　[2025 · February/March 0606/12 Q3]

The point A has coordinates $(-3, 6)$.
The point B has coordinates $(7, -8)$.

Given that the line AB is the diameter of a circle, find the equation of the circle.

点 A 的坐标为 $(-3,6)$。
点 B 的坐标为 $(7,-8)$。
已知线段 AB 是一个圆的直径，求这个圆的方程。

解答　由 AB 是圆的直径，得圆心 C 为 AB 的中点。

$$C\left(\frac{-3+7}{2},\frac{6-8}{2}\right)=(2,-1)$$

设圆的半径为 r，由 A 在圆上，得

$$r^2=(-3-2)^2+(6+1)^2=25+49=74$$

故圆的方程为

$$(x-2)^2+(y+1)^2=74$$

答：圆的方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=74$。

方法：先看直径两端点，取坐标平均值求圆心，再算到端点的距离平方。

辨析：半径是圆心到圆上一点的距离，半径平方是圆方程右侧的数。

拓展：用直径长度的平方除以四，也能求出半径平方。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/13 Q11(a)]

提示：看两组平行切线的位置，用中间位置定圆心、半间距定半径。

The lines $x=0$, $x=4$, $y=3$ and $y=-1$ are tangents to a circle.

(a) Find the equation of the circle.

直线 $x=0$、$x=4$、$y=3$ 和 $y=-1$ 都是一个圆的切线。
(a) 求这个圆的方程。

答案

$$(x-2)^2+(y-1)^2=4$$

解析　设圆心为 (h,k)，半径为 r。由 $x=0$ 与 $x=4$ 都是圆的切线，得

$$h=\frac{0+4}{2}=2$$

$$r=\frac{4-0}{2}=2$$

由 $y=3$ 与 $y=-1$ 都是圆的切线，得

$$k=\frac{3+(-1)}{2}=1$$

故圆心为 $(2,1)$，半径平方为

$$r^2=2^2=4$$

答：圆的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$。

2. [2025 · October/November 0606/21 Q5(a)]

提示：比较圆心与圆上点的横、纵坐标，算坐标差的平方和。

Solutions to this question by accurate drawing will not be accepted.

A circle has centre (4, 2) and meets the x-axis at $(-2, 0)$.

(a) Find the equation of the circle.

本题不接受通过精确作图得到的解答。
一个圆的圆心为 $(4,2)$，与 x 轴交于 $(-2,0)$。
(a) 求这个圆的方程。

✓ **答案**

$$(x-4)^2+(y-2)^2=40$$

解析 设圆的半径为 r。由圆心为 $(4,2)$，且 $(-2,0)$ 在圆上，得

$$r^2=(-2-4)^2+(0-2)^2=36+4=40$$

答：圆的方程为 $(x-4)^2+(y-2)^2=40$。

3. [2025 · May/June 0606/12 Q3(c)]

提示：看前问求得的切点，以它为圆心，算到原点的距离平方。

A circle with centre C has the equation $x^2+y^2-10x-4y+24=0$.

(a) Show that the line $y=2x-3$ is a tangent to this circle.

(b) Given that this tangent touches the circle at the point P, find the coordinates of P.

(c) Find the equation of the circle which has its centre at P and passes through the origin.

一个圆的圆心为 C，方程为

$$x^2+y^2-10x-4y+24=0$$

(a) 证明直线 $y=2x-3$ 是这个圆的切线。
(b) 已知这条切线与圆相切于点 P，求 P 的坐标。
(c) 求以 P 为圆心且经过原点的圆的方程。

✓ **答案** (a) 直线与圆相切；(b) $P(3,3)$；(c) $(x-3)^2+(y-3)^2=18$。

解析 将 $y=2x-3$ 代入圆的方程，得

$$x^2+(2x-3)^2-10x-4(2x-3)+24=0$$

$$5x^2-30x+45=0$$

$$5(x-3)^2=0$$

$$x=3$$

方程有重根，直线与圆只有一个公共点，故直线 $y=2x-3$ 是圆的切线。
将 $x=3$ 代入直线方程，得

$$y=2\times 3-3=3$$

故切点为 $P(3,3)$。
设以 P 为圆心且过原点的圆的半径为 R，则

$$R^2=(0-3)^2+(0-3)^2=9+9=18$$

答：(a) 直线 $y=2x-3$ 与圆相切；(b) P 的坐标为 $(3,3)$；(c) 所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y-3)^2=18$。

题型 2　直线代入圆后用二次方程的根判断相交关系或求参数

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **圆心确定方程：**本例圆心为 $(3,1)$，半径为 1。圆上点到圆心的距离为 1。两坐标差的平方和等于半径的_____。

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=1$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=1$$

② **直线代入圆式：**由直线方程表示一个未知量，再代入圆的方程。展开括号，合并同类项，得到一元二次方程。

$$2y+x=c$$

$$x=c-2y$$

$$(c-2y-3)^2+(y-1)^2=1$$

$$4y^2-4(c-3)y+(c-3)^2+y^2-2y=0$$

$$5y^2+(10-4c)y+(c-3)^2=0$$

③ **实根对应交点：**本例所得方程的每个不同实根对应一个交点。一般用 t 表示保留的坐标，A,B,C 表示系数。$A\neq 0$ 时，用判别式 Δ 判断实根情况。

$$A=5,\quad B=10-4c,\quad C=(c-3)^2$$

$$At^2+Bt+C=0$$

$$\Delta=B^2-4AC$$

判别式	实根情况	直线与圆的位置关系
$\Delta>0$	两个不等实根	相交于两点
$\Delta=0$	一个_____	相切
$\Delta<0$	无实根	不相交

④ **判别式求参数：**本例先把判别式整理为平方形式。相切时令其等于 0，不相交时令其小于 0。平方大于正数时，解集分成左右两段。

$$\Delta=(10-4c)^2-20(c-3)^2=20-4(c-5)^2$$

相切　　不相交

$\Delta=0$

$(c-5)^2=5$

$c=5+-\sqrt{5}$

$\Delta<0$

$(c-5)^2>5$

$c<5-\sqrt{5}$ 或 $c>5+\sqrt{5}$

⑤ **重根求出切点：**相切时，方程的重根给出切点的一个坐标。重根代回直线方程，求出另一个坐标。取本例 $c=5+\sqrt{5}$ 演算。

$$t=-\frac{B}{2A}$$

$$y=-\frac{10-4c}{2\times5}=\frac{2c-5}{5}=1+\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$x=c-2y=5+\sqrt{5}-2\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=3+\frac{\sqrt{5}}{5}$$

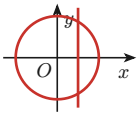
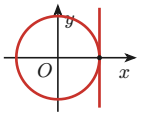
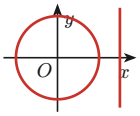
⑥ **平行切线定圆：**本例圆的竖直切线为 $x=2$、$x=4$，水平切线为 $y=0$、$y=2$。圆心在两组平行切线的正中间。半径等于两条平行切线间距的一半。

$$\text{圆心}=\left(\frac{2+4}{2},\frac{0+2}{2}\right)=(3,1)$$

$$\text{半径}=\frac{4-2}{2}=1$$

填空：①平方　②重根

同一圆与三条竖直直线

	$x=0.5$	$x=1$	$x=1.5$
图像			
圆方程	$x^2+y^2=1$		
交点数	2	1	0
位置	相交	相切	不交

点石成金　题目出现直线与圆相切、不相交或求切点时，先将直线代入圆的方程，整理成一元二次方程。

例 1　[2026 · May/June 0606/13 Q9(a)]

A circle has centre (3, 1) and radius 1.
A line has equation $2y+x=c$, where c is a constant.

(a) Given that the line is a tangent to the circle, find the two possible values of c.

一个圆的圆心为 $(3,1)$，半径为 1。一条直线的方程为 $2y+x=c$，其中 c 为常数。(a) 已知这条直线是圆的一条切线，求 c 的两个可能值。

解答 由圆心及半径，得圆的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$。由直线方程，得 $x=c-2y$。代入圆的方程，得 $(c-2y-3)^2+(y-1)^2=1$，$4y^2-4(c-3)y+(c-3)^2+y^2-2y=0$，$5y^2+(10-4c)y+(c-3)^2=0$。∵直线与圆相切，∴关于 y 的方程有重根，$\Delta=(10-4c)^2-4\times5\times(c-3)^2=0$，$16c^2-80c+100-20c^2+120c-$

方法：先看直线中便于表示的坐标，代入圆式后整理二次项系数。

$180=0$，$c^2-10c+20=0$，$(c-5)^2=5$，$c=5+-\sqrt{5}$。答：c 的两个可能值为 $5-\sqrt{5}$ 和 $5+\sqrt{5}$。

! 辨析：重根是同一坐标的重复根，两不等实根是两个交点的不同坐标。

拓展：经过切点的半径与切线垂直。

针对练习

1. [2026 · February/March 0606/22 Q8]

提示：看不相交对应的判别式符号，再比较平方项与常数项。

A circle has centre $(-2, 0)$ and radius 5.
A line has equation $y=2x+k$, where k is a constant.
The line does **not** meet the circle.

Find the set of possible values of k.

一个圆的圆心为 $(-2,0)$，半径为 5。一条直线的方程为 $y=2x+k$，其中 k 为常数。这条直线与圆不相交。求 k 的所有可能取值组成的集合。

✓ **答案** $k<4-5\sqrt{5}$ 或 $k>4+5\sqrt{5}$。

解析 由圆心及半径，得圆的方程为 $(x+2)^2+y^2=25$。将 $y=2x+k$ 代入，得 $(x+2)^2+(2x+k)^2=25$，$x^2+4x+4+4x^2+4kx+k^2=25$，$5x^2+4(k+1)x+k^2-21=0$。∵直线与圆不相交，∴关于 x 的方程无实根，$\Delta=[4(k+1)]^2-4\times5\times(k^2-21)<0$，$16k^2+32k+16-20k^2+420<0$，$500-4(k-4)^2<0$，$(k-4)^2>125$。∴ $k-4<-5\sqrt{5}$ 或 $k-4>5\sqrt{5}$。答：k 的取值范围为 $k<4-5\sqrt{5}$ 或 $k>4+5\sqrt{5}$。

2. [2025 · May/June 0606/12 Q3(a)]

提示：看代入后的系数，比较一次项系数平方与四倍首末系数积。

A circle with centre C has the equation $x^2+y^2-10x-4y+24=0$.

(a) Show that the line $y=2x-3$ is a tangent to this circle.

一个圆的圆心为 C，方程为 $x^2+y^2-10x-4y+24=0$。(a) 证明直线 $y=2x-3$ 是这个圆的一条切线。

✓ **答案** 直线 $y=2x-3$ 与圆相切。

解析 将 $y=2x-3$ 代入圆的方程，得 $x^2+(2x-3)^2-10x-4(2x-3)+24=0$，$x^2+4x^2-12x+9-10x-8x+12+24=0$，$5x^2-30x+45=0$。其判别式为 $\Delta=(-30)^2-4\times5\times45=0$。∴关于 x 的方程有重根，直线与圆仅有一个公共点。答：直线 $y=2x-3$ 与圆相切。

3. [2025 · October/November 0606/13 Q11(b)]
提示：先看两组切线的中线，再看代入后二次式的重根条件。

The lines $x=0$, $x=4$, $y=3$ and $y=-1$ are tangents to a circle.

(a) Find the equation of the circle.

The line $y=2x+a$, where a is a constant, is also a tangent to the circle.

(b) Show that $5x^2+4(a-2)x+(a-1)^2=0$, and hence find the possible values of a. Give your answers in exact form.

直线 $x=0$、$x=4$、$y=3$ 和 $y=-1$ 都是一个圆的切线。(a) 求这个圆的方程。直线 $y=2x+a$ 也是这个圆的一条切线，其中 a 为常数。(b) 证明 $5x^2+4(a-2)x+(a-1)^2=0$，并由此求出 a 的可能值。答案须用精确形式表示。

✓ **答案** (a) $(x-2)^2+(y-1)^2=4$；(b) $a=-3+-\sqrt{20}$。

解析 由两组平行切线，得圆心坐标为 $(\frac{0+4}{2},\frac{-1+3}{2})=(2,1)$，半径为 $r=\frac{4-0}{2}=2$。∴圆的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$。将 $y=2x+a$ 代入，得 $(x-2)^2+(2x+a-1)^2=4$，$x^2-4x+4+4x^2+4(a-1)x+(a-1)^2=4$，$5x^2+4(a-2)x+(a-1)^2=0$。∵直线与圆相切，∴关于 x 的方程有重根，$\Delta=[4(a-2)]^2-4\times5\times(a-1)^2=0$，$4(a-2)^2-5(a-1)^2=0$，$4a^2-16a+16-5a^2+10a-5=0$，$a^2+6a-11=0$，$(a+3)^2=20$，$a=-3+-\sqrt{20}$。答：圆的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$；a 的可能值为 $-3-\sqrt{20}$ 和 $-3+\sqrt{20}$。

4. [2023 · May/June 0606/21 Q11]
提示：看参数的正值条件，再从重根回代求另一坐标。

The line with equation $x+3y=k$, where k is a positive constant, is a tangent to the curve with equation $x^2+y^2+2y-9=0$. Find the value of k and hence find the coordinates of the point where the line touches the curve.

直线的方程为 $x+3y=k$，其中 k 为正常数。这条直线与方程为

$$x^2+y^2+2y-9=0$$

的曲线相切。求 k 的值，并由此求出直线与曲线相切处的点的坐标。

✓ **答案** $k=7$；切点为 $(1,2)$。

解析 由直线方程，得 $x=k-3y$。代入曲线方程，得 $(k-3y)^2+y^2+2y-9=0$，$k^2-6ky+9y^2+y^2+2y-9=0$，$10y^2+(2-6k)y+k^2-9=0$。∵直线与曲线相切，∴关于 y 的方程有重根，$\Delta=(2-6k)^2-4\times10\times(k^2-9)=0$，$4-24k+36k^2-40k^2+360=0$，$k^2+6k-91=0$，$(k-7)(k+13)=0$。∵ $k>0$，∴ $k=7$。代回关于 y 的方程，得 $10y^2-40y+40=0$，$10(y-2)^2=0$，$y=2$。代回直线方程，得 $x=7-3\times2=1$。答：$k=7$，切点坐标为 $(1,2)$。

题型 3 两圆方程作差，利用公共弦求圆方程或判断交点

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **先统一平方项：**把两圆方程都写成 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$。记本例第一个圆方程的左边为 $S_1=x^2+y^2-25$，圆方程为 $S_1=0$，半径为_____。两式作差时，两个平方项相消。共同点同时满足两圆，也满足所得的一次方程。

② **由弦长定直线：**公共弦是两个圆的共同端点连成的弦。本例公共弦长为 6，半弦长为 3。圆心到弦的垂线平分弦。以 M 表示弦中点，由直角三角形得

$$OM=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

公共弦平行于 $y=-x$，可写为 $L=x+y-t=0$。原点到此直线的距离为

$$\frac{|t|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4$$

所以 $|t|=$_____。

③ **差式写成倍数：**设第二圆方程左边为 S_2。两个平方项相消后，S_2-S_1 是一次式。差式在两个共同端点处为 0。一次式的零点直线就是公共弦所在直线，因此是 L 的常数倍：

$$S_2-S_1=\lambda L$$

$$S_2=x^2+y^2+\lambda x+\lambda y-25-\lambda t$$

λ 是待求的常数；两圆不同，故 $\lambda\neq 0$

④ **用圆心半径筛选：**将上式配方可得圆心 $\left(-\frac{\lambda}{2},-\frac{\lambda}{2}\right)$，半径平方为

$$r_2^2=25+\frac{\lambda^2}{2}+\lambda t$$

本例半径仍为 5，故

$$\frac{\lambda^2}{2}+\lambda t=0$$

$$\lambda\left(\frac{\lambda}{2}+t\right)=0$$

再利用圆心两坐标均为正的条件选取符号。

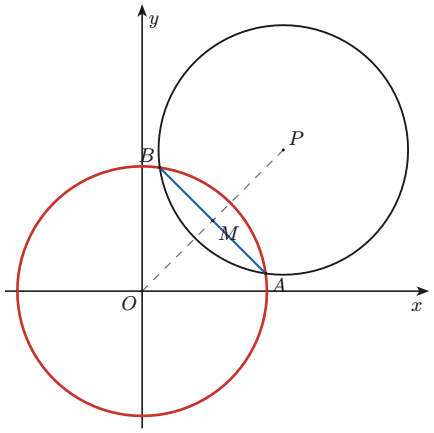
⑤ **把直线代回圆：**取得公共弦的直线式后，用它表示一个坐标，代回任一圆方程。每求出一个 x，都代回直线配出对应的 y。两坐标必须成对保留。例题中用 $y=4\sqrt{2}-x$ 代回 $x^2+y^2=25$，下面把求根和弦长核算做完。

⑥ **由判别式判交点：**若代回后为 $ax^2+bx+c=0$，其中 $a\neq 0$，令 $\Delta=b^2-4ac$。

$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
两个不同交点	一个交点	没有实交点

负判别式说明两圆不相交；外离和内含还需区分圆心距与半径。

⑦ 母例中的公共弦与圆心连线



⟵ 填空：①5　②$4\sqrt{2}$

点石成金　题目出现两圆方程、公共弦或交点坐标时，先将两圆方程作差，消去平方项。

例 1　[2025 · October/November 0606/23 Q11]

A circle has equation $x^2+y^2-25=0$.
A second circle has the same radius as the first circle, and the coordinates of its centre are both positive.
The two circles intersect at the points A and B.
The line AB has length 6 and is parallel to the line $y=-x$.

Find the equation of the second circle in the form $x^2+y^2+ax+by+c=0$, where a, b and c are constants.

一个圆的方程为

$$x^2+y^2-25=0$$

第二个圆与第一个圆的半径相同，且其圆心的两个坐标均为正数。两圆相交于点 A 和点 B。线段 AB 的长度为 6，且与直线 $y=-x$ 平行。
求第二个圆的方程，写成

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

的形式，其中 a、b 和 c 为常数。

解答　记第一个圆的方程左边为

$$S_1=x^2+y^2-25$$

设公共弦的中点为 M。半径为 5，半弦长为 3，所以

$$OM=\sqrt{25-9}=4$$

公共弦平行于 $y=-x$，设其直线式为

$$L=x+y-t=0$$

由原点到直线的距离得

$$\frac{|t|}{\sqrt{2}}=4$$

$$t=\pm 4\sqrt{2}$$

设第二圆方程左边为 S_2。两圆的平方项系数相同，差式为公共弦直线式的常数倍，故

$$S_2=S_1+\lambda L$$

$$=x^2+y^2+\lambda x+\lambda y-25-\lambda t$$

配方得

$$\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\lambda}{2}\right)^2=25+\frac{\lambda^2}{2}+\lambda t$$

两圆半径相同，故

$$\frac{\lambda^2}{2}+\lambda t=0$$

$$\lambda\left(\frac{\lambda}{2}+t\right)=0$$

$\lambda=0$ 会使两个圆重合，与题设的两个不同圆不符，故

$$\lambda=-2t$$

第二圆的圆心为

$$\left(-\frac{\lambda}{2},-\frac{\lambda}{2}\right)=(t,t)$$

两坐标均为正，所以

$$t=4\sqrt{2},\quad \lambda=-8\sqrt{2}$$

方法：用公共弦直线的倍数表示两个圆方程的差。

辨析：两个圆不同，差式的倍数不能取 0。

代回得第二圆的方程

$$x^2+y^2-8\sqrt{2}x-8\sqrt{2}y+39=0$$

此时公共弦所在直线为

$$x+y=4\sqrt{2}$$

将 $y=4\sqrt{2}-x$ 代回第一个圆：

$$x^2+\left(4\sqrt{2}-x\right)^2=25$$

$$2x^2-8\sqrt{2}x+7=0$$

$$x=\frac{8\sqrt{2}\pm\sqrt{128-56}}{4}$$

$$x=7\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{或}\quad x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

逐一代回直线，得两交点

$$A=\left(7\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad B=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},7\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

由两点距离公式，$AB=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(-3\sqrt{2}\right)^2}=6$，与给定弦长相符。所求方程为

$$x^2+y^2-8\sqrt{2}x-8\sqrt{2}y+39=0$$

针对练习

1. [2026 · February/March 0606/12 Q12]

提示：作差后表示一个坐标，再代回任一圆。

Find the coordinates of the points of intersection of the circles with equations $x^2+2x+y^2-4y-20=0$ and $x^2-12x+y^2-6y+20=0$.

求方程分别为

$x^2+2x+y^2-4y-20=0$

和

$x^2-12x+y^2-6y+20=0$

的两个圆的交点坐标。

✓ **答案** $(3,-1)$，$(2,6)$

解析 两圆方程作差，得

$$(x^2+2x+y^2-4y-20)-(x^2-12x+y^2-6y+20)=0$$

$$14x+2y-40=0$$

$$y=20-7x$$

代回第一个圆的方程，得

$$x^2+2x+(20-7x)^2-4(20-7x)-20=0$$

$$50x^2-250x+300=0$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

$$x = 2 \quad 或 \quad x = 3$$

当 $x = 2$ 时，

$$y = 20 - 7 \times 2 = 6$$

当 $x = 3$ 时，

$$y = 20 - 7 \times 3 = -1$$

答：两圆交点的坐标为 $(3, -1)$ 和 $(2, 6)$。

2. [2025 · May/June 0606/13 Q5(b)]

提示：将差式代回一个圆，用判别式判断有无实交点。

Solutions by accurate drawing will not be accepted.

A circle, C, has equation $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 100$.

(b) Show that C and the circle with equation $x^2 + y^2 = 4$ do not intersect.

用精确作图得到的解答不予接受。

圆 C 的方程为

$$(x-5)^2 + (y-12)^2 = 100$$

(b) 证明圆 C 与方程为 $x^2 + y^2 = 4$ 的圆不相交。

✓ **答案** 两圆不相交。

解析 两圆方程可分别写成

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$(x-5)^2 + (y-12)^2 - 100 = 0$$

展开第二式，得

$$x^2 + y^2 - 10x - 24y + 69 = 0$$

两式相减，任何共同点都必须满足

$$10x + 24y = 73$$

$$y = \frac{73 - 10x}{24}$$

代回第一个圆：

$$x^2 + \left(\frac{73 - 10x}{24}\right)^2 = 4$$

$$576x^2 + (73 - 10x)^2 = 2304$$

$$676x^2 - 1460x + 3025 = 0$$

其判别式为

$$\Delta = (-1460)^2 - 4 \times 676 \times 3025 = -6048000 < 0$$

因此没有实数坐标同时满足两圆方程，两圆不相交。

3. [2025 · Specimen A · 0606/02 Q7(b)]

提示：展开两圆方程后作差，再代回首圆。

Solutions to this question by accurate drawing will not be accepted.

A circle has equation $x^2 + y^2 - 16x - 10y + 73 = 0$.

(b) A different circle has equation $(x-10)^2+(y-6.5)^2=2.25$.

Show that the two circles touch. You are not required to find the coordinates of the common point.

本题不接受通过准确作图得到的解答。
一个圆的方程为

$$x^2+y^2-16x-10y+73=0$$

(b) 另一个不同的圆的方程为

$$(x-10)^2+(y-6.5)^2=2.25$$

证明这两个圆相切。不要求求出共同点的坐标。

✓ **答案** 两圆相切。

解析 将第二个圆的方程展开，得

$$x^2+y^2-20x-13y+140=0$$

用第一个圆的方程减去此式，得

$$4x+3y-67=0$$

$$y=\frac{67-4x}{3}$$

联立差式与首圆方程，等价于联立原两圆方程。代回首圆，得

$$x^2+\left(\frac{67-4x}{3}\right)^2-16x-10\frac{67-4x}{3}+73=0$$

两边乘以 9，展开整理得

$$25x^2-560x+3136=0$$

$$(5x-56)^2=0$$

此方程只有一个实根。每个 x 由差式确定唯一的 y，故两圆恰有一个共同点。
答：两圆相切。

4. [2025 · Specimen B · 0606/02 Q1(a,b)]
提示：由圆心和半径写出两圆方程，作差后代回，用判别式判断交点数。

Solutions to this question by accurate drawing will NOT be accepted.

A circle has centre (3, 2) and radius 17.
A different circle has centre (15, – 4) and radius 29.

(a) Show that the circles have two points of intersection.

(b) The points of intersection are (–5, 17) and (–13.8, –0.6).

Using this information, or otherwise, find the equation of the common chord.

本题不接受通过准确作图得到的解答。
一个圆的圆心为 $(3,2)$，半径为 17。
另一个不同的圆的圆心为 $(15,-4)$，半径为 29。

(a) 证明这两个圆有两个交点。
(b) 两交点为 $(-5, 17)$ 和 $(-13.8, -0.6)$。利用这些信息，或用其他方法，求公共弦的方程。

✓ **答案**　(a) 两圆有两个不同的交点；(b) $y = 2x + 27$。

解析　由圆心和半径，得两圆方程分别为

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 17^2$$

$$(x-15)^2 + (y+4)^2 = 29^2$$

展开得

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 276 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 30x + 8y - 600 = 0$$

用第一式减去第二式，得

$$24x - 12y + 324 = 0$$

$$y = 2x + 27$$

代回第一个圆的方程，得

$$(x-3)^2 + (2x+25)^2 = 289$$

$$5x^2 + 94x + 345 = 0$$

此二次方程的判别式为

$$\Delta = 94^2 - 4 \times 5 \times 345 = 1936 > 0$$

故方程有两个不同的实根。每个实根由差式确定唯一的 y，所得点均满足两圆方程。因此，两圆有两个不同的交点。
两交点均在差式表示的直线上，故公共弦所在直线的方程为

$$y = 2x + 27$$

答：(a) 两圆有两个不同的交点；(b) 公共弦的方程为 $y = 2x + 27$。

5. [2026 · May/June 0606/22 Q11]
提示：先由圆心到已知点的距离求半径平方，再展开两圆作差。

Solutions to this question by accurate drawing will not be accepted.

A circle C_1 has centre (3, 5).
The point $P(1, 4)$ lies on circle C_1.

A circle C_2 has centre (12, 8).
The line with equation $y = 19 - 3x$ is the common chord of circles C_1 and C_2.

Find the radius of circle C_2.

本题不接受通过准确作图得到的解答。
圆 C_1 的圆心为 $(3, 5)$。
点 $P(1, 4)$ 在圆 C_1 上。
圆 C_2 的圆心为 $(12, 8)$。
方程为 $y = 19 - 3x$ 的直线是圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦所在直线。
求圆 C_2 的半径。

✓ **答案**

$$\sqrt{65}$$

解析　设圆 C_1 的半径为 r_1。由点 $P(1,4)$ 在圆上，得

$$r_1^2 = (1-3)^2 + (4-5)^2 = 5$$

所以圆 C_1 的方程为

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 5$$

展开得

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 29 = 0$$

设圆 C_2 的半径为 r，其中 $r > 0$，则

$$(x-12)^2 + (y-8)^2 = r^2$$

展开得

$$x^2 + y^2 - 24x - 16y + 208 - r^2 = 0$$

公共弦的两个端点同时满足两圆方程。用首圆方程减去第二圆方程，得

$$18x + 6y + 29 - (208 - r^2) = 0$$

$$18x + 6y - 179 + r^2 = 0$$

将公共弦方程 $y = 19 - 3x$ 代入，得

$$18x + 6(19 - 3x) - 179 + r^2 = 0$$

$$18x + 114 - 18x - 179 + r^2 = 0$$

$$r^2 - 65 = 0$$

$$r^2 = 65$$

由 $r > 0$，得

$$r = \sqrt{65}$$

答：圆 C_2 的半径为 $\sqrt{65}$。

第 9 章 弧度制

Chapter 9

9.1 弧度制

题型 1 用弧长、扇形与弓形面积关系求未知量

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **弧长与圆心角：**图中半径为 5，劣弧 DC 长为 3.75。弧长除以半径，得到圆心角的弧度数。$\theta=\frac{3.75}{5}=$_____

用 l 表示弧长，r 表示半径，θ 表示圆心角的弧度数。

已知半径和圆心角	已知弧长和半径
$l=r\theta$	$\theta=\frac{l}{r}$

② **扇形面积换算：**半径为 5、圆心角为 θ 的扇形，面积为 $25\frac{\theta}{2}$。用 S 表示扇形面积，面积公式中的系数为_____。

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta$$

已知面积和半径求弧长，可先用面积表示圆心角。

$$\theta=\frac{2S}{r^2}$$

$$l=r\theta=r\cdot\frac{2S}{r^2}=\frac{2S}{r}$$

③ **已知面积求半径：**面积公式中含有半径的平方，先求平方，再取正根。

$$r^2=\frac{2S}{\theta}$$

$$r=\sqrt{\frac{2S}{\theta}}$$

例如，扇形面积为 4cm^2，圆心角为 0.5 弧度。$r=\sqrt{\frac{2\times4}{0.5}}=$_____ cm

④ **扇形边界长度：**扇形的边界有两条半径和一段弧。用 P 表示扇形周长，L 表示对应优弧的长度。整圆的圆心角为_____弧度。

扇形周长	对应优弧长度
$P=2r+r\theta$	$L=r(2\pi-\theta)$

两段边界等长时，先列等式；两边含同一未知角时，移项合并。

$$2+\beta=4-\beta$$

$$2\beta=2$$

$$\beta=1$$

⑤ **弓形面积相减：**弦 DC 与劣弧 DC 围成弓形。弓形面积等于扇形面积_____三角形面积。

$$S_{\triangle ODC}=\frac{1}{2}\times5\times(5\sin0.75)=\frac{25}{2}\sin0.75$$

$$S_{弓形}=\frac{25}{2}\times 0.75-\frac{25}{2}\sin 0.75$$

$$S_{弓形}=\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$$

在 $0<\theta<\pi$ 内面积随角增大，可代入特殊角验证唯一解。

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta-\sin\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

⑥ **同心扇形面积：**内半径为 3、两圆弧间距为 2 时，外半径为_____。两扇形圆心角相同，阴影面积用大扇形面积减小扇形面积。

$$S_{阴影}=\frac{1}{2}\times 5^2\theta-\frac{1}{2}\times 3^2\theta=8\theta$$

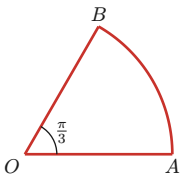
用 R 表示外半径，r 表示内半径，且 $R>r>0$。

$$S_{阴影}=\frac{1}{2}(R^2-r^2)\theta$$

$$\theta=\frac{2S_{阴影}}{R^2-r^2}$$

⑦ 弧长与圆心角

$$r=3,\quad \theta=\tfrac{\pi}{3},\quad s=r\theta=\pi$$

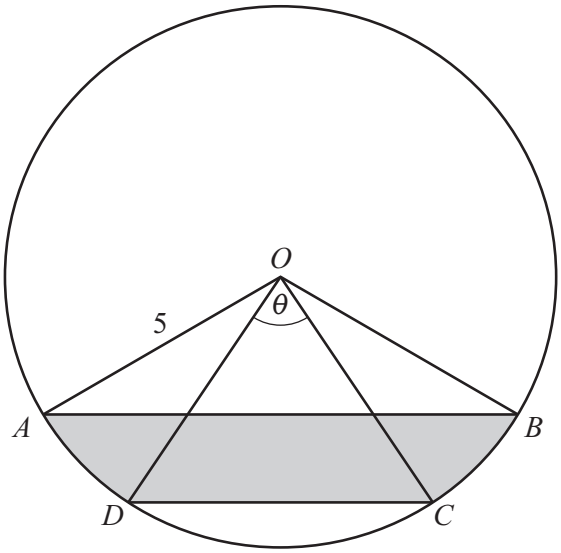


⟵ 填空：①0.75　②$\frac{1}{2}$　③4　④$2\pi$　⑤减去　⑥5

点石成金　题目出现弧长、扇形面积、半径或圆心角时，先写出对应公式，再代入已知量求未知量。

例 1　[2024 · May/June 0606/12 Q6(a)]

In this question, all lengths are in metres and all angles are in radians.



The diagram shows a circle with centre O and radius 5. The points A, B, C and D lie on the circumference of the circle. Angle $DOC = \theta$. Angle AOD = angle $COB = 0.5$. The length of the minor arc DC is 3.75.

(a) Show that $\theta = 0.75$.

本题中，所有长度的单位均为米，所有角的单位均为弧度。
图示一个圆心为 O、半径为 5 的圆，图中 $OA = 5$。点 A、B、C、D 均在圆周上。角 $DOC = \theta$，角 AOD = 角 $COB = 0.5$。劣弧 DC 的长度为 3.75。图中画有弦 AB、DC 及半径 OA、OB、OC、OD，两弦之间的圆内区域为阴影部分。
(a) 证明：$\theta = 0.75$。

解答　由弧长公式得

$$3.75 = 5\theta$$

$$\theta = \frac{3.75}{5} = 0.75$$

答：$\theta = 0.75$ 弧度。

方法：先找图中弧长和半径，用弧长除以半径求角。

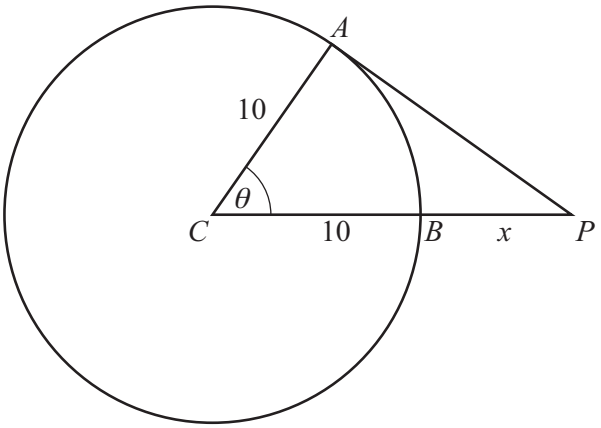
辨析：弧长是曲线的长度，弧度数是弧长与半径的比值。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/21 Q8(b)]

提示：查看前问的圆心角，配合本题半径求弧长。

In this question lengths are in centimetres and angles are in radians.



The diagram shows a circle, centre C, radius 10.
The points A and B lie on the circumference of the circle.
The point P is such that CBP is a straight line.
The line BP has length x.
The line AP is a tangent to the circle at A.
Angle ACB is θ.
The perimeter of the triangle APC is 38.

(a) Show that the value of θ is 0.885 radians correct to 3 decimal places.

(b) Find the length of the arc AB.

本题中，长度单位为厘米，角的单位为弧度。
图示一个圆心为 C、半径为 10 的圆。点 A、B 在圆周上，图中 $CA = CB = 10$。点 P 满足 C、B、P 依次在同一直线上。线段 BP 的长度为 x。直线 AP 在点 A 处与圆相切。角 $ACB = \theta$。三角形 APC 的周长为 38。
(a) 证明：θ 的值为 0.885 弧度，精确到小数点后 3 位。
(b) 求弧 AB 的长度。

✓ **答案**

8.85 cm

解析 由 (a) 知，圆心角 $\theta \approx 0.885$。由弧长公式得

$$l = r\theta$$

$$l \approx 10 \times 0.885 = 8.85 \text{ cm}$$

答：弧 AB 的长度为 8.85 cm。

2. [2023 · May/June 0606/21 Q9(a)]

提示：对照面积与弧长公式，消去共同的圆心角。

In this question all lengths are in centimetres and all angles are in radians.

(a) The area of a sector of a circle of radius 24 is $432\,\text{cm}^2$. Find the length of the arc of the sector.

本题中，所有长度的单位均为厘米，所有角的单位均为弧度。
(a) 一个扇形的半径为 24，面积为 432cm^2。求该扇形的弧长。

✓ **答案**

36 cm

解析　设扇形圆心角为 θ 弧度。由扇形面积公式得

$$432 = \frac{1}{2} \times 24^2 \times \theta$$

$$\theta = \frac{2 \times 432}{24^2} = \frac{3}{2}$$

由弧长公式得

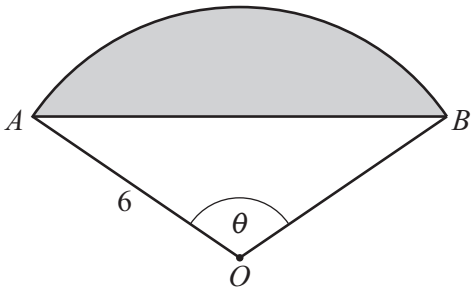
$$l = 24 \times \frac{3}{2} = 36 \text{ cm}$$

答：扇形的弧长为 36 cm。

3. [2025 · May/June 0606/13 Q7(b)]

提示：看弓形所缺的三角形，比较两块面积的表达式。

In this question, all lengths are in centimetres and all angles are in radians.



The diagram shows a sector of a circle with centre O and radius 6.

(b) It is also given that the exact area of the shaded segment is $(15\pi - 9)\text{cm}^2$.

Find the exact length of the arc AB.

本题中，所有长度的单位均为厘米，所有角的单位均为弧度。

图示一个圆心为 O、半径为 6 的扇形，$OA = OB = 6$，角 $AOB = \theta$。弦 AB 与弧 AB 之间的弓形区域为阴影部分。

(b) 另已知阴影弓形面积的准确值为 $(15\pi - 9)\text{cm}^2$。求弧 AB 长度的准确值。

✓ **答案**

$$5\pi \text{ cm}$$

解析　图中阴影弓形的面积等于扇形面积减去三角形 AOB 的面积，故

$$\frac{1}{2} \times 6^2\theta - \frac{1}{2} \times 6^2 \sin\theta = 15\pi - 9$$

$$18(\theta - \sin\theta) = 15\pi - 9$$

$$\theta - \sin\theta = \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}$$

又

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

故 $\theta = \frac{5\pi}{6}$ 满足上式。在图示范围 $0 < \theta < \pi$ 内，弓形面积随圆心角增大，故此解唯一。

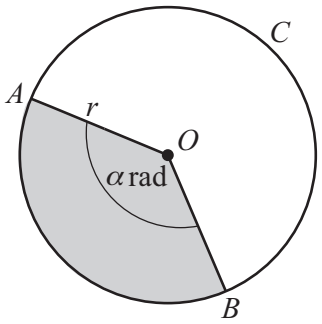
$$l = 6 \times \frac{5\pi}{6} = 5\pi \text{ cm}$$

答：弧 AB 的准确长度为 5π cm。

4. [2026 · May/June 0606/12 Q6(b)]

提示：看等长的两段边界，数清各自包含几条半径。

In this question lengths are in centimetres.



The diagram shows a circle with centre O and radius r.
Points A, B and C are on the circumference of the circle.
Angle $AOB = \alpha$ radians.

(a) The perimeter of the shaded sector is equal to the length of the major arc, ACB.

Find the exact value of α.

(b) The area of the shaded sector is $18(\pi^2 - 1)$.

Find the exact value of r.
Simplify your answer.

本题中，长度单位为厘米。
图示一个圆心为 O、半径为 r 的圆。点 A、B、C 在圆周上。角 $AOB = \alpha$ 弧度。图中较小的扇形 AOB 为阴影部分，点 C 位于优弧 AB 上。
(a) 阴影扇形的周长等于优弧 ACB 的长度。求 α 的准确值。
(b) 阴影扇形的面积为 $18(\pi^2 - 1)$。求 r 的准确值，并将答案化简。

✓ **答案**

$$6\sqrt{\pi + 1} \text{ cm}$$

解析 由阴影扇形周长等于优弧 ACB 的长度，得

$$2r + r\alpha = r(2\pi - \alpha)$$

$\because r > 0$，$\therefore$

$$2 + \alpha = 2\pi - \alpha$$

$$2\alpha = 2\pi - 2$$

$$\alpha = \pi - 1$$

由阴影扇形的面积得

$$\frac{1}{2}r^2(\pi-1)=18(\pi^2-1)$$

$$r^2=\frac{36(\pi^2-1)}{\pi-1}$$

$$r^2=\frac{36(\pi-1)(\pi+1)}{\pi-1}=36(\pi+1)$$

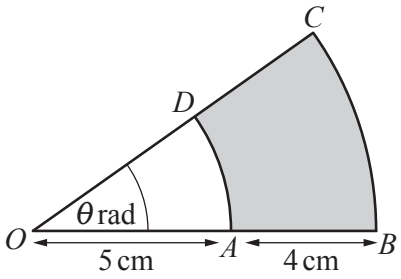
∵半径为正，∴

$$r=6\sqrt{\pi+1}\ \text{cm}$$

答：r 的准确值为 $6\sqrt{\pi+1}$ cm。

5. [2024 · May/June 0606/23 Q7(a)]

提示：沿共线方向找外半径，再比较两扇形面积。



In the diagram, AD and BC are arcs of circles with common centre O.
ODC and OAB are straight lines with $OA = 5$ cm and $AB = 4$ cm. Angle $BOC = \theta$ radians.
The area of the shaded region $ABCD$ is 4π cm^2.

(a) Find θ.

图中，AD 和 BC 是两条圆弧，所在圆的共同圆心为 O。点 O、D、C 依次在同一直线上，点 O、A、B 依次在同一直线上，且 $OA = 5$ cm，$AB = 4$ cm。角 $BOC = \theta$ 弧度。阴影区域 $ABCD$ 的面积为 $4\pi\text{cm}^2$。

(a) 求 θ。

✓ **答案**

$$\theta=\frac{\pi}{7}$$

解析 由 O、A、B 依次共线，得外半径

$$OB=OA+AB=5+4=9\ \text{cm}$$

阴影面积等于两个同心扇形的面积之差，故

$$\frac{1}{2}\times 9^2\theta-\frac{1}{2}\times 5^2\theta=4\pi$$

$$\frac{1}{2}(81-25)\theta=4\pi$$

$$28\theta=4\pi$$

$$\theta=\frac{4\pi}{28}=\frac{\pi}{7}$$

答：$\theta=\frac{\pi}{7}$ 弧度。

题型 2　补齐边长与圆心角后累加直边和圆弧

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **辨认区域边界：**本例阴影边界含 OA、OB 和圆 C 上的劣弧 AB。设弧长为 s，周长 P 是边界各段长度的_____。本例长度单位为厘米。

$$P=OA+OB+s=12+12+s=24+s$$

② **计算圆弧长度：**圆 C 的半径为 $r=5$，圆心角记为 $\theta=\angle ACB$。弧长与半径用相同长度单位，圆心角须用_____。

$$s=r\theta=5\theta$$

另取半径为 2、弧长为 3 的圆弧，反求圆心角：

$$\theta=\frac{s}{r}=\frac{3}{2}=1.5$$

③ **切线补成直角：**本例 OA 是切线，CA 是过切点的半径，两者_____。由勾股定理求第三边，再由边长比求锐角。

$$OC=\sqrt{12^2+5^2}=13$$

在三角形 AOC 中：

$$\cos\angle AOC=\frac{12}{13}$$

$$\angle AOC=\arccos\left(\tfrac{12}{13}\right)\approx 0.395$$

在三角形 AOC 中：

$$\tan\angle ACO=\frac{12}{5}$$

$$\angle ACO=\arctan\left(\tfrac{12}{5}\right)\approx 1.176$$

④ **对称补齐角度：**两圆交于 A、B，连心线 OC 平分两个圆心角。组成平角的相邻两角之和为 π。

本例关于 OC 对称：

$$\angle ACB=2\angle ACO$$

若 X、O、A 依次共线，且 $\angle AOB=2$：

$$\angle XOB=\pi-\angle AOB=\pi-2$$

⑤ **半径比例求边：**同心圆环带的两条直边，各长为两半径之差。设外半径 $R=6$，内半径为 r，且 $r:R=2:3$。两弧所对的圆心角相同，均记为 θ。

$$r=6\times\frac{2}{3}=4$$

$$R-r=6-4=2$$

$$P=R\theta+r\theta+2(R-r)$$

⑥ **矩形补齐半径：**矩形的三边为 AB、BD、DE，O 为 BD 中点。取 $BD=2\sqrt{3}$、$AB=1$，求半径 OA。由对称关系求上方的圆心角 AOE。

$$DE=AB=1$$

$$OB=OD=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$OA=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$$

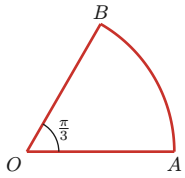
$$\tan\angle AOB=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\angle AOB=\frac{\pi}{6}$$

$$\angle AOE=\pi-2\angle AOB=\pi-2\times\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$$

⑦ 弧长与圆心角

$$r=3,\quad \theta=\frac{\pi}{3},\quad s=r\theta=\pi$$

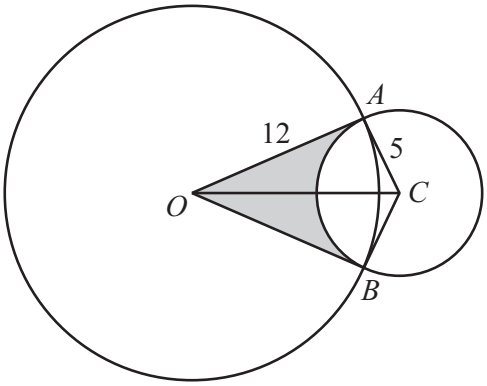


填空：①和　②弧度　③垂直

点石成金　题目出现直边与圆弧组成的图形并求周长时，先沿边界辨认各段，再补齐边长与圆心角。

例 1　[2024 · October/November 0606/12 Q3(b)]

In this question, all lengths are in centimetres and all angles are in radians.



The diagram shows a circle with centre O and radius 12, and a circle with centre C and radius 5.
The circles intersect at the points A and B, such that OA and OB are tangents to the circle with centre C.

(a) Show that the obtuse angle ACB is 2.35 radians, correct to 2 decimal places.

(b) Find the perimeter of the shaded region.

本题中，所有长度的单位均为厘米，所有角的单位均为弧度。
图中有两个圆，一个圆的圆心为 O、半径为 12，另一个圆的圆心为 C、半径为 5。两圆交于点 A 和点 B，OA、OB 均为圆心是 C 的圆的切线。线段 OA、OB 与圆 C 上的劣弧 AB 围成阴影部分，图中还画有 OC、CA 和 CB。
(a) 证明钝角 ACB 为 2.35 弧度，精确到小数点后两位。（2 分）
(b) 求阴影部分的周长。（2 分）

解答　由半径垂直于切线，得 $CA\perp OA$。

$$\tan\angle ACO=\frac{OA}{CA}=\frac{12}{5}$$

由 $OA=OB$、$CA=CB$，且 OC 为公共边，得两三角形全等。

方法：先沿阴影边界辨认直边与弧，再从切点处的直角起手。

辨析：周长是整圈边界的总长，弧长是其中曲线段的长度。

$$\angle ACB = 2\angle ACO = 2\arctan\left(\frac{12}{5}\right) \approx 2.35$$

拓展：同一圆中，弧长与所对圆心角的弧度数成正比。

阴影边界由 OA、OB 和圆 C 上的劣弧 AB 组成。
设该弧长为 s，所求周长为 P。

$$s = 5 \times 2\arctan\left(\frac{12}{5}\right)$$

$$P = 12 + 12 + 5 \times 2\arctan\left(\frac{12}{5}\right) \approx 35.8 \text{ cm}$$

答：(a) 钝角 ACB 为 2.35 弧度，精确到小数点后两位；(b) 阴影部分的周长为 35.8 cm。

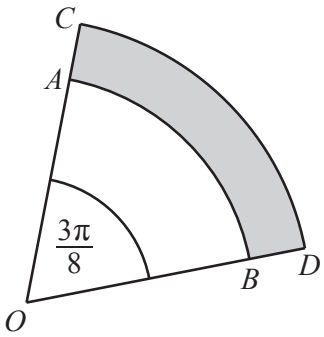
针对练习

1. [2023 · February/March 0606/22 Q9(a)]

提示：看内外弧是否共用圆心角，再比较两半径的差。

In this question, all lengths are in centimetres and all angles are in radians.

(a)



The diagram shows sectors AOB and COD of two circles with the same centre, O. Angle AOB is $\frac{3\pi}{8}$ and the length of OC is 6.5. It is given that OAC and OBD are straight lines and $OA : OC$ is 4 : 5. Find the perimeter of the shaded region.

本题中，所有长度的单位均为厘米，所有角的单位均为弧度。
(a) 图示为两个同心圆的扇形 AOB 和 COD，共同圆心为 O。内弧为 AB，外弧为 CD，两弧之间为阴影部分。角 AOB 为 $\frac{3\pi}{8}$，OC 的长度为 6.5。已知 O、A、C 在同一直线上，O、B、D 在同一直线上，且 $OA : OC = 4 : 5$。求阴影部分的周长。(3 分)

✓ **答案**

16.4 cm

解析 由 $OA : OC = 4 : 5$，得

$$OA = 6.5 \times \frac{4}{5} = 5.2$$

同圆半径相等，且 O、A、C 及 O、B、D 分别共线。

$$OB = OA = 5.2$$

$$OD = OC = 6.5$$

$$AC = BD = 6.5 - 5.2 = 1.3$$

$$\angle COD = \angle AOB = \frac{3\pi}{8}$$

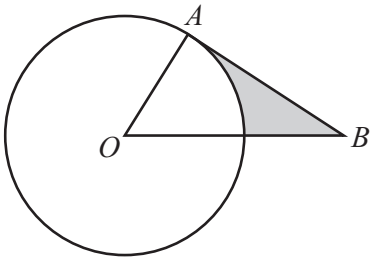
设阴影部分的周长为 P，由两段圆弧和两条直边得

$$P = 5.2 \times \frac{3\pi}{8} + 6.5 \times \frac{3\pi}{8} + 2 \times 1.3 \approx 16.4 \text{ cm}$$

答：阴影部分的周长为 16.4 cm。

2. [2025 · February/March 0606/22 Q1(b)]

提示：看切点处的直角，再区分整段斜边与圆外部分。



The diagram shows a circle with centre O and radius 5 cm.
The point A lies on the circle.
The point B is such that the line AB is a tangent to the circle.
OB has length 13 cm.

(a) Find angle AOB, giving your answer in radians.

(b) Find the perimeter of the shaded region.

图示为一个圆，圆心为 O，半径为 5 cm。点 A 在圆上。点 B 满足直线 AB 是圆在点 A 处的切线。OB 的长度为 13 cm。三角形 OAB 中位于圆外的部分为阴影部分。

(a) 求角 AOB，答案用弧度表示。（2 分）

(b) 求阴影部分的周长。（3 分）

✓ **答案** (a) 1.18 弧度；(b) 25.9 cm。

解析 由切线垂直于过切点的半径，得 $OA \perp AB$。

$$\cos\angle AOB = \frac{OA}{OB} = \frac{5}{13}$$

$$\angle AOB = \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 1.18$$

在直角三角形 OAB 中，

$$AB = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

设线段 OB 与圆交于 D，则

$$OD = 5$$

$$BD = 13 - 5 = 8$$

$$\angle AOD = \angle AOB = \arccos\left(\frac{5}{13}\right)$$

阴影边界由 AB、BD 和劣弧 DA 组成，设其周长为 P。

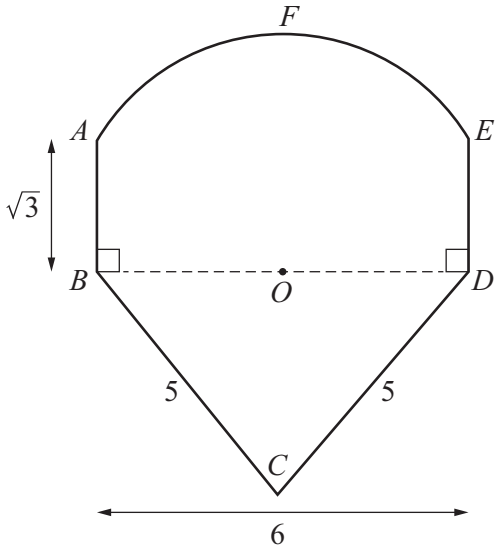
$$P = 12 + 8 + 5\arccos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 25.9 \text{ cm}$$

答：(a) 角 AOB 为 1.18 弧度；(b) 阴影部分的周长为 25.9 cm。

3. [2024 · October/November 0606/21 Q6(a)]

提示：看中点分出的半边长，再比较平角两端的小角。

In this question all lengths are in metres.



The diagram shows a shape $ABCDEF$.
AB, BD and DE are three sides of a rectangle.
O is the mid-point of BD.
AFE is an arc of a circle whose centre is O.
$AB = \sqrt{3}$, $BC = CD = 5$ and $BD = 6$.

(a) Find the exact value of the perimeter of the shape, giving your answer in terms of π.

本题中，所有长度的单位均为米。
图示为图形 $ABCDEF$。AB、BD 和 DE 是一个矩形的三条边，$AB \perp BD$，$DE \perp BD$。O 是 BD 的中点。AFE 是以 O 为圆心的一段圆弧，F 位于这段圆弧上。已知 $AB = \sqrt{3}$、$BC = CD = 5$，且 $BD = 6$。
(a) 求该图形周长的精确值，答案用含 π 的式子表示。(5 分)

✓ **答案**

$$\left(10 + 2\sqrt{3} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}\right) \text{ m}$$

解析 由矩形对边相等，且 O 为 BD 中点，得

$$DE = AB = \sqrt{3}$$

$$OB = OD = \frac{6}{2} = 3$$

在直角三角形 ABO 中，

$$OA = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\tan\angle AOB = \frac{AB}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\angle AOB = \frac{\pi}{6}$$

由两个直角三角形 ABO、EDO 全等，得

$$\angle EOD = \angle AOB = \frac{\pi}{6}$$

由 B、O、D 共线，得

$$\angle AOE = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

设弧 AFE 的长度为 s，则

$$s = 2\sqrt{3} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$$

设图形的周长为 P，则

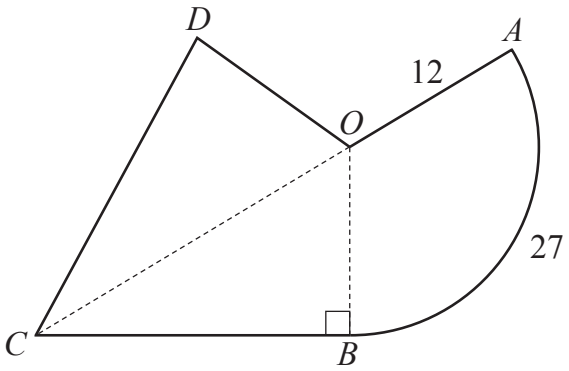
$$P = \sqrt{3} + 5 + 5 + \sqrt{3} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{3} = 10 + 2\sqrt{3} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$$

答：图形的周长为 $\left(10 + 2\sqrt{3} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}\right)$ m。

4. [2023 · October/November 0606/12 Q10(a)]

提示：看已知弧长与半径的比，再找直角三角形中的补角。

In this question all lengths are in centimetres and all angles are in radians.



The diagram shows a badge which consists of a minor sector, OAB, of the circle with centre O and radius 12, and a kite $OBCD$, where $OB = OD$ and $CD = CB$. The arc AB has length 27. The line OB is perpendicular to the line CB, and COA is a straight line.

(a) Find the perimeter of the badge.

本题中，所有长度的单位均为厘米，所有角的单位均为弧度。
图示为一枚徽章，由劣扇形 OAB 和筝形 $OBCD$ 组成。扇形所属圆的圆心为 O，半径为 12。筝形满足 $OB = OD$、$CD = CB$。弧 AB 的长度为 27。直线 OB 垂直于直线 CB，C、O、A 在同一直线上。
(a) 求徽章的周长。(4 分)

✓ **答案**

80.7 cm

解析 设角 AOB 为 θ，由弧长公式得

$$\theta = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

由 C、O、A 在同一直线上，得

$$\angle COB = \pi - \frac{9}{4}$$

在直角三角形 OBC 中，

$$\tan \angle COB = \frac{CB}{OB}$$

$$CB = 12\tan\left(\pi - \frac{9}{4}\right)$$

由等形的相等边和同圆半径相等，得

$$CD = CB = 12\tan\left(\pi - \frac{9}{4}\right)$$

$$OD = OB = OA = 12$$

徽章边界由 OA、弧 AB、BC、CD、DO 组成。设其周长为 P，则

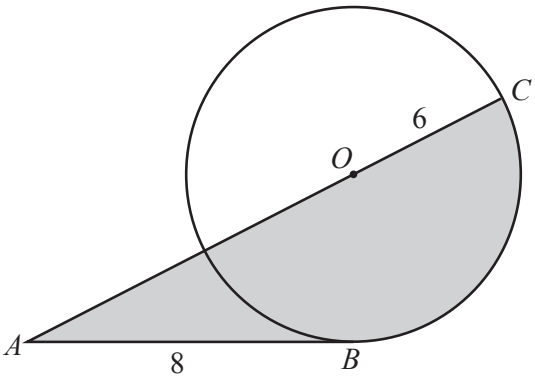
$$P = 12 + 27 + 2 \times 12\tan\left(\pi - \frac{9}{4}\right) + 12 = 51 + 24\tan\left(\pi - \frac{9}{4}\right) \approx 80.7 \text{ cm}$$

答：徽章的周长为 80.7 cm。

5. [2023 · October/November 0606/21 Q10(a)]

提示：看三点共线的先后顺序，再比较所求弧角与三角形内角。

In this question all lengths are in centimetres.



The diagram shows a circle centre O with radius 6. The line AB is a tangent to the circle at the point B. The point C lies on the circle such that AOC is a straight line. $AB = 8$.

(a) Find the perimeter of the shaded region.

本题中，所有长度的单位均为厘米。

图示为一个圆，圆心为 O，半径为 6。直线 AB 是圆在点 B 处的切线。点 C 在圆上，且 A、O、C 在同一直线上。已知 $AB = 8$。由线段 AB、线段 AC 和劣弧 CB 围成的区域为阴影部分。

(a) 求阴影部分的周长。（6 分）

✓ **答案**

37.3 cm

解析　由切线垂直于过切点的半径，得 $OB \perp AB$。
在直角三角形 AOB 中，

$$AO = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

由 A、O、C 依次在同一直线上，得

$$AC = AO + OC = 10 + 6 = 16$$

$$\tan \angle AOB = \frac{AB}{OB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\angle AOB = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\angle COB = \pi - \angle AOB = \pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

设劣弧 CB 的长度为 s，则

$$s = 6\left(\pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

阴影边界由 AB、AC 和劣弧 CB 组成，设其周长为 P。

$$P = 8 + 16 + 6\left(\pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) \approx 37.3 \text{ cm}$$

答：阴影部分的周长为 37.3 cm。

题型 3　把图形分成扇形与三角形作面积和差

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **切线构造直角：**例图中 $OA = 5$，$OB = 13$，AB 是切线。切点处半径与切线_____，可得直角三角形。记 θ 为 $\angle AOB$ 的弧度数，反三角函数按弧度求值。

$$AB = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

由边求角

$$\cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{5}{13}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{5}{13}\right)$$

由角求边

$$\sin\theta = \frac{AB}{OB} = \frac{12}{13}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{OA} = \frac{12}{5}$$

$$AB = OA\tan\theta = 5\tan\theta$$

② **弧长确定周界：**例图的圆与 OB 交于 D，周界由两条线段与弧 AD 组成。记半径、弧长、周长分别为 r, l, P。圆心角用弧度计，两角合为平角时相加得 π。

$$l = r\theta$$

$$BD = OB - OD = 13 - 5 = 8$$

$$P = AB + BD + l = 12 + 8 + 5\theta$$

$$(\pi - \theta) + \theta = \pi$$

$$P_{扇形} = 2r + l$$

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{P_{扇形} - 2r}{r}$$

③ **面积对应边角：**例图扇形用半径 5，三角形用直角边 $5, 12$。记面积为 S；三角形两边 a, b 的夹角为 φ，相应高为 h。扇形用圆心角，三角形先求高再求面积。

$$S_{扇形} = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} rl$$

$$h = b \sin \varphi$$

$$S_{三角形} = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} ab \sin \varphi$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$$

$$r = \frac{2S_{扇形}}{l}$$

长度以厘米计时，面积以平方厘米计。

④ **分割计算和差：**例图阴影在三角形内、扇形外，两块面积_____。沿公共边分成互不重叠的两块时，两块面积相加。扇形半径为 R、三角形两边均为 r 时，各用自身边长。

两块相减

$$S = 30 - \frac{25\theta}{2} = \frac{25}{2}\left(\frac{12}{5} - \theta\right)$$

两块相加

$$S = S_{扇形} + S_{三角形}$$

$$S_{扇形} - S_{三角形} = \frac{1}{2} R^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

⑤ **弓形补成扇形：**连接例图的 AD，弧 AD 与弦 AD 围成弓形。扇形_____同圆心角的三角形，得到弓形面积。图形扣去弓形时，将括号展开。

$$S_{弓形} = \frac{1}{2} r^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta = \frac{r^2}{2}(\theta - \sin \theta)$$

$$S = S_{整块} - \left(S_{扇形} - S_{三角形}\right) = S_{整块} - S_{扇形} + S_{三角形}$$

⑥ **等分处理重叠：**等腰三角形的顶点向底边作垂线，底边与顶角都被平分。等边三角形各顶点为圆心，边长为半径，作三段圆弧。边长取 1、内角记为 φ，三个扇形合并须减去_____份三角形。

$$3\varphi = \pi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$h=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{等边三角形}}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

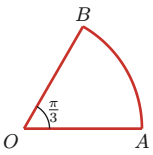
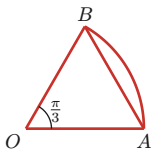
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{每个扇形}}=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$S=3\times\frac{\pi}{6}-2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$$

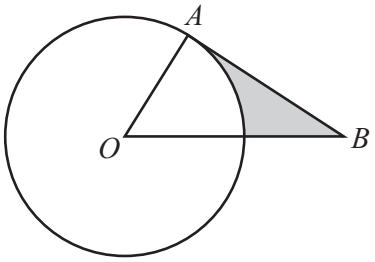
填空：①垂直　②相减　③减去　④2

同半径、同圆心角的面积

	扇形 OAB	三角形 OAB
图像		
已知	$r=3,\quad \theta=\frac{\pi}{3}$	
面积	$\frac{1}{2}r^2\theta=3\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}r^2\sin\theta=9\frac{\sqrt{3}}{4}$
弓形	扇形面积减三角形面积	

点石成金　题目出现圆弧、切线或阴影面积时，先连接圆心与圆弧端点，将图形分成扇形与三角形作面积和差。

例 1　[2025・February/March 0606/22 Q1(c)]



The diagram shows a circle with centre O and radius 5 cm.
The point A lies on the circle.
The point B is such that the line AB is a tangent to the circle.
OB has length 13 cm.

(a) Find angle AOB, giving your answer in radians.

(b) Find the perimeter of the shaded region.

(c) Find the area of the shaded region.

图中有一个圆心为 O、半径为 5 cm 的圆。点 A 在圆上。点 B 的位置使直线 AB 成为该圆的切线。OB 的长度为 13 cm。阴影区域由切线段 AB、线段 OB 在圆外的部分及两者之间的圆弧围成。

(a) 求 $\angle AOB$，答案用弧度表示。

(b) 求阴影区域的周长。

(c) 求阴影区域的面积。

解答 由 AB 是圆在 A 点处的切线，得 OA 垂直于 AB。

$$AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

设 θ 为 $\angle AOB$ 的弧度数，则

$$\cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{5}{13}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 1.18 \text{ rad}$$

设圆与线段 OB 的交点为 D，则

$$BD = OB - OD = 13 - 5 = 8 \text{ cm}$$

阴影区域的周界由 AB、BD 和弧 AD 组成，其周长为

$$P = AB + BD + 5\theta = 12 + 8 + 5\arccos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 25.9 \text{ cm}$$

阴影面积等于三角形 AOB 的面积减去扇形 AOD 的面积。

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 - \frac{1}{2} \times 5^2 \times \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 15.3\text{cm}^2$$

答：(a) 1.18 rad；(b) 25.9 cm；(c) 15.3cm^2。

方法：先找切点 A 处的半径，从直角三角形求圆心角，再拆分阴影。

辨析：扇形是两半径与弧围成的区域，弓形是弦与弧围成的区域。

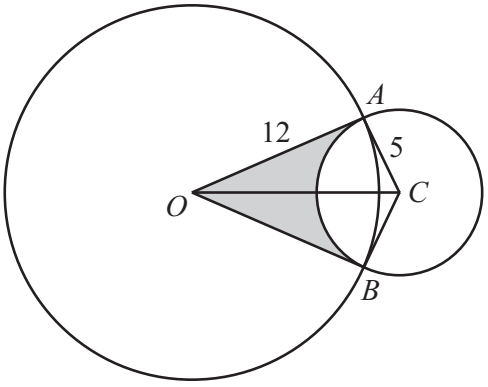
拓展：同圆中，扇形面积之比等于对应圆心角之比。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/12 Q3(c)]

提示：看两侧切线构成的直角三角形，比较半角与扇形角。

In this question, all lengths are in centimetres and all angles are in radians.



The diagram shows a circle with centre O and radius 12, and a circle with centre C and radius 5.
The circles intersect at the points A and B, such that OA and OB are tangents to the circle with centre C.

(a) Show that the obtuse angle ACB is 2.35 radians, correct to 2 decimal places.

(c) Find the area of the shaded region.

本题中，所有长度均以厘米为单位，所有角均以弧度为单位。
图中有一个圆心为 O、半径为 12 的圆，以及一个圆心为 C、半径为 5 的圆。两圆相交于 A、B 两点，且 OA、OB 都是圆心为 C 的圆的切线。
(a) 证明钝角 ACB 的大小精确到小数点后两位为 2.35 弧度。
(c) 求阴影区域的面积。

✓ **答案**　(a) $\angle ACB \approx 2.35$ rad，精确到小数点后两位；(c) 30.6cm^2。

解析　由 OA 是圆心为 C 的圆的切线，得 OA 垂直于 CA。设 φ 为 $\angle ACO$ 的弧度数，则

$$\tan\varphi = \frac{OA}{CA} = \frac{12}{5}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{12}{5}\right)$$

由 $CA = CB$、$OA = OB$，且 OC 为公共边，得三角形 OAC 与 OBC 全等。

$$\angle ACB = 2\varphi = 2\arctan\left(\frac{12}{5}\right) \approx 2.35201 \text{ rad}$$

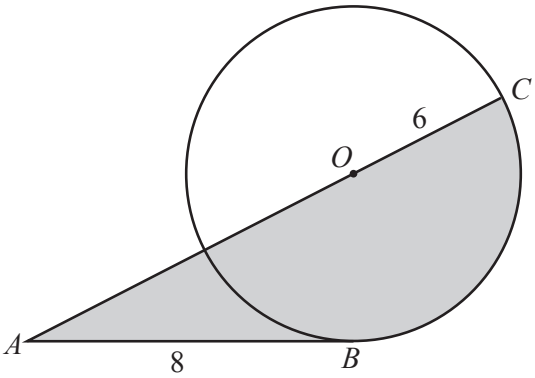
故钝角 ACB 精确到小数点后两位为 2.35 rad。
阴影面积等于两个直角三角形的面积和减去圆心为 C 的扇形 ACB 的面积。

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times 12 \times 5 - \frac{1}{2} \times 5^2 \times 2\arctan\left(\frac{12}{5}\right) \approx 30.6\text{cm}^2$$

答：(a) 已证；(c) 阴影面积为 30.6cm^2。

2. [2023 · October/November 0606/21 Q10(b)]
← 提示：看共线的 A、O、C，区分三角形内角与扇形角。

In this question all lengths are in centimetres.



The diagram shows a circle centre O with radius 6. The line AB is a tangent to the circle at the point B. The point C lies on the circle such that AOC is a straight line. $AB = 8$.

(a) Find the perimeter of the shaded region.

(b) Find the area of the shaded region.

本题中，所有长度均以厘米为单位。
图中有一个圆心为 O、半径为 6 的圆。直线 AB 是该圆在 B 点处的切线。点 C 在圆上，且 A, O, C 依次在同一直线上。已知 $AB = 8$。阴影区域由线段 AB、AC 及弧 BC 围成。
(a) 求阴影区域的周长。
(b) 求阴影区域的面积。

✓ **答案**　(a) 37.3 cm；(b) 63.9cm^2。

解析　由 AB 是圆在 B 点处的切线，得 OB 垂直于 AB。

$$AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$$

设 β 为 $\angle AOB$ 的弧度数，则

$$\cos\beta = \frac{OB}{OA} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

由 A, O, C 共线，得

$$\angle BOC = \pi - \beta$$

$$AC = AO + OC = 10 + 6 = 16 \text{ cm}$$

阴影区域的周界由 AB、AC 和弧 BC 组成。

$$P = 8 + 16 + 6\left(\pi - \arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right) \approx 37.3 \text{ cm}$$

阴影区域由直角三角形 AOB 与扇形 BOC 拼成。

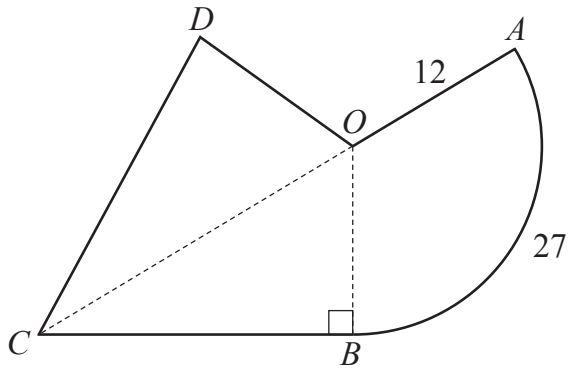
$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 + \frac{1}{2} \times 6^2 \times \left(\pi - \arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right) \approx 63.9\text{cm}^2$$

答：(a) 37.3 cm；(b) 63.9cm^2。

3. [2023 · October/November 0606/12 Q10(b)]

提示：看已知弧长所对的角，比较它与风筝形顶角的关系。

In this question all lengths are in centimetres and all angles are in radians.



The diagram shows a badge which consists of a minor sector, OAB, of the circle with centre O and radius 12, and a kite $OBCD$, where $OB = OD$ and $CD = CB$. The arc AB has length 27. The line OB is perpendicular to the line CB, and COA is a straight line.

(a) Find the perimeter of the badge.

(b) Find the area of the badge.

本题中，所有长度均以厘米为单位，所有角均以弧度为单位。

图中的徽章由一个劣扇形 OAB 和一个风筝形 $OBCD$ 组成。扇形所在圆的圆心为 O，半径为 12。风筝形中，$OB = OD$，$CD = CB$。弧 AB 的长度为 27。直线 OB 垂直于直线 CB，且 C, O, A 依次在同一直线上。

(a) 求徽章的周长。

(b) 求徽章的面积。

✓ **答案**　（a）80.7 cm；（b）340cm^2。

解析　设 θ 为 $\angle AOB$ 的弧度数，由弧长公式得

$$\theta = \frac{27}{12} = 2.25$$

由 C, O, A 共线，得

$$\angle COB = \pi - 2.25$$

在直角三角形 OBC 中，

$$CB = OB\tan(\angle COB) = 12\tan(\pi - 2.25)$$

由 $OB = OD = 12$、$CD = CB$，得徽章的周长为

$$P = 27 + OA + OD + CD + CB = 27 + 12 + 12 + 24\tan(\pi - 2.25) \approx 80.7 \text{ cm}$$

三角形 OBC 与 ODC 三边分别相等，面积相等。风筝形 $OBCD$ 的面积为

$$S_{\text{风筝形}} = 2 \times \frac{1}{2} \times OB \times CB = 144\tan(\pi - 2.25)$$

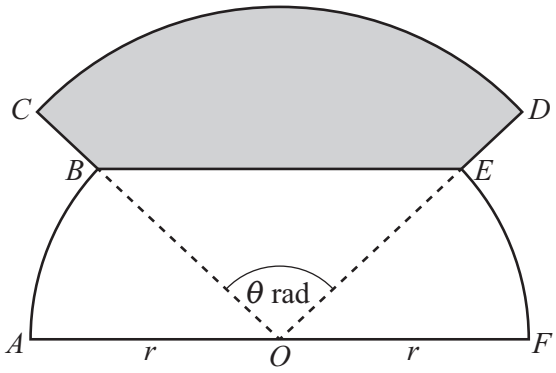
徽章面积等于扇形面积与风筝形面积之和。

$$S = \frac{1}{2} \times 12^2 \times 2.25 + 144\tan(\pi - 2.25) \approx 340.362\text{cm}^2$$

答：（a）周长为 80.7 cm；（b）面积约为 340cm^2。

4. [2025 · May/June 0606/12 Q10(a)]

提示：看外扇形与内三角形，分别按对半径和两腰。



The diagram shows the shape $OABCDEF$.
AOF is a straight line.
OAB and OEF are sectors of a circle with centre O and radius r.
Angle BOA = angle EOF.

OCD is a sector of a circle with centre O and radius $\frac{4r}{3}$.

Angle COD is θ radians.
The point B lies on the line OC and the point E lies on the line OD.
The line BE is parallel to the line AOF.

(a) Find, in terms of r and θ, the area of the shaded region $BCDE$.

图中所示的图形为 $OABCDEF$。
A, O, F 在同一直线上。OAB 与 OEF 都是圆心为 O、半径为 r 的圆的扇形，且 $\angle BOA = \angle EOF$。图中 $OA = OF = r$。

OCD 是圆心为 O、半径为 $\frac{4r}{3}$ 的圆的扇形，$\angle COD = \theta$ 弧度。点 B 在线段 OC 上，点 E 在线段 OD 上。直线 BE 平行于直线 AOF。
(a) 用 r 和 θ 表示阴影区域 $BCDE$ 的面积。

✓ **答案** $\frac{8r^2\theta}{9} - \frac{r^2\sin\theta}{2}$。

解析 由 B 在线段 OC 上、E 在线段 OD 上，且两个小扇形的半径均为 r，得

$$OB = OE = r$$

$$\angle BOE = \angle COD = \theta$$

扇形 OCD 的面积为

$$S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}\left(4\frac{r}{3}\right)^2\theta = \frac{8r^2\theta}{9}$$

三角形 OBE 的面积为

$$S_{\text{三角形}} = \frac{1}{2} \times OB \times OE \times \sin\theta = \frac{r^2\sin\theta}{2}$$

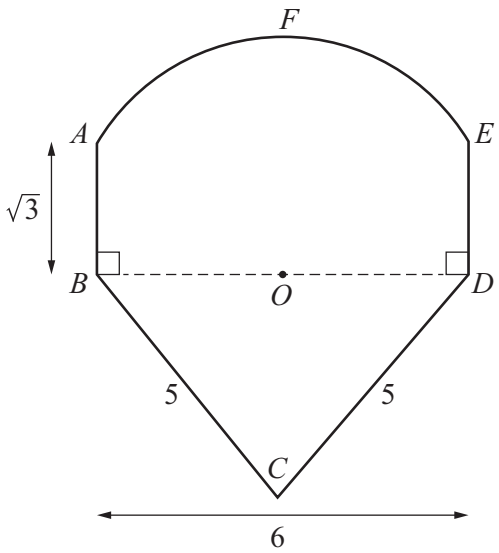
阴影区域 $BCDE$ 等于扇形 OCD 去掉三角形 OBE。

$$S = \frac{8r^2\theta}{9} - \frac{r^2\sin\theta}{2}$$

答：阴影面积为 $\frac{8r^2\theta}{9} - \frac{r^2\sin\theta}{2}$。

5. [2024 · October/November 0606/21 Q6(b)]
提示：看矩形上方的弓形，比较补成扇形前后多出的区域。

In this question all lengths are in metres.



The diagram shows a shape $ABCDEF$.
AB, BD and DE are three sides of a rectangle.
O is the mid-point of BD.
AFE is an arc of a circle whose centre is O.
$AB = \sqrt{3}$, $BC = CD = 5$ and $BD = 6$.

(a) Find the exact value of the perimeter of the shape, giving your answer in terms of π.

(b) Find the exact value of the area of the shape, giving your answer in terms of π.

本题中，所有长度均以米为单位。
图中所示的图形为 $ABCDEF$。AB、BD、DE 是一个矩形的三条边。O 是 BD 的中点。弧 AFE 所在圆的圆心为 O，F 位于该弧的

顶部。已知 $AB=\sqrt{3}$，$BC=CD=5$，$BD=6$。
(a) 求该图形周长的精确值，用含 π 的式子表示。
(b) 求该图形面积的精确值，用含 π 的式子表示。

✓ **答案** (a) $\left(10+2\sqrt{3}+\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}\right)$ m；(b) $\left(4\pi+12+3\sqrt{3}\right)\text{m}^2$。

解析 由 O 是 BD 的中点，得

$$OB=OD=\frac{6}{2}=3$$

由矩形的性质，得 AB 垂直于 BD，且 $DE=AB=\sqrt{3}$。圆的半径为

$$OA=\sqrt{OB^2+AB^2}=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{3}$$

在直角三角形 AOB 中，

$$\sin(\angle AOB)=\frac{AB}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

$$\angle AOB=\frac{\pi}{6}$$

由左右两侧对称，得

$$\angle AOE=\pi-2\times\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$$

弧 AFE 的长度为

$$l=2\sqrt{3}\times\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$$

图形的周长为

$$P=AB+BC+CD+DE+l=10+2\sqrt{3}+\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$$

三角形 BCD 的高为

$$h=\sqrt{5^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2}=4$$

$$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times6\times4=12$$

扇形 AOE 与三角形 AOE 的面积分别为

$$S_{\text{扇形}}=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}\right)^2\times\frac{2\pi}{3}=4\pi$$

$$S_{\triangle AOE}=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$$

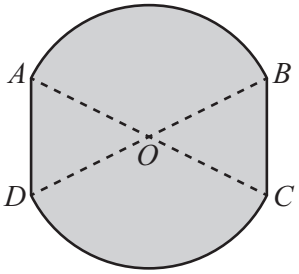
图形面积等于矩形面积、三角形 BCD 面积与弓形 AFE 面积之和。

$$S=6\sqrt{3}+12+\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)=4\pi+12+3\sqrt{3}$$

答：（a）周长为 $\left(10+2\sqrt{3}+\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}\right)$ m；（b）面积为 $\left(4\pi+12+3\sqrt{3}\right)\text{m}^2$。

6. [2025 · October/November 0606/22 Q2(b)]

提示：看弦 AD 的中点，比较半顶角与所求钝角的关系。



The diagram shows the shaded region $ABCD$.
The lines AC and BD each have a length of 12 cm.
The lines AC and BD bisect each other at the point O.
The lines AD and BC are parallel and each have a length of 4 cm.
The arcs AB and DC are part of a circle centre O.

(a) Find the obtuse angle AOB.
Give your answer in radians.

Use your answer to **part (a)** to find

(b) **(i)** the perimeter of the shaded region

(ii) the area of the shaded region.

图中所示的阴影区域为 $ABCD$。
线段 AC 与 BD 的长度均为 12 cm，并在 O 点互相平分。线段 AD 与 BC 平行，长度均为 4 cm。弧 AB 与弧 DC 都是圆心为 O 的圆的一部分。
（a）求钝角 AOB，答案用弧度表示。
利用（a）的答案求：
（b）（i）阴影区域的周长；
（ii）阴影区域的面积。

✓ **答案**　（a）2.46 rad；（b）（i）37.5 cm；（ii）111cm^2。

解析　由 AC、BD 长均为 12 cm，且在 O 点互相平分，得

$$OA=OB=OC=OD=6\text{ cm}$$

取 AD 的中点 M。由等腰三角形 AOD 的性质，得 OM 垂直于 AD，且

$$AM=A\frac{D}{2}=2\text{ cm}$$

$$\sin(\angle AOM)=\frac{AM}{OA}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\angle AOD=2\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

设 θ 为钝角 AOB 的弧度数，由 B,O,D 共线，得

$$\theta=\pi-2\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\approx 2.46\text{ rad}$$

两段圆弧对应的圆心角相等，阴影区域的周长为

$$P = AD + BC + 2 \times 6\theta = 8 + 12\theta \approx 37.5 \text{ cm}$$

在直角三角形 AOM 中，

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

阴影区域由两个扇形及三角形 AOD、BOC 拼成。

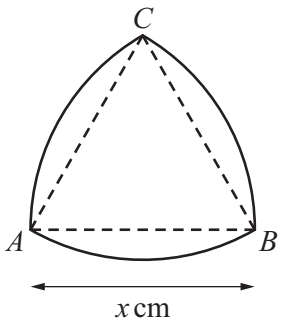
$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times 6^2\theta + 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 36\theta + 16\sqrt{2} \approx 111\text{cm}^2$$

答：（a）2.46 rad；（b）（i）37.5 cm；（ii）111cm^2。

7. [2026 · February/March 0606/22 Q5(b)]

提示：看三个扇形覆盖的区域，数清中央三角形重叠的份数。

The diagram shows a design for a badge.



ABC is an equilateral triangle with side x cm.
The arcs BC, CA and AB are parts of the circles with centres A, B and C respectively.

(a) Write down the size of angle ABC in radians.
Give your answer in terms of π.

(b) The area of the badge is $2(\pi - \sqrt{3})$ cm^2.

Find x.

图中是一枚徽章的设计图。
ABC 是边长为 x cm 的等边三角形。弧 BC、CA、AB 分别是以 A、B、C 为圆心的圆的一部分，三段圆弧围成徽章。
（a）写出 $\angle ABC$ 的弧度数，用含 π 的式子表示。
（b）徽章的面积为 $2\left(\pi - \sqrt{3}\right)\text{cm}^2$。求 x。

✓ **答案**　（a）$\frac{\pi}{3}$；（b）$x = 2$。

解析　等边三角形的三个内角相等，故

$$\angle ABC = \frac{\pi}{3}$$

等边三角形 ABC 的高为

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xh = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

每段圆弧对应的扇形半径为 x，圆心角为 $\frac{\pi}{3}$，故

$$S_{\text{每个扇形}} = \frac{1}{2}x^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi x^2}{6}$$

徽章由三角形 ABC 及外侧的三个弓形组成。

$$S_{\text{徽章}} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} + 3\left(\frac{\pi x^2}{6} - \frac{\sqrt{3}x^2}{4}\right) = \frac{x^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$$

由题意，得

$$\frac{x^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right) = 2\left(\pi - \sqrt{3}\right)$$

因 $\pi - \sqrt{3} > 0$，两边约去该因式，得

$$x^2 = 4$$

又 $x > 0$，故

$$x = 2$$

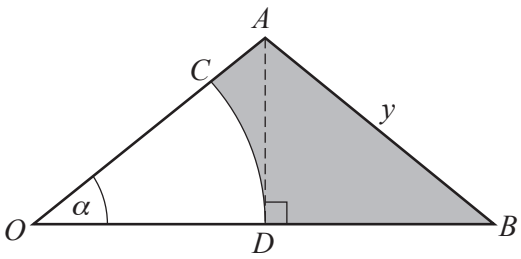
答：（a）$\frac{\pi}{3}$ 弧度；（b）$x = 2$。

8. [2023 · May/June 0606/21 Q9(b)]

提示：看高 AD 分出的直角三角形，区分斜边与扇形半径。

In this question all lengths are in centimetres and all angles are in radians.

(b)



The diagram shows an isosceles triangle, OAB, with $AO = AB = y$ and height AD. OCD is a sector of the circle with centre O. Angle AOB is α.

(i) Find an expression for OB in terms of y and α.

(ii) Hence show that the area of the shaded region can be written as $\frac{y^2}{2}\cos\alpha(2\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$.

本题中，所有长度均以厘米为单位，所有角均以弧度为单位。

（b）图中 OAB 是等腰三角形，$AO = AB = y$，高为 AD。点 D 在底边 OB 上，AD 垂直于 OB。点 C 在边 OA 上，OCD 是圆心为 O 的圆的扇形。已知 $\angle AOB = \alpha$。阴影区域为三角形 OAB 内、扇形 OCD 外的部分。

（i）用 y 和 α 表示 OB。

（ii）由此证明，阴影区域的面积可写为 $\frac{y^2}{2}\cos\alpha(2\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$。

✓ **答案**　（b）（i）$OB = 2y\cos\alpha$；（ii）$S = \frac{y^2}{2}\cos\alpha(2\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$。

解析　由 $AO = AB$，且 AD 是底边 OB 上的高，得 $OD = DB$。在直角三角形 AOD 中，

$$OD = y\cos\alpha$$

$$AD = y\sin\alpha$$

故

$$OB = 2OD = 2y\cos\alpha$$

三角形 OAB 的面积为

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\times OB\times AD = \frac{1}{2}\times 2y\cos\alpha\times y\sin\alpha = y^2\sin\alpha\cos\alpha$$

扇形 OCD 的半径为 OD，圆心角为 α，故

$$S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}(y\cos\alpha)^2\alpha = \frac{\alpha y^2\cos^2\alpha}{2}$$

阴影面积等于三角形面积减去扇形面积。

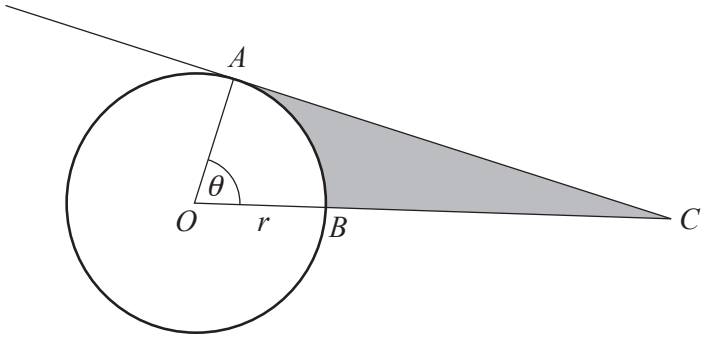
$$S = y^2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\alpha y^2\cos^2\alpha}{2} = \frac{y^2}{2}\cos\alpha(2\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

答：（i）$OB = 2y\cos\alpha$；（ii）所给面积表达式得证。

9. [2023 · May/June 0606/12 Q4(b)]

提示：看弧长与扇形面积的共同因子，再找切点处的直角。

In this question all lengths are in centimetres and all angles are in radians.



The diagram shows a circle with centre O and radius r. The points A and B lie on the circumference of the circle such that the angle AOB is θ and the length of the minor arc AB is 12. The area of the minor sector AOB is $57.6\,\text{cm}^2$. The point C lies on the tangent to the circle at A such that OBC is a straight line.

(a) Find the values of r and θ.

(b) Find the area of the shaded region. Give your answer correct to 1 decimal place.

本题中，所有长度均以厘米为单位，所有角均以弧度为单位。

图中有一个圆心为 O、半径为 r 的圆。点 A、B 在圆周上，$\angle AOB = \theta$，劣弧 AB 的长度为 12。劣扇形 AOB 的面积为 57.6cm^2。点 C 在圆于 A 点处的切线上，且 O, B, C 依次在同一直线上。阴影区域由线段 AC、BC 及劣弧 AB 围成。

（a）求 r 和 θ 的值。

（b）求阴影区域的面积，答案精确到小数点后一位。

✓ **答案**　（a）$r = 9.6$，$\theta = 1.25$；（b）81.1cm^2。

解析　由弧长与扇形面积公式，得

$$r\theta = 12$$

$$\frac{1}{2}r^2\theta = 57.6$$

将弧长代入扇形面积，得

$$\frac{1}{2}r \times 12 = 57.6$$

$$r = \frac{2 \times 57.6}{12} = 9.6$$

$$\theta = \frac{12}{9.6} = 1.25$$

由 AC 是圆在 A 点处的切线，得 OA 垂直于 AC。又 O, B, C 共线，故

$$\angle AOC = \theta = 1.25$$

$$AC = OA\tan\theta = 9.6\tan(1.25)$$

阴影面积等于直角三角形 OAC 的面积减去扇形 AOB 的面积。

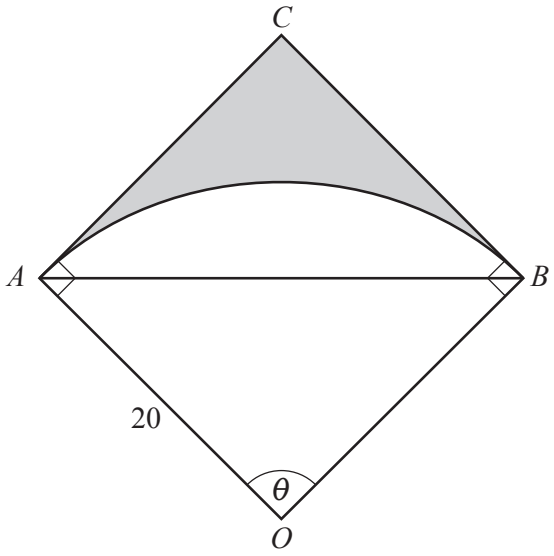
$$S = \frac{1}{2} \times 9.6 \times 9.6\tan(1.25) - 57.6 = 46.08\tan(1.25) - 57.6 \approx 81.1\text{cm}^2$$

答：（a）$r = 9.6$，$\theta = 1.25$；（b）阴影面积为 81.1cm^2，精确到小数点后一位。

10. [2023 · October/November 0606/13 Q10]

提示：看周长中两条半径的贡献，再比较两侧三角形。

In this question, all lengths are in centimetres and all angles are in radians.



The diagram shows the sector, OAB, of a circle with centre O and radius 20. The perimeter of this sector is 65. The lines CA and CB are both tangents to the circle at the points A and B, so that the triangle ABC is isosceles, with $AC = CB$. The angle AOB is equal to θ.

Find the area of the shaded region.

本题中，所有长度均以厘米为单位，所有角均以弧度为单位。
图中所示的扇形 OAB 所在圆的圆心为 O，半径为 20。该扇形的周长为 65。直线 CA 与 CB 分别是该圆在 A、B 两点处的切线，因此三角形 ABC 是等腰三角形，且 $AC=CB$。已知 $\angle AOB=\theta$。阴影区域位于三角形 ABC 内、弧 AB 上方。
求阴影区域的面积。
第 10 题附加答题区。

✓ **答案** 38.6cm^2。

解析 由扇形的周长为 65，得

$$20+20+20\theta=65$$

$$\theta=\frac{65-40}{20}=1.25$$

连接 OC。由 $OA=OB$、$CA=CB$，且 OC 为公共边，得三角形 OAC 与 OBC 全等。

$$\angle AOC=\frac{\theta}{2}=0.625$$

由半径垂直于切线，得 OA 垂直于 AC，故

$$AC=OA\tan(\angle AOC)=20\tan(0.625)$$

阴影面积等于两个直角三角形的面积和减去扇形 OAB 的面积。

$$S=2\times\frac{1}{2}\times20\times20\tan(0.625)-\frac{1}{2}\times20^2\times1.25=400\tan(0.625)-250\approx38.6\text{cm}^2$$

答：阴影区域的面积为 38.6cm^2。

题型 4　扇形减三角形求弓形再合并面积

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **弧长确定圆心角：**例题中，半径为 5，劣弧 DC 长 3.75。记半径为 r、弧长为 l、圆心角为 α。α 用弧度，弧长与半径使用相同单位。

$$l=r\alpha,\quad \alpha=\frac{l}{r}$$

$$\theta=\frac{3.75}{5}=\underline{\qquad}$$

② **弦长确定圆心角：**等腰三角形腰长为 r、底边长为 c，顶角为 α。平分顶角，所得直角三角形的对边为 $\frac{c}{2}$，斜边为 r。如腰长为 5、底边长为 6，用正弦求半角，计算器取弧度模式。

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{c}{2r}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{3}{5}$$

$$\alpha=2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\approx1.287$$

③ **同弧转换角度：**在例题圆的优弧 AB 上取一点 T。同一劣弧所对的圆周角等于圆心角的一半。

$$\angle ATB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{0.5+0.75+0.5}{2}=0.875$$

④ **等腰确定弧半径：**以等腰三角形顶点为圆心作弧，弧半径等于腰长。如顶角为 $\frac{\pi}{3}$、底边长为 6，记底角为 β，由等角求等边。

$$\beta=\frac{\pi-\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$\text{两腰长}=\text{底边长}=6$$

平分底边，高与腰长之比给出下列正弦值。

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{6^2-3^2}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

⑤ **扇形减去三角形：**例题中，劣弧 DC 与弦 DC 围成弓形。记面积为 S、三角形高为 h，分别计算两种面积。圆心角 α 满足 $0<\alpha<\pi$ 时，两种面积相_____，得到弓形面积。

扇形面积

$$S_{\text{扇形}}=\frac{\alpha}{2\pi}\times\pi r^2=\frac{1}{2}r^2\alpha$$

$$S_{\text{扇形}}=\frac{1}{2}\times5^2\times0.75=9.375$$

三角形面积

$$h=r\sin\alpha$$

$$S_{\text{三角形}}=\frac{1}{2}rh=\frac{1}{2}r^2\sin\alpha$$

$$S_{\text{三角形}}=\frac{1}{2}\times5^2\sin0.75\approx8.5205$$

$$S_{\text{弓形}}=S_{\text{扇形}}-S_{\text{三角形}}=\frac{1}{2}r^2(\alpha-\sin\alpha)$$

⑥ **弓形面积合并：**例题中，大弓形包含小弓形，阴影面积由两者相减得到。两弧端点相同时，以公共弦分出面积为 S_1、S_2 的弓形。每条弧分别取其所在圆的半径，长度用米时面积用平方米。

两弓形分居公共弦两侧

$$S=S_1+S_2$$

两弓形全等时

$$S=2S_1$$

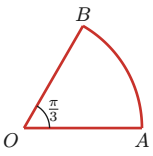
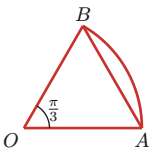
两弓形位于公共弦同侧

设 $S_1>S_2$

$$S=S_1-S_2$$

填空：①0.75　②减

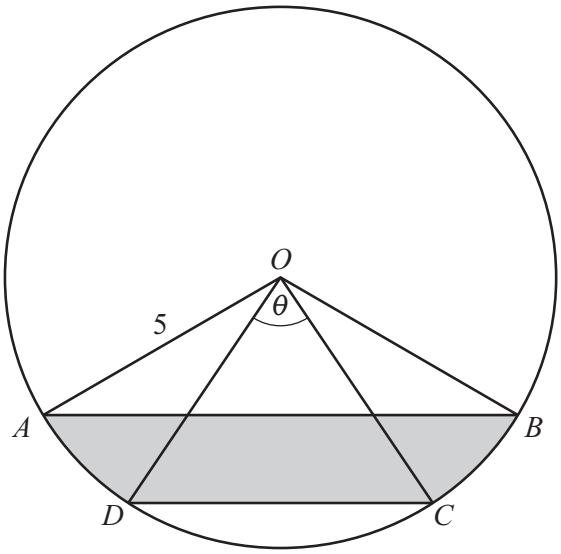
同半径、同圆心角的面积

	扇形 OAB	三角形 OAB
图像		
已知	$r=3,\quad\theta=\frac{\pi}{3}$	
面积	$\frac{1}{2}r^2\theta=3\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}r^2\sin\theta=9\frac{\sqrt{3}}{4}$
弓形	扇形面积减三角形面积	

点石成金　题目出现圆弧与弦围成的阴影区域时，先用同一圆心角的扇形面积减去三角形面积，再合并各弓形。

例 1　[2024 · May/June 0606/12 Q6(c)]

In this question, all lengths are in metres and all angles are in radians.



The diagram shows a circle with centre O and radius 5. The points A, B, C and D lie on the circumference of the circle. Angle $DOC = \theta$. Angle AOD = angle $COB = 0.5$. The length of the minor arc DC is 3.75.

(a) Show that $\theta = 0.75$.

(c) Find the area of the shaded region.

本题中，所有长度的单位均为米，所有角均以弧度表示。

图示为一个圆，圆心为 O，半径为 5。点 A、B、C、D 均在圆周上。图中 $OA = 5$，$\angle DOC = \theta$。已知 $\angle AOD = \angle COB = 0.5$，劣弧 DC 的长度为 3.75。

(a) 证明 $\theta = 0.75$。

(c) 求阴影部分的面积。

解答　由弧长公式得

$$\theta = \frac{3.75}{5} = 0.75$$

方法：先看阴影的内外边界，从各弧对应的扇形减三角形起手。

辨析：扇形是两半径与弧围成的区域，弓形是弦与弧围成的区域。

由相邻圆心角相加得

$$\angle AOB = 0.5 + 0.75 + 0.5 = 1.75$$

弦 AB 下方的大弓形面积为

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 5^2 (1.75 - \sin 1.75)$$

弦 DC 下方的小弓形面积为

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 5^2 (0.75 - \sin 0.75)$$

阴影部分是大弓形去掉小弓形，故

$$S = S_1 - S_2 = \frac{25}{2}(1 - \sin 1.75 + \sin 0.75) \approx 8.7\text{m}^2$$

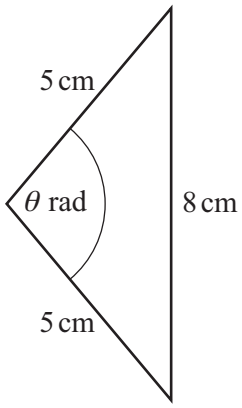
答：(a) $\theta = 0.75$；(c) 阴影部分的面积约为 8.7m^2。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/21 Q9(b)]

提示：以公共弦为界，比较两侧弓形的半径与圆心角。

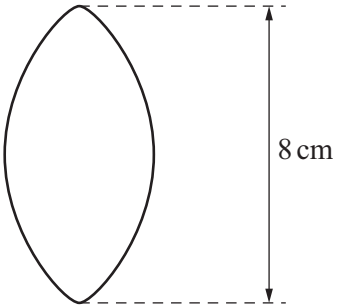
(a)



The diagram shows an isosceles triangle.

Find the value of θ in radians.

(b)



This diagram shows a shape made of two arcs.
Each arc is part of a circle with radius 5 cm.
The height of the shape is 8 cm.

Use your answer to **part (a)** to find

(i) the perimeter of the shape

(ii) the area of the shape.

(a) 图示为一个等腰三角形。两条腰均长 5 cm，底边长 8 cm，两腰的夹角为 θ 弧度。求 θ 的弧度数。
(b) 图示形状由两段弧围成。每段弧均为一个半径为 5 cm 的圆的一部分。该形状的高为 8 cm。
利用 (a) 的答案，求
(i) 该形状的周长；
(ii) 该形状的面积。

✓ **答案** (a) 1.85 rad；(b)(i) 18.5 cm；(ii) 22.4cm^2。

解析 作等腰三角形底边上的高，所得直角三角形的斜边长为 5 cm，半底边长为 4 cm。

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{4}{5}$$

$$\theta = 2\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) = 1.854590... \approx 1.85 \text{ rad}$$

两段弧所对的弦长均为 8 cm，所在圆的半径均为 5 cm，故圆心角均为 θ。记周长为 L，由弧长公式得

$$L = 2 \times 5\theta = 10\theta \approx 18.5 \text{ cm}$$

以两弧的公共弦为界，两侧为两个全等弓形。记该形状的面积为 S，得

$$S = 2\left(\frac{1}{2} \times 5^2\theta - \frac{1}{2} \times 5^2 \sin\theta\right)$$

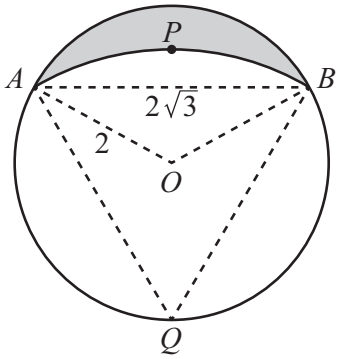
$$S = 25(\theta - \sin\theta) \approx 22.4\text{cm}^2$$

答：(a) $\theta \approx 1.85$ rad；(b)(i) 周长约为 18.5 cm；(ii) 面积约为 22.4cm^2。

2. [2025 · October/November 0606/23 Q8(b)]

提示：查看两弧各自的圆心，比较公共弦同侧的两个弓形。

In this question the units are metres.



The diagram shows a circle, centre O and radius 2.
The chord AB has length $2\sqrt{3}$.
The point Q lies on the circle such that $AQ = BQ$.
The arc APB is part of a circle, centre Q.

(a) Find the exact value of angle AQB in radians.

(b) Hence find the area of the shaded region. Give your answer in terms of π.

本题中，长度的单位为米。
图示为一个圆，圆心为 O，半径为 2，图中 $OA = 2$。弦 AB 的长度为 $2\sqrt{3}$。点 Q 在圆周上，且 $AQ = BQ$。经过点 P 的弧 APB 是以 Q 为圆心的一个圆的一部分。
(a) 求 $\angle AQB$ 的精确弧度数。
(b) 由此求阴影部分的面积，答案用含 π 的式子表示。

✓ **答案** (a) $\frac{\pi}{3}$；(b) $\left(2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)\text{m}^2$。

解析 设劣弧 AB 所对的圆心角为 α，由弦长公式得

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

因 $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$，故

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

点 Q 位于优弧 AB 上，由同弧所对的圆周角与圆心角关系得

$$\angle AQB = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3}$$

又 $AQ = BQ$，故

$$\angle QAB = \angle ABQ = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

三角形 AQB 为等边三角形，得

$$AQ = BQ = AB = 2\sqrt{3}$$

原圆中，劣弧 AB 与弦 AB 围成的弓形面积为

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 2^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \sin\left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

弧 APB 所在圆的圆心为 Q，半径为 AQ，相应弓形面积为

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \left(2\sqrt{3} \right)^2 \left(\frac{\pi}{3} - \sin\left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2\pi - 3\sqrt{3}$$

两弓形均在弦 AB 上方，阴影部分的面积为

$$S = S_1 - S_2 = \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) - \left(2\pi - 3\sqrt{3} \right) = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

答：(a) $\angle AQB = \frac{\pi}{3}$；(b) 阴影部分的面积为 $\left(2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \right) \mathrm{m}^2$。

第 10 章 三角函数

Chapter 10

10.1 三角函数

题型 1 用直角三角形三角比反求圆心角

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **等腰三角形分半：**例图两腰均为 5 cm，底边为 8 cm。顶点记为 A，底边两端记为 B、C。作底边上的高 AM，底边与顶角均被_____。

$$BM = CM = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

$$\angle BAM = \frac{\theta}{2}$$

② **三角比的对应：**半个三角形中，半顶角的对边为 4 cm，斜边为 5 cm。用对边除以斜边，得到正弦值。下表中，α 表示直角三角形的一个锐角。

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{4}{5}$$

三角比	边长比
$\sin\alpha$	对边 ÷ 斜边
$\cos\alpha$	邻边 ÷ 斜边
$\tan\alpha$	对边 ÷ 邻边

③ **反求角的弧度：**计算器设为_____制（RAD），用反三角函数求角。例图中，另一条直角边及半顶角如下。所求为整角时，将半顶角乘 2。

$$AM = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{\theta}{2} = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.927 \text{ rad}$$

④ **切线确定直角：**圆的切线与经过切点的半径_____。半径与切线段构成直角边，圆心到圆外点的线段为斜边。

已知邻边与斜边

$\alpha = \arccos\left(\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}\right)$

已知对边与邻边

$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}\right)$

⑤ **邻角互补求角：**两条直线相交，相邻两角之和为 π 弧度。已求出其中一角时，用 π 减去该角。例如，一角为 0.6 rad，相邻角记为 β。

$$\beta = \pi - 0.6 \approx 2.54 \text{ rad}$$

⑥ **两切线平分角：**圆心为 C，圆外点 O 引出切线 OA、OB。连接 OC，两个直角三角形斜边相同、半径相等，因而全等。由此得到两个半角相等，求出半角后乘 2。

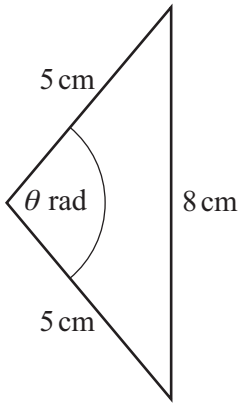
$$\angle ACO = \angle BCO = \frac{1}{2}\angle ACB$$

填空：①平分 ②弧度 ③垂直

点石成金　题目出现等腰三角形、圆的切线或要求圆心角时，先构造直角三角形，用三角比反求角。

例 1　[2025 · October/November 0606/21 Q9(a)]

(a)



The diagram shows an isosceles triangle.

Find the value of θ in radians.

(a) 图示一个等腰三角形，两腰长均为 5 cm，底边长为 8 cm，两腰的夹角标为 θ rad。求 θ 的值，用弧度表示。

解答　设顶角顶点为 A，底边两端为 B、C，作 $AM \perp BC$。

方法：看两腰相等的标记，先从顶点向底边作高。

辨析：半顶角是三角比反求出的角，整顶角是题目所求的角。

由等腰三角形的性质，得

$$BM = MC = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

$$\angle BAM = \frac{\theta}{2}$$

在直角三角形 ABM 中，

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{BM}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\theta}{2} = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$$

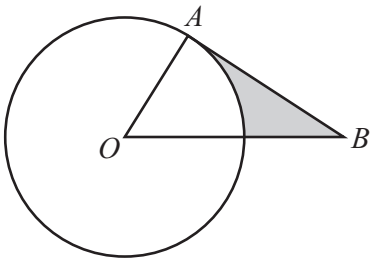
$$\theta = 2\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \approx 1.85 \text{ rad}$$

答：$\theta = 1.85$ rad。

针对练习

1. [2025 · February/March 0606/22 Q1(a)]

提示：看切点处的直角，比较所求角的邻边与斜边。



The diagram shows a circle with centre O and radius 5 cm.
The point A lies on the circle.
The point B is such that the line AB is a tangent to the circle.
OB has length 13 cm.

(a) Find angle AOB, giving your answer in radians.

图示一个圆，圆心为 O，半径为 5 cm。点 A 在圆上。点 B 满足直线 AB 是该圆的切线。OB 的长为 13 cm。
(a) 求 $\angle AOB$，答案用弧度表示。

✓ **答案**

1.18 rad

解析 ∵ AB 是圆在 A 点的切线，
∴ $OA \perp AB$。
在直角三角形 OAB 中，OB 为斜边，

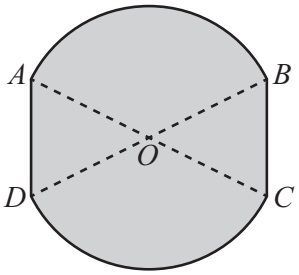
$$\cos(\angle AOB) = \frac{OA}{OB} = \frac{5}{13}$$

$$\angle AOB = \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 1.18 \text{ rad}$$

答：$\angle AOB = 1.18$ rad。

2. [2025 · October/November 0606/22 Q2(a)]

提示：看底边中点如何分角，再看所求角与哪个角互补。



The diagram shows the shaded region $ABCD$.
The lines AC and BD each have a length of 12 cm.
The lines AC and BD bisect each other at the point O.
The lines AD and BC are parallel and each have a length of 4 cm.
The arcs AB and DC are part of a circle centre O.

(a) Find the obtuse angle AOB.
Give your answer in radians.

图示阴影区域 $ABCD$。线段 AC 和 BD 的长均为 12 cm，且在点 O 处互相平分。线段 AD 和 BC 平行，长均为 4 cm。弧 AB 和弧 DC 是以 O 为圆心的圆的一部分。
(a) 求钝角 AOB。答案用弧度表示。

✓ **答案**

2.46 rad

解析 由 AC、BD 长均为 12 cm，且在 O 点互相平分，得

$$OA = OB = OC = OD = 6 \text{ cm}$$

取 AD 的中点 M，连接 OM。
$\because OA = OD$，$\therefore OM \perp AD$，且 OM 平分 $\angle AOD$。

$$AM = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$$

$$\sin(\angle AOM) = \frac{AM}{OA} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\angle AOD = 2\angle AOM = 2\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

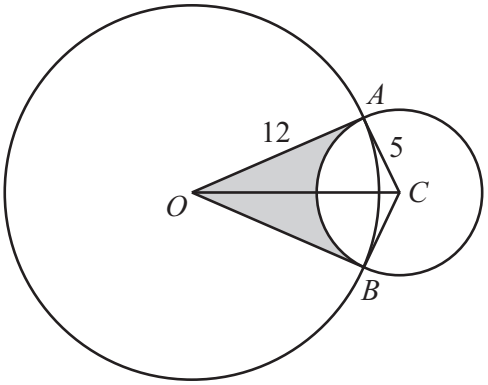
$\because B$、O、D 在同一直线上，
$\therefore \angle AOB + \angle AOD = \pi$。

$$\angle AOB = \pi - 2\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2.46 \text{ rad}$$

答：钝角 AOB 为 2.46 rad。

3. [2024 · October/November 0606/12 Q3(a)]
提示：看半径与切线构成的直角，比较半角的对边与邻边。

In this question, all lengths are in centimetres and all angles are in radians.



The diagram shows a circle with centre O and radius 12, and a circle with centre C and radius 5.
The circles intersect at the points A and B, such that OA and OB are tangents to the circle with centre C.

(a) Show that the obtuse angle ACB is 2.35 radians, correct to 2 decimal places.

本题中，所有长度均以厘米为单位，所有角均以弧度为单位。
图示一个以 O 为圆心、半径为 12 的圆，以及一个以 C 为圆心、半径为 5 的圆。两圆相交于点 A 和点 B，且 OA 和 OB 均为圆心为 C 的圆的切线。图中标有 $OA = 12$、$CA = 5$。
(a) 证明钝角 ACB 为 2.35 弧度，精确到小数点后两位。

✓ **答案** 2.35 rad（精确到小数点后两位）

解析 连接 OC。

∵ OA、OB 是圆心为 C 的圆的切线，

∴ $CA \perp OA$，$CB \perp OB$。

直角三角形 CAO 与 CBO 的斜边 CO 相同，且 $CA = CB$，故两三角形全等。

$$\angle ACO = \angle BCO$$

在直角三角形 CAO 中，

$$\tan(\angle ACO) = \frac{OA}{CA} = \frac{12}{5}$$

$$\angle ACO = \arctan\left(\frac{12}{5}\right)$$

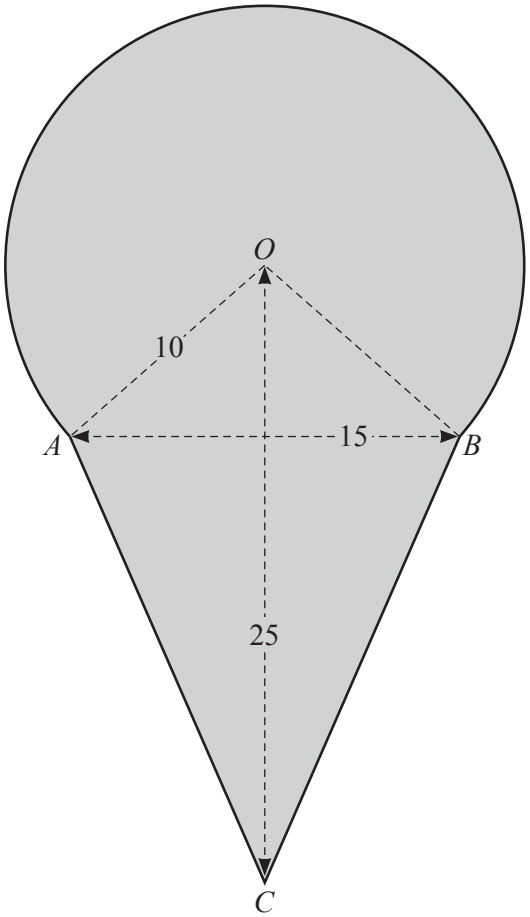
$$\angle ACB = 2\arctan\left(\frac{12}{5}\right) \approx 2.35201 \text{ rad}$$

答：钝角 ACB 为 2.35 rad，精确到小数点后两位，得证。

4. [2021 · May/June 0606/11 Q10(a)]

← 提示：两条半径构成等腰三角形，先从圆心向弦作垂线。

In this question all lengths are in centimetres.



The diagram shows a shaded shape. The arc AB is the major arc of a circle, centre O, radius 10. The line AB is of length 15, the line OC is of length 25 and the lengths of AC and BC are equal.

(a) Show that the angle AOB is 1.70 radians correct to 2 decimal places.

本题中，所有长度的单位均为厘米。
图示一个阴影图形。弧 AB 是圆心为 O、半径为 10 的圆的一条优弧。线段 AB 长 15，线段 OC 长 25，且 AC 与 BC 等长。图中标有点 O、A、B、C，并连接了 OA、OB、OC 和 AB。
(a) 证明角 AOB 为 1.70 弧度，精确到小数点后两位。

✓ **答案** $\angle AOB = 1.70$ rad（精确到小数点后两位）。

解析 作 $OM \perp AB$，垂足为 M。

由两条半径相等，得

$$OA = OB = 10 \text{ cm}$$

等腰三角形底边上的高平分底边与顶角，故

$$AM = \frac{AB}{2} = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ cm}$$

$$\angle AOM = \frac{1}{2}\angle AOB$$

在直角三角形 OAM 中，

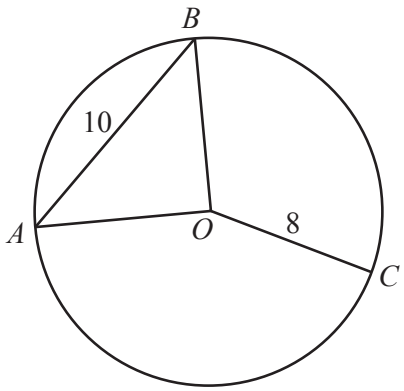
$$\sin(\angle AOM) = \frac{AM}{OA} = \frac{7.5}{10} = 0.75$$

$$\angle AOB = 2\arcsin(0.75) \approx 1.696124 \text{ rad}$$

答：$\angle AOB = 1.70$ rad，精确到小数点后两位。

5. [2022 · May/June 0606/13 Q2(a)]
提示：从圆心向弦作垂线，用半弦长与半径求半个圆心角。

In this question, all lengths are in centimetres and all angles are in radians.



The diagram shows a circle, centre O, radius 8. The points A, B and C lie on the circumference of the circle. The chord AB has length 10.

(a) Show that angle BOA is 1.35 correct to 2 decimal places.

本题中，所有长度的单位均为厘米，所有角均用弧度表示。
图示一个圆心为 O、半径为 8 的圆。点 A、B、C 均在圆周上，弦 AB 长 10。图中连接了 OA、OB、OC 和 AB，其中 OC 标为 8。
(a) 证明角 BOA 为 1.35，精确到小数点后两位。

✓ **答案** $\angle BOA = 1.35$ rad（精确到小数点后两位）。

解析 作 $OM \perp AB$，垂足为 M。

由两条半径相等，得

$$OA = OB = 8 \text{ cm}$$

等腰三角形底边上的高平分底边与顶角，故

$$AM = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$\angle AOM = \frac{1}{2}\angle BOA$$

在直角三角形 OAM 中，

$$\sin(\angle AOM) = \frac{AM}{OA} = \frac{5}{8}$$

$$\angle BOA = 2\arcsin\left(\frac{5}{8}\right) \approx 1.350263 \text{ rad}$$

答：$\angle BOA = 1.35$ rad，精确到小数点后两位。

题型 2　改写为正弦余弦，通分或约分证明恒等式

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **同角改写：**例题中的 θ 表示同一个角。将正切、余切、正割、余割改写为正弦、余弦。

正切与余切：

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

正割与余割：

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

各分母均须 _____。

② **平方互换：**同角的正弦、余弦满足下式，空格填 _____。$\sin^2\theta + \cos^2\theta =$ _____ 出现正切或正割的平方时，改写后用平方关系合并。

$$1 + \tan^2\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\sec^2\theta - 1 = \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

③ **分式通分：**例题改写后，两个分母分别为正弦、余弦。用两者的乘积作公分母，分子交叉相乘。

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

分母含一加一减时，也先通分；减号须作用于整个分子。

$$\frac{1}{\sin\theta - \cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{(\sin\theta + \cos\theta) + (\sin\theta - \cos\theta)}{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$= \frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$

$$\frac{1}{\sin\theta - \cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{(\sin\theta + \cos\theta) - (\sin\theta - \cos\theta)}{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$= \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$

④ **分式相除：**分母本身是分式时，除以它等于乘以它的_____。先将除数整体取倒数，再相乘。

$$\frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta = \sin\theta$$

除数含和式时，须先通分成一个分式。

$$\frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}=\frac{1}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

⑤ **乘积变形：**出现平方或平方差时，用下列展开与分解。

平方展开：

$$(1-\sin\theta)^2=1-2\sin\theta+\sin^2\theta$$

$$(1-\sin\theta)^2+\cos^2\theta=2-2\sin\theta=2(1-\sin\theta)$$

平方差分解：

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$$

$$\sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)$$

乘方也可拆成乘积，以便改写为所需函数。

$$\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}=\sin^2\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin^2\theta\tan\theta$$

⑥ **同因子约分：**分子、分母有公因子时，该因子须 _____ 才能约去。先写成乘积，再约分。

$$\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta$$

分子、分母同除以一个非零平方，也能得到所需比值。

$$\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=1-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=1-\cot^2\theta$$

填空：①不为零　②1　③1　④倒数　⑤不为零

点石成金　题目出现三角分式并要求证明恒等式时，先改写为正弦、余弦，再通分或约分。

例 1　[2024 · October/November 0606/21 Q1]

Show that $\tan\theta+\cot\theta$ can be written as $\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$.

证明 $\tan\theta+\cot\theta$ 可以写成 $\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$。

解答　原式有意义时，$\sin\theta\neq0$，$\cos\theta\neq0$。

由三角函数的比值关系，得

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$。

答：原式可写为 $\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$。

方法：先看正切与余切的分母，改成正弦、余弦后通分。

辨析：通分是把分母统一，约分是消去非零公因子。

针对练习

1. [2025 · February/March 0606/22 Q8(a)]

提示：看分母中的平方和，比较改写后上下两层的分母。

(a) Show that $\dfrac{\sin\theta\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ can be written as $\sin^3\theta$.

(a) 证明 $\frac{\sin\theta\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ 可以写成 $\sin^3\theta$。

✓ **答案**

$$\sin^3\theta$$

解析 原式有意义时，$\cos\theta\neq 0$。

将正切改写为正弦、余弦，得

$$\frac{\sin\theta\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\sin\theta\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$=\frac{\sin^3\theta}{1}=\sin^3\theta$。

答：原式可写为 $\sin^3\theta$。

2. [2025 · October/November 0606/13 Q6(b)]

提示：看两个分母的一加一减，通分后再改写正割。

(b) Show that $\dfrac{1}{\sec x-1}+\dfrac{1}{\sec x+1}$ can be written as $2\operatorname{cosec}x\cot x$.

(b) 证明 $\frac{1}{\sec x-1}+\frac{1}{\sec x+1}$ 可以写成 $2\operatorname{cosec}x\cot x$。

✓ **答案**

$$2\operatorname{cosec}x\cot x$$

解析 原式有意义时，$\cos x\neq 0$，且 $\sec x\neq 1$，$\sec x\neq -1$，故 $\sin x\neq 0$。

通分得

$$\frac{1}{\sec x-1}+\frac{1}{\sec x+1}=\frac{(\sec x+1)+(\sec x-1)}{(\sec x-1)(\sec x+1)}$$

$=\frac{2\sec x}{\sec^2 x-1}$。

将正割改写为余弦，得

$$\frac{2\sec x}{\sec^2 x-1}=\frac{\frac{2}{\cos x}}{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{2\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{2\cos x}{\sin^2 x}$$

$=2\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=2\operatorname{cosec}x\cot x$。

答：原式可写为 $2\operatorname{cosec}x\cot x$。

3. [2024 · May/June 0606/21 Q10(a)]
提示：看余弦平方能否分解，比较上下共有的因子。

(a) Show that $(\tan x+\sec x)^2$ can be written as $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$.

(a) 证明 $(\tan x+\sec x)^2$ 可以写成 $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$。

✓ **答案**

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

解析 原式有意义时，$\cos x\neq 0$，故 $1+\sin x\neq 0$，$1-\sin x\neq 0$。
将正切、正割改写为正弦、余弦，得

$$(\tan x+\sec x)^2=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}\right)^2$$

$$=\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}=\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}$$

$=\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$。
答：原式可写为 $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$。

4. [2024 · May/June 0606/22 Q6(a)]
提示：看余割除以余切的部分，改写后将除数整体取倒数。

(a) Show that $\sin^3 x\left(\dfrac{\operatorname{cosec} x}{\cot x}\right)$ can be written as $\sin^2 x\tan x$.

(a) 证明 $\sin^3 x\left(\frac{\operatorname{cosec} x}{\cot x}\right)$ 可以写成 $\sin^2 x\tan x$。

✓ **答案**

$$\sin^2 x\tan x$$

解析 原式有意义时，$\sin x\neq 0$，且 $\cot x\neq 0$，故 $\cos x\neq 0$。
将余割、余切改写为正弦、余弦，得

$$\sin^3 x\left(\frac{\operatorname{cosec} x}{\cot x}\right)=\sin^3 x\left(\frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}\right)$$

$$=\sin^3 x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin^3 x}{\cos x}$$

$=\sin^2 x\frac{\sin x}{\cos x}=\sin^2 x\tan x$。
答：原式可写为 $\sin^2 x\tan x$。

5. [2025 · May/June 0606/12 Q4(b)]

提示：看分母中的两项之和，先通分再处理外层除法。

(b) Given that $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, show that $\dfrac{\sec\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}$ can be written as $\sin\alpha$.

(b) 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，证明 $\frac{\sec\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}$ 可以写成 $\sin\alpha$。

✓ **答案**

$$\sin\alpha$$

解析 $\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，

$\therefore \sin\alpha > 0$，$\cos\alpha > 0$，且 $\cot\alpha + \tan\alpha > 0$。

将各函数改写为正弦、余弦，得

$$\frac{\sec\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}$$

$= \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \sin\alpha$。

答：原式可写为 $\sin\alpha$。

6. [2023 · May/June 0606/11 Q6(a)]

提示：看分子的余切与正切，通分后比较外层除数。

(a) Show that $\dfrac{\cot\theta+\tan\theta}{\sec\theta} = \operatorname{cosec}\theta$.

(a) 证明 $\frac{\cot\theta+\tan\theta}{\sec\theta} = \operatorname{cosec}\theta$。

✓ **答案**

$$\operatorname{cosec}\theta$$

解析 原式有意义时，$\sin\theta \neq 0$，$\cos\theta \neq 0$，且 $\sec\theta \neq 0$。

将各函数改写为正弦、余弦，得

$$\frac{\cot\theta+\tan\theta}{\sec\theta} = \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}$$

$$= \left(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)\cdot\cos\theta$$

$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\cdot\cos\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta$。

答：等式成立。

7. [2025 · October/November 0606/21 Q4(a)]

提示：看通分后分子的平方项，展开后寻找可合并的项。

(a) Show that $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = 2\sec x$.

(a) 证明 $\frac{1-\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1-\sin x} = 2\sec x$。

✓ **答案**

$$2\sec x$$

解析　原式有意义时，$\cos x \neq 0$，$1-\sin x \neq 0$。

通分并展开分子，得

$$\frac{1-\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{(1-\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1-\sin x)}$$

$$=\frac{1-2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1-\sin x)}$$

$$=\frac{2-2\sin x}{\cos x(1-\sin x)}=\frac{2(1-\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$$

$=\frac{2}{\cos x}=2\sec x$。

答：等式成立。

8. [2023 · October/November 0606/23 Q8(a)]

提示：看改写后的一加一减，通分时将减号带入整个分子。

(a) Show that $\dfrac{\sin x}{\tan x-1}-\dfrac{\cos x}{\tan x+1}=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

(a) 证明 $\frac{\sin x}{\tan x-1}-\frac{\cos x}{\tan x+1}=\frac{\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$。

✓ **答案**

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$$

解析　原式有意义时，$\cos x \neq 0$，且 $\tan x \neq 1$，$\tan x \neq -1$。

故 $\sin x-\cos x \neq 0$，$\sin x+\cos x \neq 0$。

将正切改写为正弦、余弦，得

$\frac{\sin x}{\tan x-1}-\frac{\cos x}{\tan x+1}=\frac{\sin x\cos x}{\sin x-\cos x}-\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}$。

通分得

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x-\cos x}-\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)-\cos^2 x(\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}$$

$$=\frac{\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x-\sin x\cos^2 x+\cos^3 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$$

$=\frac{\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$。

答：等式成立。

9. [2023 · October/November 0606/21 Q11(a)]

提示：看通分后的平方差，比较两平方项相除所得的比值。

(a) Show that $\dfrac{1}{\sec x-\operatorname{cosec} x}+\dfrac{1}{\sec x+\operatorname{cosec} x}=\dfrac{2\cos x}{1-\cot^2 x}$.

(a) 证明 $\frac{1}{\sec x-\operatorname{cosec} x}+\frac{1}{\sec x+\operatorname{cosec} x}=\frac{2\cos x}{1-\cot^2 x}$。

✓ **答案**

$$\frac{2\cos x}{1-\cot^2 x}$$

解析　原式有意义时，$\sin x \neq 0$，$\cos x \neq 0$，且 $\sec x \neq \operatorname{cosec} x$，$\sec x \neq -\operatorname{cosec} x$。

通分得

$$\frac{1}{\sec x-\operatorname{cosec} x}+\frac{1}{\sec x+\operatorname{cosec} x}=\frac{(\sec x+\operatorname{cosec} x)+(\sec x-\operatorname{cosec} x)}{(\sec x-\operatorname{cosec} x)(\sec x+\operatorname{cosec} x)}$$

$=\frac{2\sec x}{\sec^2 x-(\operatorname{cosec} x)^2}$。

分子、分母同除以非零的 $\sec^2 x$，得

$\frac{2\sec x}{\sec^2 x-(\operatorname{cosec} x)^2}=\frac{\frac{2}{\sec x}}{1-\left(\frac{\operatorname{cosec} x}{\sec x}\right)^2}$。

又∵

$\frac{1}{\sec x}=\cos x$，

$\frac{\operatorname{cosec} x}{\sec x}=\frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\cos x}}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$，

∴

$\frac{\frac{2}{\sec x}}{1-\left(\frac{\operatorname{cosec} x}{\sec x}\right)^2}=\frac{2\cos x}{1-\cot^2 x}$。

答：等式成立。

10. [2023 · October/November 0606/22 Q10(a)]

提示：看改写后两分母的相反关系，统一符号后再合并。

(a) By writing $\cot x$ and $\tan x$ in terms of $\cos x$ and $\sin x$, show that

$$\frac{\sin x}{1-\cot x}+\frac{\cos x}{1-\tan x}=\sin x+\cos x.$$

(a) 将 $\cot x$ 和 $\tan x$ 用 $\cos x$ 和 $\sin x$ 表示，证明 $\frac{\sin x}{1-\cot x}+\frac{\cos x}{1-\tan x}=\sin x+\cos x$。

✓ **答案**

$$\sin x+\cos x$$

解析 原式有意义时，$\sin x\neq 0$，$\cos x\neq 0$，且 $\cot x\neq 1$，$\tan x\neq 1$，故 $\sin x-\cos x\neq 0$。

按题意，将余切、正切改写为余弦、正弦，得

$$\frac{\sin x}{1-\cot x}+\frac{\cos x}{1-\tan x}=\frac{\sin x}{1-\frac{\cos x}{\sin x}}+\frac{\cos x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$=\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}+\frac{\cos^2 x}{\cos x-\sin x}$。

由 $\cos x-\sin x=-(\sin x-\cos x)$，得

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}+\frac{\cos^2 x}{\cos x-\sin x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x-\cos x}$$

$=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{\sin x-\cos x}=\sin x+\cos x$。

答：等式成立。

题型 3 化为单个三角比的确定值，在内角区间列全解

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **移项求三角比：**例题中，余弦前乘有常数，后面加有常数。先移项，再除以余弦前的系数，所得余弦值为 _____。

$$4\cos\left(\frac{x}{8}\right)+2=0$$

$$\cos\left(\frac{x}{8}\right)=-\frac{2}{4}$$

② **内角换元定界：**本例令 $t=\frac{x}{8}$，t 表示括号内的角。原变量的区间同步换成内角区间，求出内角后再还原。严格不等号的端点 _____，非严格不等号的端点 _____。

$$-1080^\circ \le x \le 1080^\circ$$

$$-1080\frac{^\circ}{8} \le \frac{x}{8} \le 1080\frac{^\circ}{8}$$

$$-135^\circ \le t \le 135^\circ$$

$$x = 8t$$

③ **基本角值与单位：**半周用角度表示为 180°，用弧度表示为 π。计算器模式须与题面单位一致。记号 arcsin 表示反正弦，用于由正弦值求主值角。

$$180^\circ = \pi$$

角度	0°	30°	45°	60°	90°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	无定义

弧度模式下，例如 $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0.7297$。

④ **周期列出内角：**设 β 为与三角比绝对值对应的锐角，k 为整数。下表用弧度，角度制将 π 换成 180°。在内角区间中筛选整数 k，列出所有内角。

三角比	取正值时的内角	取负值时的内角
$\sin t$	$t = \beta + 2k\pi$ $t = \pi - \beta + 2k\pi$	$t = -\beta + 2k\pi$ $t = \pi + \beta + 2k\pi$
$\cos t$	$t = \pm\beta + 2k\pi$	$t = \pi \pm \beta + 2k\pi$
$\tan t$	$t = \beta + k\pi$	$t = -\beta + k\pi$

本例的余弦值为负，参考角为 60°：

$t = 180^\circ - 60^\circ + 360^\circ k$　　|　　$t = 180^\circ + 60^\circ + 360^\circ k$

⑤ **倒数平方化简：**出现正割、余割或余切，先按下表改写。三角比的平方等于正数，开平方须保留 _____。

记号	定义与条件	化简演示
正割 $\sec t$	$\sec t = \frac{1}{\cos t}$ $\cos t \neq 0$	$\sec^2 t = 4$ $\cos^2 t = \frac{1}{4}$ $\cos t = \pm\frac{1}{2}$
余割 $\operatorname{cosec} t$	$\operatorname{cosec} t = \frac{1}{\sin t}$ $\sin t \neq 0$	$\operatorname{cosec}^2 t = 4$ $\sin^2 t = \frac{1}{4}$ $\sin t = \pm\frac{1}{2}$
正切 $\tan t$	$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ $\cos t \neq 0$	$\tan^2 t = 3$ $\tan t = \pm\sqrt{3}$
余切 $\cot t$	$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$ $\sin t \neq 0$	通分后合并分子

⑥ **恒等变形化简：**出现多种三角比或四次方，先化成一个三角比。下列等式均在原式有定义时成立，约去因式后仍保留原式的分母条件。

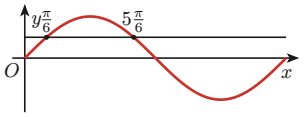
$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

原式条件	化简演算
$\cos t \neq 0$	$(\tan t + \sec t)^2 = \frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t}$ $\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t} = \frac{(1+\sin t)^2}{(1-\sin t)(1+\sin t)} = \frac{1+\sin t}{1-\sin t}$

任意实数角	$\cos^4 t-\sin^4 t+1=(\cos^2 t-\sin^2 t)(\cos^2 t+\sin^2 t)+1$ $(\cos^2 t-\sin^2 t)(\cos^2 t+\sin^2 t)+1=\cos^2 t-\sin^2 t+1=2\cos^2 t$
$\sin t\neq 0$ $\cos t\neq 0$	$\frac{\cot t+\tan t}{\sec t}=\left(\frac{\cos t}{\sin t}+\frac{\sin t}{\cos t}\right)\cos t$ $\left(\frac{\cos t}{\sin t}+\frac{\sin t}{\cos t}\right)\cos t=\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\sin t}=\frac{1}{\sin t}=\operatorname{cosec} t$

⑦ 在给定区间保留全部交点

$$\sin x=\tfrac{1}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$$



← 填空：①$-\frac{1}{2}$　②不取　③可取　④正、负两种符号

点石成金　题目出现三角方程及未知角的取值范围时，先化成单个三角比的确定值，并求括号内角的区间。

例 1　[2026 · May/June 0606/21 Q2(c)]

(c) Solve the equation $4\cos\left(\frac{x}{8}\right)+2=0$ for $-1080°\leqslant x\leqslant 1080°$.

(c) 解方程 $4\cos\left(\frac{x}{8}\right)+2=0$，其中 $-1080°\leq x\leq 1080°$。

解答 由原方程得

$$4\cos\left(\frac{x}{8}\right)=-2$$

$\cos\left(\frac{x}{8}\right)=-\frac{1}{2}$。令 $t=\frac{x}{8}$，由题设范围得 $-135°\leq t\leq 135°$。余弦值为负，参考角为 $60°$，故 $t=120°+360°k$ 或 $t=240°+360°k$，其中 k 为整数。在所给内角区间内，$t=-120°,120°$。由 $x=8t$，得 $x=-960°,960°$。答：$x=\pm 960°$。

方法：先看余弦前后的常数，移项除系数，再把区间两端除以八。

辨析：参考角是由三角比绝对值确定的锐角，内角是括号内的角。

拓展：余弦是偶函数，互为相反数的角有相同余弦值。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/11 Q12(b)]

← 提示：看括号内的倍数与常数，把两支周期解与换元后的区间比较。

(b) Solve the equation $3\sin(2\phi+1.5)=2$ for $0<\phi<5$, where ϕ is in radians.

(b) 解方程 $3\sin(2\varphi+1.5)=2$，其中 $0<\varphi<5$，φ 以弧度计。

✓ **答案** $\varphi\approx 0.456, 2.76, 3.60$。

解析 由原方程得 $\sin(2\varphi+1.5)=\frac{2}{3}$。令 $t=2\varphi+1.5$，由 $0<\varphi<5$ 得 $1.5<t<11.5$。用弧度模式计算，令 $\beta=\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\approx 0.7297276562$。正弦值为正，故 $t=\beta+2k\pi$ 或 $t=\pi-\beta+2k\pi$，其中 k 为整数。在所给内角区间内，$t=\pi-\beta, 2\pi+\beta, 3\pi-\beta$。由 $\varphi=\frac{t-1.5}{2}$，得 $\varphi=\frac{\pi-\beta-1.5}{2}\approx 0.456$，
$\varphi=\frac{2\pi+\beta-1.5}{2}\approx 2.76$，
$\varphi=\frac{3\pi-\beta-1.5}{2}\approx 3.60$。答：$\varphi\approx 0.456, 2.76, 3.60$。

2. [2024 · May/June 0606/11 Q8]
提示：看正弦的平方，开方后分正负两支，再对照内角区间。

Solve the equation $4\sin^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=1$ for $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Give your answers in terms of π.

解方程 $4\sin^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=1$，其中 $-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$。答案用含 π 的式子表示。

✓ **答案** $\alpha=-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}$。

解析 由原方程得

$$\sin^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$$

$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\pm\frac{1}{2}$。令 $t=2\alpha-\frac{\pi}{3}$，由题设范围得

$$-\pi\leq 2\alpha\leq\pi$$

$-\frac{4\pi}{3}\leq t\leq\frac{2\pi}{3}$。正弦值的绝对值为 $\frac{1}{2}$，参考角为 $\frac{\pi}{6}$。在所给内角区间内，$t=-\frac{7\pi}{6},-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}$。由 $\alpha=\frac{t+\frac{\pi}{3}}{2}$，得 $\alpha=-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}$。答：$\alpha=-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}$。

3. [2024 · May/June 0606/13 Q12]
提示：看正割的倒数关系，化成余弦后按内角区间筛选。

Solve the equation $\sec\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)=2$ for $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Give your answers in exact form.

解方程 $\sec\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)=2$，其中 $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$。答案用精确形式表示。

✓ **答案** $\theta=-\frac{7\pi}{18},\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{18}$。

解析 由正割的定义，原方程化为

$$\frac{1}{\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)}=2$$

$\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$。令 $t=3\theta-\frac{\pi}{2}$，由题设范围得

$$-\frac{3\pi}{2}\leq 3\theta\leq\frac{3\pi}{2}$$

$-2\pi\leq t\leq\pi$。余弦值为正，参考角为 $\frac{\pi}{3}$。在所给内角区间内，$t=-\frac{5\pi}{3},-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}$。由 $\theta=\frac{t+\frac{\pi}{2}}{3}$，得 $\theta=-\frac{7\pi}{18},\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{18}$。上述各角均满足 $\cos t\neq 0$。答：$\theta=-\frac{7\pi}{18},\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{18}$。

4. [2024 · May/June 0606/21 Q10(b)]
提示：看前一问的恒等式，把三倍角区间与正弦周期比较。

(a) Show that $(\tan x+\sec x)^2$ can be written as $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$.

(b) Hence solve the equation $(\tan 3\theta+\sec 3\theta)^2=6$ for $0°\leqslant\theta\leqslant 180°$.

(a) 证明 $(\tan x+\sec x)^2$ 可以写成 $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$。(b) 由此解方程 $(\tan(3\theta)+\sec(3\theta))^2=6$，其中 $0°\leq\theta\leq 180°$。

✓ **答案** (a) $(\tan x+\sec x)^2=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$。(b) $\theta\approx 15.2°,44.8°,135.2°,164.8°$。

解析 (a) 原式有定义时，$\cos x\neq 0$，故 $\sin x\neq\pm 1$。

$$(\tan x+\sec x)^2=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}\right)^2=\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}$$

$$\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}=\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}$$

$$\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}=\frac{(1+\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$\frac{(1+\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$。等式成立。(b) 由 (a)，原方程化为

$$\frac{1+\sin(3\theta)}{1-\sin(3\theta)}=6$$

$$1+\sin(3\theta)=6-6\sin(3\theta)$$

$$7\sin(3\theta)=5$$

$\sin(3\theta)=\frac{5}{7}$。令 $t=3\theta$，由题设范围得 $0°\le t\le 540°$。用角度模式计算，令 $\beta=\arcsin\left(\frac{5}{7}\right)\approx 45.58469140°$。在所给内角区间内，$t=\beta,180°-\beta,360°+\beta,540°-\beta$。由 $\theta=\frac{t}{3}$，得 $\theta\approx 15.2°,44.8°,135.2°,164.8°$。由 $\sin t=\frac{5}{7}$ 知 $\cos t\neq 0$，各解均使原式有定义。答：(a) 等式成立；(b) $\theta\approx 15.2°,44.8°,135.2°,164.8°$。

5. [2023 · May/June 0606/12 Q6(b)]

提示：看余割与正弦的倒数关系，再查内角区间跨过几个周期。

(b) Solve the equation $\sqrt{3}\operatorname{cosec}\left(2\phi+\frac{3\pi}{4}\right)=2$, for $-\pi<\phi<\pi$, giving your answers in terms of π.

(b) 解方程 $\sqrt{3}\operatorname{cosec}\left(2\varphi+\frac{3\pi}{4}\right)=2$，其中 $-\pi<\varphi<\pi$，答案用含 π 的式子表示。

✓ **答案** $\varphi=-\frac{5\pi}{24},-\frac{\pi}{24},\frac{19\pi}{24},\frac{23\pi}{24}$。

解析 由原方程得 $\operatorname{cosec}\left(2\varphi+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$。由余割的定义，得 $\sin\left(2\varphi+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$。令 $t=2\varphi+\frac{3\pi}{4}$，由题设范围得

$$-2\pi<2\varphi<2\pi$$

$-\frac{5\pi}{4}<t<\frac{11\pi}{4}$。正弦值为正，参考角为 $\frac{\pi}{3}$。在所给内角区间内，$t=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{3},\frac{8\pi}{3}$。由 $\varphi=\frac{t-\frac{3\pi}{4}}{2}$，得 $\varphi=-\frac{5\pi}{24},-\frac{\pi}{24},\frac{19\pi}{24},\frac{23\pi}{24}$。各解的正弦值均非零，原式有定义。答：$\varphi=-\frac{5\pi}{24},-\frac{\pi}{24},\frac{19\pi}{24},\frac{23\pi}{24}$。

6. [2023 · October/November 0606/13 Q12]

提示：看开方后的正负两支，逐一比较候选内角与两端的不等号。

Solve the equation $3\operatorname{cosec}^2\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=4$, for $0<x\leqslant 3\pi$. Give your answers in terms of π.

解方程 $3\operatorname{cosec}^2\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=4$，其中 $0<x\le 3\pi$。答案用含 π 的式子表示。

✓ **答案** $x=\pi,\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},3\pi$。

解析 由原方程得 $\operatorname{cosec}^2\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{3}$。由余割的定义，得

$$\sin^2\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$$

$\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。令 $t=\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}$，由题设范围得

$$0<\frac{2x}{3}\le 2\pi$$

$-\frac{\pi}{3}<t\le\frac{5\pi}{3}$。正弦值的绝对值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，参考角为 $\frac{\pi}{3}$。在所给内角区间内，$t=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$。其中下端点 $-\frac{\pi}{3}$ 不取，上端点 $\frac{5\pi}{3}$ 可取。由 $x=\frac{3}{2}\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$，得 $x=\pi,\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},3\pi$。各解的正弦值均非零，原式有定义。答：$x=\pi,\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},3\pi$。

7. [2023 · October/November 0606/12 Q5]
提示：看正割平方对应的余弦正负值，再核对候选角是否落在端点。

Solve the equation $3\sec^2\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=4$ for $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, giving your answers in terms of π.

解方程 $3\sec^2\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=4$，其中 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，答案用含 π 的式子表示。

✓ **答案** $\theta=-\frac{\pi}{6},0,\frac{\pi}{3}$。

解析 由原方程得 $\sec^2\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{3}$。由正割的定义，得

$$\cos^2\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$$

$\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。令 $t=2\theta+\frac{\pi}{6}$，由题设范围得

$$-\pi<2\theta<\pi$$

$-\frac{5\pi}{6}<t<\frac{7\pi}{6}$。余弦值的绝对值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，参考角为 $\frac{\pi}{6}$。在所给内角区间内，$t=-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$。两端的 $-\frac{5\pi}{6}$ 与 $\frac{7\pi}{6}$ 均不取。由 $\theta=\frac{t-\frac{\pi}{6}}{2}$，得 $\theta=-\frac{\pi}{6},0,\frac{\pi}{3}$。各解的余弦值均非零，原式有定义。答：$\theta=-\frac{\pi}{6},0,\frac{\pi}{3}$。

8. [2023 · October/November 0606/21 Q11(b)]
提示：看正切平方的两支根，按半周周期与平移后的区间比较。

(b) Solve the equation $3\tan^2\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=1$ for $-2\pi<y<0$.

(b) 解方程 $3\tan^2\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=1$，其中 $-2\pi<y<0$。

✓ **答案** $y=-\frac{17\pi}{12},-\frac{13\pi}{12},-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{12}$。

解析 由原方程得

$$\tan^2\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$$

$\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。令 $t=y+\frac{\pi}{4}$，由题设范围得 $-\frac{7\pi}{4}<t<\frac{\pi}{4}$。正切值的绝对值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，参考角为 $\frac{\pi}{6}$，故 $t=\frac{\pi}{6}+k\pi$ 或 $t=-\frac{\pi}{6}+k\pi$，其中 k 为整数。在所给内角区间内，$t=-\frac{7\pi}{6},-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}$。由 $y=t-\frac{\pi}{4}$，得 $y=-\frac{17\pi}{12},-\frac{13\pi}{12},-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{12}$。各解均满足 $\cos t\neq 0$。答：$y=-\frac{17\pi}{12},-\frac{13\pi}{12},-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{12}$。

9. [2023 · May/June 0606/13 Q10(b)]
提示：看前一问的化简结果，开方保留两种符号，再核对内角范围。

(a) Show that $\cos^4\theta-\sin^4\theta+1=2\cos^2\theta$.

(b) Solve the equation $\cos^4\frac{\phi}{3}-\sin^4\frac{\phi}{3}+1=\frac{1}{2}$, for $-3\pi<\phi<3\pi$, giving your answers in terms of π.

(a) 证明 $\cos^4\theta-\sin^4\theta+1=2\cos^2\theta$。(b) 解方程 $\cos^4\left(\frac{\varphi}{3}\right)-\sin^4\left(\frac{\varphi}{3}\right)+1=\frac{1}{2}$，其中 $-3\pi<\varphi<3\pi$，答案用含 π 的式子表示。

✓ **答案** (a) $\cos^4\theta-\sin^4\theta+1=2\cos^2\theta$。(b) $\varphi=-2\pi,-\pi,\pi,2\pi$。

解析 (a) 由平方差公式，得 $\cos^4\theta-\sin^4\theta+1=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+1$。由 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，得

$$(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+1=\cos^2\theta-\sin^2\theta+1$$

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta+1=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)+1$$

$\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)+1=2\cos^2\theta$。等式成立。(b) 由 (a)，原方程化为

$$2\cos^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)=\frac{1}{4}$$

$\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)=\pm\frac{1}{2}$。令 $t=\frac{\varphi}{3}$，由题设范围得 $-\pi<t<\pi$。余弦值的绝对值为 $\frac{1}{2}$，参考角为 $\frac{\pi}{3}$。在所给内角区间内，$t=-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$。由 $\varphi=3t$，得 $\varphi=-2\pi,-\pi,\pi,2\pi$。答：(a) 等式成立；(b) $\varphi=-2\pi,-\pi,\pi,2\pi$。

10. [2023 · May/June 0606/11 Q6(b)]

提示：看前一问的余割形式，转成正弦后核对原式分母是否为零。

(a) Show that $\dfrac{\cot\theta+\tan\theta}{\sec\theta}=\operatorname{cosec}\theta$.

(b) Hence solve the equation $\left(\dfrac{\cot\frac{\phi}{3}+\tan\frac{\phi}{3}}{\sec\frac{\phi}{3}}\right)^2=2$, for $-540°<\phi<540°$.

(a) 证明 $\frac{\cot\theta+\tan\theta}{\sec\theta}=\operatorname{cosec}\theta$。(b) 由此解方程 $\left(\frac{\cot\left(\frac{\varphi}{3}\right)+\tan\left(\frac{\varphi}{3}\right)}{\sec\left(\frac{\varphi}{3}\right)}\right)^2=2$，其中 $-540°<\varphi<540°$。

✓ **答案** (a) $\frac{\cot\theta+\tan\theta}{\sec\theta}=\operatorname{cosec}\theta$。(b) $\varphi=-405°,-135°,135°,405°$。

解析 (a) 原式有定义时，$\sin\theta\neq0$ 且 $\cos\theta\neq0$。由各三角比的定义，得

$$\frac{\cot\theta+\tan\theta}{\sec\theta}=\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\cos\theta$$

$$\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\cos\theta=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$$

$\frac{1}{\sin\theta}=\operatorname{cosec}\theta$。等式成立。(b) 由 (a)，原方程化为

$$\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)=2$$

$$\sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$\sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$。令 $t=\frac{\varphi}{3}$，由题设范围得 $-180°<t<180°$。正弦值的绝对值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，参考角为 $45°$。在所给内角区间内，$t=-135°,-45°,45°,135°$。由 $\varphi=3t$，得 $\varphi=-405°,-135°,135°,405°$。上述各角均满足 $\sin t\neq0$ 且 $\cos t\neq0$，原式有定义。答：(a) 等式成立；(b) $\varphi=-405°,-135°,135°,405°$。

题型 4　确定峰谷、截距和周期关键点，画正弦或余弦曲线

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **确定峰谷高度：**本例在正弦值上乘以 5，再加 4。正弦、余弦的值均在 -1 与 1 之间。振幅为峰谷高度差的一半。

$$y=4+5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$y_{\text{最小}}=4-5=-1$$

$$y_{\text{最大}}=4+5=9$$

本例振幅为_____，中线为_____。

② **求出重复周期：**正弦、余弦内的角增加 360°，函数值重复。周期记作 T，表示曲线重复一次的横向长度。角为 bx 时，b 表示横坐标的系数。

$$T = 360\frac{^\circ}{|b|}$$

本例有

$$T = 360\frac{^\circ}{\frac{1}{2}}$$

周期为_____。

③ **换算描点位置：**把正弦、余弦内的角记作 u，按表取值。由角的表达式反求横坐标，再代入求纵坐标。本例取角 $-90°$ 时，演算如下。

u	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin u$	0	1	0	−1	0
$\cos u$	1	0	−1	0	1

$$u = \frac{\theta}{2}$$

$$\theta = 2u = 2 \times (-90°) = -180°$$

$$y = 4 + 5 \times (-1) = -1$$

④ **计算区间端点：**区间端点必须代入原式。遇到负角或钝角，先求括号内的角，再求函数值。下列换算用于求端点的纵坐标。

$$\sin(-120°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 135° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(-135°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-135°) = \cos 135°$$

$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

⑤ **求坐标轴交点：**求纵轴截距时，令横坐标为 0。求横轴交点时，令 $y = 0$，并将区间换成 u 的范围。例如，在下列区间内解余弦方程。

$$-90° \le x \le 90°$$

$$2\cos(2x) + 1 = 0$$

$$u = 2x$$

$$-180° \le u \le 180°$$

$$\cos u = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

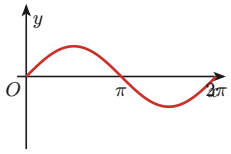
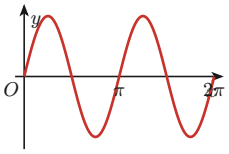
$$u = \pm 120°$$

$$x = \frac{u}{2} = \pm 60°$$

⑥ **连成平滑曲线：**将端点、峰谷和中线交点按横坐标从小到大排列。用平滑曲线连接各点，峰谷处切线水平。曲线画到所给区间的两个端点为止。

填空：①5　②$y = 4$　③720°

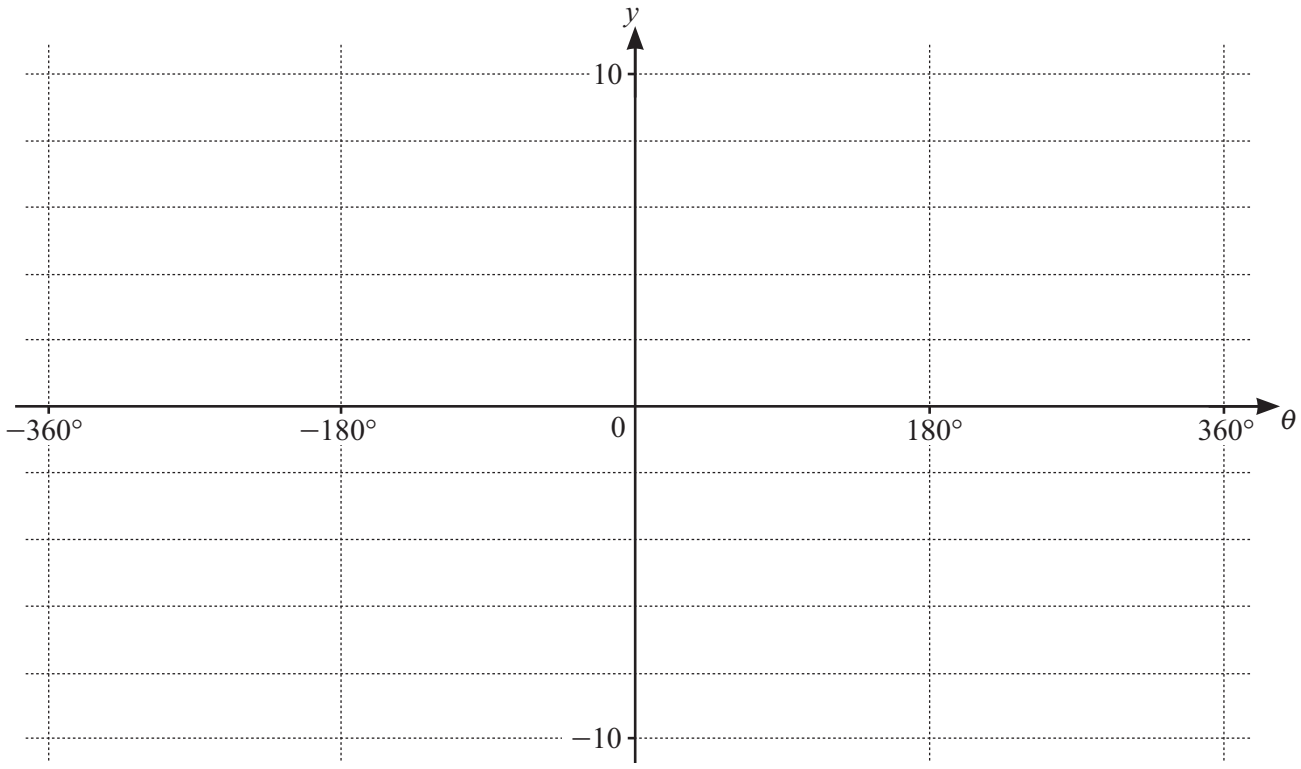
振幅与周期分别变化

	$y = \sin x$	$y = 2\sin(2x)$
图像		
振幅	1	2
周期	2π	π

点石成金　题目出现给定区间内正弦或余弦函数的作图要求时，先求峰谷高度和周期，再确定描点位置。

例 1　[2024 · October/November 0606/13 Q2]

On the axes, sketch the graph of $y = 4 + 5\sin\frac{\theta}{2}$, for $-360° \leqslant \theta \leqslant 360°$. State the intercept with the y-axis.



在所给坐标轴上，画出函数

$$y = 4 + 5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

在 $-360° \leq \theta \leq 360°$ 内的图象，并写出图象与 y 轴的截距。图中横轴为 θ，标有 $-360°$、$-180°$、0、$180°$、$360°$；纵轴为 y，标有 -10、10。

解答　由正弦值的范围得

$$y_{\text{最小}} = 4 - 5 = -1$$

方法：先看函数外的系数与常数，算出峰谷高

$$y_{\text{最大}} = 4 + 5 = 9$$

中线与周期分别为

$$y = 4$$

$$T = 360^\circ \div \frac{1}{2} = 720^\circ$$

取下列角度，代入得

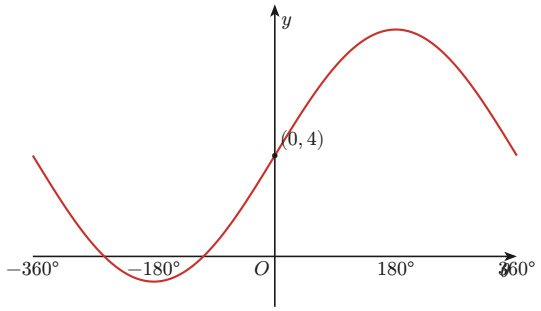
θ	-360°	-180°	0°	180°	360°
$\frac{\theta}{2}$	-180°	-90°	0°	90°	180°
y	4	-1	4	9	4

曲线从左端点下降至谷点，再上升至峰点，最后下降至右端点。将表中各点用平滑曲线连接。 当横坐标为零时，

$$y = 4 + 5\sin 0^\circ = 4$$

答：图象为通过表中各点的平滑正弦曲线，与纵轴的截距为 4，交点为 $(0, 4)$。

实线 $y = 4 + 5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$



$(0, 4)$

度，再由括号内的角反求描点位置。

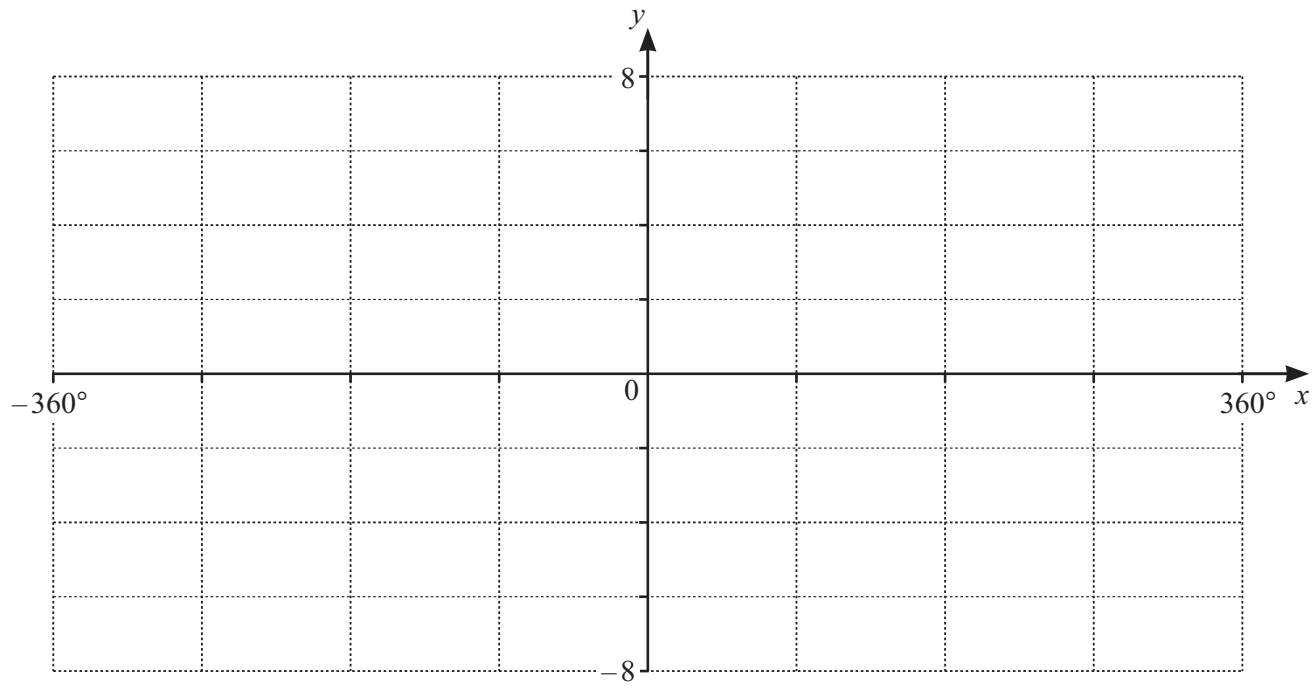
! 辨析：振幅是峰点到中线的竖距，周期是相邻峰点的横距。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/12 Q1(a)]

提示：先看余弦项外的常数，再比较区间长度与周期。

(a) On the axes, sketch the graph of $y = 4\cos x - 2$ for $-360° \leqslant x \leqslant 360°$.



(a) 在所给坐标轴上，画出函数

$$y = 4\cos x - 2$$

在 $-360° \leq x \leq 360°$ 内的图象。图中横轴为 x，标有 $-360°$、0、$360°$；纵轴为 y，标有 -8、8。

✓ **答案** 图象为依次经过 $(-360°, 2)$、$(-180°, -6)$、$(0, 2)$、$(180°, -6)$、$(360°, 2)$ 的平滑余弦曲线。

解析 由余弦值的范围得

$$y_{\text{最大}} = 4 - 2 = 2$$

$$y_{\text{最小}} = -4 - 2 = -6$$

中线与周期分别为

$$y = -2$$

$$T = \frac{360°}{1} = 360°$$

相邻峰点与中线交点的横坐标相差

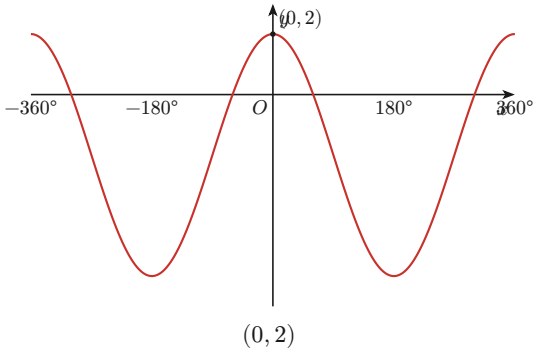
$$\frac{T}{4} = 90°$$

代入得

x	$-360°$	$-270°$	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
y	2	-2	-6	-2	2	-2	-6	-2	2

给定区间包含两个周期。将表中各点依次用平滑曲线连接，峰谷处切线水平。答：图象在 $x = -360°$、$0°$、$360°$ 处达到峰值 2，在 $x = \pm 180°$ 处达到谷值 -6。

实线 $y = 4\cos x - 2$

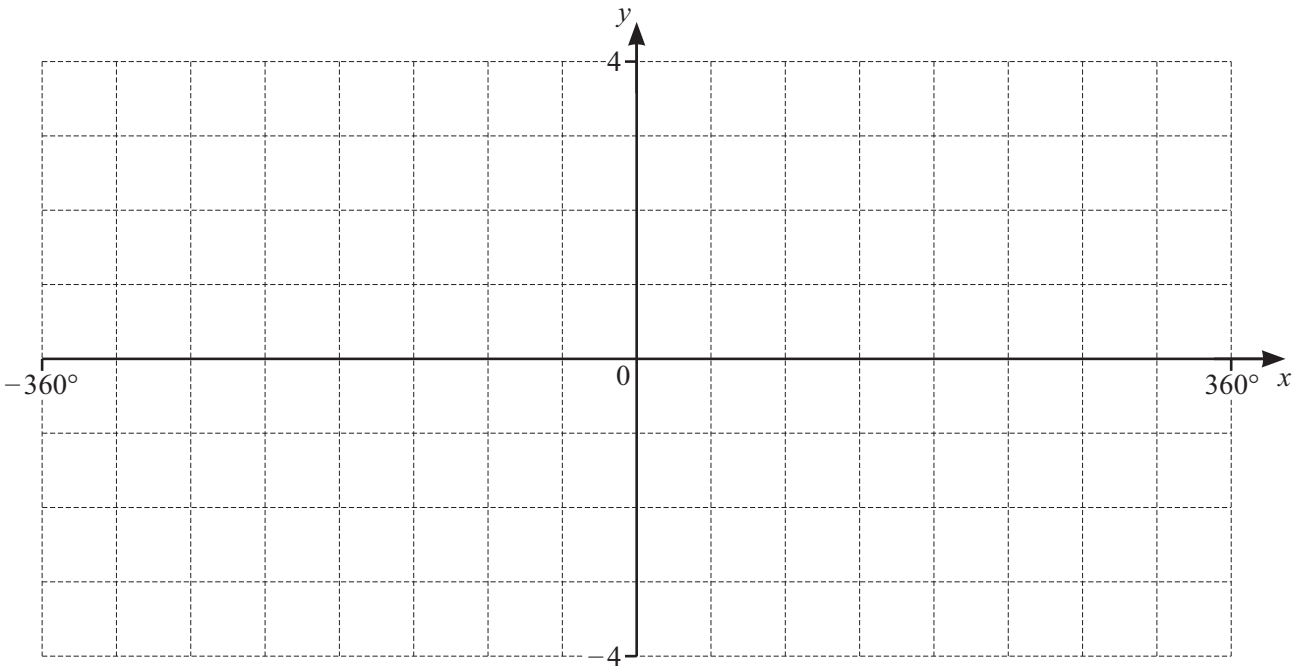


$(0, 2)$

2. [2026 · May/June 0606/13 Q5(a)]

提示：比较中线高度与振幅，判断曲线能否碰到横轴。

(a) On the grid, sketch the graph of $y = \cos x + 2$ for $-360° \leqslant x \leqslant 360°$.



(a) 在所给方格上，画出函数

$$y = \cos x + 2$$

在 $-360° \leq x \leq 360°$ 内的图象。图中横轴为 x，标有 $-360°$、0、$360°$；纵轴为 y，标有 -4、4。

✓ **答案** 图象为依次经过 $(-360°, 3)$、$(-180°, 1)$、$(0, 3)$、$(180°, 1)$、$(360°, 3)$ 的平滑余弦曲线。

解析 由余弦值的范围得

$$y_{最大} = 1 + 2 = 3$$

$$y_{最小} = -1 + 2 = 1$$

中线与周期分别为

$$y = 2$$

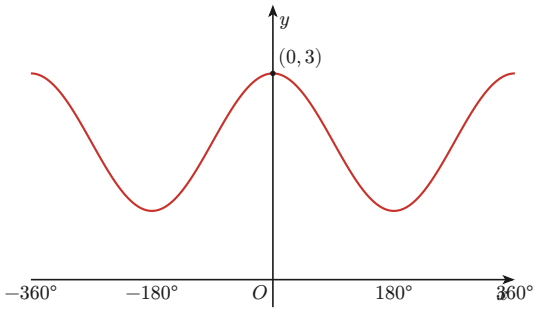
$$T = 360°$$

每隔四分之一周期取点，代入得

x	$-360°$	$-270°$	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
y	3	2	1	2	3	2	1	2	3

将表中各点依次用平滑曲线连接。因最小值为 1，整条曲线在横轴上方。答：图象在 $x=-360°$、$0°$、$360°$ 处达到峰值 3，在 $x=\pm 180°$ 处达到谷值 1。

实线 $y=2+\cos x$

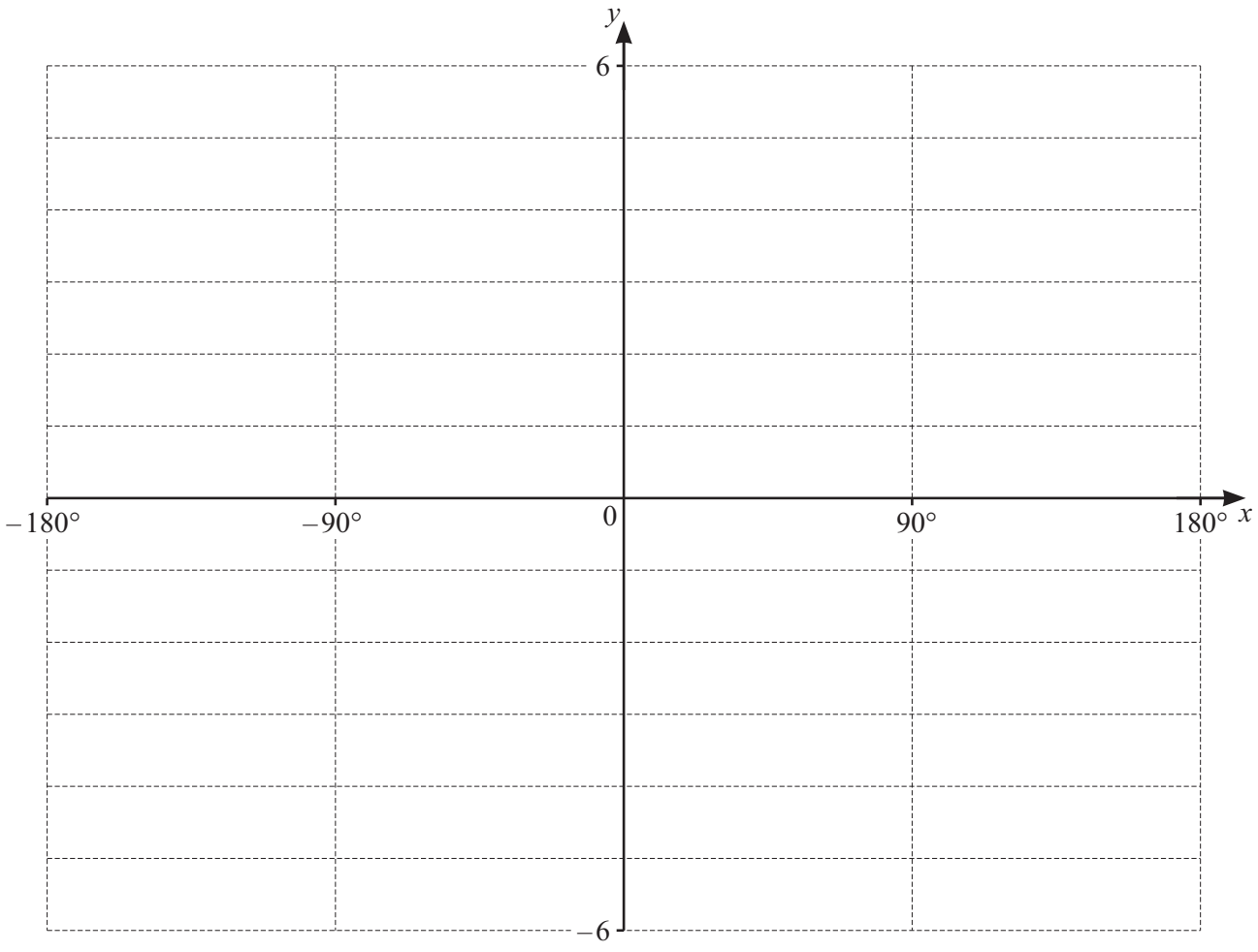


$(0,3)$

3. [2026 · February/March 0606/22 Q6(b)]

提示：先看括号内横坐标的系数，再按四分之一周期安排描点。

(b) On the axes below, sketch the graph of $y=3\cos 2x+1$ for $-180° \leqslant x \leqslant 180°$.



(b) 在下面所给的坐标轴上，画出函数

$$y=3\cos(2x)+1$$

在 $-180° \leq x \leq 180°$ 内的图象。图中横轴为 x，标有 $-180°$、$-90°$、0、$90°$、$180°$；纵轴为 y，标有 -6、6。

✓ **答案** 图象为依次经过 $(-180°, 4)$、$(-90°, -2)$、$(0, 4)$、$(90°, -2)$、$(180°, 4)$ 的平滑余弦曲线。

解析 由余弦值的范围得

$$y_{\text{最大}}=3+1=4$$

$$y_{\text{最小}} = -3 + 1 = -2$$

中线与周期分别为

$$y = 1$$

$$T = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

每隔四分之一周期取点，间隔为

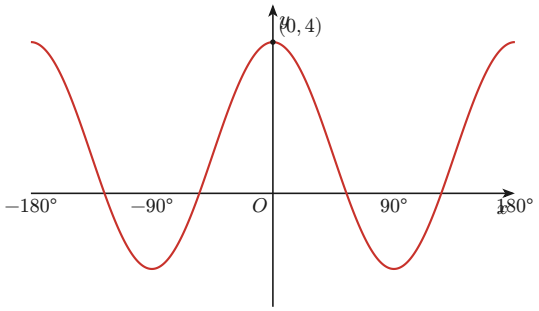
$$\frac{T}{4} = 45^\circ$$

代入得

x	-180°	-135°	-90°	-45°	0°	45°	90°	135°	180°
y	4	1	-2	1	4	1	-2	1	4

将表中各点依次用平滑曲线连接，得到两个完整周期。答：图象的峰点为 $(-180^\circ, 4)$、$(0, 4)$、$(180^\circ, 4)$，谷点为 $(-90^\circ, -2)$、$(90^\circ, -2)$。

实线 $y = 3\cos(2x) + 1$

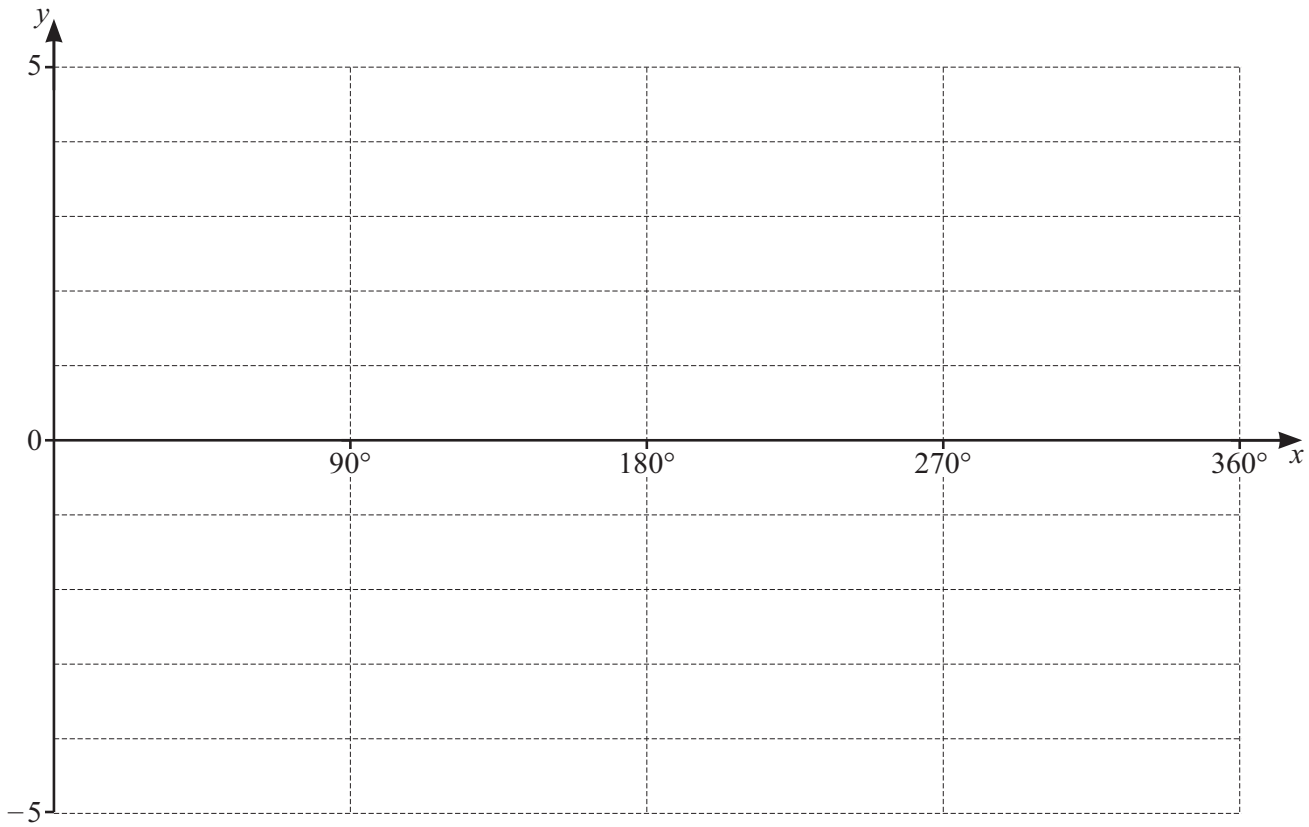


$(0, 4)$

4. [2025 · October/November 0606/11 Q1(b)]

提示：先代入区间左端点，判断起点在中线上方还是下方。

(b) Sketch the graph of $y = 3\cos 2x - 1$ for $0° \leqslant x \leqslant 360°$.



(b) 画出函数

$$y = 3\cos(2x) - 1$$

在 $0° \le x \le 360°$ 内的图象。 图中横轴为 x，标有 0、90°、180°、270°、360°；纵轴为 y，标有 −5、5。

✓ **答案** 图象为依次经过 $(0, 2)$、$(90°, -4)$、$(180°, 2)$、$(270°, -4)$、$(360°, 2)$ 的平滑余弦曲线。

解析 由余弦值的范围得

$$y_{最大} = 3 - 1 = 2$$

$$y_{最小} = -3 - 1 = -4$$

中线与周期分别为

$$y = -1$$

$$T = \frac{360°}{2} = 180°$$

每隔四分之一周期取点，间隔为

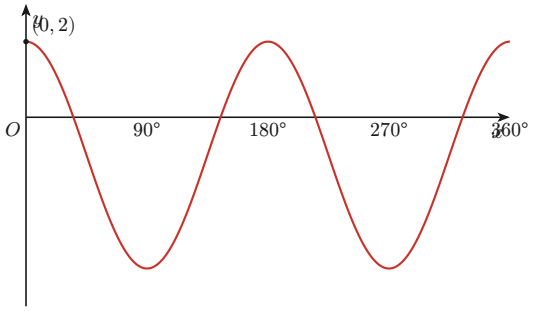
$$\frac{T}{4} = 45°$$

代入得

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
y	2	−1	−4	−1	2	−1	−4	−1	2

将表中各点依次用平滑曲线连接，峰谷处切线水平。答：图象在 $x = 0°$、180°、360° 处达到峰值 2，在 $x = 90°$、270° 处达到谷值 −4。

实线 $y = 3\cos(2x) - 1$



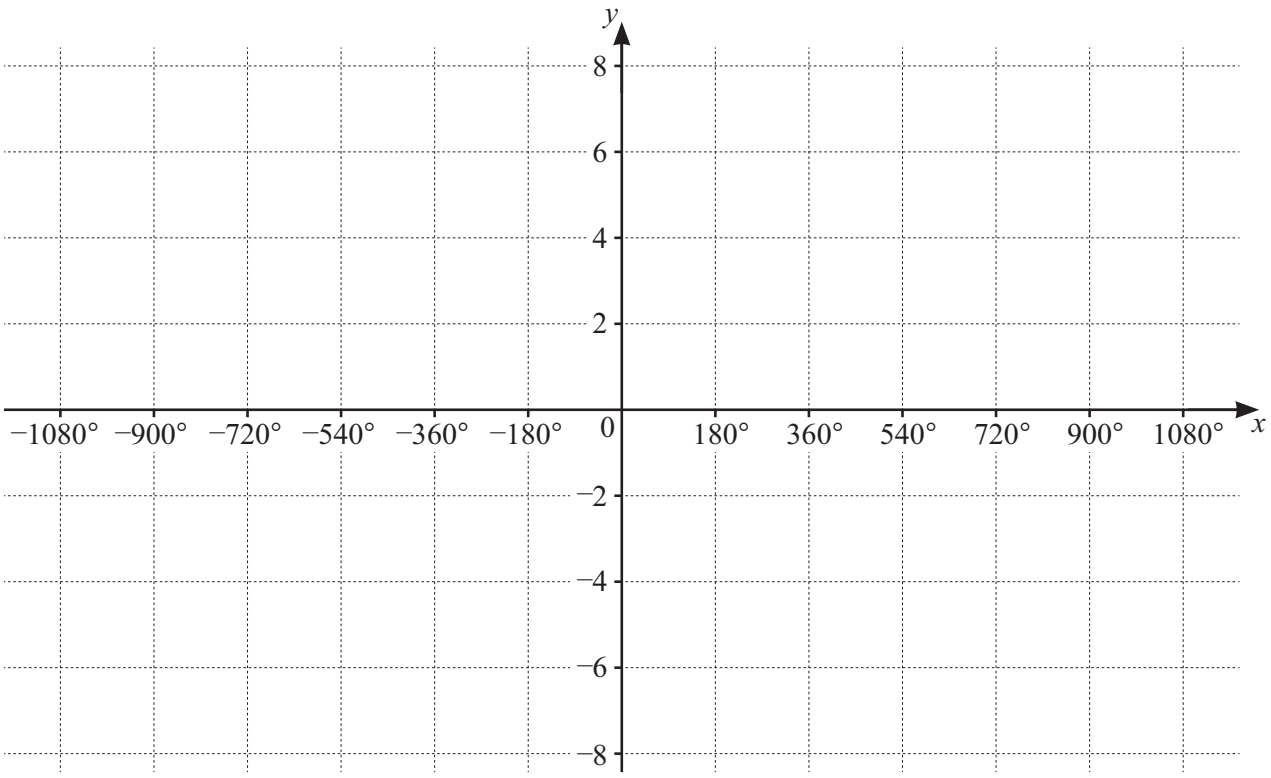
$(0, 2)$

5. [2026 · May/June 0606/21 Q2(d)]

提示：先换算括号内的角度范围，比较端点角与峰谷对应角。

(c) Solve the equation $4\cos\left(\frac{x}{8}\right)+2=0$ for $-1080° \leqslant x \leqslant 1080°$.

(d) On the axes sketch the graph of $y=4\cos\left(\frac{x}{8}\right)+2$ for $-1080° \leqslant x \leqslant 1080°$.



(c) 解方程 $4\cos\left(\frac{x}{8}\right)+2=0$，其中 $-1080° \leq x \leq 1080°$。

(d) 在所给坐标轴上，画出函数

$$y = 4\cos\left(\frac{x}{8}\right) + 2$$

在 $-1080° \leq x \leq 1080°$ 内的图象。图中横轴为 x，从 $-1080°$ 到 $1080°$，每隔 $180°$ 标出一个刻度，原点标为 0；纵轴为 y，标有 -8、-6、-4、-2、2、4、6、8。

✓ **答案** (c) $x = \pm 960°$。(d) 曲线从 $\left(-1080°, 2-2\sqrt{2}\right)$ 上升，经过 $(-960°, 0)$、$(-720°, 2)$，到达峰点 $(0, 6)$，再经过 $(720°, 2)$、$(960°, 0)$，下降至 $\left(1080°, 2-2\sqrt{2}\right)$。

解析 由 (c) 的方程得

$$\cos\left(\frac{x}{8}\right) = -\frac{1}{2}$$

令

$$u = \frac{x}{8}$$

由给定区间得

$$-135^\circ \le u \le 135^\circ$$

在此范围内，

$$u = \pm 120^\circ$$

故

$$x = 8u = \pm 960^\circ$$

由（d）的函数式得中线与周期

$$y = 2$$

$$T = 360\overset{\circ}{\frac{1}{8}} = 2880^\circ$$

当 $x = 0^\circ$ 时，

$$y = 4\cos 0^\circ + 2 = 6$$

当 $x = \pm 1080^\circ$ 时，

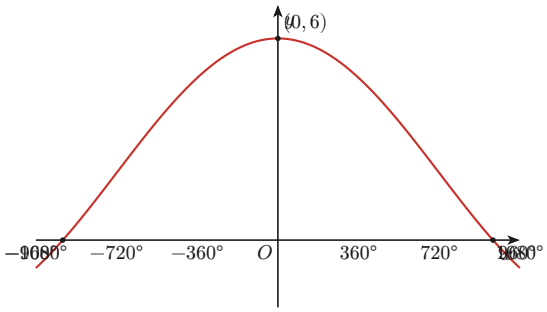
$$y = 4\cos(\pm 135^\circ) + 2 = 2 - 2\sqrt{2}$$

结合（c）的结果，取点如下。

x	-1080°	-960°	-720°	0°	720°	960°	1080°
y	$2-2\sqrt{2}$	0	2	6	2	0	$2-2\sqrt{2}$

将表中各点用平滑曲线连接。曲线关于纵轴对称，在 $x = 0^\circ$ 处达到峰值，区间内没有谷点。答：(c) $x = \pm 960^\circ$；（d）图象为通过表中各点、峰点为 $(0, 6)$ 的平滑余弦曲线。

实线 $y = 4\cos\left(\frac{x}{8}\right) + 2$

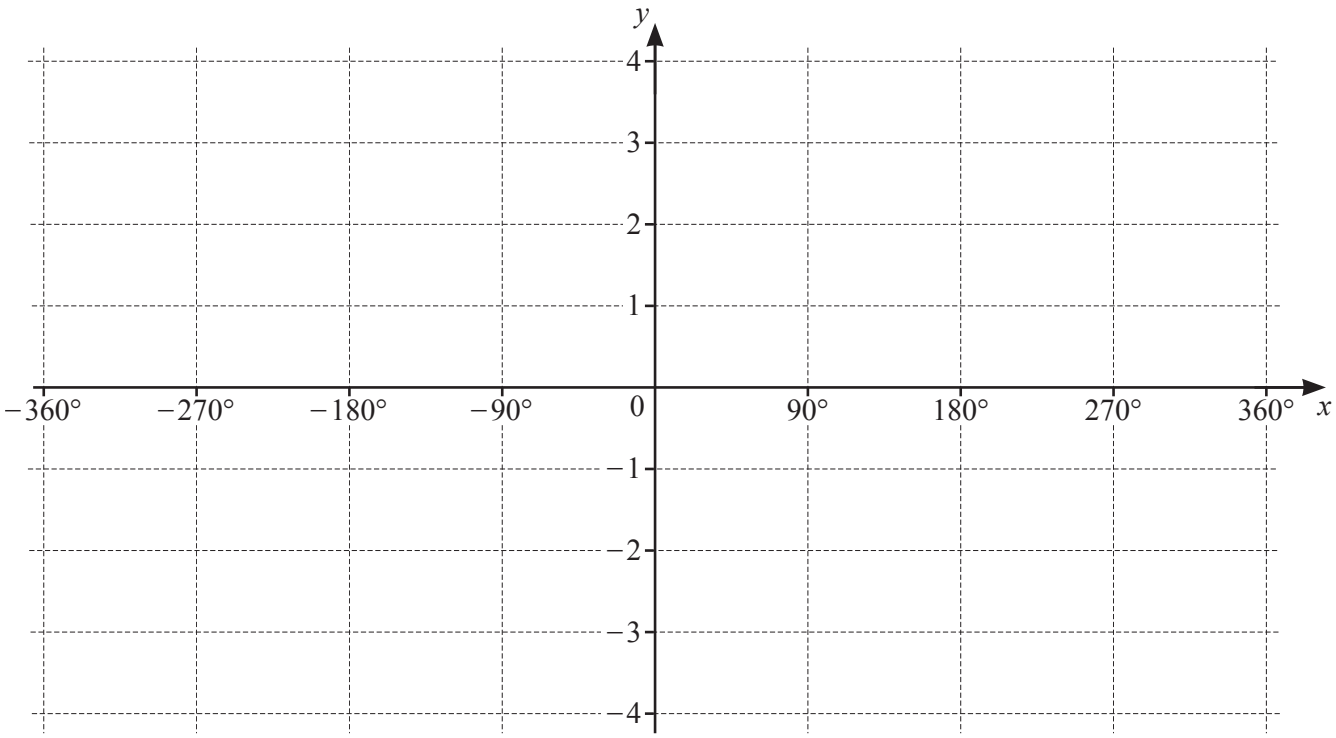


$(0, 6)$；-960°；960°

6. [2023 · October/November 0606/13 Q3]

提示：先将横坐标区间换成角度区间，再分别寻找峰谷与轴交点。

On the axes, draw the graph of $y = 2\sin\frac{x}{3} - 1$ for $-360° \leqslant x \leqslant 360°$.



在所给坐标轴上，画出函数

$$y = 2\sin\left(\frac{x}{3}\right) - 1$$

在 $-360° \leq x \leq 360°$ 内的图象。图中横轴为 x，从 $-360°$ 到 $360°$，每隔 $90°$ 标出一个刻度，原点标为 0；纵轴为 y，标有 -4、-3、-2、-1、1、2、3、4。

✓ **答案** 曲线从 $\left(-360°, -1-\sqrt{3}\right)$ 下降至谷点 $(-270°, -3)$，再经过 $(0, -1)$、$(90°, 0)$，上升至峰点 $(270°, 1)$，最后下降至 $\left(360°, -1+\sqrt{3}\right)$。

解析 由正弦值的范围得

$$y_{\text{最小}} = -2 - 1 = -3$$

$$y_{\text{最大}} = 2 - 1 = 1$$

中线与周期分别为

$$y = -1$$

$$T = 360\overset{\circ}{\frac{1}{3}} = 1080°$$

由给定区间得

$$-120° \leq \frac{x}{3} \leq 120°$$

当正弦内的角分别为 $-90°$、$90°$ 时，

$$x = 3 \times (-90°) = -270°$$

$$x = 3 \times 90° = 270°$$

两端点的纵坐标分别为

$$2\sin(-120°)-1=-1-\sqrt{3}$$

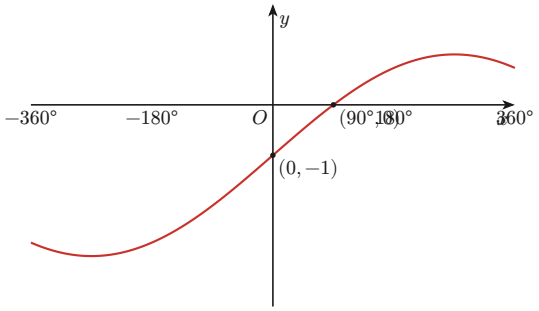
$$2\sin 120°-1=-1+\sqrt{3}$$

取点如下。

x	$-360°$	$-270°$	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
y	$-1-\sqrt{3}$	-3	$-1-\sqrt{3}$	-2	-1	0	$-1+\sqrt{3}$	1	$-1+\sqrt{3}$

将表中各点依次用平滑曲线连接，峰谷处切线水平。答：图象的谷点为 $(-270°,-3)$，峰点为 $(270°,1)$，与两坐标轴的交点分别为 $(90°,0)$、$(0,-1)$。

实线 $y=2\sin\left(\frac{x}{3}\right)-1$



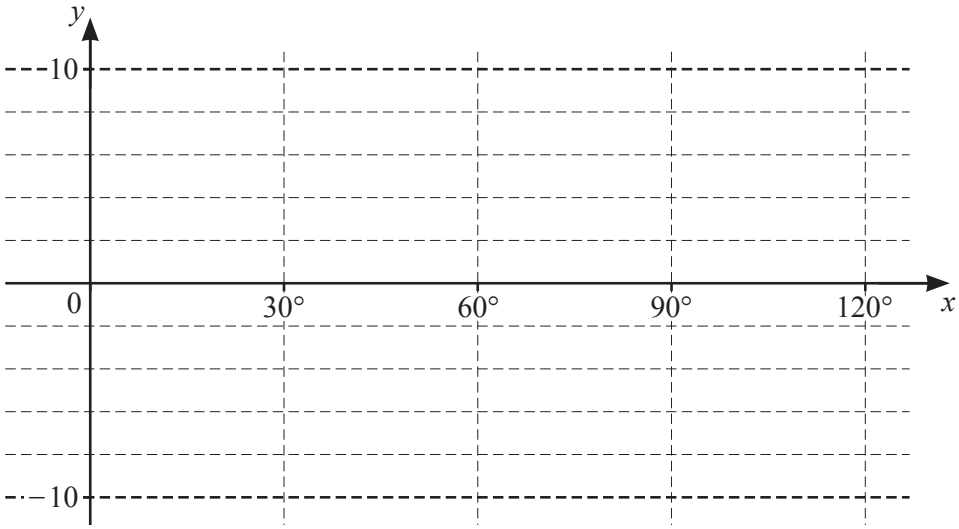
$(0,-1)$；$(90°,0)$

7. [2023 · May/June 0606/21 Q2(a)]

提示：先由角的系数算周期，再比较区间长度能容下几次重复。

The function g is defined for $0°\leqslant x\leqslant 120°$ by $g(x)=2+4\cos 6x$.

(a) On the axes, sketch the graph of $y=g(x)$.



函数 g 在 $0°\le x\le 120°$ 内定义为 $g(x)=2+4\cos(6x)$。（a）在所给坐标轴上，画出 $y=g(x)$ 的图象。图中横轴为 x，标有 0、30°、60°、90°、120°；纵轴为 y，标有 -10、10。

✓ **答案** 图象为依次经过 $(0,6)$、$(30°,-2)$、$(60°,6)$、$(90°,-2)$、$(120°,6)$ 的平滑余弦曲线。

解析 由余弦值的范围得

$$y_{最大}=2+4=6$$

$$y_{最小}=2-4=-2$$

中线与周期分别为

$$y = 2$$

$$T = 360\frac{^\circ}{6} = 60^\circ$$

每隔四分之一周期取点，间隔为

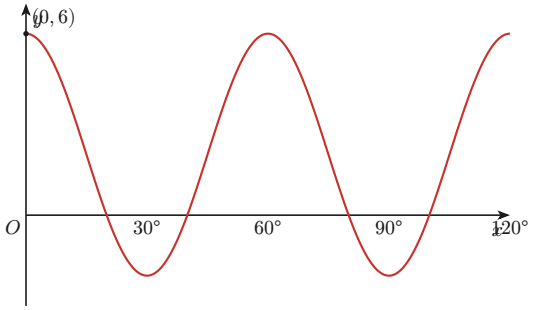
$$\frac{T}{4} = 15^\circ$$

代入得

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°
y	6	2	-2	2	6	2	-2	2	6

将表中各点依次用平滑曲线连接，得到两个完整周期。答：图象在 $x = 0^\circ$、60°、120° 处达到峰值 6，在 $x = 30^\circ$、90° 处达到谷值 -2。

实线 $y = 2 + 4\cos(6x)$



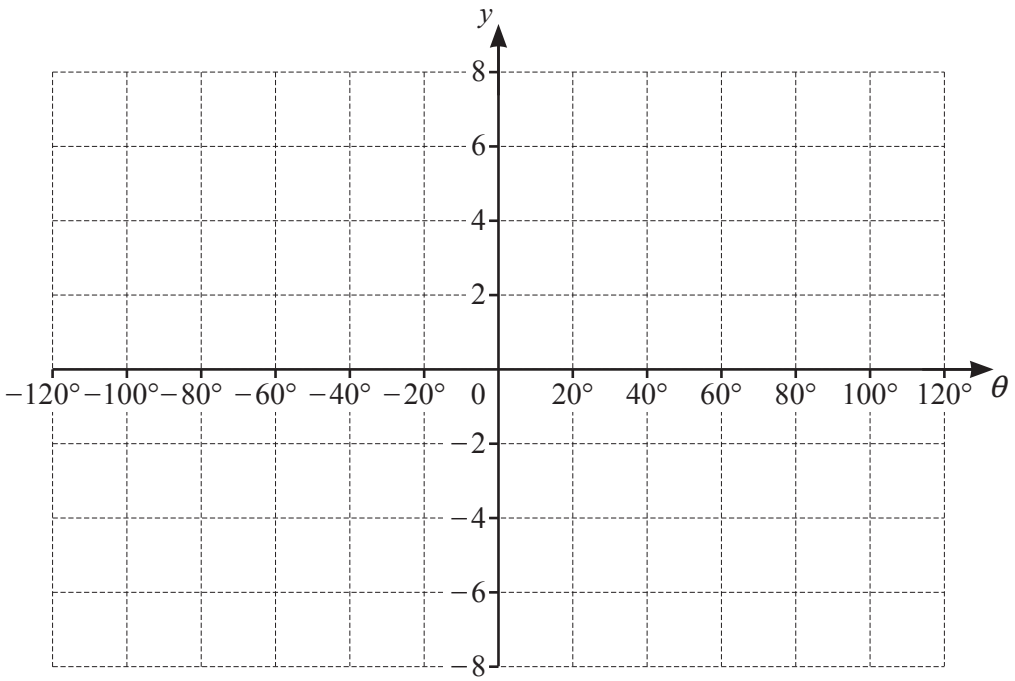
$(0, 6)$

8. [2024 · February/March 0606/12 Q1(c)]

提示：比较正负横坐标处的余弦值，再成对安排左右两侧的点。

Given that $y = 2 + 4\cos 3\theta$, for $-120^\circ \leqslant \theta \leqslant 120^\circ$,

(c) On the axes, sketch the graph of y.



已知 $y=2+4\cos(3\theta)$，其中 $-120°\le\theta\le120°$。（c）在所给坐标轴上，画出 y 的图象。图中横轴为 θ，从 $-120°$ 到 $120°$，每隔 $20°$ 标出一个刻度，原点标为 0；纵轴为 y，标有 -8、-6、-4、-2、2、4、6、8。

✓ **答案** 图象为依次经过 $(-120°,6)$、$(-60°,-2)$、$(0,6)$、$(60°,-2)$、$(120°,6)$ 的平滑余弦曲线。

解析 由余弦值的范围得

$$y_{最大}=2+4=6$$

$$y_{最小}=2-4=-2$$

中线与周期分别为

$$y=2$$

$$T=360\frac{^\circ}{3}=120°$$

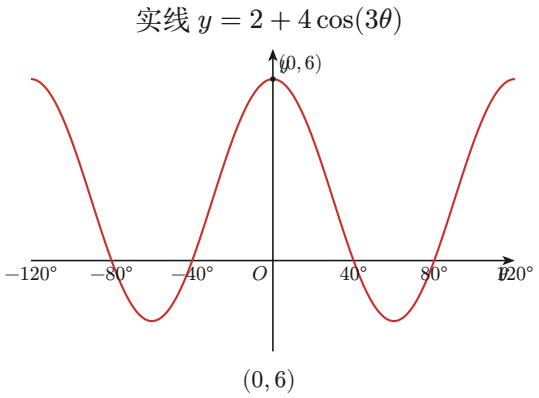
每隔四分之一周期取点，间隔为

$$\frac{T}{4}=30°$$

代入得

θ	$-120°$	$-90°$	$-60°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$
y	6	2	-2	2	6	2	-2	2	6

将表中各点依次用平滑曲线连接。曲线关于纵轴对称，给定区间包含两个完整周期。 答：图象的峰点为 $(-120°,6)$、$(0,6)$、$(120°,6)$，谷点为 $(-60°,-2)$、$(60°,-2)$。

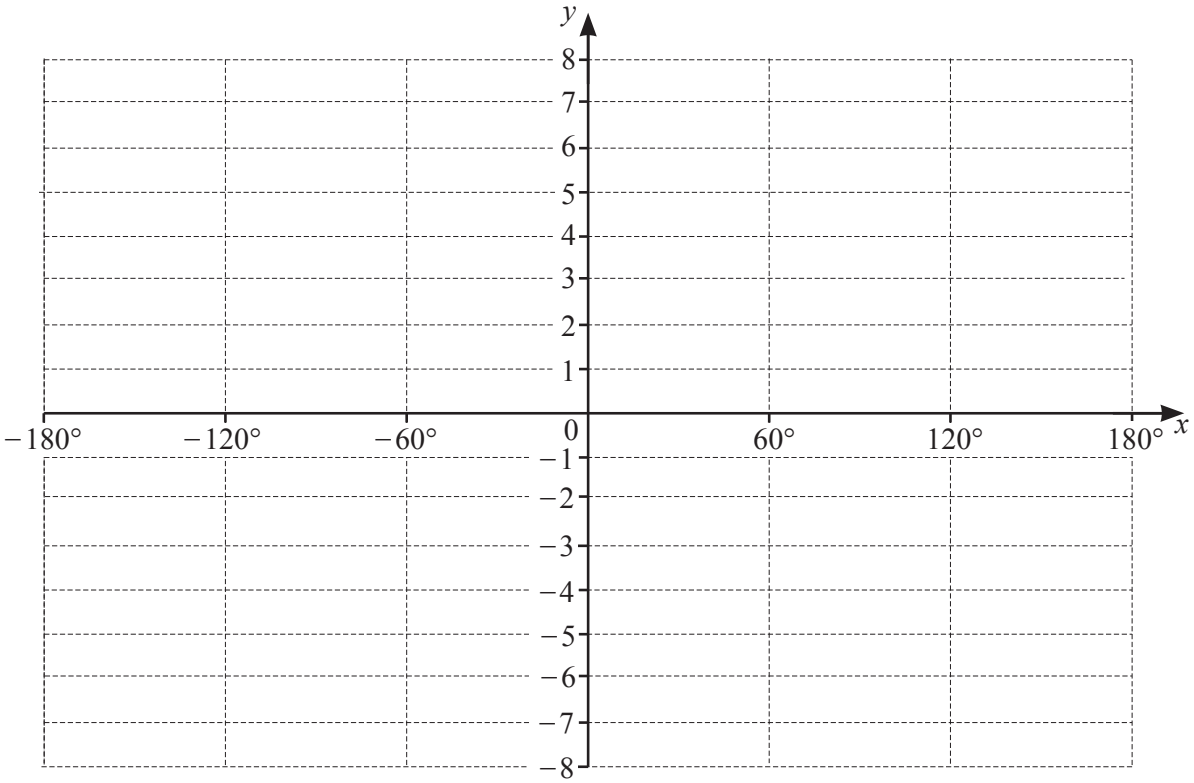


9. [2023 · October/November 0606/12 Q2(c)]

提示：先换算两端对应的角，再比较它们与峰谷对应角的位置。

The function g is defined by $g(x) = 5\sin\frac{3x}{4} - 2$ for all values of x.

(c) On the axes, sketch the graph of $y = g(x)$, for $-180° \leqslant x \leqslant 180°$.



函数 g 对所有 x 的值定义为 $g(x) = 5\sin\left(\frac{3x}{4}\right) - 2$。（c）在所给坐标轴上，画出 $y = g(x)$ 在 $-180° \leq x \leq 180°$ 内的图象。图中横轴为 x，标有 $-180°$、$-120°$、$-60°$、0、$60°$、$120°$、$180°$；纵轴为 y，标有 -8 至 -1 及 1 至 8 的各整数刻度。

✓ **答案** 曲线从 $\left(-180°, -2 - 5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 下降至谷点 $(-120°, -7)$，再经过 $(0, -2)$，上升至峰点 $(120°, 3)$，最后下降至 $\left(180°, -2 + 5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

解析 由正弦值的范围得

$$y_{\text{最小}} = -5 - 2 = -7$$

$$y_{\text{最大}} = 5 - 2 = 3$$

中线与周期分别为

$$y = -2$$

$$T=360\frac{^\circ}{\frac{3}{4}}=480^\circ$$

由给定区间得

$$-135^\circ\le\frac{3x}{4}\le135^\circ$$

当正弦内的角分别为 -90°、90° 时，

$$x=\frac{4}{3}\times(-90^\circ)=-120^\circ$$

$$x=\frac{4}{3}\times90^\circ=120^\circ$$

两端点的纵坐标分别为

$$5\sin(-135^\circ)-2=-2-\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

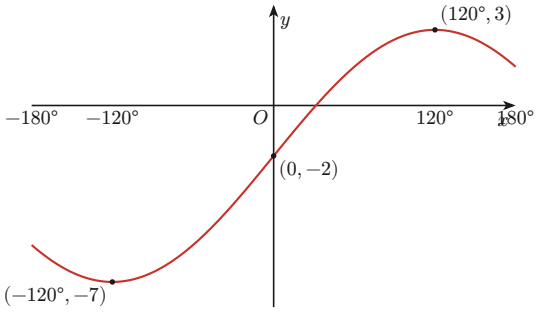
$$5\sin135^\circ-2=-2+\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

取点如下。

x	-180°	-120°	0°	120°	180°
$\frac{3x}{4}$	-135°	-90°	0°	90°	135°
y	$-2-\frac{5\sqrt{2}}{2}$	-7	-2	3	$-2+\frac{5\sqrt{2}}{2}$

将表中各点依次用平滑曲线连接。曲线从左端点下降至谷点，再上升至峰点，最后下降至右端点。答：图象的谷点为 $(-120^\circ,-7)$，峰点为 $(120^\circ,3)$，与纵轴的交点为 $(0,-2)$，两端点如表所示。

实线 $y=5\sin(3\frac{x}{4})-2$



$(0,-2)$；$(-120^\circ,-7)$；$(120^\circ,3)$

题型 5　由周期和纵坐标条件求三角函数式中的常数

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **中线求常数：**本例最高点的纵坐标为 1，最低为 -9。两者的平均数是中线的高度，也是常数 c。记最高、最低纵坐标分别为 M、m。

$$c=\frac{M+m}{2}=\frac{1+(-9)}{2}=\underline{\qquad}$$

② **振幅确定正负：**本例最高、最低纵坐标之差为 10。差的一半是振幅，等于 $|a|$。当 $b>0$ 时，再由零点处的图象确定正负。

$$|a| = \frac{M-m}{2} = \frac{1-(-9)}{2} = \underline{\qquad}$$

余弦型：$x=0$ 处为最高点

$$a + c = M$$

$$a = M - c > 0$$

正弦型：$x=0$ 处向右上升

$$y = a\sin(bx) + c$$

$$a > 0$$

③ **图象读出周期：**本例相邻谷底的横坐标为 $-240°$、$240°$。横向距离为一个周期，记作 T。相邻峰顶与谷底的横向距离为半个周期。

$$T = 240° - (-240°) = 2 \cdot 240° = \underline{\qquad}$$

④ **周期求出系数：**本例一个周期为 $480°$，余弦括号内的角转过一周。对于 $\sin(bx)$、$\cos(bx)$，取 $b>0$，用一周的角除以周期。

角度制：一周为 $360°$

$$b = \frac{360°}{T}$$

$$b = \frac{360°}{480°} = \underline{\qquad}$$

弧度制：一周为 2π

$$b = \frac{2\pi}{T}$$

若 $T=\pi$，则

$$b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

⑤ **坐标代入求值：**图象过已知点，$\xrightarrow{\text{代入坐标}}$ 列出关于 a、c 的方程。先算括号内的角，再取三角函数值。例如 $b=2$，图象过 $\left(-\frac{\pi}{4},1\right)$、$\left(\frac{\pi}{6},3\right)$。

$$\cos(120°) = -\frac{1}{2}, \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$1 = a\cos\left(2\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + c = c$$

$$3 = a\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{a}{2} + 1$$

$$a = 4, c = 1$$

⑥ **分母形式换算：**若余弦括号内为 $\frac{x}{b}$，先写成系数乘以 x。角度制下取 $b>0$，周期等于 $360°$ 乘以 b。例如周期为 $720°$ 时，可由周期求分母。

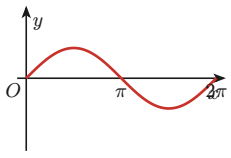
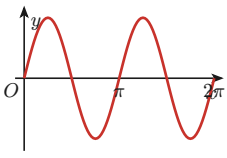
$$\cos\left(\frac{x}{b}\right) = \cos\left(\left(\frac{1}{b}\right)x\right)$$

$$T = \frac{360°}{\frac{1}{b}} = 360°\cdot b$$

$$b = \frac{T}{360°} = \frac{720°}{360°} = \underline{\qquad}$$

填空：①-4　②$5$　③$480°$　④$\frac{3}{4}$　⑤$2$

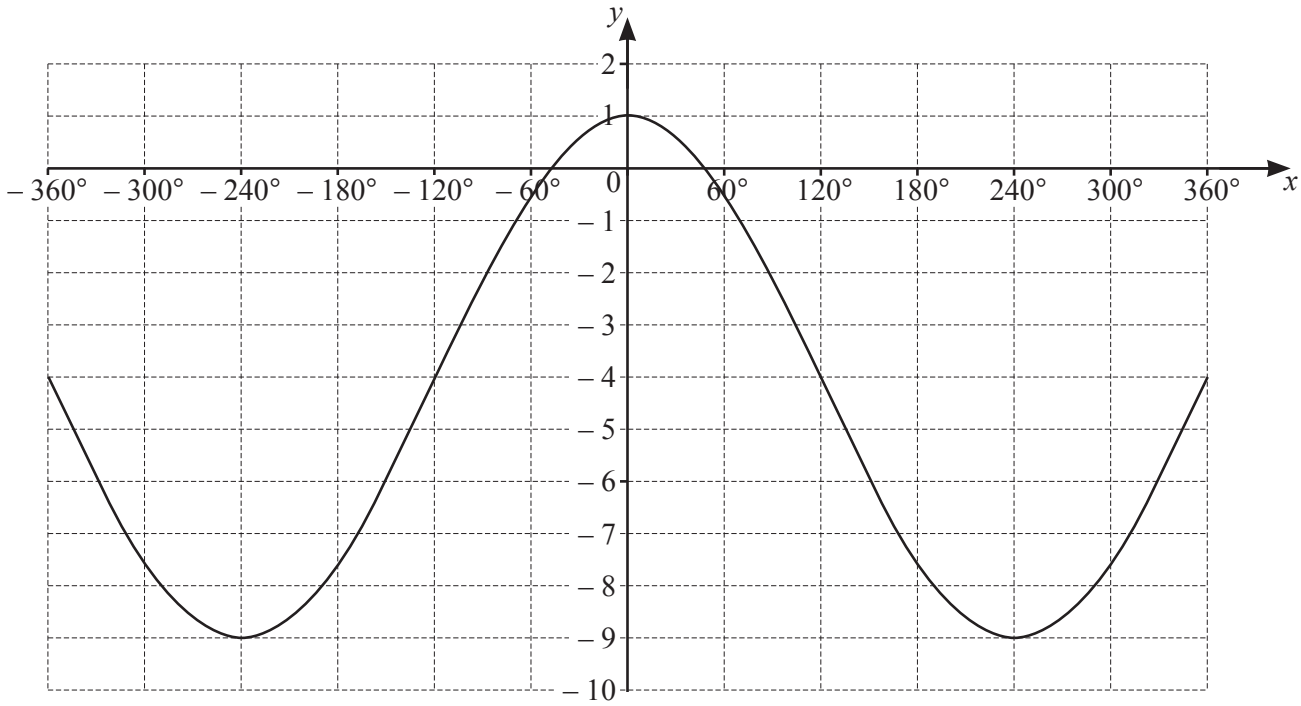
振幅与周期分别变化

	$y=\sin x$	$y=2\sin(2x)$
图像		
振幅	1	2
周期	2π	π

点石成金　题目出现三角函数图象、周期或曲线上点的坐标，并要求常数时，先由纵坐标求中线和振幅，再由周期求横向系数。

例 1　[2024 · May/June 0606/11 Q5(a)]

(a) The diagram shows the graph of $y = a\cos bx + c$, for $-360° \leqslant x \leqslant 360°$, where a, b and c are constants. Find the values of a, b and c.



（a）图中给出了函数 $y = a\cos(bx) + c$ 在 $-360° \leq x \leq 360°$ 范围内的图象，其中 a、b、c 为常数。求 a、b、c 的值。图中横轴为 x，标出的刻度为 $-360°$、$-300°$、$-240°$、$-180°$、$-120°$、$-60°$、0、$60°$、$120°$、$180°$、$240°$、$300°$、$360°$；纵轴为 y，标出的刻度为 2、1、-1、-2、-3、-4、-5、-6、-7、-8、-9、-10。

解答　由图象的最高、最低纵坐标得

$$c = \frac{1 + (-9)}{2} = -4$$

$$|a| = \frac{1 - (-9)}{2} = 5$$

当 $x = 0$ 时，余弦值为 1，且图象在最高点，故

$$a + c = 1$$

$$a = 1 - (-4) = 5$$

由相邻两个谷底得周期

$$T = 240° - (-240°) = 480°$$

$$b = \frac{360°}{480°} = \frac{3}{4}$$

答：$a = 5$，$b = \frac{3}{4}$，$c = -4$。

方法：先读峰谷高度求中线与振幅，再量相邻谷底间距。

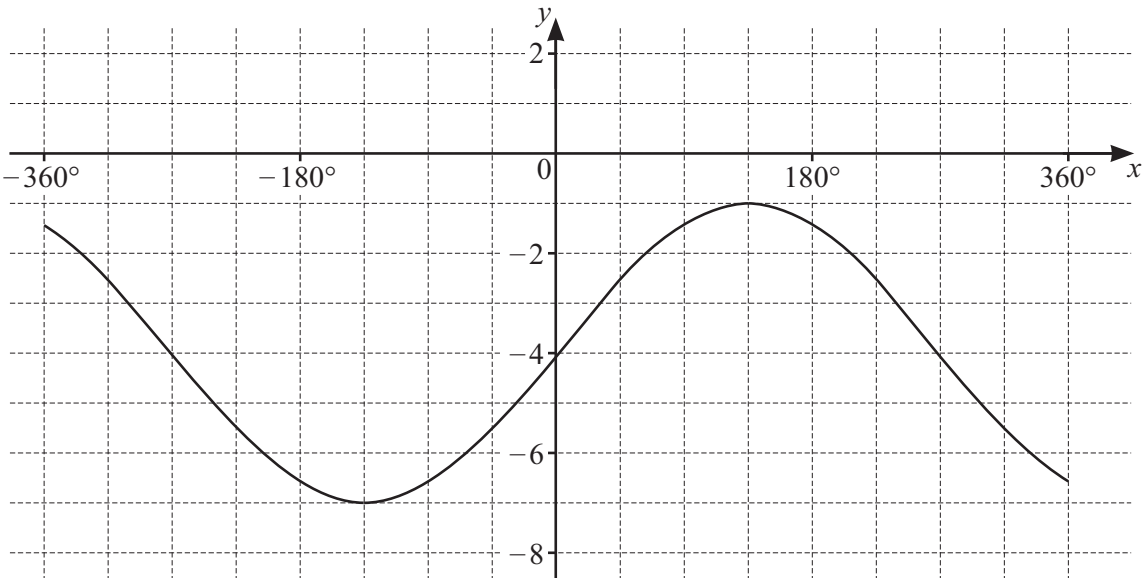
辨析：振幅是到中线的竖直距离，周期是重复一轮的水平距离。

拓展：求横向系数时，一周的角与周期须采用相同角度单位。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/12 Q1]

提示：先比较峰谷高度，再看零点右侧走势与相邻峰谷间距。



The diagram shows the graph of $y = a\sin bx + c$ for $-360^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$, where a, b and c are constants. Find the values of a, b and c.

图中给出了函数 $y = a\sin(bx) + c$ 在 $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$ 范围内的图象，其中 a、b、c 为常数。求 a、b、c 的值。
图中横轴为 x，标出的刻度为 -360°、-180°、0、180°、360°；纵轴为 y，标出的刻度为 2、-2、-4、-6、-8。

✓ **答案**

$$a = 3, b = \frac{2}{3}, c = -4$$

解析 由图象的最高、最低纵坐标得

$$c = \frac{(-1) + (-7)}{2} = -4$$

$$|a| = \frac{(-1) - (-7)}{2} = 3$$

图象在 $x = 0$ 处向右上升，取 $b > 0$，得

$$a = 3$$

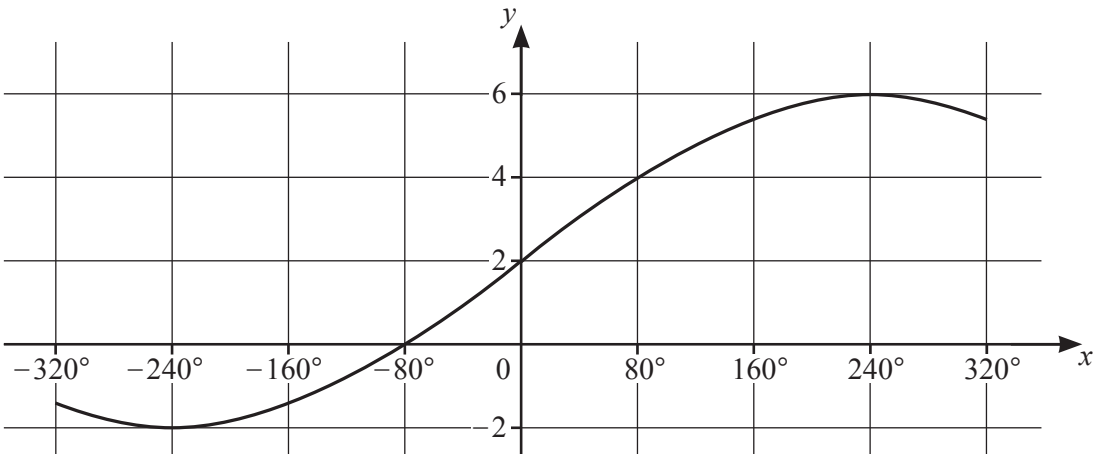
谷底与相邻峰顶的横坐标分别为 -135°、135°，故

$$T = 2 \cdot (135^\circ - (-135^\circ)) = 540^\circ$$

$$b = \frac{360^\circ}{540^\circ} = \frac{2}{3}$$

答：$a = 3$，$b = \frac{2}{3}$，$c = -4$。

2. [2024 · May/June 0606/13 Q1]
提示：比较最高与最低纵坐标，所标峰谷间距还须换成整周期。



The diagram shows the graph of $y = a\sin bx + c$, for $-320° \leqslant x \leqslant 320°$, where a, b and c are constants. Find the values of a, b and c.

图中给出了函数 $y = a\sin(bx) + c$ 在 $-320° \leq x \leq 320°$ 范围内的图象，其中 a、b、c 为常数。求 a、b、c 的值。
图中横轴为 x，标出的刻度为 $-320°$、$-240°$、$-160°$、$-80°$、0、$80°$、$160°$、$240°$、$320°$；纵轴为 y，标出的刻度为 -2、2、4、6。

✓ **答案**

$$a = 4, b = \frac{3}{8}, c = 2$$

解析 由图象的最高、最低纵坐标得

$$c = \frac{6 + (-2)}{2} = 2$$

$$|a| = \frac{6 - (-2)}{2} = 4$$

图象在 $x = 0$ 处向右上升，取 $b > 0$，得

$$a = 4$$

谷底与相邻峰顶的横坐标分别为 $-240°$、$240°$，故

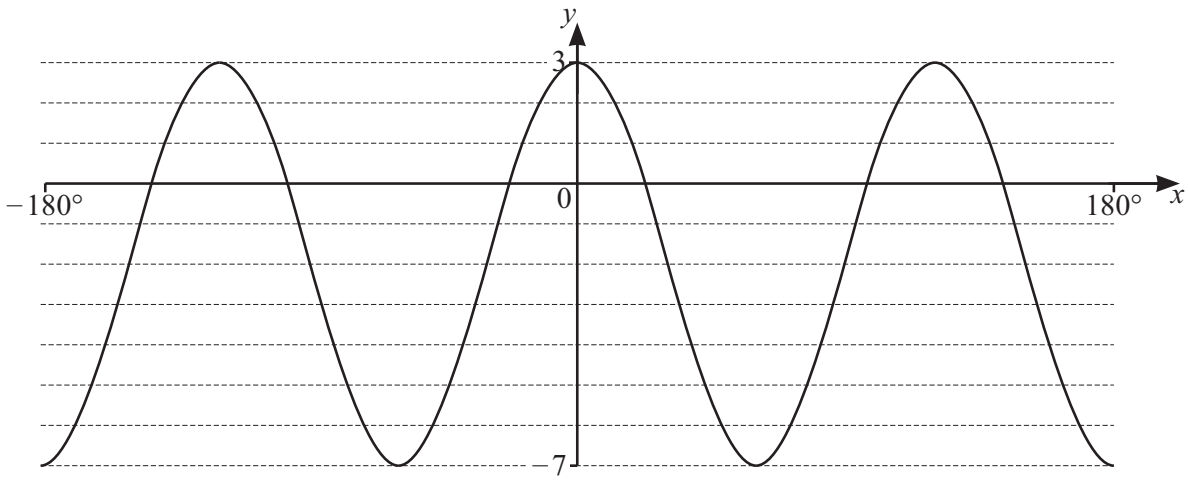
$$T = 2 \cdot (240° - (-240°)) = 960°$$

$$b = \frac{360°}{960°} = \frac{3}{8}$$

答：$a = 4$，$b = \frac{3}{8}$，$c = 2$。

3. [2025 · February/March 0606/12 Q2]

提示：先数横轴所标区间内的完整波形，再分配区间长度。



The diagram shows the curve $y = a\cos bx + c$ for $-180° \leqslant x \leqslant 180°$.
It is given that a, b and c are integers.

Find the values of a, b and c.

图中给出了曲线 $y = a\cos(bx) + c$ 在 $-180° \leq x \leq 180°$ 范围内的图象。已知 a、b、c 均为整数。求 a、b、c 的值。
图中横轴为 x，标出了 $-180°$、$180°$；纵轴为 y，标出了 3、-7，原点标为 0。

✓ **答案**

$$a = 5, b = 3, c = -2$$

解析 由图象的最高、最低纵坐标得

$$c = \frac{3 + (-7)}{2} = -2$$

$$|a| = \frac{3 - (-7)}{2} = 5$$

当 $x = 0$ 时，图象在最高点，故

$$a + c = 3$$

$$a = 3 - (-2) = 5$$

从 $-180°$ 到 $180°$，图象共有三个完整周期，故

$$T = \frac{180° - (-180°)}{3} = 120°$$

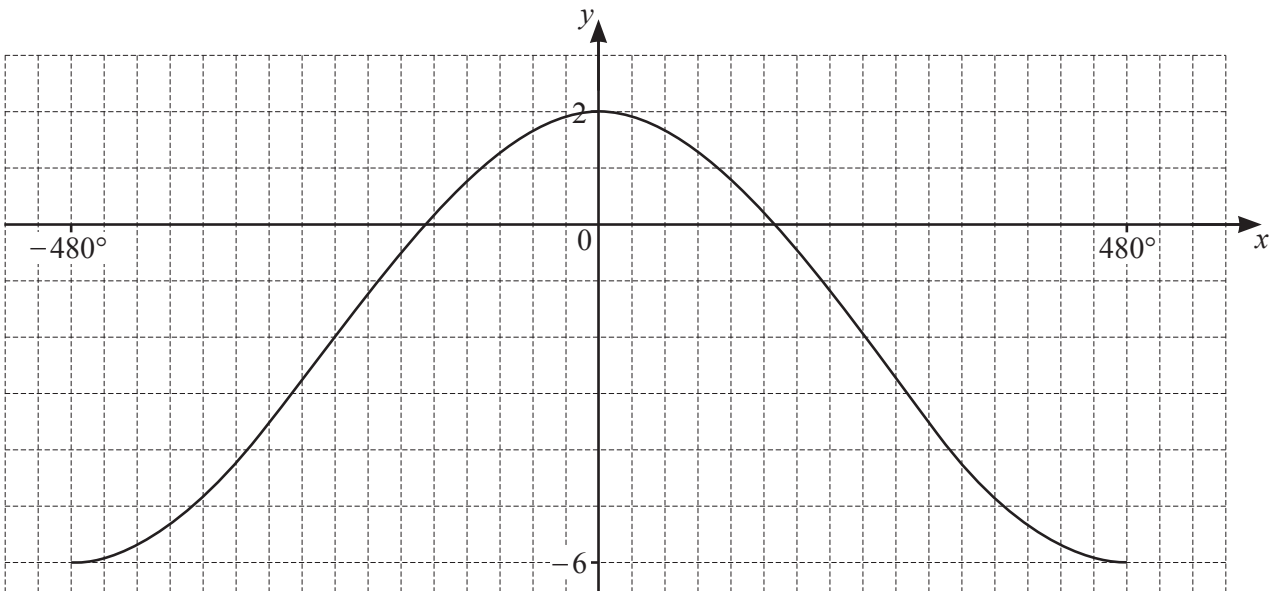
$$b = \frac{360°}{120°} = 3$$

答：$a = 5$，$b = 3$，$c = -2$。

4. [2023 · May/June 0606/12 Q1]

提示：比较峰谷高度，并核实两个谷底之间是否还有谷底。

The diagram shows the graph of $y = a\cos bx + c$. Find the values of the constants a, b and c.



图中给出了函数 $y = a\cos(bx) + c$ 的图象。求常数 a、b、c 的值。
图中横轴为 x，标出了 $-480°$、$480°$；纵轴为 y，标出了 2、-6，原点标为 0。

✓ **答案**

$$a = 4, b = \frac{3}{8}, c = -2$$

解析 由图象的最高、最低纵坐标得

$$c = \frac{2 + (-6)}{2} = -2$$

$$|a| = \frac{2 - (-6)}{2} = 4$$

当 $x = 0$ 时，图象在最高点，故

$$a + c = 2$$

$$a = 2 - (-2) = 4$$

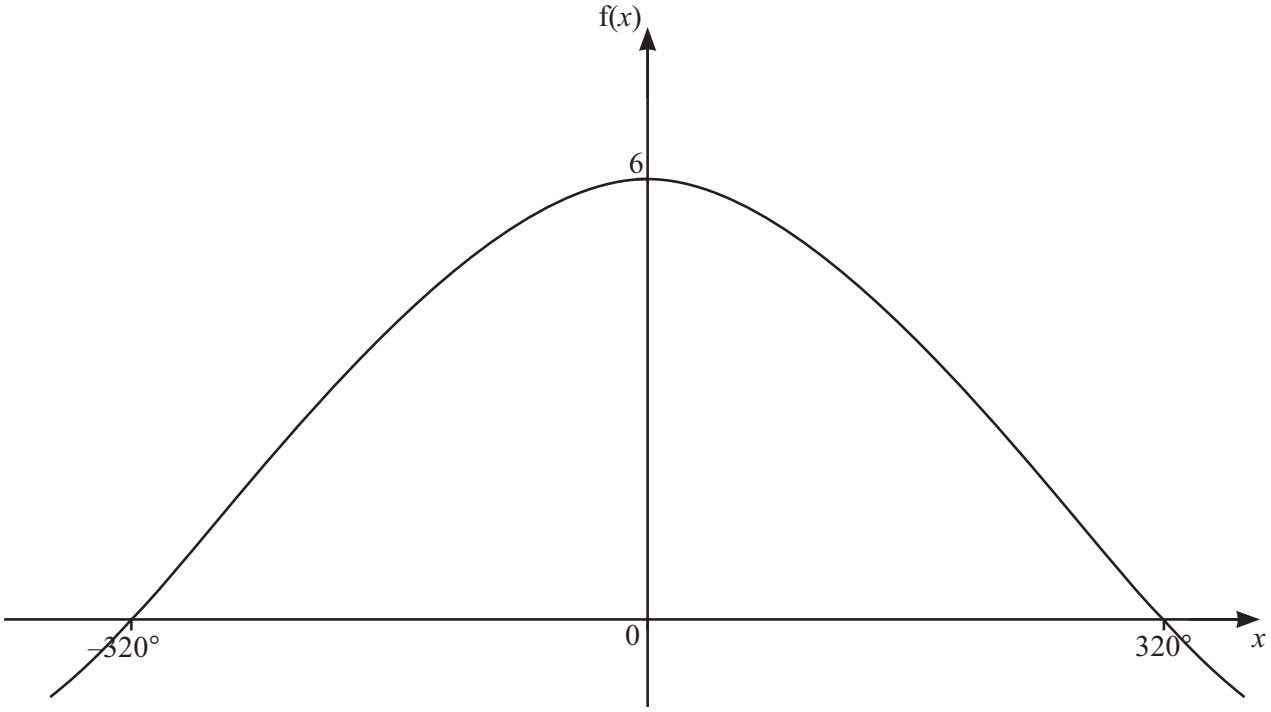
由相邻两个谷底得周期

$$T = 480° - (-480°) = 960°$$

$$b = \frac{360°}{960°} = \frac{3}{8}$$

答：$a = 4$，$b = \frac{3}{8}$，$c = -2$。

5. [2024 · October/November 0606/11 Q3]
提示：先用周期求横向系数，再比较两点代入后的余弦值。



The diagram shows part of the graph of $\mathrm{f}(x) = a\cos bx + c$, where a, b and c are constants. Given that $\mathrm{f}(x)$ has a period of 960°, find the values of a, b and c.

图中给出了函数 $f(x) = a\cos(bx) + c$ 的部分图象，其中 a、b、c 为常数。已知 $f(x)$ 的周期为 960°，求 a、b、c 的值。
图中横轴为 x，纵轴为 $f(x)$，原点标为 0；曲线与横轴的交点标出了 $-320°$、$320°$，与纵轴的交点标出了 6。

✓ **答案**

$$a = 4, b = \frac{3}{8}, c = 2$$

解析 由周期为 960° 得

$$b = \frac{360°}{960°} = \frac{3}{8}$$

图象过点 $(0, 6)$，故

$$a\cos(0°) + c = 6$$

$$a + c = 6$$

图象过点 $(320°, 0)$，故

$$0 = a\cos\left(\frac{3}{8} \cdot 320°\right) + c$$

$$0 = a\cos(120°) + c = -\frac{a}{2} + c$$

$$c = \frac{a}{2}$$

代入得

$$a + \frac{a}{2} = 6$$

$$a = 4$$

$$c = \frac{4}{2} = 2$$

答：$a = 4$，$b = \frac{3}{8}$，$c = 2$。

6. [2024 · October/November 0606/12 Q1(a)]

提示：先按弧度求横向系数，再找使余弦项消失的已知点。

The curve $y = a\cos bx + c$, where a, b and c are integers, passes through the points $\left(-\frac{\pi}{6}, -2\right)$ and $\left(\frac{\pi}{9}, \frac{1}{2}\right)$. The curve has a period of $\frac{2\pi}{3}$.

(a) Find the values of a, b and c.

曲线 $y = a\cos(bx) + c$ 经过点 $\left(-\frac{\pi}{6}, -2\right)$ 和 $\left(\frac{\pi}{9}, \frac{1}{2}\right)$，其中 a、b、c 均为整数。曲线的周期为 $\frac{2\pi}{3}$。

(a) 求 a、b、c 的值。

✓ **答案**

$$a = 5, b = 3, c = -2$$

解析 由周期为 $\frac{2\pi}{3}$ 得

$$b = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$$

曲线过点 $\left(-\frac{\pi}{6}, -2\right)$，故

$$-2 = a\cos\left(3 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + c$$

$$-2 = a\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c = c$$

曲线过点 $\left(\frac{\pi}{9}, \frac{1}{2}\right)$，故

$$\frac{1}{2} = a\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{9}\right) - 2$$

$$\frac{1}{2} = a\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2 = \frac{a}{2} - 2$$

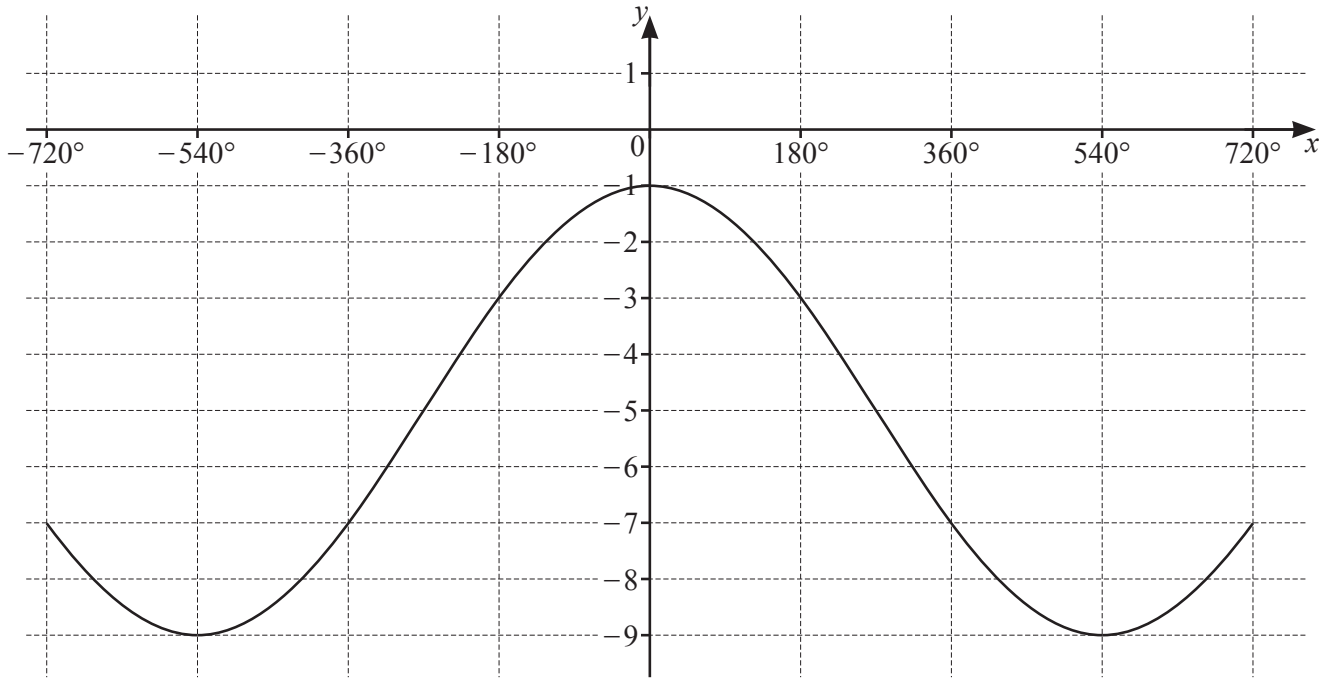
$$\frac{a}{2} = \frac{5}{2}$$

$$a = 5$$

答：$a = 5$，$b = 3$，$c = -2$。

7. [2023 · October/November 0606/11 Q1]

提示：先读峰谷高度与间距，再看括号内参数是否在分母。



The diagram shows part of the graph of $y = a\cos\left(\frac{x}{b}\right) + c$, where a, b and c are integers. Find the values of a, b and c.

图中给出了函数 $y = a\cos\left(\frac{x}{b}\right) + c$ 的部分图象，其中 a、b、c 均为整数。求 a、b、c 的值。

图中横轴为 x，标出的刻度为 $-720°$、$-540°$、$-360°$、$-180°$、0、$180°$、$360°$、$540°$、$720°$；纵轴为 y，标出的刻度为 1、-1、-2、-3、-4、-5、-6、-7、-8、-9。

✓ **答案**

$$a = 4, b = 3, c = -5$$

解析 由图象的最高、最低纵坐标得

$$c = \frac{(-1) + (-9)}{2} = -5$$

$$|a| = \frac{(-1) - (-9)}{2} = 4$$

当 $x = 0$ 时，图象在最高点，故

$$a + c = -1$$

$$a = -1 - (-5) = 4$$

由相邻两个谷底得周期

$$T = 540° - (-540°) = 1080°$$

函数中横向系数为 $\frac{1}{b}$，故

$$\frac{1}{b} = \frac{360°}{1080°} = \frac{1}{3}$$

$$b = 3$$

答：$a=4$，$b=3$，$c=-5$。

题型 6 由三角函数式求振幅与周期

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **求出函数振幅：**例题中，余弦值在 -1 与 1 之间变化。乘以 3，再减去 1，得到函数的取值范围。振幅是最大值与最小值之差的一半。

$$-1 \le \cos(2x) \le 1$$
$$-3 \le 3\cos(2x) \le 3$$
$$-4 \le 3\cos(2x) - 1 \le 2$$

振幅为 $\frac{2-(-4)}{2} =$ _____。

② **辨认外部系数：**下式中，a 为外部系数，b 为角的系数，c 为常数。取 $a \neq 0$、$b \neq 0$，两类函数的振幅均为_____。加减常数及常数项的位置不改变振幅。

$y = a\sin(bx) + c$　　$y = a\cos(bx) + c$

③ **确定重复间隔：**余弦值的最小正重复角为 $360°$。设 T 为函数的周期，即最小正重复间隔。例题中，角 $2x$ 的增加量是横坐标增加量的 2 倍。

$$2T = 360°$$
$$T = \frac{360°}{2} = 180°$$

④ **正弦余弦周期：**一整周的角度为 $360°$，弧度为 2π。正弦与余弦函数的周期，均用整周角除以 $|b|$。周期的单位随题目采用的角度制或弧度制确定。

角度制　　弧度制

$T = \frac{360°}{|b|}$　　$T = \frac{2\pi}{|b|}$

⑤ **求正切的周期：**正切值的最小正重复角为半周。下式仍取 $a \neq 0$、$b \neq 0$，周期用半周角除以 $|b|$。外部系数和加减常数不改变周期。

$$y = a\tan(bx) + c$$

角度制　　弧度制

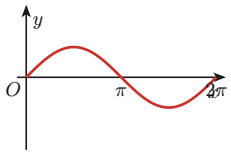
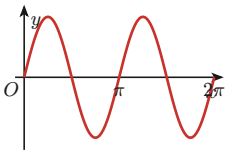
$T = \frac{180°}{|b|}$　　$T = \frac{\pi}{|b|}$

⑥ **化简角的系数：**角中含有除法时，先写成系数与变量相乘。例如，求下式的周期，角度采用弧度制。

$$y = 2\tan\left(\frac{x}{3}\right) + 4$$
$$\frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$$
$$b = \frac{1}{3}$$
$$T = \frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 3\pi$$

填空：①3　②$|a|$

振幅与周期分别变化

	$y=\sin x$	$y=2\sin(2x)$
图像		
振幅	1	2
周期	2π	π

点石成金　题目出现三角函数式，并要求振幅或周期时，先辨认函数名称、外部系数、角的系数及角度单位。

例 1　[2025 · October/November 0606/11 Q1(a)]

(a) Write down the amplitude and period of $3\cos 2x-1$.

(a) 写出 $3\cos(2x)-1$ 的振幅和周期。

解答　由余弦函数的振幅等于外部系数的绝对值，得 $|3|=3$。由角的系数为 2，得周期 $T=\frac{360°}{2}=180°$。答：振幅为 3，周期为 180°。

方法：先看余弦外的乘数和角内的系数，再辨认角度单位。

辨析：振幅是最大值与最小值之差的一半，周期是横向最小正重复间隔。

拓展：图像上下平移，振幅与周期都不变。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/12 Q1(b)]

提示：看余弦外的乘数，区分它与角内的系数。

(b) Write down the amplitude of $4\cos x-2$.

(b) 写出 $4\cos x-2$ 的振幅。

答案

4

解析　余弦函数的外部系数为 4，振幅为 $|4|=4$。答：振幅为 4。

2. [2026 · May/June 0606/21 Q2(a)]

提示：找出乘在余弦前的数，再看取绝对值后的大小。

(a) Write down the amplitude of $4\cos\left(\frac{x}{8}\right)+2$.

(a) 写出 $4\cos\left(\frac{x}{8}\right)+2$ 的振幅。

答案

4

解析　余弦函数的外部系数为 4，振幅为 $|4|=4$。答：振幅为 4。

3. [2023 · May/June 0606/13 Q1(a)]
提示：先把角内除法改写成乘法，再用半周弧度比较。

(a) Write down the period, in radians, of $3\tan\frac{\theta}{2}-3$.

(a) 写出 $3\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)-3$ 的周期，以弧度表示。

✓ **答案**

2π

解析 由 $\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\theta$，得正切函数中角的系数为 $\frac{1}{2}$。正切函数在弧度制下的周期为 $T=\frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=2\pi$。答：周期为 2π 弧度。

4. [2025 · May/June 0606/23 Q5(a)]
提示：看角内分母对应的系数，正切按半周计算。

In this question, all angles are in radians.

(a) Write down the period of $5\tan\left(\frac{x}{4}\right)+1$.

本题中，所有角均以弧度表示。
(a) 写出 $5\tan\left(\frac{x}{4}\right)+1$ 的周期。

✓ **答案**

4π

解析 由 $\frac{x}{4}=\frac{1}{4}x$，得正切函数中角的系数为 $\frac{1}{4}$。正切函数在弧度制下的周期为 $T=\frac{\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|}=4\pi$。答：周期为 4π 弧度。

5. [2024 · February/March 0606/12 Q1(a)]
提示：先把常数项移到末尾，再看余弦外的乘数。

Given that $y=2+4\cos 3\theta$, for $-120°\leqslant\theta\leqslant 120°$,

(a) write down the amplitude of y

已知 $y=2+4\cos(3\theta)$，其中 $-120°\leq\theta\leq 120°$。
(a) 写出 y 的振幅。

✓ **答案**

4

解析 将函数式写为 $y=4\cos(3\theta)+2$。余弦函数的外部系数为 4，振幅为 $|4|=4$。答：y 的振幅为 4。

6. [2023 · October/November 0606/12 Q2(a)]
提示：看正弦外的乘数，振幅取它到零的距离。

The function g is defined by $g(x)=5\sin\frac{3x}{4}-2$ for all values of x.

(a) Write down the amplitude of g.

函数 g 对所有 x 的值定义为 $g(x)=5\sin\left(3\frac{x}{4}\right)-2$。
(a) 写出 g 的振幅。

✓ **答案**

5

解析 正弦函数的外部系数为 5，振幅为 $|5|=5$。答：g 的振幅为 5。

7. [2023 · May/June 0606/21 Q2(b)]

提示：把余弦项与常数项分开，比清外部乘数和角内系数。

The function g is defined for $0° \leqslant x \leqslant 120°$ by $g(x) = 2 + 4\cos 6x$.

(b) State the amplitude of g.

函数 g 在 $0° \leq x \leq 120°$ 上定义为 $g(x) = 2 + 4\cos(6x)$。
(b) 写出 g 的振幅。

✓ **答案**

4

解析 将函数式写为 $g(x) = 4\cos(6x) + 2$。余弦函数的外部系数为 4，振幅为 $|4| = 4$。答：g 的振幅为 4。

题型 7 由正切内角确定渐近线并描画曲线

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **内角与纵坐标：**本题的内角是 $\frac{x}{4}$。先取正切值，再乘 5、加 1。

$$x = 0,\quad y = 5\tan 0 + 1 = _____$$

② **周期的计算：**内角增加 π 后，正切值重复，周期记为 T。本题有

$$\frac{x+T}{4} - \frac{x}{4} = \pi,\quad T = _____$$

一般内角为 bx 时，$b \neq 0$ 为常数。

弧度制	角度制
$T = \frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	$T = \frac{180°}{\lvert b\rvert}$

③ **竖直渐近线：**内角为奇数倍的 $\frac{\pi}{2}$ 时，正切无定义。令 k 为整数，本题的渐近线满足

$$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\quad x = 2\pi + 4k\pi$$

按题目区间选取位置，曲线不经过渐近线。

④ **按图辨认位置：**两条相邻渐近线相距一个周期。本题函数在整个数轴上的前两条正半轴渐近线为

$$x = 2\pi,\quad x = 2\pi + 4\pi = 6\pi$$

⑤ **坐标轴的交点：**按所求的轴上交点令相应坐标为零。

与纵轴相交	与横轴相交
令自变量为 0，求 y。	令 $y = 0$，求自变量。

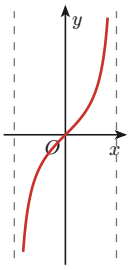
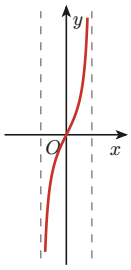
如 t 为弧度角，且 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$，则

$$2\tan t - 2 = 0,\quad 2\tan t = 2,\quad \tan t = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right),\quad t = _____$$

⑥ **正切曲线描画：**本题正切前的系数 $5 > 0$，每支曲线从左下向右上延伸。先画渐近线，再标出交点并描画各支曲线。区间端点有定义时，代入求出端点坐标。

填空：①1　②$4\pi$　③$\frac{\pi}{4}$

正切内角决定渐近线

	$y=\tan x$	$y=\tan(2x)$
图像		
相邻渐近线间隔	π	$\frac{\pi}{2}$
图中渐近线	$x=\pm\frac{\pi}{2}$	$x=\pm\frac{\pi}{4}$

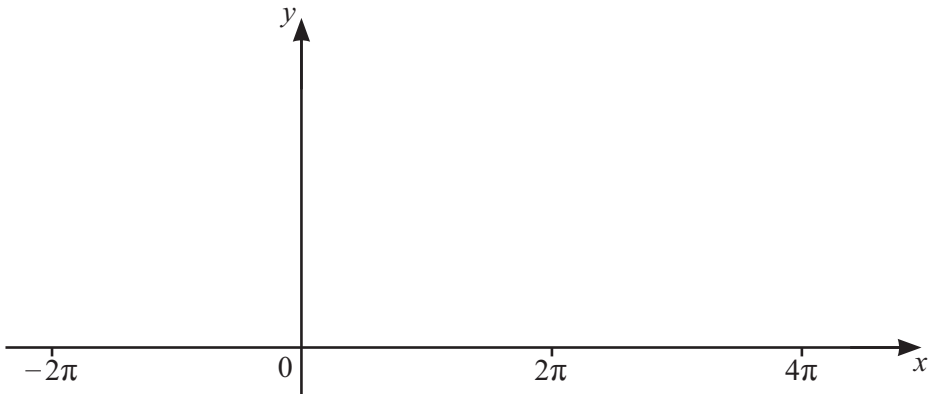
点石成金　题目出现正切函数的图象、周期或渐近线时，先看内角，再由内角确定周期和渐近线位置。

例 1　[2025 · May/June 0606/23 Q5(b)]

In this question, all angles are in radians.

(b) On the axes, sketch the graph of $y=5\tan\left(\frac{x}{4}\right)+1$ for $-2\pi\leqslant x\leqslant 4\pi$.

State the intercept with the y-axis.
Show clearly the positions of any asymptotes.



本题中，所有角度均以弧度为单位。
(b) 在给出的坐标轴上，画出函数

$$y=5\tan\left(\frac{x}{4}\right)+1$$

在 $-2\pi\leq x\leq 4\pi$ 范围内的图象。
写出图象在 y 轴上的截距。
清楚标出所有渐近线的位置。
图中横轴为 x 轴，标有 -2π、0、2π、4π；纵轴为 y 轴。

解答　正切函数在内角为奇数倍的 $\frac{\pi}{2}$ 时无定义，故

$$\frac{x}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$x=2\pi+4k\pi$$

在 $-2\pi\leq x\leq 4\pi$ 内，取 $k=-1$ 或 $k=0$，得渐近线

方法：先看正切的内角，令其等于奇数倍半圆周角，筛选区间内的位置。

辨析：周期是横向重复的间距，渐近线是曲线

$$x=-2\pi,\quad x=2\pi$$

趋近而不相交的竖直线。

拓展：上下平移改变交点位置，不改变周期与竖直渐近线。

令 $x=0$，得

$$y=5\tan 0+1=1$$

故图象与 y 轴相交于 $(0,1)$。

在右端点处，

$$x=4\pi,\quad y=5\tan\pi+1=1$$

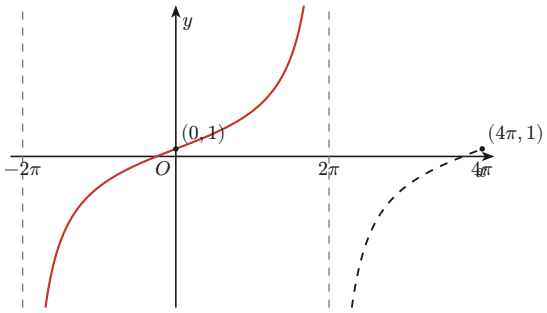
因正切前的系数为正，两支曲线均从左下向右上延伸。

在 $-2\pi<x<2\pi$ 内，曲线经过 $(0,1)$；靠近左侧渐近线时向负无穷延伸，靠近右侧渐近线时向正无穷延伸。

在 $2\pi<x\leq 4\pi$ 内，曲线从负无穷向右上方延伸，止于实心点 $(4\pi,1)$。两条渐近线画为竖直虚线。

答：y 轴截距为 1，渐近线为 $x=-2\pi$ 和 $x=2\pi$。

实线 $y=5\tan\left(\frac{x}{4}\right)+1$



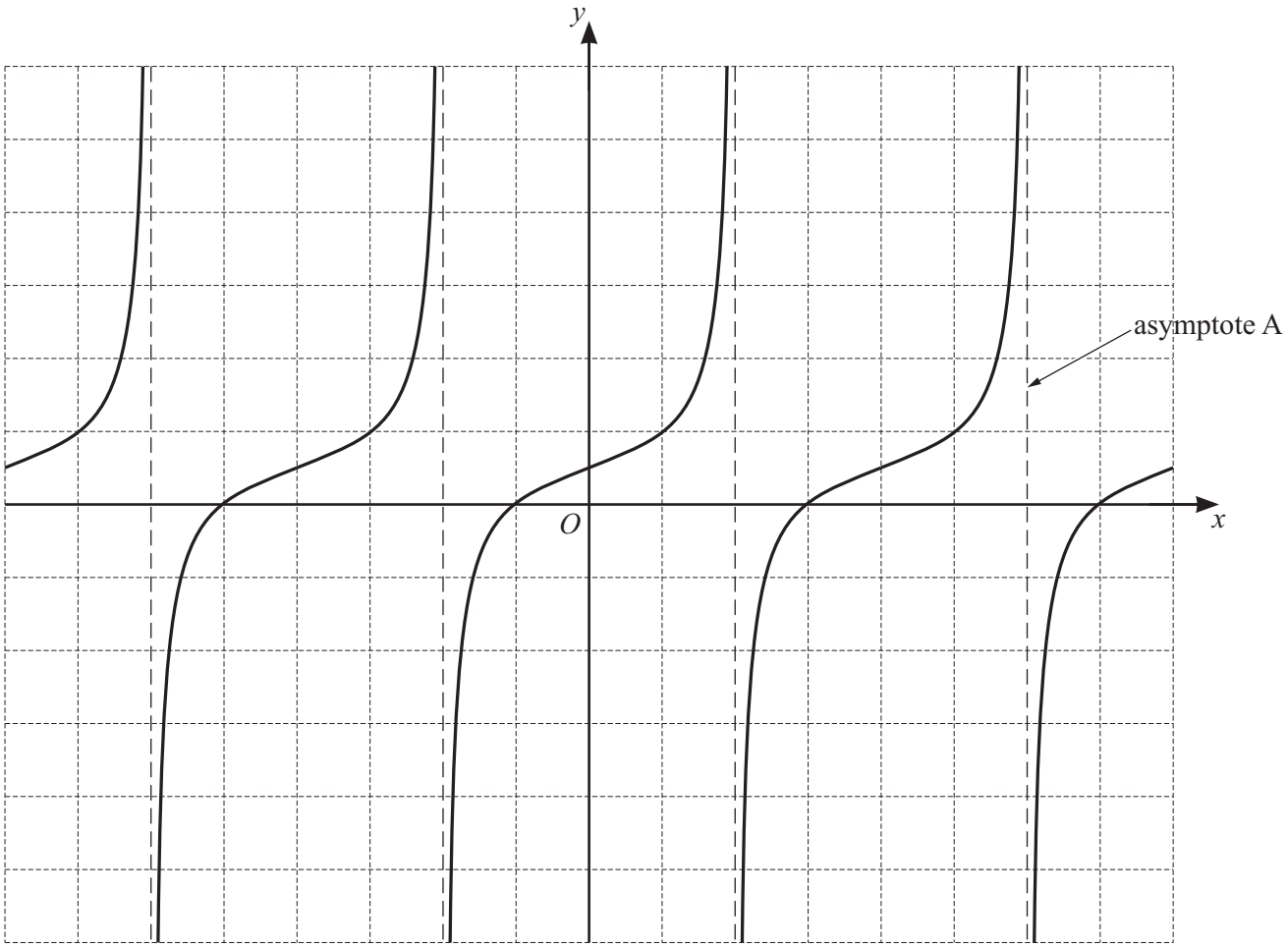
$(0,1)$；$(4\pi,1)$

针对练习

1. [2026 · February/March 0606/22 Q6(a)]

提示：看角度单位，比相邻渐近线间距，再从纵轴向右数。

(a) The diagram shows part of the graph of $y = 1 + \tan\frac{1}{2}x$ where x is measured in degrees.



(i) Write down the period of $1 + \tan\frac{1}{2}x$.

(ii) Write down the equation of the asymptote A.

（a）图中画出了函数

$$y = 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

的部分图象，其中 x 以度为单位。图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，原点标为 O，箭头所指的虚线标为渐近线 A。

（i）写出 $1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ 的周期。

（ii）写出渐近线 A 的方程。

✓ **答案**　（i）$360°$；（ii）$x = 540°$。

解析　（i）正切函数在角度制下的周期为 $180°$，故所求周期为

$$T = \frac{180°}{\frac{1}{2}} = 360°$$

（ii）渐近线处的内角满足

$$\frac{x}{2} = 90° + k \times 180°, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 180° + k \times 360°$$

由图，渐近线 A 是 y 轴右侧的第二条渐近线，取 $k=1$，得

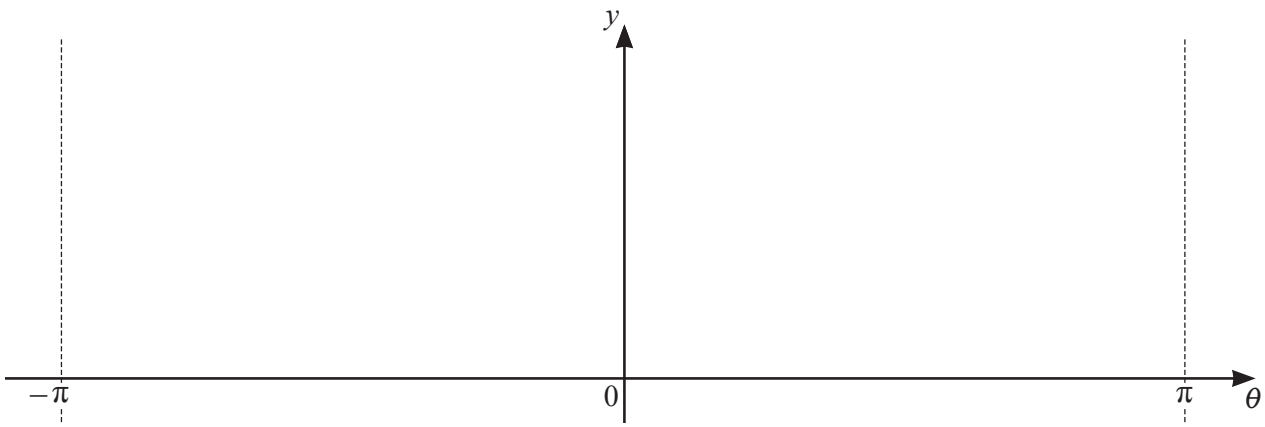
$$x = 180° + 360° = 540°$$

答：(i) 周期为 $360°$；(ii) 渐近线 A 的方程为 $x = 540°$。

2. [2023 · May/June 0606/13 Q1(b)]

提示：看内角范围筛选交点，再核对两端走势与系数符号。

(b) On the axes, sketch the graph of $y = 3\tan\frac{\theta}{2} - 3$ for $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, stating the coordinates of the points where the graph meets the axes.



(b) 在给出的坐标轴上，画出函数

$$y = 3\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3$$

在 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 范围内的图象，并写出图象与坐标轴相交的各点坐标。

图中横轴为 θ 轴，标有 $-\pi$、0、π；纵轴为 y 轴，在 $\theta = -\pi$ 和 $\theta = \pi$ 处画有竖直虚线。

✓ **答案** 与两轴的交点为 $(0, -3)$、$(\frac{\pi}{2}, 0)$；渐近线为 $\theta = -\pi$、$\theta = \pi$。两渐近线之间为一支递增曲线，左端向负无穷延伸，右端向正无穷延伸。

解析 渐近线处的内角满足

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = \pi + 2k\pi$$

在 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 内，渐近线为

$$\theta = -\pi, \quad \theta = \pi$$

令 $\theta = 0$，得

$$y = 3\tan 0 - 3 = -3$$

故图象与 y 轴相交于 $(0, -3)$。

令 $y = 0$，得

$$3\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3 = 0$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$$

函数在两端点处无定义，故

$$-\pi<\theta<\pi$$

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$$

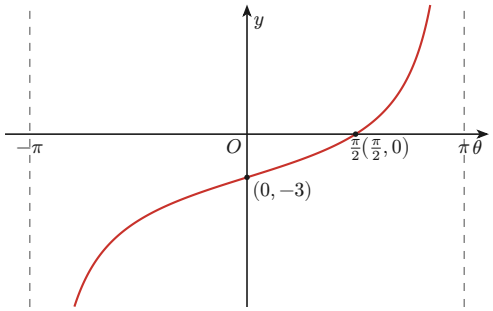
在此范围内，

$$\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

故图象与 θ 轴相交于 $(\frac{\pi}{2},0)$。
因正切前的系数为正，两条竖直渐近线之间画一支递增曲线，经过上述两个交点。靠近左侧渐近线时向负无穷延伸，靠近右侧渐近线时向正无穷延伸。
答：与两轴的交点为 $(0,-3)$、$(\frac{\pi}{2},0)$，渐近线为 $\theta=-\pi$、$\theta=\pi$。

实线 $y=3\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)-3$



$(0,-3)$；$(\frac{\pi}{2},0)$

题型 8　展开或分解三角多项式，用平方关系化简

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **三角记号含义：**例题中的 θ 表示角，$\sec\theta$ 表示余弦的_____。三角函数的幂表示函数值的幂。

当 $\cos\theta\neq0$ 时

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$

当 $\sin\theta\neq0$ 时

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$

$$\tan^2\theta=(\tan\theta)^2$$

$$\sec^4\theta=(\sec^2\theta)^2$$

② **平方关系改写：**题中出现同一角的平方，可用平方关系改写。由正弦、余弦的平方和，分别计算两组平方差。

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

当 $\cos\theta\neq0$ 时

$$\sec^2\theta-\tan^2\theta=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1$$

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

当 $\sin\theta\neq0$ 时

$$\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=1$$

$\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$

两组平方差均为_____。

③ **乘积展开方法：**例题两括号中，正切项相同，正割项符号相反。用平方差公式，把乘积写成两项平方之差。

$$(2\tan\theta+\sec\theta)(2\tan\theta-\sec\theta)=(2\tan\theta)^2-(\sec\theta)^2=4\tan^2\theta-\sec^2\theta$$

其中两项分别对应下式中的 a、b。

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

④ **平方相加展开：**两个括号分别平方再相加时，先展开。例如，下式中含一次正切的两项相加得_____。

$$(2+\tan\theta)^2+(2-\tan\theta)^2=4+4\tan\theta+\tan^2\theta+4-4\tan\theta+\tan^2\theta=8+2\tan^2\theta$$

⑤ **四次方的分解：**出现两个四次方相减时，先写成平方的平方。再用平方差公式，把次数降为二次。

$$\sec^4\theta-\tan^4\theta=(\sec^2\theta)^2-(\tan^2\theta)^2=(\sec^2\theta-\tan^2\theta)(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=\sec^2\theta+\tan^2\theta$$

⑥ **同类平方合并：**式中混有两种三角函数的平方时，用平方关系换成同一种。展开括号后，合并同类项。

用余弦表示正弦的平方

$2\sin^2\theta+3\cos^2\theta=2(1-\cos^2\theta)+3\cos^2\theta=2+\cos^2\theta$

用余切表示余割的平方

$3\cot^2\theta-3\operatorname{cosec}^2\theta=3\cot^2\theta-3(1+\cot^2\theta)=-3$

填空：①倒数　②1　③0

点石成金　题目出现三角函数的括号乘积、平方和或四次方差，并要求证明或化简时，先展开或分解，再用平方关系改写。

例 1　[2024 · October/November 0606/23 Q3(a)]

(a) Show that $(2\tan\theta+\sec\theta)(2\tan\theta-\sec\theta)=3\tan^2\theta-1$.

(a) 证明：$(2\tan\theta+\sec\theta)(2\tan\theta-\sec\theta)=3\tan^2\theta-1$。

解答　原式有意义时，$\cos\theta\neq0$。由平方关系，得 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$。

所以

$$(2\tan\theta+\sec\theta)(2\tan\theta-\sec\theta)=4\tan^2\theta-\sec^2\theta$$

$$=4\tan^2\theta-(1+\tan^2\theta)$$

$=3\tan^2\theta-1$。

答：等式成立。

方法：看两括号的同项与异号项，先用平方差公式展开。

辨析：平方差是两项平方后相减，差的平方是两项相减后平方。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/11 Q3]

提示：看两平方展开后的一次项，比较余切平方与余割平方的系数。

Show that $(3+5\cot\theta)^2+(3-5\cot\theta)^2-50\operatorname{cosec}^2\theta$, where $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, can be simplified to a constant.

证明：当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$(3+5\cot\theta)^2+(3-5\cot\theta)^2-50\operatorname{cosec}^2\theta$ 可以化简为一个常数。

✓ **答案**

-32

解析　由 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，得 $\sin\theta\neq0$。由平方关系，得 $\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$。

展开得

$(3+5\cot\theta)^2=9+30\cot\theta+25\cot^2\theta$，

$(3-5\cot\theta)^2=9-30\cot\theta+25\cot^2\theta$。

所以原式

$$= 18 + 50\cot^2\theta - 50\operatorname{cosec}^2\theta$$

$$= 18 + 50\cot^2\theta - 50(1 + \cot^2\theta)$$

$$= 18 + 50\cot^2\theta - 50 - 50\cot^2\theta$$

$= -32$。

答：原式可化为常数 -32。

2. [2023 · May/June 0606/13 Q10(a)]

提示：看四次方差分解后的两因式，找能用平方和关系的一项。

(a) Show that $\cos^4\theta - \sin^4\theta + 1 = 2\cos^2\theta$.

（a）证明：$\cos^4\theta - \sin^4\theta + 1 = 2\cos^2\theta$。

✓ **答案**

$$2\cos^2\theta$$

解析 由平方关系，得

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$。

用平方差公式，得

$$\cos^4\theta - \sin^4\theta + 1 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 1$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 1$$

$$= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) + 1$$

$= 2\cos^2\theta$。

答：等式成立。

题型 9 化为同一三角比的二次式，因式分解后逐根求角

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **倒数三角记号：**例题中的余切与余割，所取的角相同。把这个角记为 u，再按倒数记号展开。

$$u = 2\theta$$

分母为正弦时	分母为余弦时
$\sin u \neq 0$	$\cos u \neq 0$
$\operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u}$	$\sec u = \frac{1}{\cos u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$

② **统一平方三角比：**例题含余切的平方与余割，用平方关系统一。由同角的正弦、余弦平方和为一，分别除以正弦平方、余弦平方。

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

当 $\sin u \neq 0$ 时	当 $\cos u \neq 0$ 时
$\operatorname{cosec}^2 u = \frac{1}{\sin^2 u} = \frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\sin^2 u} = 1 + \cot^2 u$	$\sec^2 u = \frac{1}{\cos^2 u} = \frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\cos^2 u} = 1 + \tan^2 u$

余切平方可换成 _____，余弦平方可换成 _____。

③ **二次因式分解：**例题统一成余割的二次式后，令 t 表示余割值。作因式分解，分别令两个因子为零。含公因子时仍保留零根；倒数三角比不能为零。

$$t = \operatorname{cosec} u$$

$$t^2 + 3t - 10 = (t+5)(t-2) = 0$$

$t =$ _____ 或 $t =$ _____。

$$\sin u(\sin u - 1) = 0$$

$$\sin u = 0 \quad \text{或} \quad \sin u = 1$$

④ **分母非零变形：**出现倒数或分式，先写原分母不为零，再同乘或通分。多种三角比并存时，先用正弦、余弦表示。通分或约去因子后，仍保留原分母的非零条件。

当 $\sin u \neq 0$ 时

$2\operatorname{cosec} u - \sin u = 1$

$2 - \sin^2 u = \sin u$

$\sin^2 u + \sin u - 2 = 0$

当 $\sin u \cos u \neq 0$ 时

$\cot u + \operatorname{cosec} u = \tan u$

$\frac{\cos u}{\sin u} + \frac{1}{\sin u} = \frac{\sin u}{\cos u}$

$\cos^2 u + \cos u = \sin^2 u$

$2\cos^2 u + \cos u - 1 = 0$

$$t \neq 1, \quad t \neq -1$$

$$\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} = \frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{2}{t^2-1}$$

⑤ **三角比逐根求角：**正弦、余弦值须在负一与一之间，再由各根求出全部角。表中 a 是已求得的三角比值，α 是计算器所得角。P 表示一周角，k 表示任意整数。

方程	反三角运算	全部角
$\sin u = a$	$\alpha = \arcsin a$	$u = \alpha + kP$ 或 $u = \frac{P}{2} - \alpha + kP$
$\cos u = a$	$\alpha = \arccos a$	$u = \alpha + kP$ 或 $u = -\alpha + kP$
$\tan u = a$	$\alpha = \arctan a$	$u = \alpha + k\frac{P}{2}$

角度制

$P = 360°$

$\sin u = \frac{1}{2}$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$

$u = 30° + k \cdot 360°$

或 $u = 150° + k \cdot 360°$

弧度制

$P = 2\pi$

$\pi \text{ rad} = 180°$

$\sin u = \frac{1}{2}$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$u = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

或 $u = 5\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

⑥ **复合角范围还原：**题目给出原字母的范围，先求三角比中整个角的范围。列出范围内全部合法角，再还原字母并取近似值。端点须同时满足范围条件与分母非零条件。

例题中的两倍角

$u = 2\theta$

$-90° \leq \theta \leq 90°$

$-180° \leq u \leq$ _____

当 $\sin u = \frac{1}{2}$ 时

含平移的角，按弧度计算

$u = 2x + 1$

$-0.5 \leq x \leq 0.5$

$-1 \leq 2x \leq 1$

$u = 30°, 150°$
$\theta = \frac{u}{2} = 15°, 75°$

$0 \le u \le 2$
$x = \frac{u-1}{2}$

填空：①$\operatorname{cosec}^2 u - 1$　②$1 - \sin^2 u$　③-5　④$2$　⑤$180°$

点石成金　题目出现同一个角的不同三角比或其平方时，先用倒数关系与平方关系化成同一三角比的二次方程。

例 1　[2024 · October/November 0606/22 Q8]

Solve the equation $\cot^2 2\theta + 3\operatorname{cosec} 2\theta = 9$ for $-90° \leqslant \theta \leqslant 90°$.

在 $-90° \le \theta \le 90°$ 的范围内，解方程 $\cot^2(2\theta) + 3\operatorname{cosec}(2\theta) = 9$。

解答　令

$$u = 2\theta$$

由题设范围得

$$-180° \le u \le 180°$$

原式要求

$$\sin u \neq 0$$

由平方关系得

$$\cot^2 u = \operatorname{cosec}^2 u - 1$$

代入原方程，得

$$\operatorname{cosec}^2 u + 3\operatorname{cosec} u - 10 = 0$$

$$(\operatorname{cosec} u + 5)(\operatorname{cosec} u - 2) = 0$$

当余割值为 2 时，

$$\sin u = \frac{1}{2}$$

在所求范围内，

$$u = 30°, 150°$$

$$\theta = \frac{u}{2} = 15°, 75°$$

当余割值为 -5 时，

$$\sin u = -\frac{1}{5}$$

令

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) \approx 11.53696°$$

在所求范围内，

$$u = -\alpha, -180° + \alpha$$

方法：先看余切平方与余割是否同角，再用平方关系统一成余割的二次式。

辨析：余割是正弦的倒数，反正弦是由正弦值求主值角的运算。

拓展：同一正弦值可对应多个角，反正弦主值之外还须按对称性与周期补齐。

$$\theta = \frac{u}{2} \approx -5.8°, -84.2°$$

所得各角均使正弦不为零。
答：$\theta = 15°, 75°$，或 $\theta \approx -5.8°, -84.2°$。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/11 Q12(a)]
提示：看余割平方与余切的关系，再按各根符号选正切所在象限。

(a) Solve the equation $2\operatorname{cosec}^2\theta - 5 = 5\cot\theta$ for $-180° \leqslant \theta \leqslant 180°$.

(a) 在 $-180° \leq \theta \leq 180°$ 的范围内，解方程 $2\operatorname{cosec}^2\theta - 5 = 5\cot\theta$。

✓ **答案**

$$\theta \approx -161.6°, -63.4°, 18.4°, 116.6°$$

解析 原式要求

$$\sin\theta \neq 0$$

由平方关系得

$$\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

代入原方程，得

$$2(1 + \cot^2\theta) - 5 = 5\cot\theta$$

$$2\cot^2\theta - 5\cot\theta - 3 = 0$$

$$(2\cot\theta + 1)(\cot\theta - 3) = 0$$

$$\cot\theta = -\frac{1}{2} \quad 或 \quad \cot\theta = 3$$

两根均非零，取倒数得

$$\tan\theta = -2 \quad 或 \quad \tan\theta = \frac{1}{3}$$

令

$$\alpha = \arctan 2 \approx 63.43495°$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18.43495°$$

在题设范围内，正切值为 -2 时，

$$\theta = -\alpha, 180° - \alpha$$

正切值为 $\frac{1}{3}$ 时，

$$\theta = \beta - 180°, \beta$$

所得各角均使原式有意义。
答：$\theta \approx -161.6°, -63.4°, 18.4°, 116.6°$。

2. [2024 · October/November 0606/13 Q10(a)]
提示：把正切看作整体分解，再按半周周期核对范围内的角。

(a) Solve the equation $7\tan^2\theta + 5\tan\theta - 2 = 0$, for $-180° \leqslant \theta \leqslant 180°$.

(a) 在 $-180° \leq \theta \leq 180°$ 的范围内，解方程 $7\tan^2\theta + 5\tan\theta - 2 = 0$。

✓ **答案** $\theta \approx -164.1°, 15.9°$，或 $\theta = -45°, 135°$

解析 原式要求

$$\cos\theta \neq 0$$

将左边因式分解，得

$$(7\tan\theta - 2)(\tan\theta + 1) = 0$$

$$\tan\theta = \frac{2}{7} \quad 或 \quad \tan\theta = -1$$

令

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2}{7}\right) \approx 15.94540°$$

在题设范围内，正切值为 $\frac{2}{7}$ 时，

$$\theta = \alpha - 180°, \alpha$$

正切值为 -1 时，

$$\theta = -45°, 135°$$

所得各角的余弦均不为零。
答：$\theta \approx -164.1°, 15.9°$，或 $\theta = -45°, 135°$。

3. [2024 · May/June 0606/23 Q5(b)]
提示：看余弦平方如何换成正弦，再按各根正负分象限求角。

(b) Solve the equation $50\cos^2\theta = 5\sin\theta + 47$ for $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$.

(b) 在 $0° \leq \theta \leq 360°$ 的范围内，解方程 $50\cos^2\theta = 5\sin\theta + 47$。

✓ **答案**

$$\theta \approx 11.5°, 168.5°, 197.5°, 342.5°$$

解析 由平方关系得

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

代入原方程，得

$$50(1 - \sin^2\theta) = 5\sin\theta + 47$$

$$50\sin^2\theta + 5\sin\theta - 3 = 0$$

$$(5\sin\theta-1)(10\sin\theta+3)=0$$

$$\sin\theta=\frac{1}{5}\quad 或\quad \sin\theta=-\frac{3}{10}$$

令

$$\alpha=\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\approx 11.53696^\circ$$

$$\beta=\arcsin\left(\frac{3}{10}\right)\approx 17.45760^\circ$$

在题设范围内，正弦值为 $\frac{1}{5}$ 时，

$$\theta=\alpha,180^\circ-\alpha$$

正弦值为 $-\frac{3}{10}$ 时，

$$\theta=180^\circ+\beta,360^\circ-\beta$$

答：$\theta\approx 11.5^\circ,168.5^\circ,197.5^\circ,342.5^\circ$。

4. [2025 · October/November 0606/23 Q7]

提示：先看三倍角的范围，再将正割平方换成正切平方。

Solve the equation $\sec^2 3x+\tan 3x-3=0$ for $0^\circ\leqslant x\leqslant 120^\circ$.

在 $0^\circ\le x\le 120^\circ$ 的范围内，解方程 $\sec^2(3x)+\tan(3x)-3=0$。

✓ **答案** $x=15^\circ,75^\circ$，或 $x\approx 38.9^\circ,98.9^\circ$

解析 令

$$u=3x$$

由题设范围得

$$0^\circ\le u\le 360^\circ$$

原式要求

$$\cos u\neq 0$$

由平方关系得

$$\sec^2 u=1+\tan^2 u$$

代入原方程，得

$$\tan^2 u+\tan u-2=0$$

$$(\tan u+2)(\tan u-1)=0$$

$$\tan u=-2\quad 或\quad \tan u=1$$

正切值为 1 时，

$$u=45^\circ,225^\circ$$

$$x = \frac{u}{3} = 15°, 75°$$

令

$$\alpha = \arctan 2 \approx 63.43495°$$

正切值为 -2 时，

$$u = 180° - \alpha, 360° - \alpha$$

$$x = \frac{u}{3} \approx 38.9°, 98.9°$$

所得各角均使原式有意义。

答：$x = 15°, 75°$，或 $x \approx 38.9°, 98.9°$。

5. [2025 · October/November 0606/22 Q11(a)]

提示：看两项共有的正切因子，保留零根并核对两倍角的端点。

(a) Solve the equation $\tan^2 2x - 4\tan 2x = 0$ for $0° \leqslant x \leqslant 180°$.

（a）在 $0° \leq x \leq 180°$ 的范围内，解方程 $\tan^2(2x) - 4\tan(2x) = 0$。

✓ **答案** $x = 0°, 90°, 180°$，或 $x \approx 38.0°, 128.0°$

解析 令

$$u = 2x$$

由题设范围得

$$0° \leq u \leq 360°$$

原式要求

$$\cos u \neq 0$$

提取公因子，得

$$\tan u(\tan u - 4) = 0$$

$$\tan u = 0 \quad 或 \quad \tan u = 4$$

正切值为 0 时，

$$u = 0°, 180°, 360°$$

$$x = \frac{u}{2} = 0°, 90°, 180°$$

令

$$\alpha = \arctan 4 \approx 75.96376°$$

正切值为 4 时，

$$u = \alpha, 180° + \alpha$$

$$x = \frac{u}{2} \approx 38.0°, 128.0°$$

所得各角均使原式有意义。

答：$x = 0°, 90°, 180°$，或 $x \approx 38.0°, 128.0°$。

6. [2025 · May/June 0606/21 Q8(b)]

提示：先求整个角的弧度范围，乘去分母前列出正弦非零条件。

(b) Solve the equation $2\operatorname{cosec}(2\theta+1) - 12\sin(2\theta+1) = 5$, where θ is in radians and $-1 \leqslant \theta \leqslant 2$.

(b) 解方程

$2\operatorname{cosec}(2\theta+1) - 12\sin(2\theta+1) = 5$，

其中 θ 以弧度为单位，且 $-1 \leq \theta \leq 2$。

✓ **答案**

$$\theta \approx -0.865, -0.374, 0.944, 1.44$$

解析 各角按弧度计算。令

$$u = 2\theta + 1$$

由题设范围得

$$-1 \leq u \leq 5$$

原式要求

$$\sin u \neq 0$$

将余割写成正弦的倒数，得

$$\frac{2}{\sin u} - 12\sin u = 5$$

两边同乘正弦，得

$$2 - 12\sin^2 u = 5\sin u$$

$$12\sin^2 u + 5\sin u - 2 = 0$$

$$(4\sin u - 1)(3\sin u + 2) = 0$$

$$\sin u = \frac{1}{4} \quad 或 \quad \sin u = -\frac{2}{3}$$

令

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0.2526803$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0.7297277$$

在所得范围内，正弦值为 $\frac{1}{4}$ 时，

$$u = \alpha, \pi - \alpha$$

$$\theta = \frac{u-1}{2} \approx -0.374, 0.944$$

正弦值为 $-\frac{2}{3}$ 时，

$$u = -\beta, \pi + \beta$$

$$\theta = \frac{u-1}{2} \approx -0.865, 1.44$$

所得正弦值均非零，四个解均在题设范围内。

答：$\theta \approx -0.865, -0.374, 0.944, 1.44$。

7. [2026 · February/March 0606/22 Q9(c)]

提示：看正切平方与正割的关系，再检查各根能否作为倒数值。

(c) Solve the equation $3\sec(x-1) - 1 = \tan^2(x-1)$ where x is in radians and $-1 < x < 3$.

(c) 解方程

$3\sec(x-1) - 1 = \tan^2(x-1)$，

其中 x 以弧度为单位，且 $-1 < x < 3$。

✓ **答案**

$$x \approx -0.231, 2.23$$

解析 各角按弧度计算。令

$$u = x - 1$$

由题设范围得

$$-2 < u < 2$$

原式要求

$$\cos u \neq 0$$

由平方关系得

$$\tan^2 u = \sec^2 u - 1$$

代入原方程，得

$$3\sec u - 1 = \sec^2 u - 1$$

$$\sec^2 u - 3\sec u = 0$$

$$\sec u(\sec u - 3) = 0$$

∵ 正割是余弦的倒数，不可能为零，∴

$$\sec u = 3$$

$$\cos u = \frac{1}{3}$$

在所得范围内，

$$u = \pm \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x = 1 \pm \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

两个解均满足题设范围，且使原式有意义。

答：$x \approx -0.231, 2.23$。

8. [2025 · May/June 0606/23 Q12(a)]

提示：看整个角的范围对应哪些象限，再与正弦各根的符号比较。

The function f is defined by $\mathrm{f}(x) = 15\cos^2(3x+1.5) + 7\sin(3x+1.5) - 13$ for $-0.3 \leqslant x \leqslant 0.5$, where x is in radians.

(a) Solve the equation $\mathrm{f}(x) = 0$.

函数 f 定义为
$f(x) = 15\cos^2(3x+1.5) + 7\sin(3x+1.5) - 13$，
其中 $-0.3 \leq x \leq 0.5$，x 以弧度为单位。
(a) 解方程
$f(x) = 0$。

✓ **答案**

$$x \approx -0.257, 0.304$$

解析 各角按弧度计算。由函数表达式，所求方程为

$$15\cos^2(3x+1.5) + 7\sin(3x+1.5) - 13 = 0$$

令

$$u = 3x + 1.5$$

由题设范围得

$$0.6 \leq u \leq 3$$

由平方关系得

$$15(1 - \sin^2 u) + 7\sin u - 13 = 0$$

$$15\sin^2 u - 7\sin u - 2 = 0$$

$$(3\sin u - 2)(5\sin u + 1) = 0$$

$$\sin u = \frac{2}{3} \quad 或 \quad \sin u = -\frac{1}{5}$$

$\because$ 所得范围包含于 $0 < u < \pi$，$\therefore$

$$\sin u > 0$$

故舍去负的正弦值，得

$$\sin u = \frac{2}{3}$$

令

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0.7297277$$

在所得范围内，

$$u = \alpha, \pi - \alpha$$

还原原字母，得

$$x = \frac{u - 1.5}{3}$$

答：$x \approx -0.257, 0.304$。

9. [2023 · October/November 0606/22 Q10(b)]
提示：看各三角比的正弦余弦表达式，列非零条件后再通分。

(b) Solve the equation $9\cot x + 3\operatorname{cosec} x = \tan x$, for $0° < x < 360°$.

（b）在 $0° < x < 360°$ 的范围内，解方程 $9\cot x + 3\operatorname{cosec} x = \tan x$。

✓ **答案** $x \approx 78.5°, 281.5°$，或 $x = 120°, 240°$

解析 原式要求

$$\sin x \neq 0, \quad \cos x \neq 0$$

将各三角比用正弦、余弦表示，得

$$9\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{3}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

两边同乘正弦与余弦的乘积，得

$$9\cos^2 x + 3\cos x = \sin^2 x$$

由平方关系得

$$9\cos^2 x + 3\cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$10\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$$

$$(5\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{5} \quad 或 \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

令

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{5}\right) \approx 78.46304°$$

在题设范围内，余弦值为 $\frac{1}{5}$ 时，

$$x = \alpha, 360° - \alpha$$

余弦值为 $-\frac{1}{2}$ 时，

$$x = 120°, 240°$$

所得各角的正弦、余弦均非零。
答：$x \approx 78.5°, 281.5°$，或 $x = 120°, 240°$。

10. [2023 · October/November 0606/23 Q8(b)]

提示：看已证恒等式如何代入方程，求角后逐项核对原分母。

(a) Show that $\dfrac{\sin x}{\tan x-1}-\dfrac{\cos x}{\tan x+1}=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

(b) Hence solve the equation $\dfrac{\sin x}{\tan x-1}-\dfrac{\cos x}{\tan x+1}=1$ for $0°<x<360°$.

(a) 证明 $\frac{\sin x}{\tan x-1}-\frac{\cos x}{\tan x+1}=\frac{\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$。

(b) 由此，在 $0°<x<360°$ 的范围内，解方程 $\frac{\sin x}{\tan x-1}-\frac{\cos x}{\tan x+1}=1$。

✓ **答案**

$$x=60°,180°,300°$$

解析 在原式有意义时，

$$\cos x\neq 0,\quad \tan x\neq 1,\quad \tan x\neq -1$$

将正切用正弦、余弦表示，得

$$\frac{\sin x}{\tan x-1}-\frac{\cos x}{\tan x+1}=\frac{\sin x\cos x}{\sin x-\cos x}-\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}$$

通分，得

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x-\cos x}-\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)-\cos^2 x(\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}$$

化简分子与分母，得

$$\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)-\cos^2 x(\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}=\frac{\sin^2 x\cos x+\cos^3 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin^2 x\cos x+\cos^3 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x-\cos^2 x}$$

$$\frac{\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$$

故所给恒等式成立。由此，所求方程化为

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=1$$

原分母非零，两边同乘分母，得

$$\cos x=\sin^2 x-\cos^2 x$$

$$\cos x=1-2\cos^2 x$$

$$2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

$$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad 或 \quad \cos x = -1$$

在题设范围内，余弦值为 $\frac{1}{2}$ 时，

$$x = 60°, 300°$$

余弦值为 -1 时，

$$x = 180°$$

所得各角的余弦非零，正切也均不等于正一或负一。

答：$x = 60°, 180°, 300°$。

题型 10 用平方恒等式消去三角参数，写出 y 与 x 的关系

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **两边平方：**例题给出正割与 x 的关系。θ 表示两式中的同一个角，利用平方恒等式可消去_____。等式含平方根时，也可两边平方。

$\sec\theta = x - 4$

$\sec^2\theta = (x-4)^2$

$\sin\theta = \sqrt{y}$

$\sin^2\theta = y$

② **倒数关系：**正割、余割分别是余弦、正弦的_____。分母不为零时，有下列关系。例题的余切平方非零，可两边取倒数。

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\tan^2\theta = \frac{1}{\cot^2\theta} = y + 2$$

③ **平方恒等式：**同一个角的正弦、余弦满足下式。两边同除以非零的余弦平方或正弦平方，可得到另外两条平方恒等式。

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

同除以余弦平方：

$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

同除以正弦平方：

$1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$

$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

④ **分离三角函数：**三角函数前有系数或常数项时，先移项、除以系数。把三角函数单独写在等号一边，再平方。

$2 + \cot\theta = 3x$

$\cot\theta = 3x - 2$

$x = 2 - 3\sin\theta$

$\sin\theta = \frac{2-x}{3}$

⑤ **改写余切平方：**已知正弦而所求含余切平方时，把余切平方改写为正弦的式子。由平方恒等式移项，再用余割的倒数关系。

$$\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \frac{1}{\sin^2\theta} - 1$$

⑥ **确定平方根号：**出现 $2\operatorname{cosec}\theta = y$ 且 $y > 2$ 时，先判断正弦的符号。正弦为正，开平方取_____。

$$\sin\theta = \frac{2}{y} > 0$$

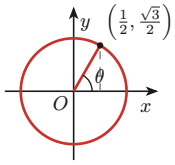
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

⑦

单位圆上的平方关系

$P=(\cos\theta,\sin\theta),\quad \theta=\frac{\pi}{3}$



填空：①θ　②倒数　③正根

点石成金　题目出现同一个角的两个三角函数关系，要求用 x 表示 y 时，先分离三角函数，再用平方恒等式消去角。

例 1　[2023 · May/June 0606/12 Q6(a)]

(a) Given that $\cot^2\theta=\dfrac{1}{y+2}$ and $\sec\theta=x-4$, find y in terms of x.

(a) 已知 $\cot^2\theta=\frac{1}{y+2}$，且 $\sec\theta=x-4$，求用 x 表示的 y。

解答　由已知，$\cot\theta\neq 0$，两边取倒数得

$$\tan^2\theta=\frac{1}{\cot^2\theta}=y+2$$

方法：先看余切平方与正割的关系，从余切平方取倒数起手。

辨析：正割是余弦的倒数，余割是正弦的倒数。

又由已知得

$$\sec^2\theta=(x-4)^2$$

由平方恒等式，

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$$

代入得

$$(x-4)^2=1+(y+2)=y+3$$

$$y=(x-4)^2-3$$

答：$y=(x-4)^2-3$。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/11 Q7]

提示：先把余切单独列出，再找连接余切平方与正弦平方的恒等式。

Given that $2+\cot\theta=3x$ and $\sin\theta=\sqrt{y}$, find y in terms of x.

已知 $2+\cot\theta=3x$，且 $\sin\theta=\sqrt{y}$，求用 x 表示的 y。

✓ **答案**

$$y=\frac{1}{(3x-2)^2+1}$$

解析　由已知得

$$\cot\theta=3x-2$$

$$\sin^2\theta=y$$

余切有定义，故 $\sin\theta\neq 0$，从而 $y>0$。由平方恒等式，

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{\sin^2\theta}=\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$$

代入得

$$\frac{1}{y}=1+(3x-2)^2$$

两边取倒数，得

$$y=\frac{1}{(3x-2)^2+1}$$

答：$y=\frac{1}{(3x-2)^2+1}$。

2. [2023 · February/March 0606/12 Q10(a)]

提示：看给定的纵坐标范围，判断正弦开平方时应取哪种符号。

(a) It is given that $2+\cos\theta=x$ for $1<x<3$ and $2\operatorname{cosec}\theta=y$ for $y>2$. Find y in terms of x.

(a) 已知 $2+\cos\theta=x$，其中 $1<x<3$；且 $2\operatorname{cosec}\theta=y$，其中 $y>2$。求用 x 表示的 y。

✓ **答案**

$$y=\frac{2}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$$

解析 由已知得

$$\cos\theta=x-2$$

$$\sin\theta=\frac{2}{y}$$

$\because y>2$，$\therefore 0<\sin\theta<1$。由平方恒等式，

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-(x-2)^2$$

取正根，得

$$\sin\theta=\sqrt{1-(x-2)^2}$$

于是

$$y=\frac{2}{\sin\theta}=\frac{2}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$$

由 $\sin\theta<1$ 得 $\cos\theta\neq 0$，故 $x\neq 2$。

答：$y=\frac{2}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$，其中 $1<x<3$ 且 $x\neq 2$。

3. [2025 · October/November 0606/12 Q13]

提示：看已知正弦与所求余切平方，用余割平方衔接两者。

For $-1\leqslant x\leqslant 1$ it is given that $x=2-3\sin\theta$ and $y=3\cot^2\theta$.

Find y in terms of x.

当 $-1\leq x\leq 1$ 时，已知 $x=2-3\sin\theta$，且 $y=3\cot^2\theta$。求用 x 表示的 y。

✓ **答案**

$$y = 3\left[\frac{9}{(2-x)^2} - 1\right]$$

解析 由已知得

$$\sin\theta = \frac{2-x}{3}$$

$\because -1 \le x \le 1$，$\therefore$

$$\frac{1}{3} \le \sin\theta \le 1$$

故正弦非零。由平方恒等式，

$$\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \frac{1}{\sin^2\theta} - 1$$

代入得

$$y = 3\cot^2\theta = 3\left[\frac{1}{\left(\frac{2-x}{3}\right)^2} - 1\right] = 3\left[\frac{9}{(2-x)^2} - 1\right]$$

答：$y = 3\left[\frac{9}{(2-x)^2} - 1\right]$，其中 $-1 \le x \le 1$。

4. [2022 · May/June 0606/12 Q2]

提示：用正割平方表示正切平方，再利用正切与余切的倒数关系。

Given that $x = \sec^2\theta$ and $y+2 = \cot^2\theta$, find y in terms of x.

已知$x = \sec^2\theta$且$y + 2 = \cot^2\theta$，求用x表示的y。

✓ **答案** $y = \frac{1}{x-1} - 2$。

解析 由正割、余切均有意义，得

$$\cos\theta \ne 0, \quad \sin\theta \ne 0$$

故$\tan\theta \ne 0$。由平方恒等式，得

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = x - 1$$

由正切与余切的倒数关系，得

$$y + 2 = \cot^2\theta = \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{x-1}$$

$$y = \frac{1}{x-1} - 2$$

由$\tan^2\theta > 0$，得$x > 1$，分母不为零。

答：$y = \frac{1}{x-1} - 2$。

5. [2022 · May/June 0606/13 Q9(b)]

提示：由余割平方求余切平方，再取倒数表示正切平方。

(b) Given that $2x-1 = \operatorname{cosec}^2\theta$ and $y+1 = \tan^2\theta$, find y in terms of x.

(b) 已知$2x - 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$且$y + 1 = \tan^2\theta$，求用$x$表示的$y$。

✓ **答案** $y = \frac{1}{2x-2} - 1$。

解析 由余割、正切均有意义，得

$$\sin\theta \neq 0,\quad \cos\theta \neq 0$$

故$\cot\theta \neq 0$。由平方恒等式，得

$$\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1 = (2x-1) - 1 = 2x - 2$$

由正切与余切的倒数关系，得

$$y + 1 = \tan^2\theta = \frac{1}{\cot^2\theta} = \frac{1}{2x-2}$$

$$y = \frac{1}{2x-2} - 1$$

由$\cot^2\theta > 0$，得$x > 1$，分母不为零。

答：$y = \frac{1}{2x-2} - 1$。

题型 11　分出不同三角零因子，分别求解后合并

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **移项提取因式：**例题两边都有相同的正弦式。移项后，先提取_____。

$$2\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\left(2\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right) - 1\right) = 0$$

② **分别求零因子：**乘积为零时，至少有一个因子等于_____。各因子分别求解，最后取全部解的并集。

正弦因子为零：

$\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right) = 0$

另一因子为零：

$2\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$

③ **合角范围还原：**令下式中的 t 表示合角，原范围两端同加 $\frac{\pi}{3}$。合角范围为_____，求角后再还原；各角均用弧度。

$$t = y + \frac{\pi}{3}$$

$$y = t - \frac{\pi}{3}$$

正弦零点与余弦方程的解如下，k 为整数。

$\sin t = 0$

$t = k\pi$

$\cos t = c$

$t = 2k\pi \pm \arccos c$

其中 $-1 \leq c \leq 1$，$\arccos c$ 表示余弦值为 c、范围在 $[0,\pi]$ 内的角。

④ **倒数函数化简：**出现余切、正切或余割时，先化成正弦与余弦的比。分母不为零时，可同乘分母；锐角余切方程可取倒数。

$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$

$\csc t = \frac{1}{\sin t}$

条件：$\sin t \neq 0$

$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$

条件：$\cos t \neq 0$

$$\cot t = 2 \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan t = \frac{1}{2}$$

$$t = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\arctan c$ 表示正切值为 c、范围在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内的角。

$$\tan t = 2\sin t \quad (\cos t \neq 0)$$

$$\sin t = 2\sin t\cos t$$

$$\sin t(1 - 2\cos t) = 0$$

⑤ **三次正弦降幂：**出现正弦的三次方时，先提取正弦因子。剩余的正弦平方用恒等式消去，再解余弦的二次方程。余弦值须在 $[-1, 1]$ 内。

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$$

$$\sin^3 t = 2\sin t\cos t$$

$$\sin t(1 - \cos^2 t - 2\cos t) = 0$$

$\sin t = 0$

$\cos^2 t + 2\cos t - 1 = 0$

$\cos t = -1 \pm \sqrt{2}$

$-1 - \sqrt{2} \leftarrow 1$

$\cos t = -1 + \sqrt{2}$

⑥ **平方因子求根：**余弦平方等于正数时，开方须保留正、负两值。各分支按范围求角，合并时相同的解只写一次。

$$\left(\cos^2 t - \frac{1}{4}\right)\tan t = 0$$

$\tan t = 0 \quad (\cos t \neq 0)$

$\sin t = 0$

$t = k\pi$

$\cos^2 t = \frac{1}{4}$

$\cos t = \pm\frac{1}{2}$

$t = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

或 $t = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

填空：①公因式　②零　③$\frac{\pi}{3} \leq t < 7\frac{\pi}{3}$

点石成金　题目出现两边含相同三角因子或几个因子的乘积等于零时，先移项并提取公因式。

例 1　[2025 · May/June 0606/22 Q9(b)]

(b) Solve the equation $2\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)$ for $0 \leqslant y < 2\pi$.

(b) 解方程
$2\cos(y + \frac{\pi}{3})\sin(y + \frac{\pi}{3}) = \sin(y + \frac{\pi}{3})$，
其中 $0 \leq y < 2\pi$。

解答　移项并提取公因式，得

$$\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\left(2\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right)-1\right)=0$$

令

$$t=y+\frac{\pi}{3}$$

由原范围得

$$\frac{\pi}{3}\leq t<7\frac{\pi}{3}$$

由正弦因子为零，得

$$\sin t=0$$

$$t=\pi,2\pi$$

代回得

$$y=\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$$

由另一因子为零，得

$$2\cos t-1=0$$

$$\cos t=\frac{1}{2}$$

在合角范围内，

$$t=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$$

代回得

$$y=0,\frac{4\pi}{3}$$

答：$y=0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$。

方法：看两边共有的正弦式，先移项再提取公因式。

辨析：并集是至少一个分支成立的解，交集是所有分支同时成立的解。

拓展：合角范围的端点随平移同步移动，开闭性质保持不变。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/21 Q8(a)]

提示：看余切与余弦两个因子，分别求零并核对定义域。

(a) Solve the equation $(2-3\cot x)\cos x=0$ for $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

(a) 解方程
$(2-3\cot x)\cos x=0$，
其中 $0<x\leq\frac{\pi}{2}$。

✓ **答案**　$x=\frac{\pi}{2}$ 或 $x\approx0.983$。

解析　由乘积为零，得

$$2-3\cot x=0$$

或

$$\cos x=0$$

由余切方程得

$$\cot x = \frac{2}{3}$$

$$\tan x = \frac{3}{2}$$

在所给范围内，

$$x = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.983$$

由余弦方程及所给范围得

$$x = \frac{\pi}{2}$$

此时正弦不为零，原式有意义。
答：$x = \frac{\pi}{2}$ 或 $x \approx 0.983$。

2. [2025 · October/November 0606/21 Q13]
提示：看正弦平方，换成余弦后比较根与余弦值域。

Solve the equation $2\sin^3\theta = 3\sin\theta\cos\theta$ for $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

解方程
$2\sin^3\theta = 3\sin\theta\cos\theta$，
其中 $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$。

✓ **答案** $\theta = 0, \pm\frac{\pi}{3}$。

解析 移项并提取公因式，得

$$\sin\theta(2\sin^2\theta - 3\cos\theta) = 0$$

由正弦因子为零及所给范围得

$$\theta = 0$$

由另一因子为零，得

$$2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$$

$$2(1 - \cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$$

$$2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$$

$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2) = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

或

$$\cos\theta = -2$$

余弦值不能小于 -1，故舍去后一值。
在所给范围内，

$$\theta = \pm\frac{\pi}{3}$$

答：$\theta = 0, \pm\frac{\pi}{3}$。

3. [2026 · May/June 0606/22 Q10]
提示：看合角的系数与常数，换算范围后检查正切分母。

Solve the equation $\tan(3x+1) = 5\sin(3x+1)$ for $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$.

解方程
$\tan(3x+1) = 5\sin(3x+1)$，
其中 $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$。

✓ **答案** $x \approx -0.790, -0.333, 0.123, 0.714$。

解析 令

$$t = 3x + 1$$

由原范围得

$$1 - \pi < t < 1 + \pi$$

原式中的正切有意义，故

$$\cos t \neq 0$$

将正切写成正弦与余弦的比，得

$$\frac{\sin t}{\cos t} = 5\sin t$$

$$\sin t = 5\sin t\cos t$$

$$\sin t(1 - 5\cos t) = 0$$

由正弦因子为零，得

$$\sin t = 0$$

在合角范围内，

$$t = 0, \pi$$

代回得

$$x = -\frac{1}{3} \approx -0.333$$

$$x = \frac{\pi - 1}{3} \approx 0.714$$

由另一因子为零，得

$$\cos t = \frac{1}{5}$$

在合角范围内，

$$t = \pm \arccos\left(\frac{1}{5}\right)$$

代回得

$$x = \frac{\arccos\left(\frac{1}{5}\right) - 1}{3} \approx 0.123$$

$$x = \frac{-\arccos\left(\frac{1}{5}\right) - 1}{3} \approx -0.790$$

所得各角的余弦均不为零，原式有意义。
答：$x \approx -0.790, -0.333, 0.123, 0.714$。

4. [2024 · May/June 0606/22 Q6(b)]
提示：看倒数函数的分母与余弦平方，核对定义域及正负根。

(a) Show that $\sin^3 x\left(\dfrac{\operatorname{cosec} x}{\cot x}\right)$ can be written as $\sin^2 x \tan x$.

(b) Solve the equation $\cos^2 x \tan x - \dfrac{1}{2}\tan x = 0$ for $-\pi < x < \pi$.

（a）证明

$\sin^3 x\left(\dfrac{\csc x}{\cot x}\right)$

可以写成 $\sin^2 x \tan x$。
（b）解方程
$\cos^2 x \tan x - \frac{1}{2}\tan x = 0$，
其中 $-\pi < x < \pi$。

✓ **答案**　（a）$\sin^2 x \tan x$；（b）$x = 0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$。

解析　在（a）的原式有意义时，

$$\sin x \neq 0, \quad \cos x \neq 0$$

由余割、余切的定义得

$$\sin^3 x\left(\frac{\csc x}{\cot x}\right) = \sin^3 x\left(\frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}\right) = \frac{\sin^3 x}{\cos x} = \sin^2 x \tan x$$

故所给式子可写成所要求的形式。
（b）原式中的正切有意义，故

$$\cos x \neq 0$$

提取公因式，得

$$\tan x\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

由正切因子为零，得

$$\tan x = 0$$

$$\sin x = 0$$

在所给范围内，

$$x = 0$$

由另一因子为零，得

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

当余弦取正值时，

$$x = \pm\frac{\pi}{4}$$

当余弦取负值时，

$$x = \pm\frac{3\pi}{4}$$

所得各角的余弦均不为零，原式有意义。
答：（b）$x = 0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$。

5. [2021 · May/June 0606/11 Q9(a)(ii)]
提示：先将前问的分解式用于三角方程，再令各因子分别为零。

(a) (i) Write $6xy+3y+4x+2$ in the form $(ax+b)(cy+d)$, where a, b, c and d are positive integers.

(ii) Hence solve the equation $6\sin\theta\cos\theta+3\cos\theta+4\sin\theta+2=0$ for $0° < \theta < 360°$.

（a）（i）将
$6xy + 3y + 4x + 2$
写成 $(ax + b)(cy + d)$ 的形式，其中 a、b、c、d 均为正整数。
（ii）由此解方程
$6\sin\theta\cos\theta + 3\cos\theta + 4\sin\theta + 2 = 0$，
其中 $0° < \theta < 360°$。

✓ **答案** $\theta = 131.8°, 210°, 228.2°, 330°$。

解析 由（a）（i），得

$$6xy + 3y + 4x + 2 = 3y(2x + 1) + 2(2x + 1) = (2x + 1)(3y + 2)$$

将 $x = \sin\theta$、$y = \cos\theta$ 代入，原方程成为

$$(2\sin\theta + 1)(3\cos\theta + 2) = 0$$

故有

$$\sin\theta = -\frac{1}{2} \quad 或 \quad \cos\theta = -\frac{2}{3}$$

当 $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ 时，正弦为负，角在第三或第四象限。参考角为

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

在 $0° < \theta < 360°$ 内，

$$\theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

$$\theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

当 $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ 时，余弦为负，角在第二或第三象限。

$$\theta = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 131.8103^\circ$$

或

$$\theta = 360^\circ - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 228.1897^\circ$$

合并两支的解，得
答：$\theta = 131.8^\circ, 210^\circ, 228.2^\circ, 330^\circ$。

第 11 章 排列与组合

Chapter 11

11.1 排列与组合

题型 1 用补集计数必含字符，并处理指定位置

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **逐位排列：**从数字 1 至 9 中选取不同数字，排成六位数。数字次序不同，所得的数不同。每用去一个数字，下一位便少 _____ 种选法，由乘法原理得

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60480$$

② **反面计数：**要求六位数含数字 4，可按是否含 4 分成两类。两类互不重合，合起来包含全部六位数。

含数字 4	不含数字 4
所求的一类	从其余 8 个数字中排列

$$\text{含 4 的个数} = 60480 - 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 60480 - 20160 = 40320$$

③ **至少一个：**密码含至少一个符号，其反面是密码中 _____。先求全部密码数，再减去仅由其余字符组成的密码数。

④ **受限位置：**仍用上述数字组成六位数，设前两位限用奇数，后两位限用偶数。先排受限位置，再排中间两位。中间两位从剩下的 5 个数字中依次选取。

前两位用奇数	后两位用偶数
5×4 种排法	4×3 种排法

$$(5 \times 4) \times (4 \times 3) \times (5 \times 4) = 4800$$

填空：①1　②不含任何符号

点石成金　题目出现不许重复、必须含某个字符或至少一个符号时，先求全部排列数，再减去全部不含的排列数。

例 1 [2026 · February/March 0606/22 Q4(a)]

(a) A 6-digit number is to be formed from the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
No digit may be used more than once in any 6-digit number.

Find how many 6-digit numbers can be formed in the following cases.

(i) There are no further restrictions.

(ii) The 6-digit number includes the digit 4.

4

(a) 用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 组成一个六位数。
任何数字在同一个六位数中均不得使用超过一次。
分别求下列情况下可以组成的六位数个数。
(i) 没有其他限制。
(ii) 六位数中含有数字 4。

解答　(i) 数字不能重复，六个位置的选法数依次为 9、8、7、6、5、4，故六位数的个数为

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60480$$

(ii) 不含数字 4 时，六个位置只能使用其余 8 个数字，所得六位数的个数为

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 20160$$

全部六位数分为含 4 和不含 4 两类，故含 4 的个数为

$$60480 - 20160 = 40320$$

答：(i) 60480 个；(ii) 40320 个。

方法：先看必须含 4 的条件，起手分别列全部与不含 4 的排列数。

辨析：至少一个是数量有下限，恰好一个是数量已确定。

拓展：同一组不同字符，交换位置会形成不同排列。

针对练习

1. [2023 · February/March 0606/12 Q7(a)]

提示：看字符总数与无符号时的可用数，对比逐位选法。

(a) A 5-character password is to be formed from the following 13 characters.

Letters	A	B	C	D	E
Numbers	9	8	7	6	5
Symbols	*	#	!		

No character may be used more than once in any password.

(i) Find the number of possible passwords that can be formed.

(ii) Find the number of possible passwords that contain at least one symbol.

7

(a) 用下列 13 个字符组成一个含 5 个字符的密码。

字母：A, B, C, D, E

数字：9, 8, 7, 6, 5

符号：*, #, !

任何字符在同一个密码中均不得使用超过一次。

(i) 求可以组成的密码个数。

(ii) 求至少含一个符号的密码个数。

答案　(i) 154440；(ii) 124200

解析　(i) 字符不能重复，五个位置的选法数依次为 13、12、11、10、9，故密码数为

$$13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 154440$$

(ii) 不含符号的密码仅使用字母和数字，可用字符数为

$$5 + 5 = 10$$

不含符号的密码数为

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$$

至少含一个符号的密码数，等于全部密码数减去不含符号的密码数，故

$$154440 - 30240 = 124200$$

答：(i) 154440 个；(ii) 124200 个。

2. [2023 · October/November 0606/13 Q5(a)]
提示：看无符号时的字符池，再数两端排定后中间剩多少可选。

(a) A 5-character password is to be formed from the following 10 characters.

Letters	A	B	C	X	Y	Z
Symbols	*	$	#	&		

No character can be used more than once in any 5-character password.

(i) Find the number of passwords that can be formed.

(ii) Find the number of passwords that can be formed if the password has to contain at least one symbol.

(iii) Find the number of passwords that can be formed if the password has to start with two letters and end with two symbols.

(a) 用下列 10 个字符组成一个含 5 个字符的密码。
字母：A, B, C, X, Y, Z
符号：*, $, #, &
任何字符在同一个含 5 个字符的密码中均不得使用超过一次。
(i) 求可以组成的密码个数。
(ii) 若密码必须至少含一个符号，求可以组成的密码个数。
(iii) 若密码必须以两个字母开头，并以两个符号结尾，求可以组成的密码个数。

✓ **答案** (i) 30240；(ii) 29520；(iii) 2160

解析 (i) 字符不能重复，五个位置的选法数依次为 10、9、8、7、6，故密码数为

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$$

(ii) 不含符号的密码仅使用 6 个字母，其个数为

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$$

至少含一个符号的密码数为

$$30240 - 720 = 29520$$

(iii) 先排前两位字母和后两位符号。前两位依次有 6、5 种选法，后两位依次有 4、3 种选法。已用去 4 个字符，中间一位的选法数为

$$10 - 4 = 6$$

由乘法原理，符合条件的密码数为

$$(6 \times 5) \times (4 \times 3) \times 6 = 2160$$

答：(i) 30240 个；(ii) 29520 个；(iii) 2160 个。

题型 2 先排受限位置，再排其余不重复字符

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **逐位安排：** 用 0, 2, 4, 5, 6, 8 不重复地组成四位数。千位选定后，其余三位依次有 5, 4, 3 种选法。各位选法数应 _____：

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$$

② **首位条件：** 四位数的首位不能为 _____。代码能否以 0 开头，按题目条件确定。先安排受限位置，再安排其余位置。

原例组成四位数

千位有 5 种选法

若组成允许零开头的四位代码

首位有 6 种选法

③ **末位条件：**所求带有奇偶或整除条件，先确定个位。原例中，个位可取的数字如下：

条件	个位可取的数字
奇数	5
偶数	0, 2, 4, 6, 8
能被 5 整除	0, 5
能被 10 整除	_____

④ **按尾数分类：**原例要求偶数时，按个位是否为 0 分类。两类的千位选法数不同，分别计数后应 _____。

个位为 0

千位有 5 种选法

个位为 2, 4, 6, 8

千位有 4 种选法

⑤ **首末同时受限：**沿用原例数字，要求四位数大于 5000 且为偶数。首位可取 5, 6, 8，先安排首末位。首末位选定后，中间两位依次有 4, 3 种选法。

首位为 5

个位有 5 种选法

首位为 6, 8

个位有 4 种选法

$$(1\times 5+2\times 4)\times 4\times 3=156$$

⑥ **指定字符个数：**用字母 b, f, g 与数字 1, 2 组成三字符代码，每个字符至多用一次。要求两个字母和一个数字，先定数字的位置。数字位置有 3 种，数字有 2 种，字母依次有 3, 2 种选法。

$$3\times 2\times 3\times 2=36$$

填空：①相乘　②0　③0　④相加

点石成金　题目出现不重复字符组成数、代码或密码，并限制首位、末位或字符个数时，先安排受限位置，再安排其余位置。

例 1　[2025 · May/June 0606/22 Q5(a)]

(a) A 4-digit number is to be formed using the digits 0, 2, 4, 5, 6 and 8.
The 4-digit number must **not** start with 0.
Any digit may be used at most once in the 4-digit number.

(i) Find how many 4-digit numbers can be formed.

(ii) Find how many even 4-digit numbers can be formed.

(iii) Find how many 4-digit numbers that are divisible by 5 can be formed.

(a) 用数字 0, 2, 4, 5, 6, 8 组成一个四位数。这个四位数不能以 0 开头。在任意一个四位数中，每个数字至多使用一次。
(i) 求可以组成的四位数的个数。
(ii) 求可以组成的四位偶数的个数。
(iii) 求可以组成的能被 5 整除的四位数的个数。

解答　(i) 千位不能为 0，有 5 种选法。其余三位依次有 5, 4, 3 种选法。

$$5\times 5\times 4\times 3=300$$

方法：先看首位与末位的限制，尾数受限时先排个位。

辨析：分步是各步选法数相乘，分类是互不重叠的各类计数相加。

(ii) 偶数的个位可取 0, 2, 4, 6, 8。
个位为 0 时，千位有 5 种选法，中间两位依次有 4, 3 种选法。

$$5\times 4\times 3=60$$

个位为 2, 4, 6, 8 时，个位有 4 种选法，千位有 4 种选法。

$$4\times 4\times 4\times 3=192$$

所求偶数的个数为

$$60 + 192 = 252$$

(iii) 能被 5 整除的数，个位为 0 或 5。
个位为 0 时，有 60 个。
个位为 5 时，千位不能取 0 或 5，有 4 种选法。

$$4 \times 4 \times 3 = 48$$

所求个数为

$$60 + 48 = 108$$

答：(i) 300 个；(ii) 252 个；(iii) 108 个。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/23 Q6(a)]
提示：先看大小条件限定哪一位，再数剩余位置的选法。

(a) Five of the digits 1 2 3 4 5 6 7 8 9 are used to make a 5-digit number.

Find how many ways this can be done when the 5-digit number is greater than 50 000.

(a) 用数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 中的五个组成一个五位数。求组成大于 50000 的五位数共有多少种方法。

✓ **答案**

8400

解析 五位数大于 50000，万位可取 $5, 6, 7, 8, 9$，有 5 种选法。
其余四位从剩下的八个数字中依次选取，选法数分别为 $8, 7, 6, 5$。

$$5 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 8400$$

答：共有 8400 种。

2. [2025 · October/November 0606/23 Q5(a)]
提示：先按对有无零，再按已用数字个数逐位减少选法。

Six different digits are chosen from the nine digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
These digits are used to form a 6-digit number.
Find how many 6-digit numbers can be formed in the following cases.

(a) There are no restrictions.

从九个数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 中选出六个不同的数字，用这些数字组成一个六位数。求下列情形中可以组成的六位数的个数。
(a) 没有限制。

✓ **答案**

60480

解析 九个数字均非零，首位有 9 种选法。每个数字只能使用一次，其余五位依次有 $8, 7, 6, 5, 4$ 种选法。

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60480$$

答：共有 60480 个。

3. [2025 · October/November 0606/22 Q5(a)]
提示：先合计三类字符，再看每填一位后还剩多少字符。

A 6-character password is to be formed from the following characters.

Letters	b	f	g	k	m
Numbers	3	5	7	9	
Symbols	*	!	@		

Each character can be used at most once in any 6-character password.

(a) Find the number of 6-character passwords that can be formed if there are no further restrictions.

用下列字符组成一个含六个字符的密码。
字母：b, f, g, k, m。
数字：3, 5, 7, 9。
符号：*, !, @。
在任意一个含六个字符的密码中，每个字符至多使用一次。
(a) 若没有其他限制，求可以组成的六字符密码的个数。

✓ **答案**

665280

解析 可用字符有五个字母、四个数字和三个符号。

$$5+4+3=12$$

每个字符至多使用一次，六个位置依次有 $12, 11, 10, 9, 8, 7$ 种选法。

$$12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7=665280$$

答：共有 665280 个。

4. [2023 · October/November 0606/11 Q5(a)]
提示：逐问看首末位限制，比较代码与数对首位零的要求。

(a) A 4-digit code is to be formed from the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 and 9. No digit may be used more than once in any code. A code may start with 0.

(i) Find how many codes can be formed.

(ii) Find how many codes form an odd number.

(iii) Find how many codes form a number greater than 1000.

(a) 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 组成一个四位代码。在任意一个代码中，每个数字至多使用一次。代码可以以 0 开头。
(i) 求可以组成的代码的个数。
(ii) 求构成奇数的代码的个数。
(iii) 求构成大于 1000 的数的代码的个数。

✓ **答案** (i) 5040；(ii) 2520；(iii) 4536

解析 (i) 代码允许以 0 开头，四个位置依次有 $10, 9, 8, 7$ 种选法。

$$10\times 9\times 8\times 7=5040$$

(ii) 构成奇数时，末位可取 $1, 3, 5, 7, 9$，有 5 种选法。
其余三位允许以 0 开头，依次有 $9, 8, 7$ 种选法。

$$5\times 9\times 8\times 7=2520$$

(iii) 构成大于 1000 的数时，首位不能为 0，有 9 种选法。
各位数字不重复，不会构成 1000；首位非零时均满足条件。

$$9\times 9\times 8\times 7=4536$$

答：(i) 5040 个；(ii) 2520 个；(iii) 4536 个。

5. [2023 · October/November 0606/12 Q7(a)]

提示：看整除条件限定的尾数，比较各类尾数下首位的选法。

(a) A 6-digit number is to be formed using the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 and 9. Each digit can be used only once in any 6-digit number. A 6-digit number cannot start with 0.

(i) Find how many 6-digit numbers can be formed.

(ii) Find how many of these 6-digit numbers are divisible by 5.

(a) 用数字 $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 组成一个六位数。在任意一个六位数中，每个数字只能使用一次。六位数不能以 0 开头。

(i) 求可以组成的六位数的个数。

(ii) 求这些六位数中能被 5 整除的数的个数。

✓ **答案** (i) 136080；(ii) 28560

解析 (i) 首位不能为 0，有 9 种选法，其余五位依次有 $9,8,7,6,5$ 种选法。

$$9\times9\times8\times7\times6\times5=136080$$

(ii) 能被 5 整除，个位为 0 或 5。

个位为 0 时，其余五位依次有 $9,8,7,6,5$ 种选法。

$$9\times8\times7\times6\times5=15120$$

个位为 5 时，首位不能取 0 或 5，有 8 种选法，中间四位依次有 $8,7,6,5$ 种选法。

$$8\times8\times7\times6\times5=13440$$

所求个数为

$$15120+13440=28560$$

答：(i) 136080 个；(ii) 28560 个。

6. [2025 · February/March 0606/22 Q4(b)]

提示：按个位是否占用零分类，比较首位还需排除哪些数字。

(b) A 6-digit number is to be formed using the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 and 9. The 6-digit number cannot start with 0 and all six digits must be different.

Find how many 6-digit numbers can be formed if the 6-digit number is even.

(b) 用数字 $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 组成一个六位数。这个六位数不能以 0 开头，且六个数字必须互不相同。求可以组成的六位偶数的个数。

✓ **答案**

$$68880$$

解析 六位数为偶数，个位可取 $0,2,4,6,8$。

个位为 0 时，其余五位依次有 $9,8,7,6,5$ 种选法。

$$9\times8\times7\times6\times5=15120$$

个位为 $2,4,6,8$ 时，个位有 4 种选法。首位不能取 0 或已用的个位数字，有 8 种选法。

中间四位依次有 $8,7,6,5$ 种选法。

$$4\times8\times8\times7\times6\times5=53760$$

所求个数为

$$15120+53760=68880$$

答：共有 68880 个。

7. [2024 · October/November 0606/21 Q10(b)]

提示：先看数字可放哪些位置，再数其余位置的字母选法。

(b) A 5-character code is to be formed from the following characters.

Letters	A	B	C	D	E	F
Numbers	1	2	3			

No character may be used more than once in any code. The characters may be arranged in any order.

Find the number of different codes that can be formed using 4 letters and 1 number.

(b) 用下列字符组成一个含五个字符的代码。

字母：A, B, C, D, E, F。

数字：1, 2, 3。

在任意一个代码中，每个字符至多使用一次。字符可以按任意顺序排列。求用四个字母和一个数字可以组成的不同代码的个数。

✓ **答案**

5400

解析 代码含一个数字，数字所在的位置有 5 种选法，数字本身有 3 种选法。

其余四个位置填入不同字母，依次有 6, 5, 4, 3 种选法。

$$5 \times 3 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 5400$$

答：共有 5400 个。

8. [2026 · May/June 0606/21 Q6]

提示：先按末位是 0 还是 5 分类，再确定首位的可选数字。

A 5-digit number is to be formed from the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 and 9.

No digit may be used more than once in any 5-digit number.

Find how many of these 5-digit numbers are greater than 40 000 and divisible by 5.

用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 组成五位数，每个数字在同一个五位数中最多使用一次。求其中大于 40000 且能被 5 整除的五位数个数。

✓ **答案** 3696。

解析 能被 5 整除，末位只能为 0 或 5。分两类计数。

末位为 0：首位可取 4, 5, 6, 7, 8, 9，有 6 种选择。排好首末两位，剩下 8 个数字中依次选 3 个填入中间三位，故有

$$6 \times 8 \times 7 \times 6 = 2016$$

末位为 5：首位可取 4, 6, 7, 8, 9，有 5 种选择。中间三位仍从余下 8 个数字中依次选取，故有

$$5 \times 8 \times 7 \times 6 = 1680$$

两类互不重合，所求总数为

$$2016 + 1680 = 3696$$

答：共有 3696 个。

9. [2024 · February/March 0606/12 Q8(a)]

提示：先看首末位限制，再比较首位奇偶对末位选法的影响。

(a) A 5-digit number is to be formed using 5 different numbers selected from 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 and 9. No digit may be used more than once in any 5-digit number.

(i) Find how many 5-digit numbers can be formed.

(ii) Find how many of these 5-digit numbers are greater than 50 000 and even.

(a) 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中选出五个不同的数字，组成一个五位数。在任意一个五位数中，每个数字至多使用一次。
(i) 求可以组成的五位数的个数。
(ii) 求这些五位数中大于 50000 且为偶数的数的个数。

✓ **答案** (i) 15120；(ii) 3780

解析 (i) 从九个非零数字中依次选取五个，五个位置分别有 9, 8, 7, 6, 5 种选法。

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$

(ii) 大于 50000，万位可取 5, 6, 7, 8, 9；又为偶数，个位可取 2, 4, 6, 8。
万位为 5, 7, 9 时，万位有 3 种选法，个位有 4 种选法，中间三位依次有 7, 6, 5 种选法。

$$3 \times 4 \times 7 \times 6 \times 5 = 2520$$

万位为 6, 8 时，万位有 2 种选法，个位不能与万位相同，有 3 种选法。

$$2 \times 3 \times 7 \times 6 \times 5 = 1260$$

所求个数为

$$2520 + 1260 = 3780$$

答：(i) 15120 个；(ii) 3780 个。

10. [2023 · May/June 0606/12 Q7(b)]
提示：逐问看末位条件，首末同时受限时比较两位能否取同数。

(b) 6-digit numbers are to be formed using the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Each digit may be used only once in any 6-digit number. A 6-digit number must not start with 0. Find how many 6-digit numbers can be formed if

(i) there are no further restrictions

(ii) the 6-digit number is divisible by 10

(iii) the 6-digit number is greater than 500 000 and even.

(b) 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 组成六位数。在任意一个六位数中，每个数字只能使用一次。六位数不能以 0 开头。求下列各情形中可以组成的六位数的个数。
(i) 没有其他限制。
(ii) 六位数能被 10 整除。
(iii) 六位数大于 500000 且为偶数。

✓ **答案** (i) 136080；(ii) 15120；(iii) 38640

解析 (i) 首位不能为 0，有 9 种选法，其余五位依次有 9, 8, 7, 6, 5 种选法。

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136080$$

(ii) 能被 10 整除，个位必须为 0。其余五位依次有 9, 8, 7, 6, 5 种选法。

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$

(iii) 大于 500000，首位可取 5, 6, 7, 8, 9；又为偶数，个位可取 0, 2, 4, 6, 8。
首位为 5, 7, 9 时，首位有 3 种选法，个位有 5 种选法。中间四位依次有 8, 7, 6, 5 种选法。

$$3 \times 5 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 25200$$

首位为 6, 8 时，首位有 2 种选法，个位不能与首位相同，有 4 种选法。

$$2 \times 4 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 13440$$

各位数字不重复，不会构成 500000，上述两类均满足大小条件。所求个数为

$$25200 + 13440 = 38640$$

答：(i) 136080 个；(ii) 15120 个；(iii) 38640 个。

题型 3　按各类入选人数分类，相乘后相加

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **无序选取：** 从 7 名女生中选 3 人，组内_____入选顺序。用组合数 $\binom{n}{r}$ 表示从 n 个不同对象中选 r 个的选法数。n, r 为整数，且 $0 \le r \le n$。

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n \times (n-1) \cdots (n-r+1)}{r \times (r-1) \cdots 1} \quad (1 \le r \le n)$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

② **人数范围：** 选 6 人，至少有 3 名女生、2 名男生。设入选女生、男生分别为 g, b 人，由总人数限制各类人数。

$$g + b = 6, \quad g \ge 3, \quad b \ge 2$$

$$3 \le g = 6 - b \le 4$$

女生 3 人	女生 4 人
男生 3 人	男生 2 人

③ **分类计数：** 同一人数情形内，各类选法数_____。不同人数情形互不重复，各情形的选法数_____。

3 女 3 男	4 女 2 男
$\binom{7}{3} \times \binom{8}{3}$	$\binom{7}{4} \times \binom{8}{2}$

$$\binom{7}{3}\binom{8}{3} + \binom{7}{4}\binom{8}{2}$$

④ **等量约束：** 若这 6 人中女生与男生人数相同，先设两类人数相等。有第三类时，用总人数减去这两类人数。设总人数为 t，前两类各选 k 人，第三类选 p 人。

$$g = b, \quad g + b = 6$$

$$2g = 6, \quad g = b = 3$$

$$p = t - k - k = t - 2k$$

⑤ **三类人数：** 运动员选 4 人，每类至少 1 人，按人数分配列出各情形。每类入选人数不得超过该类总人数。某类共 2 人且至少选 2 人，该类便全选。

跑步运动员	游泳运动员	体操运动员
2	1	1
1	2	1
1	1	2

⑥ **排除合并：** 若选 3 人且不选男生，可选对象剩下 7 名女生。若女生分属两班，人数为 3 与 4，未限班级则合并选取。

$$\binom{3+4}{3}=\binom{7}{3}=35$$

填空：①不计　②相乘　③相加

点石成金　题目出现从几类对象中选人或选物，并限制各类入选人数时，先列全人数分配，再把各类选法数相乘、各情形相加。

例 1　[2024 · October/November 0606/21 Q10(a)]

(a) A class contains 7 girls and 8 boys. A group of 6 is selected from the class. The group must contain at least 3 girls and at least 2 boys. Find the number of different groups that can be selected.

(a) 一个班有 7 名女生和 8 名男生。从这个班中选出 6 人组成一组。组内必须至少有 3 名女生和至少 2 名男生。求共有多少种不同的选法。

解答　设入选女生为 g 人，男生为 b 人，由题意得

$$g+b=6,\quad g\geq 3,\quad b\geq 2$$

$$3\leq g=6-b\leq 4$$

故女生与男生的人数分配为 $(3,3)$ 或 $(4,2)$。各情形内分别选取，各情形互不重复，所求组数为

$$\binom{7}{3}\binom{8}{3}+\binom{7}{4}\binom{8}{2}$$

$$=35\times 56+35\times 28$$

$$=1960+980$$

$$=2940$$

答：共有 2940 种不同的选法。

方法：先看总人数与各类下限，列出可行人数分配。

辨析：相乘是合并同一分配内的选法，相加是汇总互不重复的分配。

拓展：选入的成员与留下的成员一一对应，两种计数所得相同。

针对练习

1.　[2024 · May/June 0606/12 Q4(c)]

提示：先设两类相等人数，再用警察总数限制剩余人数。

A team of 8 people is to be formed from 6 teachers, 5 doctors and 4 police officers.

(c) Find the number of teams that can be formed with the same number of doctors as teachers.

从 6 名教师、5 名医生和 4 名警察中选出 8 人组成一支队伍。

(c) 求医生人数与教师人数相同的队伍共有多少种不同的组成方法。

✓ **答案**　1425

解析　设教师与医生各选 k 人，则警察选 $(8-2k)$ 人。由警察共有 4 人得

$$0\leq 8-2k\leq 4$$

$$2\leq k\leq 4$$

结合教师、医生的人数，k 可取 $2,3,4$。按教师、医生、警察的顺序，人数分配如下。

教师	医生	警察
2	2	4
3	3	2
4	4	0

各情形互不重复，所求队伍数为

$$\binom{6}{2}\binom{5}{2}\binom{4}{4}+\binom{6}{3}\binom{5}{3}\binom{4}{2}+\binom{6}{4}\binom{5}{4}\binom{4}{0}$$

$$=15\times10\times1+20\times10\times6+15\times5\times1$$

$$=150+1200+75$$

$$=1425$$

答：共有 1425 种不同的组队方法。

2. [2026 · February/March 0606/22 Q4(b)]
提示：对照男女各自的最低人数，夹出女生人数范围。

(b) A class contains 10 girls and 12 boys.
A group of 6 students is to be selected from the class.
There must be at least 2 girls and at least 2 boys in the group.

Find the number of different selections that can be made.

(b) 一个班有 10 名女生和 12 名男生。
从这个班中选出 6 名学生组成一组。
组内必须至少有 2 名女生和至少 2 名男生。
求共有多少种不同的选法。

✓ **答案** 62535

解析 设选出女生 g 人，则男生有 $(6-g)$ 人。由两类都至少选 2 人得

$$g\geq2,\quad 6-g\geq2$$

$$2\leq g\leq4$$

女生与男生的人数分配如下。

女生	男生
2	4
3	3
4	2

各情形互不重复，所求选法数为

$$\binom{10}{2}\binom{12}{4}+\binom{10}{3}\binom{12}{3}+\binom{10}{4}\binom{12}{2}$$

$$=45\times495+120\times220+210\times66$$

$$=22275+26400+13860$$

$$=62535$$

答：共有 62535 种不同的选法。

3. [2025 · October/November 0606/21 Q3(b)]

提示：把元音下限与现有元音数比较，再由总数配出辅音数。

(b) In the 13-letter word MULTIBRANCHED, there are 4 vowels, U, I, A and E.

7 different letters are selected from these 13 letters.

Find how many different selections are possible if the selection includes at least 2 vowels.

(b) 单词 MULTIBRANCHED 由 13 个字母组成，其中有 4 个元音字母：U、I、A 和 E。
从这 13 个字母中选出 7 个不同的字母。
若选出的字母中至少包含 2 个元音字母，求共有多少种不同的选法。

✓ **答案** 1344

解析 这 13 个字母互不相同，其中元音字母有 4 个，辅音字母有

$$13-4=9$$

设选出元音字母 v 个，则辅音字母有 $(7-v)$ 个。由至少选 2 个元音字母得

$$2\le v\le 4$$

元音与辅音的个数分配如下。

元音字母	辅音字母
2	5
3	4
4	3

所求选法数为

$$\binom{4}{2}\binom{9}{5}+\binom{4}{3}\binom{9}{4}+\binom{4}{4}\binom{9}{3}$$

$$=6\times 126+4\times 126+1\times 84$$

$$=756+504+84$$

$$=1344$$

答：共有 1344 种不同的选法。

4. [2025 · May/June 0606/21 Q3(b)]

提示：先给每类分配最低人数，再看剩余名额可归哪类。

A sports club has the following members.

5 runners, 4 swimmers, 3 gymnasts

(b) Four of these members are selected for an event.

Find the number of ways that this can be done when at least one runner, at least one swimmer and at least one gymnast must be selected.

一个体育俱乐部有以下成员：
5 名跑步运动员、4 名游泳运动员、3 名体操运动员。
(b) 从这些成员中选出 4 人参加一项活动。
若必须至少选出 1 名跑步运动员、至少 1 名游泳运动员和至少 1 名体操运动员，求共有多少种选法。

✓ **答案** 270

解析 共选 4 人，且三类运动员各至少选 1 人，因此有一类选 2 人，其余两类各选 1 人。人数分配如下。

跑步运动员	游泳运动员	体操运动员
2	1	1
1	2	1
1	1	2

各情形互不重复，所求选法数为

$$\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{2}$$

$$=10\times4\times3+5\times6\times3+5\times4\times3$$

$$=120+90+60$$

$$=270$$

答：共有 270 种不同的选法。

5. [2026 · May/June 0606/22 Q5(b)]

提示：用教师人数下限限制学生人数上限，再核对各类总数。

(b) A committee of 10 people is to be selected from 9 students and 7 teachers.

Find the number of different committees that can be selected if the committee must have at least 4 students and at least 4 teachers.

(b) 从 9 名学生和 7 名教师中选出 10 人组成一个委员会。
若委员会必须至少有 4 名学生和至少 4 名教师，求共有多少种不同的组成方法。

✓ **答案** 6468

解析 设选出学生 s 人，则教师有 $(10-s)$ 人。由两类都至少选 4 人得

$$s\geq4,\quad 10-s\geq4$$

$$4\leq s\leq6$$

学生与教师的人数分配如下。

学生	教师
4	6
5	5
6	4

所求委员会数为

$$\binom{9}{4}\binom{7}{6}+\binom{9}{5}\binom{7}{5}+\binom{9}{6}\binom{7}{4}$$

$$=126\times7+126\times21+84\times35$$

$$=882+2646+2940$$

$$=6468$$

答：共有 6468 种不同的组成方法。

6. [2024 · May/June 0606/21 Q5(b)]
提示：逐问看受限类别，其余类别未分别受限时可合并。

There are 3 women, 2 men and 4 children in a choir.

(b) Four of the choir are selected to sing in a group.

(i) Find the number of different selections if no man is chosen.

(ii) Find the number of different selections if at least 2 women are chosen.

一个合唱团有 3 名女性、2 名男性和 4 名儿童。
(b) 从合唱团中选出 4 人组成一个演唱小组。
(i) 若不选男性，求共有多少种不同的选法。
(ii) 若至少选出 2 名女性，求共有多少种不同的选法。

✓ **答案** (i) 35；(ii) 51

解析 (i) 不选男性，可从 3 名女性和 4 名儿童中选 4 人。所求选法数为

$$\binom{3+4}{4}=\binom{7}{4}=35$$

答：共有 35 种不同的选法。

(ii) 至少选 2 名女性，而女性共有 3 名，故女性可选 2 人或 3 人。男性与儿童未分别限制，可合为

$$2+4=6$$

人。两种人数分配为

女性 2 人	女性 3 人
其余成员 2 人	其余成员 1 人

所求选法数为

$$\binom{3}{2}\binom{6}{2}+\binom{3}{3}\binom{6}{1}$$

$$=3\times 15+1\times 6$$

$$=45+6$$

$$=51$$

答：共有 51 种不同的选法。

7. [2024 · February/March 0606/12 Q8(b)]
提示：先比较护士总数与下限，再用牙医人数限制医生人数。

(b) A team of 9 people is to be chosen from 6 doctors, 4 dentists and 2 nurses. Find how many possible teams include at least 2 doctors, at least 2 dentists and at least 2 nurses.

(b) 从 6 名医生、4 名牙医和 2 名护士中选出 9 人组成一支队伍。求至少包含 2 名医生、至少 2 名牙医和至少 2 名护士的队伍共有多少种不同的组成方法。

✓ **答案** 116

解析 护士共有 2 人，且至少选 2 人，故两名护士全部入选。医生与牙医共选

$$9-2=7$$

人。设医生选 d 人，则牙医选 $(7-d)$ 人。由牙医至少选 2 人且最多选 4 人得

$$2\le 7-d\le 4$$

$$3 \le d \le 5$$

各取值均满足至少选 2 名医生，人数分配如下。

医生	牙医	护士
3	4	2
4	3	2
5	2	2

所求队伍数为

$$\binom{6}{3}\binom{4}{4}\binom{2}{2} + \binom{6}{4}\binom{4}{3}\binom{2}{2} + \binom{6}{5}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$$

$$= 20 \times 1 \times 1 + 15 \times 4 \times 1 + 6 \times 6 \times 1$$

$$= 20 + 60 + 36$$

$$= 116$$

答：共有 116 种不同的组队方法。

8. [2023 · October/November 0606/13 Q5(b)]

提示：先设医生与教师的相等人数，再核对三类人数上限。

(b) A team of 8 people is to be chosen from 5 doctors, 4 teachers and 6 police officers.

Find how many possible teams have the same number of doctors as teachers.

(b) 从 5 名医生、4 名教师和 6 名警察中选出 8 人组成一支队伍。
求医生人数与教师人数相同的队伍共有多少种不同的组成方法。

✓ **答案** 1525

解析 设医生与教师各选 k 人，则警察选 $(8-2k)$ 人。由警察共有 6 人得

$$0 \le 8 - 2k \le 6$$

$$1 \le k \le 4$$

结合医生、教师的人数，k 可取 $1, 2, 3, 4$。人数分配如下。

医生	教师	警察
1	1	6
2	2	4
3	3	2
4	4	0

各情形互不重复，所求队伍数为

$$\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{6}{6} + \binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{6}{4} + \binom{5}{3}\binom{4}{3}\binom{6}{2} + \binom{5}{4}\binom{4}{4}\binom{6}{0}$$

$$= 5 \times 4 \times 1 + 10 \times 6 \times 15 + 10 \times 4 \times 15 + 5 \times 1 \times 1$$

$$= 20 + 900 + 600 + 5$$

$$= 1525$$

答：共有 1525 种不同的组队方法。

题型 4　把相邻对象捆成一块，并处理首末限制

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **顺次排列：** 3 名男子排成一列，首位有 3 种选择。第二位有 2 种选择，末位有 1 种。各次选择的种数相乘。

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

② **阶乘记号：** 上述乘积记作 3!。正整数 n 的阶乘，是从 n 起逐个减 1，乘至 _____ 的积。

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

③ **相邻捆块：** 3 名男子必须相邻，把他们捆成一块。这一块与 3 名女子共有 _____ 个排列对象。先排列这几个对象。

$$4! = 24$$

④ **块内次序：** 排好各块后，再确定块内次序。块外排法数与块内排法数相乘。

3 名男子次序不限	3 名男子次序已定
块内有 3! 种排法	块内有 _____ 种排法
$4! \times 3! = 144$	$4! \times 1 = 24$

⑤ **多组分别相邻：** 3 名男子各自相邻，3 名女子也各自相邻。分别捆成两块，先排两块，再排各块内部。

$$2! \times 3! \times 3! = 72$$

⑥ **首末位置受限：** 3 名男子与 3 名女子排队，首末两人均为女子。首位有 3 种选择，末位剩 2 种选择。排好两端后，再排余下 4 人。

$$3 \times 2 \times 4! = 144$$

填空：①1　②4　③1

点石成金　题目出现某些人或字母必须相邻的条件时，先将这些对象捆成一块，再分别计算块外与块内的排法数。

例 1　[2025 · October/November 0606/21 Q3(a)]

(a) 3 men and 3 women are standing in a line.
The 3 men are standing next to each other.

Find how many different arrangements are possible.

(a) 3 名男子和 3 名女子站成一列。3 名男子彼此相邻而站。求可能的不同排列数。

解答　将 3 名男子捆成一块，与 3 名女子一起排列，排列对象共有

$$1 + 3 = 4$$

块外的排法数为

$$4! = 24$$

3 名男子在块内的排法数为

$$3! = 6$$

因此，不同排列的总数为

$$4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$$

方法：先看必须相邻的是哪些人，将这组人视作一个对象起排。

辨析：相邻是位置连在一起，次序固定是内部顺序不变。

答：共有 144 种不同的排列。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/22 Q7(b)]

提示：看 MATHS 内部顺序是否固定，再数块外排列对象。

Find the number of different ways the 9 letters of the word POLYMATHS can be arranged when

(b) the letters MATHS are together in this order.

求单词 POLYMATHS 的 9 个字母在下列条件下的不同排列数。
(b) 字母 MATHS 相邻，且按 M、A、T、H、S 的顺序排列。

✓ **答案**

120

解析 将 MATHS 捆成一块，与 P、O、L、Y 一起排列，排列对象共有

$$1 + 4 = 5$$

MATHS 的内部次序已定，块内只有 1 种排法。
因此，不同排列的总数为

$$5! \times 1 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

答：共有 120 种不同的排列。

2. [2025 · May/June 0606/21 Q3(a)]

提示：按运动项目分块，分别看块的顺序与各块内部顺序。

A sports club has the following members.

5 runners, 4 swimmers, 3 gymnasts

(a) These members stand in a straight line.

Find the number of ways that this can be done when all the runners stand together, all the swimmers stand together and all the gymnasts stand together.

某体育俱乐部有以下成员：5 名跑步运动员、4 名游泳运动员、3 名体操运动员。
(a) 这些成员站成一条直线。所有跑步运动员站在一起，所有游泳运动员站在一起，所有体操运动员站在一起，求不同的排列数。

✓ **答案**

103680

解析 将 5 名跑步运动员、4 名游泳运动员、3 名体操运动员分别捆成一块。
3 块的排法数为

$$3! = 6$$

各块内部的排法数分别为

$$5! = 120$$

$$4! = 24$$

$$3! = 6$$

因此，不同排列的总数为

$$3! \times 5! \times 4! \times 3! = 6 \times 120 \times 24 \times 6 = 103680$$

答：共有 103680 种不同的排列。

3. [2024 · May/June 0606/21 Q5(a)]
提示：首末受限先看两端人选；儿童相邻再分块外与块内。

There are 3 women, 2 men and 4 children in a choir.

(a) The choir stands in a single straight line.

(i) Find the number of possible arrangements if the first person and last person are both women.

(ii) Find the number of possible arrangements if all the children stand next to each other.

某合唱团有 3 名女子、2 名男子和 4 名儿童。
(a) 合唱团成员站成一条直线。
(i) 如果第一人和最后一人都是女子，求可能的排列数。
(ii) 如果所有儿童都相邻而站，求可能的排列数。

✓ **答案** (i) 30240；(ii) 17280

解析 (i) 首位从 3 名女子中选一人，末位从余下的 2 名女子中选一人，两端的排法数为

$$3 \times 2 = 6$$

余下的人数为

$$3 + 2 + 4 - 2 = 7$$

这 7 人在中间任意排列，因此总排法数为

$$3 \times 2 \times 7! = 6 \times 5040 = 30240$$

答：共有 30240 种不同的排列。

(ii) 将 4 名儿童捆成一块，与 3 名女子、2 名男子一起排列，排列对象共有

$$1 + 3 + 2 = 6$$

块外有 6! 种排法，4 名儿童在块内有 4! 种排法。
因此，不同排列的总数为

$$6! \times 4! = 720 \times 24 = 17280$$

答：共有 17280 种不同的排列。

4. [2021 · February/March 0606/22 Q8(a)(iii)]
提示：所有山景照片必须相邻，先将它们捆成一块，再分别排列块外和块内。

A photographer takes 12 different photographs. There are 3 of sunsets, 4 of oceans, and 5 of mountains.

(a) The photographs are arranged in a line on a wall.

(iii) How many possible arrangements are there if all the photographs of mountains are next to each other?

一名摄影师拍摄了 12 张不同的照片，其中 3 张是日落照片，4 张是海洋照片，5 张是山景照片。
(a) 将这些照片在墙上排成一行。
(iii) 若所有山景照片都彼此相邻，共有多少种排列？

✓ **答案** 4838400种。

解析 将 5 张山景照片捆成一块，与其余照片一起排列。排列对象共有

$$1 + 3 + 4 = 8$$

这 8 个对象的排法数为

$$8! = 40320$$

5 张山景照片均不同，块内排法数为

$$5! = 120$$

块外排法数与块内排法数相乘，得

$$8! \times 5! = 40320 \times 120 = 4838400$$

答：共有4838400种排列。

5. [2022 · February/March 0606/22 Q3(b)]
提示：将彼此相邻的男生捆成一块，块内的不同次序也要计入。

A group of students, 4 girls and 3 boys, stand in line.

(b) Find the number of different ways the students can stand in line if the 3 boys are next to each other.

一组学生站成一列，其中有 4 名女生和 3 名男生。
(b) 若 3 名男生彼此相邻，求这些学生站成一列的不同排列数。

✓ **答案** 720种。

解析 将 3 名男生捆成一块，与 4 名女生一起排列。排列对象共有

$$1 + 4 = 5$$

块外排法数为

$$5! = 120$$

3 名男生在块内的排法数为

$$3! = 6$$

因此，不同排列的总数为

$$5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$$

答：共有720种不同的排列。

题型 5 指定一组成员全入选或全不入选

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **不计顺序：** 从 15 人中选 8 人，队员相同就算同一队。组队不计队员顺序，用_____计数。

② **阶乘运算：** 正整数 n 的阶乘记作 $n!$，表示从 n 连乘至 1。

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

另规定：

$$0! = 1$$

③ **组合计算：** $\binom{15}{8}$ 表示从 15 人中选出 8 人的组合数。先数有顺序的选法，再除以这 8 人的排列数。

$$\binom{15}{8} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{8!} = \frac{15!}{8!7!}$$

一般地，总人数 n、选出人数 r 均为非负整数：

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad 0 \le r \le n$$

④ **全入全不：**家庭成员不得分开，分为全入选或全不入选两种情形。其余人数为：

$$15-4=11$$

家庭全入选	家庭全不入选
已选入 _____ 人	已选入 _____ 人
从其余 11 人中选 $8-4$ 人	从其余 11 人中选 8 人

⑤ **分类求和：**两类队伍互不重叠，且包含全部合要求的队伍。将两类队伍数_____，得到总数。

$$\binom{11}{4}+\binom{11}{8}$$

← 填空：①组合　②4　③0　④相加

点石成金　题目出现选队且指定成员不得分开时，先分全入选、全不入选两类，再分别用组合计数并相加。

例 1　[2023 · May/June 0606/11 Q7(a)]

(a) A team of 8 people is to be chosen from a group of 15 people.

(i) Find the number of different teams that can be chosen.

(ii) Find the number of different teams that can be chosen if the group of 15 people contains a family of 4 people who must be kept together.

(a) 从 15 人中选出 8 人组成一支队伍。
(i) 求可以组成的不同队伍的数量。(1 分)
(ii) 若这 15 人中包括一个由 4 人组成的家庭，且家庭成员不得分开，求可以组成的不同队伍的数量。(3 分)

解答　(i) 组队不计队员顺序，故队伍数为

$$\binom{15}{8}=\frac{15!}{8!7!}=6435$$

方法：先看成员不得分开的限制，分两类列出剩余名额。

! 辨析：组合是只看成员构成，排列是还要区分成员顺序。

(ii) 家庭成员须全入选或全不入选。

家庭 4 人全入选时，从其余 11 人中选 4 人，队伍数为

$$\binom{11}{4}=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$$

家庭 4 人全不入选时，从其余 11 人中选 8 人，队伍数为

$$\binom{11}{8}=\frac{11!}{8!3!}=165$$

两类队伍互不重叠，故总数为

$$330+165=495$$

答：(i) 6435 种；(ii) 495 种。

针对练习

1. [2023 · October/November 0606/11 Q5(b)]

← 提示：看家庭是否入队，分别核算可选人数与剩余名额。

(b) A team of 9 people is to be chosen from a group of 15 people. The group includes a family of 4 people who must not be separated. Find the number of teams that can be chosen.

(b) 从 15 人中选出 9 人组成一支队伍。这 15 人中包括一个由 4 人组成的家庭，家庭成员不得分开。求可以组成的不同队伍的数量。(3 分)

✓ **答案** 517

解析 家庭成员须全入选或全不入选。

家庭 4 人全入选时，从其余 11 人中选 5 人，队伍数为

$$\binom{11}{5} = \frac{11!}{5!6!} = 462$$

家庭 4 人全不入选时，从其余 11 人中选 9 人，队伍数为

$$\binom{11}{9} = \frac{11!}{9!2!} = 55$$

两类队伍互不重叠，故总数为

$$462 + 55 = 517$$

答：共有 517 种队伍。

2. [2025 · February/March 0606/22 Q4(a)]

提示：比较有无限制时的分类，逐类核算姐妹占用的名额。

(a) A team of 10 players is to be chosen from 15 players.

(i) Find the number of different teams that can be chosen if there are no restrictions.

The 15 players include 3 sisters who must **not** be separated.

(ii) Find the number of different teams that can be chosen.

(a) 从 15 名运动员中选出 10 人组成一支队伍。

(i) 若没有任何限制，求可以组成的不同队伍的数量。(1 分)

这 15 名运动员中包括 3 姐妹，她们不得分开。

(ii) 求可以组成的不同队伍的数量。(3 分)

✓ **答案** (i) 3003；(ii) 858

解析 (i) 没有限制，组队不计队员顺序，故队伍数为

$$\binom{15}{10} = \frac{15!}{10!5!} = 3003$$

(ii) 3 姐妹须全入选或全不入选。

3 姐妹全入选时，从其余 12 人中选 7 人，队伍数为

$$\binom{12}{7} = \frac{12!}{7!5!} = 792$$

3 姐妹全不入选时，从其余 12 人中选 10 人，队伍数为

$$\binom{12}{10} = \frac{12!}{10!2!} = 66$$

两类队伍互不重叠，故总数为

$$792 + 66 = 858$$

答：(i) 3003 种；(ii) 858 种。

3. [2023 · October/November 0606/12 Q7(b)(ii)]
提示：医生全部入选后，先算剩余名额。

(b) A committee of 7 people is to be chosen from 6 doctors, 10 nurses and 8 dentists.

(ii) Find the number of committees that can be chosen if all the doctors have to be on the committee.

(b) 从 6 名医生、10 名护士和 8 名牙医中选出 7 人组成一个委员会。
(ii) 若所有医生都必须入选，求可以组成的委员会的数量。(1 分)

✓ **答案** 18 种

解析 6 名医生全部入选，剩余名额为

$$7-6=1$$

可供选择的护士和牙医共有

$$10+8=18$$

组成人员相同视为同一委员会，故委员会数为

$$\binom{18}{1}=18$$

答：可以组成 18 种委员会。

4. [2024 · May/June 0606/12 Q4(b)]
提示：不选教师，先算医生和警察的总人数。

A team of 8 people is to be formed from 6 teachers, 5 doctors and 4 police officers.

(b) Find the number of teams that can be formed without any teachers.

从 6 名教师、5 名医生和 4 名警察中选出 8 人组成一支队伍。
(b) 求不包含任何教师的队伍的数量。(1 分)

✓ **答案** 9 种

解析 教师均不入选，可供选择的医生和警察共有

$$5+4=9$$

从中选出 8 人，组队不计顺序，故队伍数为

$$\binom{9}{8}=\frac{9!}{8!1!}=9$$

答：可以组成 9 种队伍。

5. [2024 · October/November 0606/22 Q7(a)(ii)]
提示：两人均已入选，其余成员从另外的学生中选取。

A class of 10 students includes Abby and Ben.

(a) A group of 5 students is to be selected from the class. Find the number of possible groups in the following cases.

(ii) The group includes both Abby and Ben.

一个班级有 10 名学生，其中包括阿比（Abby）和本（Ben）。
(a) 从该班选出 5 名学生组成一个小组。求下列情况下可以组成的小组的数量。
(ii) 小组同时包含阿比和本。(2 分)

✓ **答案** 56 种

解析 阿比和本均入选，剩余名额为

$$5-2=3$$

其余学生共有

$$10-2=8$$

从其余学生中选出 3 人，分组不计顺序，故小组数为

$$\binom{8}{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

答：可以组成 56 种小组。

题型 6　展开排列组合等式，约分整理参数关系

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **组合数量关系：** 从 $n+3$ 个不同物品中选出 6 个，不区分顺序。选法数记为 C_6^{n+3}，上标表示总数，下标表示选取数。本例中，前一种选法数是后一种的 12 倍。

$$C_6^{n+3}=12C_5^{n+2}$$

② **阶乘展开计算：** 连续正整数从大到小相乘，可写成阶乘。正整数 m 的阶乘记为 $m!$，并规定 $0!=1$。$4!=4\times3\times2\times1=$ _____

$$m!=m(m-1)\cdots2\times1$$

③ **排列组合公式：** 从 m 个不同物品中取出 k 个，按是否区分顺序计算。排列数记为 P_k^m，组合数记为 C_k^m。其中 m,k 均为整数，且 $0\le k\le m$。

区分顺序，计算排列数

$$P_k^m=\frac{m!}{(m-k)!}$$

$P_2^4=\frac{4!}{2!}=4\times3=12$

不区分顺序，计算组合数

$$C_k^m=\frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$C_2^4=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

④ **展开阶乘约分：** 阶乘之比先展开较大的阶乘，再约去公共因子。约去含参数的因式前，须由取值范围确认其非零。

$$(n+3)!=(n+3)(n+2)!=(n+3)(n+2)(n+1)!$$

$$\frac{C_6^{n+3}}{C_5^{n+2}}=\frac{(n+3)!}{6!(n-3)!}\times\frac{5!(n-3)!}{(n+2)!}=\frac{n+3}{6}$$

⑤ **展开括号整理：** 约分后出现乘积，先展开括号，再移项合并同类项。两边相同的项在移项后消去。

$$x(x+2)=x^2+6\xrightarrow{\text{展开}}x^2+2x=x^2+6\xrightarrow{\text{移项合并}}2x=6\xrightarrow{\text{解方程}}x=3$$

$$(x+1)(x-2)=4\xrightarrow{\text{展开并移项}}x^2-x-6=0$$

⑥ **取值条件筛根：** 总数与选取数均为非负整数，且总数不少于选取数。解出方程后，保留满足条件的根。例如上式要求 $x\ge2$ 时，有

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)=0$$

$$x=3\text{ 或 }x=-2$$

符合条件的值为 _____。

⟵ 填空：①24　②3

点石成金　题目出现排列数或组合数的等式并要求参数时，先写取值范围，再展开阶乘并约分。

例 1　[2026 · May/June 0606/11 Q12]

Find the value of n such that ${}^{n+3}\mathrm{C}_6 = 12 \times {}^{n+2}\mathrm{C}_5$.

求使 $C_6^{n+3} = 12 \times C_5^{n+2}$ 成立的 n 的值。

解答　由组合数的取值范围，得 $n \geq 3$，且 n 为整数。

$$C_6^{n+3} = 12C_5^{n+2}$$

$$\frac{(n+3)!}{6!(n-3)!} = 12 \times \frac{(n+2)!}{5!(n-3)!}$$

约去两边的公共因子，得

$$\frac{n+3}{6} = 12$$

$$n+3 = 72$$

$$n = 69$$

此值满足 $n \geq 3$。

答：$n = 69$。

方法：先看组合数的上下标，列参数范围，再把两边写成阶乘之比。

辨析：排列是区分先后次序的选取，组合是不区分先后次序的选取。

拓展：阶乘总为正数，含参数的普通因式则须另查是否为零。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/13 Q7]

提示：看相同总数下的相邻选取数，比阶乘约分后剩下的因子。

The number of combinations of r objects out of 20 objects is $\frac{4}{3}$ times the number of combinations of $r+1$ objects out of 20 objects.

Find the value of r.

从 20 个物品中选出 r 个的组合数，是从 20 个物品中选出 $r+1$ 个的组合数的 $\frac{4}{3}$ 倍。求 r 的值。

✓ **答案**

$$r = 11$$

解析　两种组合数均有意义，故 r 为整数，且 $0 \leq r \leq 19$。由题意，得

$$C_r^{20} = \frac{4}{3}C_{r+1}^{20}$$

$$\frac{20!}{r!(20-r)!} = \frac{4}{3} \times \frac{20!}{(r+1)!(19-r)!}$$

约去公共因子，得

$$\frac{r+1}{20-r} = \frac{4}{3}$$

$$3(r+1) = 4(20-r)$$

$$3r+3 = 80-4r$$

$$7r = 77$$

$$r = 11$$

此值满足 $0 \le r \le 19$。
答：$r = 11$。

2. [2025 · October/November 0606/12 Q11]
提示：看式外因子与阶乘展开项的重合处，结合范围判断能否约去。

Solve the equation $(n-4)\,{}^{n+1}C_5 = {}^{n+2}C_7$.

解方程 $(n-4)C_5^{n+1} = C_7^{n+2}$。

✓ **答案**

$$n = 40$$

解析 由组合数的取值范围，得 $n \ge 5$，且 n 为整数。

$$(n-4)C_5^{n+1} = C_7^{n+2}$$

$$(n-4) \times \frac{(n+1)!}{5!(n-4)!} = \frac{(n+2)!}{7!(n-5)!}$$

约去公共因子，得

$$n-4 = \frac{(n+2)(n-4)}{42}$$

$\because n \ge 5$，$\therefore n-4 \ne 0$。约去 $n-4$，得

$$1 = \frac{n+2}{42}$$

$$n+2 = 42$$

$$n = 40$$

此值满足 $n \ge 5$。
答：$n = 40$。

3. [2025 · May/June 0606/22 Q5(b)]
提示：看总数与式外因子的重合处，开平方后用范围筛根。

(b) Solve the equation $(n+1) \times {}^{n+1}\mathrm{C}_{12} = 33\,(n-10) \times {}^{n}\mathrm{C}_{10}$.

(b) 解方程 $(n+1) \times C_{12}^{n+1} = 33(n-10) \times C_{10}^{n}$。

✓ **答案**

$$n = 65$$

解析 由组合数的取值范围，得 $n \ge 11$，且 n 为整数。

$$(n+1)C_{12}^{n+1} = 33(n-10)C_{10}^{n}$$

$$(n+1) \times \frac{(n+1)!}{12!(n-11)!} = 33(n-10) \times \frac{n!}{10!(n-10)!}$$

约去公共因子，得

$$\frac{(n+1)^2(n-10)}{12\times 11}=33(n-10)$$

$\because n\geq 11$，$\therefore n-10\neq 0$。约去 $n-10$，得

$$(n+1)^2=33\times 12\times 11$$

$$(n+1)^2=4356$$

$$n+1=66 \text{ 或 } n+1=-66$$

$$n=65 \text{ 或 } n=-67$$

由 $n\geq 11$，舍去 $n=-67$。
答：$n=65$。

4. [2023 · February/March 0606/12 Q7(b)]
提示：看分母两处阶乘相差几级，展开后再比两边公共因子。

(b) Given that $16\times {}^{n}\mathrm{C}_{12}=(n-10)\times {}^{n+1}\mathrm{C}_{11}$, find the value of n.

(b) 已知 $16\times C_{12}^{n}=(n-10)\times C_{11}^{n+1}$，求 n 的值。

✓ **答案**

$$n=47$$

解析 由组合数的取值范围，得 $n\geq 12$，且 n 为整数。

$$16C_{12}^{n}=(n-10)C_{11}^{n+1}$$

$$16\times\frac{n!}{12!(n-12)!}=(n-10)\times\frac{(n+1)!}{11!(n-10)!}$$

两边同乘 $\frac{12!(n-10)!}{n!}$，得

$$16(n-10)(n-11)=12(n-10)(n+1)$$

$\because n\geq 12$，$\therefore n-10\neq 0$。约去 $n-10$，得

$$16(n-11)=12(n+1)$$

$$16n-176=12n+12$$

$$4n=188$$

$$n=47$$

此值满足 $n\geq 12$。
答：$n=47$。

5. [2023 · May/June 0606/11 Q7(b)]

提示：看排列数分母是否相同，再比展开后两边的平方项。

(b) Given that $(n+9)\times {}^{n}\mathrm{P}_{10} = (n^2+243)\times {}^{n-1}\mathrm{P}_{9}$, find the value of n.

(b) 已知 $(n+9)\times P_{10}^{n} = (n^2+243)\times P_{9}^{n-1}$，求 n 的值。

✓ **答案**

$$n = 27$$

解析 由排列数的取值范围，得 $n \geq 10$，且 n 为整数。

$$(n+9)P_{10}^{n} = (n^2+243)P_{9}^{n-1}$$

$$(n+9)\times\frac{n!}{(n-10)!} = (n^2+243)\times\frac{(n-1)!}{(n-10)!}$$

约去两边的公共因子，得

$$n(n+9) = n^2+243$$

$$n^2+9n = n^2+243$$

$$9n = 243$$

$$n = 27$$

此值满足 $n \geq 10$。

答：$n = 27$。

6. [2025 · May/June 0606/23 Q11]

提示：看两组阶乘各差几级，约分后展开乘积并按范围筛根。

Given that $\dfrac{{}^{n+1}\mathrm{P}_{5}}{437} = {}^{n}\mathrm{P}_{3}$, use an algebraic method to find the value of n.

已知 $\frac{P_{5}^{n+1}}{437} = P_{3}^{n}$，用代数方法求 n 的值。

✓ **答案**

$$n = 22$$

解析 由排列数的取值范围，得 $n \geq 4$，且 n 为整数。

$$\frac{P_{5}^{n+1}}{437} = P_{3}^{n}$$

$$\frac{(n+1)!}{437(n-4)!} = \frac{n!}{(n-3)!}$$

约去公共因子，得

$$\frac{(n+1)(n-3)}{437} = 1$$

$$(n+1)(n-3) = 437$$

$$n^2-2n-3 = 437$$

$$n^2 - 2n - 440 = 0$$

$$(n - 22)(n + 20) = 0$$

$$n = 22 \text{ 或 } n = -20$$

由 $n \geq 4$，舍去 $n = -20$。
答：$n = 22$。

7. [2024 · May/June 0606/13 Q7(b)]
提示：看总数与选取数是否同步增加，比阶乘约分后的剩余项。

(b) The number of combinations of $(n+1)$ objects taken 13 at a time is equal to 16 times the number of combinations of n objects taken 12 at a time. Find the value of n.

（b）从 $n+1$ 个物品中每次选出 13 个的组合数，等于从 n 个物品中每次选出 12 个的组合数的 16 倍。求 n 的值。

✓ **答案**

$$n = 207$$

解析 由组合数的取值范围，得 $n \geq 12$，且 n 为整数。由题意，得

$$C_{13}^{n+1} = 16C_{12}^{n}$$

$$\frac{(n+1)!}{13!(n-12)!} = 16 \times \frac{n!}{12!(n-12)!}$$

约去两边的公共因子，得

$$\frac{n+1}{13} = 16$$

$$n + 1 = 208$$

$$n = 207$$

此值满足 $n \geq 12$。
答：$n = 207$。

8. [2025 · October/November 0606/11 Q11(a)]
提示：看右边各因子能否提出公因数，再与左边逐项比较。

The number of permutations of n items taken 4 at a time is equal to $\frac{1}{6}\times$ the number of permutations of $2n$ items taken 3 at a time.

(a) Show that n satisfies the equation $3n^2 - 19n + 20 = 0$.

从 n 个物品中每次取出 4 个的排列数，等于从 $2n$ 个物品中每次取出 3 个的排列数的 $\frac{1}{6}$。（a）证明 n 满足方程 $3n^2 - 19n + 20 = 0$。

✓ **答案**

$$3n^2 - 19n + 20 = 0$$

解析 由排列数的取值范围，得 $n \geq 4$，且 n 为整数。由题意，得

$$P_4^n = \frac{1}{6}P_3^{2n}$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)=\frac{1}{6}\times 2n(2n-1)(2n-2)$$

$$6n(n-1)(n-2)(n-3)=4n(n-1)(2n-1)$$

$\because n\geq 4$，$\therefore 2n(n-1)\neq 0$。约去 $2n(n-1)$，得

$$3(n-2)(n-3)=2(2n-1)$$

$$3n^2-15n+18=4n-2$$

$$3n^2-19n+20=0$$

答：n 满足方程 $3n^2-19n+20=0$。

题型 7　展开组合数并提取公因式证明等式

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **组合数的含义：**从 $n+2$ 个不同元素中选 3 个，记作 $\binom{n+2}{3}$。组合数不计选取顺序。本例中 $n\geq 3$，研究下列两数之差。

$$\binom{n+2}{3}-\binom{n}{3}$$

② **阶乘展开方法：**阶乘 $m!$ 表示从 1 到正整数 m 的连乘，规定 $0\neq 1$。从 N 个不同元素中选 r 个，其中 N,r 为整数且 $0\leq r\leq N$，有

$$\binom{N}{r}=\frac{N!}{r!(N-r)!}$$

本例选取 3 个，分母 3! 等于 _____。

$$3\neq 3\times 2\times 1=6$$

$$\binom{n}{3}=\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

③ **提取公共因式：**两个展开式都含 $\frac{n}{6}$，提取公因式后保留其余因子。

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{6}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n}{6}((n+2)(n+1)-(n-1)(n-2))$$

括号内先展开，减去后一整项时改变各项符号。

$$(n+2)(n+1)=n^2+3n+2$$

$$(n-1)(n-2)=n^2-3n+2$$

两式相减，所得结果为 _____。

④ **相邻组合数差：**组合数上方的数相差 1 时，展开后提取共有的连乘因子。例如，当 $n\geq 4$ 时，有

$$\binom{n}{3}-\binom{n-1}{3}=\frac{(n-1)(n-2)}{6}(n-(n-3))=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\binom{n-1}{2}$$

化简所得连乘式，可按组合数公式写回组合数。

⑤ **带因子的等式：**组合数外还有乘因子时，把因子一同写入展开式。例如，当 $n \geq 3$ 时，有

$$(n-2)\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = 3\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 3\binom{n}{3}$$

⑥ **约分与解方程：**由 $n \geq 3$ 知 $n \neq 0$，等式两边可同除以 n。

$$n(n-1) = 4n \xrightarrow{\text{两边同除以 n}} n-1 = 4 \xrightarrow{\text{解方程}} n = 5$$

所得二次方程先移项，再作因式分解，例如

$$n^2 - 3n = 10 \xrightarrow{\text{移项}} n^2 - 3n - 10 = 0 \xrightarrow{\text{分解因式}} (n-5)(n+2) = 0$$

两个根分别代回 $n \geq 3$ 判断。

$n = 5$，符合范围　　|　　$n = -2$，舍去

← 填空：①6　②$6n$

点石成金　题目出现组合数的差、乘积或等式时，先把组合数展开成连乘式，再提取公因式或约分。

例 1　[2026 · May/June 0606/12 Q13]

Show that, for all values of $n \geqslant 3$, ${}^{n+2}\mathrm{C}_3 - {}^{n}\mathrm{C}_3 = n^2$.

证明：对所有满足 $n \geq 3$ 的 n，都有

$$\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = n^2$$

解答　由组合数公式得

$$\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$= \frac{n}{6}((n+2)(n+1) - (n-1)(n-2))$$

$$= \frac{n}{6}(n^2 + 3n + 2 - n^2 + 3n - 2)$$

$$= \frac{n}{6} \times 6n$$

$$= n^2$$

方法：先看两项组合数，写成连乘式后找共有因子。

辨析：提公因式是把共有因子移到括号外，约分是消去分子分母的公因子。

答：对所有满足 $n \geq 3$ 的 n，原等式成立。

针对练习

1.　[2025 · May/June 0606/11 Q12]

← 提示：展开后圈出共有的连乘因子，再比较剩余两项。

In this question $n \geqslant 6$.

Use an algebraic method to show that ${}^{n}\mathrm{C}_5 - {}^{n-1}\mathrm{C}_5$ can be written as ${}^{n-1}\mathrm{C}_4$.

本题中，$n \geq 6$。

用代数方法证明，$\binom{n}{5} - \binom{n-1}{5}$ 可以写成 $\binom{n-1}{4}$。

✓ **答案**　$\binom{n-1}{4}$

解析　由组合数公式得

$$\binom{n}{5} - \binom{n-1}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{120}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}(n-(n-5))$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120} \times 5$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}$$

$$= \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!}$$

$$= \binom{n-1}{4}$$

答：原式可写成 $\binom{n-1}{4}$。

2. [2022 · May/June 0606/21 Q6(c)(i)]
提示：展开两个组合数，通分后提取共有因子。

(c) (i) Show that ${}^nC_3 + {}^nC_2 = \frac{1}{6}(n^3 - n)$ for $n \geqslant 3$.

(c)(i) 证明：当$n \geq 3$时，
$\binom{n}{3} + \binom{n}{2} = \frac{1}{6}(n^3 - n)$

✓ **答案** $\binom{n}{3} + \binom{n}{2} = \frac{n^3-n}{6}$，对$n \geq 3$成立。

解析 当$n \geq 3$时，由组合数公式得

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{3n(n-1)}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)}{6}(n-2+3)$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n^2-1)}{6}$$

$$= \frac{n^3-n}{6}$$

答：当$n \geq 3$时，原等式成立。

3. [2023 · May/June 0606/23 Q5(b)]
提示：展开后比较两边连乘因子，解方程后按范围筛根。

(b) (i) Given that $n \geqslant 4$, show that $(n-3) \times {}^nC_3 = 4 \times {}^nC_4$.

(ii) Given that ${}^{n}C_{3}=5n$, where $n\geqslant 3$, show that n satisfies the equation $n^{2}-3n-28=0$. Hence find the value of n.

(b)(i) 已知 $n\geq 4$，证明

$$(n-3)\binom{n}{3}=4\binom{n}{4}$$

(ii) 已知 $\binom{n}{3}=5n$，其中 $n\geq 3$，证明 n 满足方程

$$n^{2}-3n-28=0$$

由此求出 n 的值。

✓ **答案** (i) 等式成立；(ii) $n^{2}-3n-28=0$，$n=7$。

解析 (i) 由组合数公式得

$$(n-3)\binom{n}{3}=(n-3)\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

又

$$4\binom{n}{4}=4\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

∴

$$(n-3)\binom{n}{3}=4\binom{n}{4}$$

(ii) 由已知得

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=5n$$

∵ $n\geq 3$，∴ $n\neq 0$，两边同除以 n，得

$$\frac{(n-1)(n-2)}{6}=5$$

$$(n-1)(n-2)=30$$

$$n^{2}-3n+2=30$$

$$n^{2}-3n-28=0$$

分解因式得

$$(n-7)(n+4)=0$$

∴ $n=7$ 或 $n=-4$。

$\because n \geq 3$，$\therefore$ 舍去 $n = -4$。

答：（i）原等式成立；（ii）n 满足 $n^2 - 3n - 28 = 0$，且 $n = 7$。

第 12 章 数列

Chapter 12

12.1 数列

题型 1 比较二项式展开的前几项求指数与系数

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **展开括号：** $(3+px)^n$ 表示 n 个相同括号相乘，n 为正整数。平方时，括号内各项分别相乘再合并。记括号内两项为 A,B，前几项按下式展开。

$$(3+px)^2=9+3px+3px+p^2x^2=9+6px+p^2x^2$$

$$(A+B)^n=A^n+nA^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}A^{n-3}B^3+\cdots$$

② **逐项比较系数：** 按 x 的_____排列，就是按指数从小到大排列。不含 x 的项称为_____，相同幂次的系数分别相等。本例先比较常数项，再比较一次项。

常数项

$3^n=243=3^5$

一次项

$n3^{n-1}p=810$

③ **括号外的因数：** 展开式前有乘数时，每一项都要乘这个数。例如，括号外的 2 要乘展开后的各项。

$$2(1+x)^3=2(1+3x+3x^2+x^3)=2+6x+6x^2+2x^3$$

④ **系数相除消元：** 两个系数含相同的非零因数时，可用相除消去。本例的一次项、二次项系数分别记为 C_1,C_2。由一次项系数为 810，有 $C_1\neq 0$。

$$C_1=n3^{n-1}p$$

$$C_2=\frac{n(n-1)}{2}3^{n-2}p^2$$

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{\frac{n(n-1)}{2}3^{n-2}p^2}{n3^{n-1}p}=\frac{(n-1)p}{6}$$

⑤ **平方系数取值：** 实数 t 的平方是_____。由平方求原数时，正、负两种取值都要保留。例如，由下列两式求值时，还须满足平方非负。

$$a^2=4,\quad t^2=12a$$

$a=2$

$t^2=12\times 2=24$

$t=\pm\sqrt{24}$

$a=-2$

$t^2=12\times(-2)=-24<0$

无实数解。

⑥ **降幂合并指数：** 括号内两项都含 x 时，展开后先合并各项的指数。以 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^n$ 为例，其中 $x\neq 0$。按指数从大到小排列，相邻两项的指数相差_____。

$$(x^2)^{n-1}\left(-\frac{1}{x}\right)=-x^{2n-3}$$

$$(x^2)^{n-2}\left(-\frac{1}{x}\right)^2 = x^{2n-6}$$

$$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^n = x^{2n} - nx^{2n-3} + \frac{n(n-1)}{2}x^{2n-6} + \ldots$$

填空：①升幂　②常数项　③非负数　④3

点石成金　题目出现二项式展开的前几项，要求指数或系数时，先写出对应的展开项，再比较相同幂次的系数。

例 1　[2024 · May/June 0606/11 Q4(a)]

(a) The first three terms, in ascending powers of x, in the expansion of $(3+px)^n$ are $243+810x+qx^2$, where n, p and q are constants. Find the values of n, p and q.

(a) 在 $(3+px)^n$ 的展开式中，按 x 的升幂排列的前三项为 $243+810x+qx^2$，其中 n, p, q 均为常数。求 n, p, q 的值。

解答　比较常数项，得

$$3^n = 243 = 3^5$$

$$n = 5$$

方法：先看展开式的常数项，比较同底数的幂求指数，再比一次项系数。

辨析：一次项是含变量一次方的整项，一次项系数是该项中变量前的因数。

由二项式展开，得

$$(3+px)^5 = 3^5 + 5\times 3^4 \times px + \frac{5\times 4}{2}\times 3^3 \times p^2x^2 + \ldots$$

比较一次项系数，得

$$5\times 3^4 \times p = 810$$

$$p = \frac{810}{405} = 2$$

比较二次项系数，得

$$q = \frac{5\times 4}{2}\times 3^3 \times 2^2 = 1080$$

答：$n=5, p=2, q=1080$。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/21 Q10]

提示：先看括号外乘数，再用一次项的等式检查平方非负。

In this question a, b and n are constants.

When $5(2+ax)^n$ is written in ascending powers of x, the first three terms are $640+b^2x+30240x^2$.

Find the value of a and the possible values of b.

本题中，a, b, n 均为常数。将 $5(2+ax)^n$ 按 x 的升幂展开，前三项为 $640+b^2x+30240x^2$。求 a 的值及 b 的所有可能值。

✓ **答案**

$$a=3, b=\pm\sqrt{6720}$$

解析 比较常数项，得

$$5\times 2^n = 640$$

$$2^n = 128 = 2^7$$

$$n = 7$$

比较二次项系数，得

$$5\times\frac{7\times 6}{2}\times 2^5\times a^2 = 30240$$

$$3360a^2 = 30240$$

$$a^2 = 9$$

$$a = \pm 3$$

比较一次项系数，得

$$b^2 = 5\times 7\times 2^6\times a = 2240a$$

由 $b^2\geq 0$，得 $a\geq 0$，故

$$a = 3$$

$$b^2 = 2240\times 3 = 6720$$

$$b = \pm\sqrt{6720}$$

答：$a=3$，b 的可能值为 $\sqrt{6720}$ 和 $-\sqrt{6720}$。

2. [2021 · February/March 0606/22 Q9(a)]

提示：先代入二项式展开的二次项，再比较系数。

(a) In the expansion of $\left(2k-\frac{x}{k}\right)^5$, where k is a constant, the coefficient of x^2 is 160. Find the value of k.

(a) 在$\left(2k-\frac{x}{k}\right)^5$的展开式中，$k$是常数，$x^2$的系数为160。求$k$的值。

✓ **答案** $k=2$。

解析 原式的分母含k，故$k\neq 0$。由二项式展开，含x^2的项为

$$\frac{5\times 4}{2}(2k)^3\left(-\frac{x}{k}\right)^2 = 10\times 8k^3\times\frac{x^2}{k^2} = 80kx^2$$

由x^2的系数为160，得

$$80k = 160$$

$$k = 2$$

所得值满足$k\neq 0$。

答：$k=2$。

3. [2024 · May/June 0606/22 Q11]
提示：看一次项与二次项系数的比，找能约去的公共因数。

In the binomial expansion of $\left(2+\frac{x}{2}\right)^n$, the first three terms in increasing powers of x are $b+abx+\frac{9}{8}abx^2$. Find the values of the constants n, a and b.

在 $(2+\frac{x}{2})^n$ 的二项式展开式中，按 x 的升幂排列的前三项为 $b+abx+\frac{9}{8}abx^2$。
求常数 n, a, b 的值。

✓ **答案**

$$n=10, a=\frac{5}{2}, b=1024$$

解析 由二项式展开，得

$$\left(2+\frac{x}{2}\right)^n=2^n+n2^{n-2}x+n(n-1)2^{n-5}x^2+\ldots$$

比较各项系数，得

$$b=2^n$$

$$ab=n2^{n-2}$$

$$\frac{9}{8}ab=n(n-1)2^{n-5}$$

展开式的前三项非零，故 $ab\neq 0$。二次项系数除以一次项系数，得

$$\frac{9}{8}=\frac{n(n-1)2^{n-5}}{n2^{n-2}}=\frac{n-1}{8}$$

$$n-1=9$$

$$n=10$$

代入得

$$b=2^{10}=1024$$

$$a=\frac{10\times 2^8}{1024}=\frac{5}{2}$$

答：$n=10, a=\frac{5}{2}, b=1024$。

4. [2023 · October/November 0606/12 Q4(a)]
提示：先比一次项系数，再看负号随所取项次数怎样变化。

(a) It is given that the first four terms, in ascending powers of x, in the expansion of $\left(1-\frac{x}{2}\right)^n$ can be written in the form $1-8x+px^2+qx^3$, where n, p and q are integers. Find the values of n, p and q.

(a) 已知 $(1-\frac{x}{2})^n$ 的展开式中，按 x 的升幂排列的前四项可写成 $1-8x+px^2+qx^3$，
其中 n, p, q 均为整数。求 n, p, q 的值。

✓ **答案**

$$n=16, p=30, q=-70$$

解析 由二项式展开，得

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^n = 1-\frac{n}{2}x+\frac{n(n-1)}{8}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{48}x^3+\ldots$$

比较一次项系数，得

$$-\frac{n}{2}=-8$$

$$n=16$$

比较二次项、三次项系数，得

$$p=\frac{16\times 15}{8}=30$$

$$q=-\frac{16\times 15\times 14}{48}=-70$$

答：$n=16, p=30, q=-70$。

5. [2023 · October/November 0606/13 Q8]

提示：先比首项指数，后两项先合并幂次再比系数。

The first three terms, in descending powers of x, in the expansion of $\left(2x^2-\frac{1}{4x}\right)^n$ can be written in the form $256x^{16}+ax^{13}+bx^c$, where n, a, b and c are integers. Find the values of n, a, b and c.

$\left(2x^2-\frac{1}{4x}\right)^n$ 的展开式中，按 x 的降幂排列的前三项可写成
$256x^{16}+ax^{13}+bx^c$，
其中 n, a, b, c 均为整数。求 n, a, b, c 的值。

✓ **答案**

$$n=8, a=-256, b=112, c=10$$

解析 由分母知 $x\neq 0$。按 x 的降幂展开，首项为

$$(2x^2)^n = 2^n x^{2n}$$

与 $256x^{16}$ 比较指数，得

$$2n=16$$

$$n=8$$

此时首项系数满足

$$2^8=256$$

第二项为

$$8(2x^2)^7\left(-\frac{1}{4x}\right)=-256x^{13}$$

比较系数，得

$$a=-256$$

第三项为

$$\frac{8\times 7}{2}(2x^2)^6\left(-\frac{1}{4x}\right)^2=112x^{10}$$

比较系数与指数，得

$$b=112,\quad c=10$$

答：$n=8,a=-256,b=112,c=10$。

题型 2　取二项式展开的前三项

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **取项与计数：**本例是 10 个相同二项式相乘。依次取 _____ 个 $\frac{2}{x^2}$，其余因式中取 x。对应的取法数分别为：

$$1,\quad 10,\quad \frac{10\times 9}{2}=45$$

② **前三项公式：**本例取 $a=x$、$b=\frac{2}{x^2}$、$n=10$。用 a、b 表示两项，n 表示正整数指数。当 $n\geq 2$ 时，二项式定理给出：

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\ldots$$

③ **各项幂的化简：**分母含 x^2，须有 $x\neq 0$。同底数幂相乘，指数相加；幂再乘方，指数相乘。分式乘方时，分子、分母分别乘方。

$$(x^2)^3=x^{2\times 3}=x^6$$

$$x^9\left(\frac{2}{x^2}\right)=2x^{9-2}=2x^7$$

$$x^8\left(\frac{2}{x^2}\right)^2=x^8\left(\frac{4}{x^4}\right)=4x^{8-4}=4x^4$$

④ **减号并入后项：**括号中出现减号，将负号连同后项一起代入。后项的一次方与平方分别为：

一次方	平方
$\left(-\frac{2}{x^2}\right)^1=-\frac{2}{x^2}$	$\left(-\frac{2}{x^2}\right)^2=\frac{4}{x^4}$

⑤ **二次式的转化：**括号内出现完全平方式，先分解因式。乘方的指数相乘，得到二项式的幂。

$$(4x^2+4x+1)^3=((2x+1)^2)^3=(2x+1)^6$$

⑥ **按幂次排列：**降幂从指数大到小排列，升幂从小到大排列。常数项中 x 的指数为 _____。升幂展开时，将常数写在括号前面。

降幂排列	升幂排列
$x^{10},\quad x^7,\quad x^4$	$1,\quad x,\quad x^2$

$$(2x+1)^6=(1+2x)^6=1+6(2x)+\frac{6\times 5}{2}(2x)^2+\ldots=1+12x+60x^2+\ldots$$

填空：①0，1，2　②0

点石成金　求二项式展开的前三项时，先按指定的升幂或降幂顺序排列括号中两项。

例 1　[2024 · October/November 0606/12 Q6(a)]

(a) Find, in descending powers of x, the first 3 terms in the expansion of $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^{10}$. Simplify each term as far as possible.

(a) 求 $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^{10}$ 展开式中按 x 的降幂排列的前三项。将每一项尽可能化简。

解答　当 $x \neq 0$ 时，由二项式定理，所求前三项为

$$x^{10}+10x^9\left(\frac{2}{x^2}\right)+\frac{10\times 9}{2}x^8\left(\frac{2}{x^2}\right)^2$$

$$=x^{10}+20x^7+180x^4$$

方法：先看指定的幂次顺序，再依次取后项的零次、一次、二次方。

辨析：降幂是按指数从大到小排，升幂是按指数从小到大排。

答：前三项为 $x^{10}+20x^7+180x^4$。

针对练习

1. [2026 · February/March 0606/22 Q11(a)]

提示：看分母中未知数的幂次，比较约分前后各项的指数。

(a) Find, in descending powers of x, the first three terms in the expansion of $(x^2+\frac{1}{2x})^9$. Give each term in its simplest form.

(a) 求 $\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^9$ 展开式中按 x 的降幂排列的前三项。将每一项化为最简形式。

✓ **答案**

$$x^{18}+\frac{9}{2}x^{15}+9x^{12}$$

解析　当 $x \neq 0$ 时，由二项式定理，所求前三项为

$$(x^2)^9+9(x^2)^8\left(\frac{1}{2x}\right)+\frac{9\times 8}{2}(x^2)^7\left(\frac{1}{2x}\right)^2$$

$$=x^{18}+9x^{16}\left(\frac{1}{2x}\right)+36x^{14}\left(\frac{1}{4x^2}\right)$$

$$=x^{18}+\frac{9}{2}x^{15}+9x^{12}$$

答：前三项为 $x^{18}+\frac{9}{2}x^{15}+9x^{12}$。

2. [2023 · May/June 0606/13 Q5(a)]
提示：看后项所带的负号，比较一次方与平方后的符号。

(a) Find the first three terms in the expansion of $\left(x^2-\frac{4}{x^2}\right)^{10}$ in descending powers of x. Give each term in its simplest form.

(a) 求 $\left(x^2-\frac{4}{x^2}\right)^{10}$ 展开式中按 x 的降幂排列的前三项。将每一项化为最简形式。

✓ **答案**

$$x^{20}-40x^{16}+720x^{12}$$

解析 当 $x\neq 0$ 时，将后项取为 $-\frac{4}{x^2}$。由二项式定理，所求前三项为

$$(x^2)^{10}+10(x^2)^9\left(-\frac{4}{x^2}\right)+\frac{10\times 9}{2}(x^2)^8\left(-\frac{4}{x^2}\right)^2$$

$$=x^{20}-40\frac{x^{18}}{x^2}+45x^{16}\left(\frac{16}{x^4}\right)$$

$$=x^{20}-40x^{16}+720x^{12}$$

答：前三项为 $x^{20}-40x^{16}+720x^{12}$。

3. [2025 · May/June 0606/21 Q6(a)]
提示：看二次式能否配成完全平方，再按升幂确定两项顺序。

(a) Using an appropriate quadratic factorisation, find the first three terms in the binomial expansion of $(9x^2+12x+4)^5$, in ascending powers of x.
You must simplify your coefficients.

(a) 利用适当的二次式因式分解，求 $(9x^2+12x+4)^5$ 的二项式展开式中按 x 的升幂排列的前三项。必须将各项系数化简。

✓ **答案**

$$1024+15360x+103680x^2$$

解析 由完全平方公式，得

$$9x^2+12x+4=(3x+2)^2$$

$$(9x^2+12x+4)^5=((3x+2)^2)^5=(2+3x)^{10}$$

按 x 的升幂展开，所求前三项为

$$2^{10}+10\times 2^9(3x)+\frac{10\times 9}{2}\times 2^8(3x)^2$$

$$=1024+15360x+103680x^2$$

答：前三项为 $1024+15360x+103680x^2$。

4. [2022 · February/March 0606/22 Q6(a)(i)]
提示：按升幂排列，常数项之后依次计算一次、二次和三次项。

(a) (i) Use the binomial theorem to expand $(1+3x)^7$ in ascending powers of x, as far as the term in x^3. Simplify each term.

(a)(i) 用二项式定理，将$(1+3x)^7$按x的升幂展开，展开至x^3项。化简每一项。

✓ **答案** $1+21x+189x^2+945x^3$

解析 由二项式定理，按x的升幂展开至x^3项，得

$$1+7(3x)+\frac{7\times 6}{2}(3x)^2+\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}(3x)^3$$

$$=1+21x+189x^2+945x^3$$

答：所求展开式为$1+21x+189x^2+945x^3$。

5. [2022 · May/June 0606/13 Q1(a)]
提示：将负号连同后一项代入前三项公式，再比较系数。

(a) Find the rational numbers a, b and c, such that the first three terms, in descending powers of x, in the expansion of $\left(3x^2-\frac{1}{9x}\right)^5$ can be written in the form $ax^{10}+bx^7+cx^4$.

(a) 求有理数a、b和c，使$\left(3x^2-\frac{1}{9x}\right)^5$展开式中按$x$的降幂排列的前三项可写成$ax^{10}+bx^7+cx^4$

✓ **答案** $a=243$，$b=-45$，$c=\frac{10}{3}$

解析 当$x\neq 0$时，由二项式定理，前三项为

$$(3x^2)^5+5(3x^2)^4\left(-\frac{1}{9x}\right)+\frac{5\times 4}{2}(3x^2)^3\left(-\frac{1}{9x}\right)^2$$

$$=243x^{10}-45x^7+\frac{10}{3}x^4$$

比较相同幂次项的系数，得

$$a=243$$

$$b=-45$$

$$c=\frac{10}{3}$$

答：$a=243$，$b=-45$，$c=\frac{10}{3}$。

题型 3 展开乘积并比较系数求参数

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **二项式前三项：**$(a+x)^4$ 有四个相同因式，每个因式各取一项。取一个 x 有 4 种，取两个 x 有 _____ 种。

$$\frac{4\times 3}{2}=6$$

$$(a+x)^4=a^4+4a^3x+6a^2x^2+\ldots$$

设 r 为不小于 2 的整数，u,v 为两项。

$$(u+v)^r = u^r + ru^{r-1}v + \frac{r(r-1)}{2}u^{r-2}v^2 + \dots$$

② **乘积各项合并：**先把两个因式分别展开到所需次数。

$$(1+ax)^5 = 1 + 5ax + 10a^2x^2 + \dots$$

乘积的一次项有两种来源，合并后系数为 _____。

常数项乘一次项

$a^4 \times (5ax) = 5a^5x$

一次项乘常数项

$(4a^3x) \times 1 = 4a^3x$

乘积的二次项由次数之和为 2 的三组项相乘。

$$a^4 \times (10a^2x^2) + (4a^3x) \times (5ax) + (6a^2x^2) \times 1 = (10a^6 + 20a^4 + 6a^2)x^2$$

③ **对照已知系数：**按 x 的升幂排列，前三项依次为常数项、一次项、二次项。展开式与题中多项式相等 $\xrightarrow{\text{比较系数}}$ 同次幂的系数相等。

$$a^4 = 16$$

$$b = 5a^5 + 4a^3$$

$$c = 10a^6 + 20a^4 + 6a^2$$

由常数项得 $a^2 = 4$，故 a 有 _____ 个可能值。

$a = 2$

$a = -2$

④ **联立整数条件：**有两个未知数时，先由一次关系表示其中一个。以整数 p, q 满足下列关系为例，代入后分解因式。

$$2p + q = 5, \quad pq = 2$$

$$q = 5 - 2p$$

$$p(5 - 2p) = 2$$

$$2p^2 - 5p + 2 = (2p-1)(p-2) = 0$$

求出的值须符合整数条件。

$p = \frac{1}{2}$

不是整数，舍去。

$p = 2$

$q = 5 - 2 \times 2 = 1$

⑤ **降幂处理分式：**出现分母含 x 的项，先写成负整数次幂，其中 $x \neq 0$。

$$\frac{3}{x} = 3x^{-1}, \quad x^2 \times x^{-1} = x$$

例如，先展开再合并，可得按降幂排列的结果。

$$(2x-1)^2\left(1 + \frac{3}{x}\right) = (4x^2 - 4x + 1)(1 + 3x^{-1})$$

$$(2x-1)^2\left(1 + \frac{3}{x}\right) = 4x^2 + 8x - 11 + 3x^{-1}$$

⑥ **最高次项定幂：**按降幂排列时，先取两个因式各自的最高次项相乘。例如，m 为正整数时，有下列最高次项。

$(2x^2 - 1)^{m\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}$ 的最高次项为 $(2x^2)^m \times 1 = 2^m x^{2m}$

若题中最高次幂为 x^8，则先比较指数求 m，再展开所需各项。

$$2m=8,\quad m=4$$

$$(2x^2-1)^4=16x^8-32x^6+24x^4+\ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2=1+2x^{-2}+x^{-4}$$

填空：①6　②$5a^5+4a^3$　③2

点石成金　题目出现两个因式的乘积及展开式的前几项，要求参数时，先分别展开，合并同次项，再比较系数。

例 1　[2026 · May/June 0606/22 Q6]

In this question, a, b and c are integers.

When the expansion of $(a+x)^4(1+ax)^5$ is written in ascending powers of x, the first three terms are $16+bx+cx^2$.

Find all the possible values of a, b and c.

本题中，a、b 和 c 均为整数。
将 $(a+x)^4(1+ax)^5$ 的展开式按 x 的升幂排列，前三项为 $16+bx+cx^2$。
求 a、b 和 c 的所有可能值。

解答　由二项式展开得

$$(a+x)^4=a^4+4a^3x+6a^2x^2+\ldots$$

$$(1+ax)^5=1+5ax+10a^2x^2+\ldots$$

方法：先看常数项列参数方程，再把两因式展开到二次项。

辨析：奇次幂是保留底数符号的，偶次幂是不随底数变号的。

相乘并合并同次项，得

$$(a+x)^4(1+ax)^5=a^4+(5a^5+4a^3)x+(10a^6+20a^4+6a^2)x^2+\ldots$$

比较常数项，得

$$a^4=16$$

$$a^2=4$$

$$a=2\quad 或\quad a=-2$$

比较一次项与二次项系数，得

$$b=5a^5+4a^3$$

$$c=10a^6+20a^4+6a^2$$

当 $a=2$ 时，

$$b=5\times 2^5+4\times 2^3=192$$

$$c=10\times 2^6+20\times 2^4+6\times 2^2=984$$

当 $a=-2$ 时，

$$b=5\times(-2)^5+4\times(-2)^3=-192$$

$$c=10\times(-2)^6+20\times(-2)^4+6\times(-2)^2=984$$

两组数均为整数。

答：所有可能的值为 $(a,b,c)=(2,192,984)$ 或 $(-2,-192,984)$。

针对练习

1. [2023 · May/June 0606/22 Q6(a)]

提示：看一次项的两种来源，合并后再计入外面的倍数。

(a) (i) Find the first three terms in the expansion of $\left(1+\frac{x}{7}\right)^5$, in ascending powers of x. Simplify the coefficient of each term.

(ii) The expansion of $7(1+x)^n\left(1+\frac{x}{7}\right)^5$, where n is a positive integer, is written in ascending powers of x. The first two terms in the expansion are $7+89x$. Find the value of n.

(a)（i）求 $\left(1+\frac{x}{7}\right)^5$ 的展开式中按 x 的升幂排列的前三项。将每一项的系数化简。

(ii) 将 $7(1+x)^{n\left(1+\frac{x}{7}\right)^5}$ 的展开式按 x 的升幂排列，其中 n 是正整数。展开式的前两项为 $7+89x$。求 n 的值。

✓ **答案**　(i) $1+\frac{5}{7}x+\frac{10}{49}x^2$；(ii) $n=12$。

解析　由二项式展开得

$$\left(1+\frac{x}{7}\right)^5=1+5\left(\frac{x}{7}\right)+\frac{5\times4}{2}\left(\frac{x}{7}\right)^2+\ldots$$

$$\left(1+\frac{x}{7}\right)^5=1+\frac{5}{7}x+\frac{10}{49}x^2+\ldots$$

又由 $(1+x)^n$ 的常数项为 1、一次项为 nx，得

$$7(1+x)^{n\left(1+\frac{x}{7}\right)^5}=7(1+nx+\ldots)\left(1+\frac{5}{7}x+\frac{10}{49}x^2+\ldots\right)$$

$$7(1+x)^{n\left(1+\frac{x}{7}\right)^5}=7+(7n+5)x+\ldots$$

比较一次项系数，得

$$7n+5=89$$

$$n=\frac{89-5}{7}=12$$

12 是正整数，符合题意。

答：(i) 前三项为 $1+\frac{5}{7}x+\frac{10}{49}x^2$；(ii) $n=12$。

2. [2022 · May/June 0606/12 Q5]

提示：按升幂取前三项，先将两个因式分别展开至二次项。

The first three terms, in ascending powers of x, in the expansion of $\left(1+\frac{x}{6}\right)^{12}(2-3x)^3$ can be written in the form $8+px+qx^2$, where p and q are constants. Find the values of p and q.

将 $\left(1+\frac{x}{6}\right)^{12}(2-3x)^3$ 的展开式按 x 的升幂排列，前三项可写成 $8+px+qx^2$，其中 p 和 q 为常数。求 p 和 q 的值。

✓ **答案**　$p=-20$，$q=-\frac{10}{3}$。

解析　将两个因式分别展开，得

$$\left(1+\frac{x}{6}\right)^{12}=1+12\times\frac{x}{6}+\frac{12\times11}{2}\left(\frac{x}{6}\right)^2+\ldots$$

$$\left(1+\frac{x}{6}\right)^{12}=1+2x+\frac{11}{6}x^2+\ldots$$

$$(2-3x)^3=8+3\times2^2\times(-3x)+3\times2\times(-3x)^2+(-3x)^3$$

$$(2-3x)^3=8-36x+54x^2-27x^3$$

相乘时，合并次数之和相同的各项，得

$$\left(1+\frac{x}{6}\right)^{12}(2-3x)^3=8+(8\times2-36)x+\left(8\times\frac{11}{6}+2\times(-36)+54\right)x^2+\ldots$$

比较一次项与二次项的系数，得

$$p=8\times2-36=-20$$

$$q=8\times\frac{11}{6}+2\times(-36)+54=-\frac{10}{3}$$

答：$p=-20$，$q=-\frac{10}{3}$。

3. [2023 · October/November 0606/21 Q4]

提示：看一次项关系列代入式，再用整数条件筛选所得根。

In this question a and b are integers.

Three terms in the expansion of $(2+ax)^5(1+bx)$ are $32+112x-240x^2$. Find the values of a and b.

本题中，a 和 b 均为整数。

$(2+ax)^5(1+bx)$ 的展开式中的三项为 $32+112x-240x^2$。求 a 和 b 的值。

✓ **答案**　$a=3,\quad b=-4$。

解析　由二项式展开得

$$(2+ax)^5=2^5+5\times2^4ax+\frac{5\times4}{2}\times2^3(ax)^2+\ldots$$

$$(2+ax)^5=32+80ax+80a^2x^2+\ldots$$

相乘并合并同次项，得

$$(2+ax)^5(1+bx)=32+(80a+32b)x+(80a^2+80ab)x^2+\ldots$$

比较一次项与二次项系数，得

$$80a+32b=112$$

$$80a^2+80ab=-240$$

化简得

$$5a+2b=7$$

$$a^2+ab=-3$$

由一次关系得

$$b=\frac{7-5a}{2}$$

代入得

$$a^2+\frac{a(7-5a)}{2}=-3$$

$$3a^2-7a-6=0$$

$$(3a+2)(a-3)=0$$

$$a=-\frac{2}{3}\quad 或\quad a=3$$

$\because a$ 是整数，$\therefore a=3$。

$$b=\frac{7-5\times 3}{2}=-4$$

$b=-4$ 也是整数，符合题意。
答：$a=3,\quad b=-4$。

4. [2025 · May/June 0606/22 Q10]
提示：先比最高次项的指数，再按指数之和配对后续各项。

The first three terms, in descending powers of x, in the expansion of $\left(3x^2-a\right)^n\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2$ can be written as $729x^{12}+972x^{10}+bx^8$, where a, b and n are constants.

Find the values of a, b and n.

$\left(3x^2-a\right)^{n\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}$ 的展开式中，按 x 的降幂排列的前三项可写为 $729x^{12}+972x^{10}+bx^8$，其中 a、b 和 n 均为常数。求 a、b 和 n 的值。

✓ **答案** $a=\frac{1}{3},\quad b=-108,\quad n=6$。

解析 乘积的最高次项为

$$\left(3x^2\right)^n\times 1=3^nx^{2n}$$

与 $729x^{12}$ 比较指数，得

$$2n=12$$

$$n=6$$

此时 $3^6=729$，与最高次项系数相符。
由二项式展开得

$$\left(3x^2-a\right)^6=\left(3x^2\right)^6-6\left(3x^2\right)^5a+\frac{6\times 5}{2}\left(3x^2\right)^4a^2+\ldots$$

$$\left(3x^2-a\right)^6=729x^{12}-1458ax^{10}+1215a^2x^8+\ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2 = 1+2x^{-2}+x^{-4}$$

相乘并合并同次项，得

$$(3x^2-a)^6\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2 = 729x^{12}+(1458-1458a)x^{10}+(729-2916a+1215a^2)x^8+\ldots$$

比较 x^{10} 的系数，得

$$1458-1458a = 972$$

$$a = \frac{1458-972}{1458} = \frac{1}{3}$$

比较 x^8 的系数，得

$$b = 729-2916a+1215a^2$$

$$b = 729-2916\times\frac{1}{3}+1215\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 729-972+135 = -108$$

答：$a=\frac{1}{3}$，　$b=-108$，　$n=6$。

5. [2025 · February/March 0606/22 Q10]
提示：先看最高次项及正整数条件，再逐次降低指数配对。

The expansion of $(ax-2)^4\left(1+\frac{b}{x}\right)^3$ is written in descending powers of x.

The first 3 terms of this expansion are $81x^4+999x^3+cx^2$.
It is given that a, b and c are positive integers.

Find the values of a, b and c.

将 $(ax-2)^4\left(1+\frac{b}{x}\right)^3$ 的展开式按 x 的降幂排列。
展开式的前三项为 $81x^4+999x^3+cx^2$。
已知 a、b 和 c 均为正整数。
求 a、b 和 c 的值。

✓ **答案**　$a=3$，　$b=5$，　$c=3051$。

解析　由二项式展开得

$$(ax-2)^4 = a^4x^4-8a^3x^3+24a^2x^2-32ax+16$$

$$\left(1+\frac{b}{x}\right)^3 = 1+3bx^{-1}+3b^2x^{-2}+b^3x^{-3}$$

相乘并合并同次项，得

$$(ax-2)^4\left(1+\frac{b}{x}\right)^3 = a^4x^4+(3a^4b-8a^3)x^3+(3a^4b^2-24a^3b+24a^2)x^2+\ldots$$

比较 x^4 的系数，得

$$a^4 = 81$$

$\because a$ 是正整数，$\therefore a = 3$。
比较 x^3 的系数，得

$$3a^4b - 8a^3 = 999$$

$$243b - 216 = 999$$

$$b = \frac{999 + 216}{243} = 5$$

比较 x^2 的系数，得

$$c = 3a^4b^2 - 24a^3b + 24a^2$$

$$c = 3 \times 3^4 \times 5^2 - 24 \times 3^3 \times 5 + 24 \times 3^2$$

$$c = 6075 - 3240 + 216 = 3051$$

所得 a, b, c 均为正整数，符合题意。
答：$a = 3,\quad b = 5,\quad c = 3051$。

题型 4　由指定项系数或系数比求二项式参数

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **目标项的来源：**本例将 15 个相同因式相乘。

$$(1 + kx)^{15} = (1 + kx)(1 + kx)\cdots(1 + kx)$$

三次项须选 3 个 kx，其余选 1。

$$(kx)^3 = k^3x^3$$

同次幂项合并后，该幂前的因子称为_____。

② **选择种数计算：**记 $\binom{n}{r}$ 为从 n 个因式中选 r 个的种数。n 为正整数，r 为整数，且满足：

$$0 \le r \le n$$

分子从 n 起递减，分母从 r 起递减，各乘 r 个数。

$$\binom{15}{3} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = \text{_____}$$

③ **指定项的系数：**本例将 455 个相同的三次项相加。

$$455 \times k^3x^3 = 455k^3x^3$$

首项不是 1 时，未选的因式也须相乘。

$$(3 - 2x)^5 \text{ 的二次项为 } \binom{5}{2}3^3(-2x)^2 = 1080x^2$$

一般地，A、B 为常数，有：

$$(A + Bx)^n \text{ 中 } x^r \text{ 的系数为 } \binom{n}{r}A^{n-r}B^r$$

④ **系数关系转写：** 记 C_r 为 x^r 的系数。若倍数为 m，比值为 q，分别列式：

三次项系数是二次项系数的 m 倍　　四次项系数除以二次项系数等于 q

$C_3 = mC_2$　　$\frac{C_4}{C_2} = q$

⑤ **系数比的约分：** 本例的二次项系数为：

$$C_2 = \binom{15}{2}k^2 = 105k^2$$

系数作分母时，该系数须为_____。当 $k \neq 0$ 时，可约去共有的因子：

$$\frac{C_3}{C_2} = \frac{455k^3}{105k^2} = \frac{13k}{3}$$

⑥ **参数符号筛选：** 偶次方方程可能给出两个实数值。

$$t^2 = 9 \xrightarrow{\text{开平方}} t = \pm 3$$

以常数 t 对应的展开式为例，一次项系数为：

$$(t-2x)^4 \text{ 中 } x \text{ 的系数} = \binom{4}{1}t^3(-2) = -8t^3$$

若一次项系数为正，便用符号条件筛选。

$$-8t^3 > 0 \xrightarrow{\text{两边除以负数}} t^3 < 0 \xrightarrow{\text{确定符号}} t < 0$$

$$t^2 = 9,\quad t < 0 \xrightarrow{\text{取负值}} t = _____$$

填空：①系数　②455　③非零　④-3

点石成金　题目出现指定项的系数、系数倍数或系数比时，先写出相应项的系数，再按题给关系列方程。

例 1　[2024 · October/November 0606/11 Q5(a)]

(a) In the expansion of $(1+kx)^{15}$, where k is a constant, the coefficient of x^3 is $-29\,120$. Find the value of k.

(a) 在 $(1+kx)^{15}$ 的展开式中，k 为常数，x^3 的系数为 -29120。求 k 的值。

解答　由二项式展开，x^3 的系数为

$$\binom{15}{3}k^3 = \frac{15\times 14\times 13}{3\times 2\times 1}k^3 = 455k^3$$

由题意得

$$455k^3 = -29120$$

$$k^3 = -64$$

$$k = -4$$

答：$k = -4$。

方法：先看指定的次数，从选三个含参数的因式起手。

辨析：三次项是含三次幂的整项，三次项系数是该幂前的因子。

拓展：奇数次幂保留实数底数的正负，偶数次幂不能区分正负。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/23 Q7(b)]

提示：对照三次项与二次项的系数，约分前看参数能否为零。

(b) In the expansion of $(1+ax)^9$ the coefficient of x^3 is 7 times the coefficient of x^2.

Given that a is a positive constant, find the value of a.

(b) 在 $(1+ax)^9$ 的展开式中，x^3 的系数是 x^2 的系数的 7 倍。已知 a 为正常数，求 a 的值。

✓ **答案**

$$a=3$$

解析 由二项式展开，x^2 的系数为

$$\binom{9}{2}a^2=\frac{9\times 8}{2\times 1}a^2=36a^2$$

x^3 的系数为

$$\binom{9}{3}a^3=\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}a^3=84a^3$$

由题意得

$$84a^3=7\times 36a^2$$

$\because a>0$，$\therefore a^2\neq 0$，两边除以 a^2，得

$$84a=252$$

$$a=3$$

答：$a=3$。

2. [2022 · October/November 0606/23 Q6]

提示：先比较三次项的系数，求出展开式中的参数。

The first four terms in ascending powers of x in the expansion $(3+ax)^4$ can be written as $81+bx+cx^2+\frac{3}{2}x^3$. Find the values of the constants a, b and c.

$(3+ax)^4$的展开式按x的升幂排列，其前四项可写为 $81+bx+cx^2+\frac{3}{2}x^3$。求常数$a$、$b$和$c$的值。

✓ **答案** $a=\frac{1}{2}$，$b=54$，$c=\frac{27}{2}$。

解析 由二项式展开，得

$$(3+ax)^4=81+108ax+54a^2x^2+12a^3x^3+a^4x^4$$

比较x^3的系数，得

$$12a^3=\frac{3}{2}$$

$$a^3=\frac{1}{8}$$

$$a=\frac{1}{2}$$

分别比较x、x^2的系数，得

$$b = 108a = 108 \times \frac{1}{2} = 54$$

$$c = 54a^2 = 54 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{27}{2}$$

答：$a = \frac{1}{2}$，$b = 54$，$c = \frac{27}{2}$。

3. [2023 · May/June 0606/21 Q10]

提示：所选展开项的幂同时来自两个因式，先合并指数。

In the expansion of $\left(ax + \frac{b}{x^2}\right)^9$, where a and b are constants with $a > 0$, the term independent of x is $-145\,152$ and the coefficient of x^6 is -6912. Show that $a^2b = -12$ and find the value of a and the value of b.

在

$$\left(ax + \frac{b}{x^2}\right)^9$$

的展开式中，a和b为常数，且$a > 0$。不含x的项为-145152，x^6的系数为-6912。证明$a^2b = -12$，并求a和b的值。

✓ **答案** $a^2b = -12$，$a = 2$，$b = -3$。

解析 原式中$x \neq 0$。设某项选取了r个$\frac{b}{x^2}$，其中r为整数，且$0 \leq r \leq 9$。该项为

$$\binom{9}{r}(ax)^{9-r}\left(\frac{b}{x^2}\right)^r = \binom{9}{r}a^{9-r}b^r x^{9-3r}$$

不含x的项中，x的指数为0，故

$$9 - 3r = 0$$

$$r = 3$$

由不含x的项为-145152，得

$$\binom{9}{3}a^6b^3 = -145152$$

$$84a^6b^3 = -145152$$

$$(a^2b)^3 = -1728 = (-12)^3$$

$$a^2b = -12$$

对于x^6项，

$$9 - 3r = 6$$

$$r = 1$$

由x^6的系数为-6912，得

$$\binom{9}{1}a^8b = -6912$$

$$9a^8b = -6912$$

$\because a>0$，由$a^2b=-12$得

$$b=-\frac{12}{a^2}$$

代入得

$$9a^8\left(-\frac{12}{a^2}\right)=-6912$$

$$-108a^6=-6912$$

$$a^6=64$$

$\because a>0$，$\therefore$

$$a=2$$

$$b=-\frac{12}{2^2}=-3$$

答：$a^2b=-12$，$a=2$，$b=-3$。

4. [2023 · May/June 0606/22 Q6(b)]

提示：先看系数比的分子分母，再用一次项系数筛选符号。

(b) In the expansion of $(k-2x)^8$, where k is a constant, the coefficient of x^4 divided by the coefficient of x^2 is $\frac{5}{8}$. The coefficient of x is positive. Form an equation and hence find the value of k.

(b) 在 $(k-2x)^8$ 的展开式中，k 为常数，x^4 的系数除以 x^2 的系数等于 $\frac{5}{8}$。x 的系数为正。列出一个方程，并由此求 k 的值。

✓ **答案**

$$k=-4$$

解析 由二项式展开，x^4 的系数为

$$\binom{8}{4}k^4(-2)^4=70\times16k^4=1120k^4$$

x^2 的系数为

$$\binom{8}{2}k^6(-2)^2=28\times4k^6=112k^6$$

由题意列方程

$$\frac{1120k^4}{112k^6}=\frac{5}{8}$$

分母不为零，故 $k\neq0$，约分得

$$\frac{10}{k^2}=\frac{5}{8}$$

$$5k^2=80$$

$$k^2=16$$

$$k = \pm 4$$

又 x 的系数为

$$\binom{8}{1}k^7(-2) = -16k^7$$

∵ 一次项系数为正，∴

$$-16k^7 > 0$$

$$k^7 < 0$$

$$k < 0$$

答：所列方程为 $\frac{1120k^4}{112k^6} = \frac{5}{8}$，由此得 $k = -4$。

5. [2025 · October/November 0606/13 Q12(b)]

提示：用（a）的系数表达式列出相邻两项系数相等的方程。

(a) Write down the coefficient of x^r in the binomial expansion of $(2+x)^{59}$.

(b) For this expansion, find the value of r for which the coefficient of x^r is equal to the coefficient of x^{r+1}.

(a) 写出二项式$(2+x)^{59}$的展开式中x^r的系数。
(b) 对于这个展开式，求使x^r的系数等于x^{r+1}的系数的r值。

✓ **答案** $r = 19$。

解析 由二项式展开，x^r的系数为

$$\binom{59}{r}2^{59-r}$$

比较相邻两项时，r为整数，且$0 \le r < 59$。 x^{r+1}的系数为

$$\binom{59}{r+1}2^{58-r}$$

由两系数相等，得

$$\binom{59}{r}2^{59-r} = \binom{59}{r+1}2^{58-r}$$

两边除以非零的$\binom{59}{r}2^{58-r}$，得

$$2 = \frac{\binom{59}{r+1}}{\binom{59}{r}}$$

将组合数写成阶乘之比并约分，得

$$\frac{\binom{59}{r+1}}{\binom{59}{r}} = \frac{59!}{(r+1)!(58-r)!} \times \frac{r!(59-r)!}{59!} = \frac{59-r}{r+1}$$

因此

$$2 = \frac{59-r}{r+1}$$

$$2(r+1)=59-r$$

$$3r=57$$

$$r=19$$

所得r为整数，且$0\le 19<59$。答：$r=19$。

题型 5　令二项式通项的字母指数为零求常数项

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **分式幂的运算：**例题的两项分别为$\frac{2}{x^2}$与$\frac{x}{3}$，其中$x\neq 0$。乘积中的同名字母，指数相加。

$$x^{-2}=\frac{1}{x^2},\quad x^a x^b=x^{a+b}$$

$$\left(\frac{2}{x^2}\right)^2\left(\frac{x}{3}\right)^4=2^2x^{-4}\cdot\frac{x^4}{3^4}=\frac{4}{81}$$

② **相同乘积计数：**六个括号中，选四个提供第二项，其余提供第一项。用$\binom{n}{r}$表示从n个位置中选r个的选法数。n为正整数，r为整数且$0\le r\le n$。

$$\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15$$

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)...(n-r+1)}{1\cdot 2...r}\quad(1\le r\le n)$$

$$\binom{n}{0}=1$$

③ **展开通项写法：**在$(A+B)^n$中，第二项取r次，第一项取$n-r$次。所得为第$r+1$项，记作T_{r+1}，其表达式称为通项。例题中取$A=\frac{2}{x^2}$，$B=\frac{x}{3}$。

$$T_{r+1}=\binom{n}{r}A^{n-r}B^r$$

$$T_{r+1}=\binom{6}{r}\left(\frac{2}{x^2}\right)^{6-r}\left(\frac{x}{3}\right)^r=\binom{6}{r}\frac{2^{6-r}}{3^r}x^{-12+3r}$$

④ **常数项的判定：**字母指数为_____时，该项是常数项。令例题通项中字母的指数为零，求出r。所得r须为0至6的整数。

$$x^0=1\quad(x\neq 0)$$

$$-12+3r=0$$

$$r=4$$

⑤ **展开减项处理：**括号中出现减号时，把负号连同第二项一起乘方。负数的幂由指数的奇偶性决定符号。

r为偶数，负号相消。

$$(-1)^r=1$$

$$(-2)^2=4$$

r为奇数，保留负号。

$$(-1)^r=-1$$

$$(-2)^3=-8$$

⑥ **项数对应次数：**按字母降幂排列时，先写字母幂较高的一项。第k项对应$r=k-1$，第6项对应$r=$_____。

将例题两项换序、幂次写成n，可由第3项为常数求n。

$$T_3=\binom{n}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{2}{x^2}\right)^2=\frac{4\binom{n}{2}}{3^{n-2}}x^{n-6}$$

$$n-6=0$$

$$n=6$$

⟵ 填空：①0　②5

点石成金　题目出现求展开式中与字母无关的项时，先写出通项并令字母的指数为零。

例 1　[2023 · October/November 0606/12 Q4(b)]

(b) Find the term independent of x in the expansion of $\left(\frac{2}{x^2}+\frac{x}{3}\right)^6$, giving your answer as a rational number.

(b) 求$\left(\frac{2}{x^2}+\frac{x}{3}\right)^6$的展开式中与$x$无关的项，答案写成有理数。

解答　取第二项r次，其中r为整数且$0\le r\le 6$。由二项式通项得

$$T_{r+1}=\binom{6}{r}\left(\frac{2}{x^2}\right)^{6-r}\left(\frac{x}{3}\right)^r$$

$$T_{r+1}=\binom{6}{r}\frac{2^{6-r}}{3^r}x^{-12+3r}$$

由常数项的字母指数为零，得

$$-12+3r=0$$

$$r=4$$

故常数项为

$$T_5=\binom{6}{4}\frac{2^2}{3^4}=15\cdot\frac{4}{81}=\frac{20}{27}$$

答：常数项为$\frac{20}{27}$。

方法：先看括号内两项的字母幂，从通项起手合并指数。

辨析：r 是第二项的选取次数，r+1 是对应的项序。

拓展：指数归零后，所得选取次数还须为非负整数且不超过展开幂次。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/11 Q4(b)]

⟵ 提示：看两项贡献的字母指数如何抵消，再按选取次数判符号。

(b) Find the term independent of y in the expansion of $\left(2y-\frac{1}{3y^2}\right)^6$. Give your answer in exact form.

(b) 求$\left(2y-\frac{1}{3y^2}\right)^6$的展开式中与$y$无关的项，答案用精确形式表示。

✓ **答案**　$\frac{80}{3}$

解析　取第二项r次，其中r为整数且$0\le r\le 6$。由二项式通项得

$$T_{r+1}=\binom{6}{r}(2y)^{6-r}\left(-\frac{1}{3y^2}\right)^r$$

$$T_{r+1}=\binom{6}{r}2^{6-r}\left(-\frac{1}{3}\right)^{r}y^{6-3r}$$

由常数项的字母指数为零，得

$$6-3r=0$$

$$r=2$$

故常数项为

$$T_3=\binom{6}{2}2^4\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}=15\cdot\frac{16}{9}=\frac{80}{3}$$

答：常数项为$\frac{80}{3}$。

2. [2024 · October/November 0606/12 Q6(b)]

提示：比较两项字母指数的正负与大小，列出指数和为零的式子。

(b) Find the term independent of x in the expansion of $\left(4x^2+\frac{1}{2x^2}\right)^8$.

(b) 求$\left(4x^2+\frac{1}{2x^2}\right)^8$的展开式中与$x$无关的项。

✓ **答案** 1120

解析 取第二项r次，其中r为整数且$0\le r\le 8$。由二项式通项得

$$T_{r+1}=\binom{8}{r}(4x^2)^{8-r}\left(\frac{1}{2x^2}\right)^{r}$$

$$T_{r+1}=\binom{8}{r}4^{8-r}\left(\frac{1}{2}\right)^{r}x^{16-4r}$$

由常数项的字母指数为零，得

$$16-4r=0$$

$$r=4$$

故常数项为

$$T_5=\binom{8}{4}4^4\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=70\cdot 16=1120$$

答：常数项为1120。

3. [2025 · May/June 0606/23 Q7(a)]

提示：看分母字母带来的负指数，再查负数乘方次数的奇偶。

(a) Find the term independent of x in the expansion of $\left(x^2-\frac{3}{x^4}\right)^{15}$.

(a) 求$\left(x^2-\frac{3}{x^4}\right)^{15}$的展开式中与$x$无关的项。

✓ **答案** -729729

解析 取第二项r次，其中r为整数且$0\le r\le 15$。由二项式通项得

$$T_{r+1}=\binom{15}{r}(x^2)^{15-r}\left(-\frac{3}{x^4}\right)^{r}$$

$$T_{r+1}=\binom{15}{r}(-3)^r x^{30-6r}$$

由常数项的字母指数为零，得

$$30-6r=0$$

$$r=5$$

故常数项为

$$T_6=\binom{15}{5}(-3)^5=3003\cdot(-243)=-729729$$

答：常数项为-729729。

4. [2025 · May/June 0606/21 Q6(b)]

提示：比较第一项的负指数与第二项的正指数，按选取次数配平。

(b) Find the term independent of x in the expansion of $\left(\frac{6}{x^2}+\frac{x^4}{2}\right)^{12}$.

(b) 求$\left(\frac{6}{x^2}+\frac{x^4}{2}\right)^{12}$的展开式中与$x$无关的项。

✓ **答案** 51963120

解析 取第二项r次，其中r为整数且$0\le r\le 12$。由二项式通项得

$$T_{r+1}=\binom{12}{r}\left(\frac{6}{x^2}\right)^{12-r}\left(\frac{x^4}{2}\right)^r$$

$$T_{r+1}=\binom{12}{r}\frac{6^{12-r}}{2^r}x^{-24+6r}$$

由常数项的字母指数为零，得

$$-24+6r=0$$

$$r=4$$

故常数项为

$$T_5=\binom{12}{4}\frac{6^8}{2^4}=495\cdot 104976=51963120$$

答：常数项为51963120。

5. [2024 · October/November 0606/11 Q5(b)]

提示：比较两项抵消字母幂所需的次数，再看负号出现几次。

(b) Find the term independent of y in the expansion of $\left(8y^2-\frac{1}{2y}\right)^{12}$.

(b) 求$\left(8y^2-\frac{1}{2y}\right)^{12}$的展开式中与$y$无关的项。

✓ **答案** 7920

解析 取第二项r次，其中r为整数且$0\le r\le 12$。由二项式通项得

$$T_{r+1}=\binom{12}{r}(8y^2)^{12-r}\left(-\frac{1}{2y}\right)^r$$

$$T_{r+1}=\binom{12}{r}8^{12-r}\left(-\frac{1}{2}\right)^r y^{24-3r}$$

由常数项的字母指数为零，得

$$24-3r=0$$

$$r=8$$

故常数项为

$$T_9=\binom{12}{8}8^4\left(-\frac{1}{2}\right)^8=495\cdot 16=7920$$

答：常数项为7920。

6. [2024 · May/June 0606/23 Q4(a)]

提示：看两项各贡献多少字母指数，负号随第二项一同乘方。

(a) Find and simplify the term independent of x in the expansion of $\left(x^2-\frac{1}{2x^3}\right)^{10}$.

(a) 求$\left(x^2-\frac{1}{2x^3}\right)^{10}$的展开式中与$x$无关的项，并化简。

✓ **答案** $\frac{105}{8}$

解析 取第二项r次，其中r为整数且$0\le r\le 10$。由二项式通项得

$$T_{r+1}=\binom{10}{r}(x^2)^{10-r}\left(-\frac{1}{2x^3}\right)^r$$

$$T_{r+1}=\binom{10}{r}\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{20-5r}$$

由常数项的字母指数为零，得

$$20-5r=0$$

$$r=4$$

故常数项为

$$T_5=\binom{10}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{210}{16}=\frac{105}{8}$$

答：常数项为$\frac{105}{8}$。

7. [2024 · October/November 0606/23 Q7(b)]

提示：看降幂排列的项序与选取次数之差，再令字母指数归零。

(b) In the expansion of $\left(x+\frac{2}{x}\right)^n$ in decreasing powers of x, the 6th term is a constant.

(i) Find the value of the positive integer n.

(ii) Find the value of the 6th term.

(b) 在$\left(x+\frac{2}{x}\right)^n$按$x$的降幂排列的展开式中，第6项为常数。

(i) 求正整数n的值。

(ii) 求第6项的值。

✓ **答案** (i) $n=10$；(ii) 8064。

解析 由二项式通项得

$$T_{r+1}=\binom{n}{r}x^{n-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r=\binom{n}{r}2^r x^{n-2r}$$

字母指数逐项减2，故按x的降幂排列时，第6项对应$r=5$。

$$T_6=\binom{n}{5}2^5x^{n-10}$$

由第6项为常数，得

$$n-10=0$$

$$n=10$$

所得n为正整数，且$n\geq 5$，符合条件。代入得

$$T_6=\binom{10}{5}2^5=252\cdot 32=8064$$

答：（i）$n=10$；（ii）第6项为8064。

题型 6　按幂次配对相乘求乘积指定项系数

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **同底数幂相乘：**例题中，$-x^2$ 与含 x^6 的项相乘，所得项含 x^8。倒数写成负指数，同底数幂相乘时指数_____。以下 p,q 表示整数，且 $x\neq 0$。

$$\frac{1}{x}=x^{-1}$$

$$(-x^2)\times x^6=-x^8$$

$$x^p\times x^q=x^{p+q}$$

② **二项式前三项：**例题的十次方含十个相同因式。取负项零次、一次、两次，选法数分别为 1、10、45。对 $(a+b)^n$，a,b 为两项，n 为不小于 2 的整数。

$$\frac{10\times 9}{2}=45$$

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\ldots$$

③ **按指数降幂排列：**展开式含倒数时，先化简各项，再按指数由大到小排列。例如下式的前三项，指数依次为 $6,2,-2$。

$$\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^3=(x^2)^3+3(x^2)^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)+3x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^3$$

$$\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^3=x^6-3x^2+3x^{-2}-x^{-6}$$

④ **配对后合并系数：**例题求 x^8 的系数，按两个括号中所取项的指数配对。每对的系数先_____，各对所得结果再_____。

前一括号取 1
后一括号取含 x^8 的项
$0+8=8$

前一括号取 $-x^2$
后一括号取含 x^6 的项
$2+6=8$

⑤ **常数项指数为零：**题目求与 x 无关的项，就是求常数项。两项相乘后的指数须为_____。例如下式先展开平方，再将指数互为相反数的项配对。

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^2=1+2\times\left(\frac{2}{x}\right)+\left(\frac{2}{x}\right)^2=1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}$$

$$x\times\left(\frac{4}{x}\right)=4$$

$$x^2\times\left(\frac{4}{x^2}\right)=4$$

$$(1+x+x^2)\left(1+\frac{2}{x}\right)^2 \text{ 的常数项}=1\times1+1\times4+1\times4=9$$

⑥ **沿用前问展开式：**题目要求由此求解时，沿用前问已求出的项。续用上述三次方展开式，求其与 $1+2x^4$ 乘积的 x^2 项系数。

取 $-3x^2$ 与 1
$(-3x^2)\times1=-3x^2$

取 $3x^{-2}$ 与 $2x^4$
$3x^{-2}\times2x^4=6x^2$

$$x^2 \text{ 的系数}=-3+6=3$$

填空：①相加　②相乘　③相加　④0

点石成金　题目出现两个展开式相乘，求指定幂的系数或常数项时，先展开项数较少的因式，再按指数之和配对。

例 1　[2023 · February/March 0606/12 Q3]

Find the coefficient of x^8 in the expansion of $\left(1-x^2\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{10}$.

求 $(1-x^2)(2x-\frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中 x^8 的系数。

解答　由二项式展开，得

$$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{10}=(2x)^{10}+10(2x)^9\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{10\times9}{2}(2x)^8\left(-\frac{1}{x}\right)^2+\ldots$$

$$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{10}=1024x^{10}-5120x^8+11520x^6+\ldots$$

方法：先看前一括号的两项，再倒推后一括号所需的幂次。

辨析：指数是配对时相加的数，系数是配对时相乘的数。

前一括号中的 1 配含 x^8 的项，$-x^2$ 配含 x^6 的项。

$$(1-x^2)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{10} \text{ 中 } x^8 \text{ 的系数}=1\times(-5120)+(-1)\times11520=-16640$$

答：x^8 的系数为 -16640。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/21 Q7]

提示：先展开平方，再找另一展开式中指数与它相反的项。

Find the term independent of x in the expansion of $(2-3x)^6\left(1+\frac{1}{4x}\right)^2$.

求 $(2-3x)^6\left(1+\frac{1}{4x}\right)^2$ 的展开式中与 x 无关的项。

✓ **答案**

-89

解析 先展开平方，得

$$\left(1+\frac{1}{4x}\right)^2 = 1+2\times\frac{1}{4x}+\left(\frac{1}{4x}\right)^2 = 1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{16x^2}$$

由二项式展开，得

$$(2-3x)^6 = 2^6+6\times2^5(-3x)+\frac{6\times5}{2}\times2^4(-3x)^2+\ldots$$

$$(2-3x)^6 = 64-576x+2160x^2+\ldots$$

常数项由指数之和为零的项相乘后相加得到。后一展开式中的 1、x^{-1}、x^{-2} 分别配前一展开式中的常数项、x 项、x^2 项。

$$\text{所求常数项} = 64\times1+(-576)\times\frac{1}{2}+2160\times\frac{1}{16}$$

$$\text{所求常数项} = 64-288+135 = -89$$

答：与 x 无关的项为 -89。

2. [2025 · October/November 0606/22 Q3]

提示：看平方展开后的三个幂次，逐一配上指数相反的项。

Find the exact value of the term independent of x in the expansion of $\left(2+\frac{3}{x^2}\right)^{10}\left(1-4x^2\right)^2$.

求 $\left(2+\frac{3}{x^2}\right)^{10}\left(1-4x^2\right)^2$ 的展开式中与 x 无关的项的精确值。

✓ **答案**

1537024

解析 先展开平方，得

$$\left(1-4x^2\right)^2 = 1+2\left(-4x^2\right)+\left(-4x^2\right)^2 = 1-8x^2+16x^4$$

由二项式展开，得

$$\left(2+\frac{3}{x^2}\right)^{10} = 2^{10}+10\times2^9\times\frac{3}{x^2}+\frac{10\times9}{2}\times2^8\left(\frac{3}{x^2}\right)^2+\ldots$$

$$\left(2+\frac{3}{x^2}\right)^{10} = 1024+15360x^{-2}+103680x^{-4}+\ldots$$

后一展开式中的 1、x^2、x^4 分别配前一展开式中的常数项、x^{-2} 项、x^{-4} 项。

$$\text{所求常数项} = 1024\times1+15360\times(-8)+103680\times16$$

$$\text{所求常数项} = 1024 - 122880 + 1658880 = 1537024$$

答：与 x 无关的项的精确值为 1537024。

3. [2023・May/June 0606/13 Q5(b)]
提示：沿用前问前三项，比较与平方各项配对后的指数和。

(a) Find the first three terms in the expansion of $\left(x^2 - \frac{4}{x^2}\right)^{10}$ in descending powers of x. Give each term in its simplest form.

(b) Hence find the coefficient of x^{16} in the expansion of $\left(x^2 - \frac{4}{x^2}\right)^{10}\left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right)^2$.

(a) 求 $\left(x^2 - \frac{4}{x^2}\right)^{10}$ 的展开式中按 x 的降幂排列的前三项。每一项均须写成最简形式。
(b) 由此求 $\left(x^2 - \frac{4}{x^2}\right)^{10}\left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right)^2$ 的展开式中 x^{16} 的系数。

✓ **答案** (a) $x^{20} - 40x^{16} + 720x^{12}$；(b) 564

解析 (a) 由二项式展开，得

$$\left(x^2 - \frac{4}{x^2}\right)^{10} = (x^2)^{10} + 10(x^2)^9\left(-\frac{4}{x^2}\right) + \frac{10 \times 9}{2}(x^2)^8\left(-\frac{4}{x^2}\right)^2 + \ldots$$

$$\left(x^2 - \frac{4}{x^2}\right)^{10} = x^{20} - 40x^{16} + 720x^{12} + \ldots$$

前三项按 x 的降幂排列为

$$x^{20} - 40x^{16} + 720x^{12}$$

(b) 展开另一因式，得

$$\left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right)^2 = x^4 + 2 \times x^2 \times \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^4} = x^4 + 4 + 4x^{-4}$$

沿用 (a) 的结果，x^{20} 配 $4x^{-4}$，$-40x^{16}$ 配 4，$720x^{12}$ 配 x^4。各对相乘后的指数均为 16。

$$x^{16} \text{ 的系数} = 1 \times 4 + (-40) \times 4 + 720 \times 1$$

$$x^{16} \text{ 的系数} = 4 - 160 + 720 = 564$$

答：(a) 前三项为 $x^{20} - 40x^{16} + 720x^{12}$；(b) x^{16} 的系数为 564。

4. [2021・February/March 0606/22 Q9(b)(ii)]
提示：先展开平方，再比较常数项与一次项系数。

(b) (i) Find, in ascending powers of x, the first 3 terms in the expansion of $(1+3x)^6$, simplifying the coefficient of each term.

(ii) When $(1+3x)^6(a+x)^2$ is written in ascending powers of x, the first three terms are $4+68x+bx^2$, where a and b are constants. Find the value of a and of b.

(b) (i) 按x的升幂，求$(1+3x)^6$展开式的前三项，并化简每一项的系数。
(ii) 将$(1+3x)^6(a+x)^2$按x的升幂展开时，前三项为$4+68x+bx^2$，其中a和b为常数。求a和b的值。

✓ **答案** $a = -2$，$b = 469$。

解析 由二项式展开，得

$$(1+3x)^6 = 1 + 6(3x) + \frac{6\times 5}{2}(3x)^2 + ...$$

$$(1+3x)^6 = 1 + 18x + 135x^2 + ...$$

另一因式展开为

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

将常数项、一次项分别配对相乘，得

$$(1+3x)^6(a+x)^2 = a^2 + (18a^2+2a)x + (135a^2+36a+1)x^2 + ...$$

比较常数项，得

$$a^2 = 4$$

比较一次项系数，得

$$18a^2 + 2a = 68$$

代入得

$$72 + 2a = 68$$

$$a = -2$$

此时$a^2=4$，满足常数项条件。比较二次项系数，得

$$b = 135a^2 + 36a + 1 = 135\times 4 + 36\times(-2) + 1 = 469$$

答：$a=-2$，$b=469$。

5. [2022 · May/June 0606/13 Q1(b)]

提示：沿用前问展开式，找出指数和等于指定次数的配对。

(a) Find the rational numbers a, b and c, such that the first three terms, in descending powers of x, in the expansion of $\left(3x^2 - \frac{1}{9x}\right)^5$ can be written in the form $ax^{10} + bx^7 + cx^4$.

(b) Hence find the coefficient of x^4 in the expansion of $\left(3x^2 - \frac{1}{9x}\right)^5\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^2$.

(a) 求有理数a、b和c，使$\left(3x^2 - \frac{1}{9x}\right)^5$的展开式按$x$的降幂排列时，前三项可写成$ax^{10} + bx^7 + cx^4$。

(b) 由此求$\left(3x^2 - \frac{1}{9x}\right)^5\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^2$的展开式中$x^4$的系数。

✓ **答案** $\frac{469}{3}$。

解析 由二项式展开，得

$$\left(3x^2 - \frac{1}{9x}\right)^5 = (3x^2)^5 + 5(3x^2)^4\left(-\frac{1}{9x}\right) + \frac{5\times 4}{2}(3x^2)^3\left(-\frac{1}{9x}\right)^2 + ...$$

$$\left(3x^2 - \frac{1}{9x}\right)^5 = 243x^{10} - 45x^7 + \frac{10}{3}x^4 + ...$$

因此，前问中的有理数为

$$a = 243, \quad b = -45, \quad c = \frac{10}{3}$$

另一因式展开为

$$\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2=1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^6}$$

乘积含x^4的配对，其指数分别满足

$$4+0=4,\quad 7+(-3)=4,\quad 10+(-6)=4$$

第一因式的其余项次数低于4，与第二因式相乘不能产生x^4项。

$$x^4\text{的系数}=\frac{10}{3}\times 1+(-45)\times 2+243\times 1=\frac{469}{3}$$

答：x^4的系数为$\frac{469}{3}$。

题型 7　由等差项与和的条件列一次方程求首项、公差

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **逐项表示通项：**本题相邻两项之差均为 -2。记首项为 a，公差为 d，第 n 项为 u_n。例如第三项为 8、公差为 3，向前各减一次公差。

$$a,a-2,a-4,\ldots$$

$$u_n=a+\underline{\qquad}d$$

$$u_2=8-3=5$$

$$u_1=8-2\times 3=2$$

② **前项求和公式：**本题前四项相加，可合并首项与公差。记前 n 项和为 S_n，项数 n 为正整数。首尾两项配对，得到求和公式。

$$S_4=a+(a-2)+(a-4)+(a-6)=4a-12=\frac{4}{2}(2a-6)$$

$$S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)=\underline{\qquad}$$

③ **项的倍数关系：**题目给出两项的倍数或比，先写成项的等式，再代入通项。比为 $2:3$，表示前项的三倍等于后项的两倍。

第五项是第二项的两倍

$$u_5=2u_2$$

$$a+4d=2(a+d)$$

第二项与第五项的比为 $2:3$

$$u_2:u_5=2:3$$

$$3(a+d)=2(a+4d)$$

④ **和的条件列式：**本题前四项和等于前十项和，列出两个和的等式。出现和的倍数关系，倍数乘在整个和上。

本题两段前项和相等

$$S_4=S_{\{10\}}$$

$$2(2a-6)=5(2a-18)$$

例如前六项和为前三项和的三倍

$$S_6=3S_3$$

$$3(2a+5d)=3\times\tfrac{3}{2}(2a+2d)$$

⑤ **局部项和表示：**求接下来的若干项之和，用两个前项和相减。求有限数列最后几项之和，先由总项数确定末段项号。

本题第五项至第十项

$u_5+u_6+u_7+u_8+u_9+u_{\{10\}}=S_{\{10\}}-S_4=0$

十项数列的最后三项

$u_8+u_9+u_{\{10\}}=(a+7d)+(a+8d)+(a+9d)=3(a+8d)$

⑥ **联立方程求量：**两个未知数需要两个方程。先将一个未知数表示出来，再代入另一式。例如列得下列两式，便可求首项与公差。

$$2a=4d$$

$$2a+d=10$$

$$a=2d$$

$$2\times 2d+d=10$$

$$5d=10$$

$$d=2$$

$$a=2\times 2=4$$

填空：①$n-1$　②$\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$

点石成金　题目出现等差数列的项、前若干项和或它们的倍数关系时，先用首项与公差表示各项和各段和，再列方程。

例 1　[2026 · February/March 0606/12 Q4]

In an arithmetic progression:

- the common difference is -2
- the sum of the first 4 terms is equal to the sum of the first 10 terms.

Find the first term.

一个等差数列满足：
公差为 -2；前四项的和等于前十项的和。
求首项。

解答　设首项为 a，由公差为 -2，得

$$S_4=\frac{4}{2}(2a+3\times(-2))=4a-12$$

$$S_{\{10\}}=\frac{10}{2}(2a+9\times(-2))=10a-90$$

由前四项和等于前十项和，得

$$4a-12=10a-90$$

$$6a=78$$

$$a=13$$

答：首项为 13。

方法：先看公差与两段和的相等条件，用首项表示两段和后列方程。

辨析：第四项是单个项，前四项和是四项相加。

拓展：等差数列中，等距于两端的两项之和相等。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/11 Q11(a)]

提示：从第三项往前数，比较到第一、二项各隔几个公差。

An arithmetic progression has common difference d.
The 3rd term of this progression is 10.

(a) Write down expressions for the 1st term and the 2nd term of this progression.
Give your answers in terms of d only.

一个等差数列的公差为 d。这个数列的第三项为 10。
(a) 写出这个数列第一项和第二项的表达式。答案仅用含 d 的式子表示。

✓ **答案** 第一项为 $10-2d$，第二项为 $10-d$。

解析 公差为 d，向前一项减去 d，得

$$u_1 = u_3 - 2d = 10 - 2d$$

$$u_2 = u_3 - d = 10 - d$$

答：第一项为 $10-2d$，第二项为 $10-d$。

2. [2025 · October/November 0606/11 Q5(a)]

提示：看两段和的倍数关系，四倍应乘在整个前五项和上。

(a) In an arithmetic progression:

- the first term is 3
- the sum of the first 10 terms is 4 times the sum of the first 5 terms.

Find the common difference.

(a) 一个等差数列满足：
首项为 3；前十项的和是前五项的和的四倍。
求公差。

✓ **答案**

$$d = 6$$

解析 由首项为 3，得

$$S_{\{10\}} = \frac{10}{2}(2\times 3 + 9d) = 5(6+9d)$$

$$S_5 = \frac{5}{2}(2\times 3 + 4d) = \frac{5}{2}(6+4d)$$

由前十项和为前五项和的四倍，得

$$5(6+9d) = 4\times\frac{5}{2}(6+4d)$$

$$6+9d = 2(6+4d)$$

$$6+9d = 12+8d$$

$$d = 6$$

答：公差为 6。

3. [2026 · May/June 0606/13 Q2]

提示：分别列出两项之和与前六项和，比较首项的系数。

An arithmetic progression has first term a and common difference d, where $a \neq 0$ and $d \neq 0$.

- The sum of the 6th and 11th terms is 0.
- The sum of the first 6 terms is -30.

Find the values of a and d.

一个等差数列的首项为 a，公差为 d，其中 $a \neq 0$ 且 $d \neq 0$。
第六项与第十一项的和为 0；前六项的和为 -30。
求 a 和 d 的值。

✓ **答案** $a = -\frac{15}{2}$，$d = 1$。

解析 由第六项与第十一项的和为 0，得

$$(a + 5d) + (a + 10d) = 0$$

$$2a + 15d = 0$$

由前六项的和为 -30，得

$$\frac{6}{2}(2a + 5d) = -30$$

$$2a + 5d = -10$$

两式相减，得

$$(2a + 15d) - (2a + 5d) = 0 - (-10)$$

$$10d = 10$$

$$d = 1$$

代入得

$$2a + 15 = 0$$

$$a = -\frac{15}{2}$$

答：$a = -\frac{15}{2}$，$d = 1$。

4. [2026 · May/June 0606/21 Q3(a)]

提示：先把两项的倍数关系列成等式，再结合前十项和。

An arithmetic progression has first term a and common difference d.

The 6th term is 1.5 times the 3rd term.

The sum of the first ten terms is 255.

(a) Find the values of a and d.

一个等差数列的首项为 a，公差为 d。
第六项是第三项的 1.5 倍。前十项的和为 255。
(a) 求 a 和 d 的值。

✓ **答案**　$a=12$，$d=3$。

解析　由第六项为第三项的 1.5 倍，得

$$a+5d=\frac{3}{2}(a+2d)$$

$$2a+10d=3a+6d$$

$$a=4d$$

由前十项的和为 255，得

$$\frac{10}{2}(2a+9d)=255$$

$$2a+9d=51$$

代入得

$$2\times 4d+9d=51$$

$$17d=51$$

$$d=3$$

$$a=4\times 3=12$$

答：$a=12$，$d=3$。

5. [2025 · October/November 0606/13 Q10(a)]

⟵ 提示：展开两段和的倍数等式，分别合并首项与公差的系数。

(a) An arithmetic progression has first term a and common difference d.

Given that $S_{20}=3\times S_{10}$, find a in terms of d.

(a) 一个等差数列的首项为 a，公差为 d。

已知 $S_{\{20\}}=3\times S_{\{10\}}$，用含 d 的式子表示 a。

✓ **答案**

$$a=11\frac{d}{2}$$

解析　由 $S_{\{20\}}=3S_{\{10\}}$，得

$$\frac{20}{2}(2a+19d)=3\times\frac{10}{2}(2a+9d)$$

$$2(2a+19d)=3(2a+9d)$$

$$4a+38d=6a+27d$$

$$2a=11d$$

$$a=11\frac{d}{2}$$

答：$a=11\frac{d}{2}$。

6. [2023 · October/November 0606/23 Q10(a)]
提示：看第五项的数值与两项的倍数关系，分别列式再联立。

(a) In an arithmetic progression the 5th term is 11. The 7th term is three times the 2nd term. Find the 1st term and the common difference.

(a) 一个等差数列的第五项为 11。第七项是第二项的三倍。
求首项和公差。

✓ **答案** 首项为 3，公差为 2。

解析 设首项为 a，公差为 d。由第五项为 11，得

$$a+4d=11$$

由第七项为第二项的三倍，得

$$a+6d=3(a+d)$$

$$2a=3d$$

$$a=3\frac{d}{2}$$

代入得

$$3\frac{d}{2}+4d=11$$

$$11\frac{d}{2}=11$$

$$d=2$$

$$a=3\times\frac{2}{2}=3$$

答：首项为 3，公差为 2。

7. [2024 · May/June 0606/21 Q8(a)]
提示：先确定接下来二十项的项号，再用两段前项和表示。

(a) In an arithmetic progression, the sum of the first 30 terms is -1065. The sum of the **next** 20 terms is -2210. Find the first term and the common difference.

(a) 一个等差数列的前 30 项的和为 -1065。接下来的 20 项的和为 -2210。
求首项和公差。

✓ **答案** 首项为 8，公差为 -3。

解析 设首项为 a，公差为 d。由前 30 项的和为 -1065，得

$$\frac{30}{2}(2a+29d)=-1065$$

$$2a+29d=-71$$

接下来的 20 项为第 31 项至第 50 项，故

$$S_{\{50\}} - S_{\{30\}} = -2210$$

$$S_{\{50\}} = -1065 - 2210 = -3275$$

$$\frac{50}{2}(2a + 49d) = -3275$$

$$2a + 49d = -131$$

两式相减，得

$$(2a + 49d) - (2a + 29d) = -131 - (-71)$$

$$20d = -60$$

$$d = -3$$

代入得

$$2a + 29 \times (-3) = -71$$

$$2a = 16$$

$$a = 8$$

答：首项为 8，公差为 -3。

8. [2023 · February/March 0606/22 Q6(b)]

提示：先比较两段和展开后的首项系数，再用项比补充条件。

(b) An arithmetic progression is such that $S_{20} - 400 = 2S_{10}$ and $u_1 : u_6$ is $1 : 5$. Find the sum of the first 3 terms of this progression.

(b) 一个等差数列满足 $S_{\{20\}} - 400 = 2S_{\{10\}}$，且 $u_1 : u_6$ 为 $1 : 5$。
求这个数列前三项的和。

✓ **答案**

$$27$$

解析 设首项为 a，公差为 d。由 $S_{\{20\}} - 400 = 2S_{\{10\}}$，得

$$S_{\{20\}} - 2S_{\{10\}} = 400$$

$$10(2a + 19d) - 2 \times 5(2a + 9d) = 400$$

$$100d = 400$$

$$d = 4$$

由 $u_1 : u_6 = 1 : 5$，得

$$a + 5d = 5a$$

$$4a = 5d$$

$$a = 5 \times \frac{4}{4} = 5$$

所以

$$S_3 = \frac{3}{2}(2a + 2d) = 3(a + d) = 3(5 + 4) = 27$$

答：前三项的和为 27。

9. [2023 · October/November 0606/22 Q9(a)]

提示：先确定末三项的项号，再比较两组三项的中间项。

(a) An arithmetic progression has twelve terms. The sum of the first three terms is -36 and the sum of the last three terms is 72. Find the first term and the common difference.

(a) 一个等差数列共有十二项。前三项的和为 -36，最后三项的和为 72。
求首项和公差。

✓ **答案** 首项为 -16，公差为 4。

解析 设首项为 a，公差为 d。由前三项的和为 -36，得

$$\frac{3}{2}(2a + 2d) = -36$$

$$a + d = -12$$

数列共十二项，最后三项为第十、十一、十二项，故

$$(a + 9d) + (a + 10d) + (a + 11d) = 72$$

$$3a + 30d = 72$$

$$a + 10d = 24$$

两式相减，得

$$(a + 10d) - (a + d) = 24 - (-12)$$

$$9d = 36$$

$$d = 4$$

代入得

$$a = -12 - 4 = -16$$

答：首项为 -16，公差为 4。

题型 8 代入等比通项与求和公式求指定量

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **等比数列的比值：** 本节按相邻项比值均有意义的等比数列讨论，故各项和公比均非零。相邻后一项与前一项的比为同一定值，称为公比。

② **等比通项：** 首项为 64、公比为 0.5 时，前几项为 64, 32, 16, 8，相邻两项的比为_____。首项记为 a，公比记为 r，第 n 项记为 u_n。从首项到第 n 项，共乘公比 $n-1$ 次。

$$u_2 = 64 \times 0.5 = 32$$

$$u_3 = 64 \times 0.5^2 = 16$$

$$u_n = ar^{n-1}$$

$$u_{10} = 64 \times 0.5$$

③ **有限项求和：**把 $64, 32, 16$ 等前 n 项相加，所得的和记为 S_n。写出 S_n 与 rS_n，相减后消去中间各项。

$$S_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + \ldots + ar^n$$

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

$r \neq 1$	$r = 1$
$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$	$S_n = na$

$$S_{10} = \frac{64(1-0.5^{10})}{1-0.5} =$$

④ **无穷项求和：**当公比满足 $|r| < 1$ 时，前 n 项的和趋近一个定值，记为 S_∞。例如首项为 64、公比为 0.5，有

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}, \quad S_\infty = \frac{64}{1-0.5} = 128$$

⑤ **指数对数化简：**幂作数列项时，先用同底数幂相除求公比，再合并通项的指数。常用对数记为 $\log_{10}$，自然对数记为 $\ln$，对数的真数须大于 0。对数中的幂可把指数移到前面，再比较各项的倍数。

$$\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2}$$

$$2^5\left(2^{-2}\right)^{n-1} = 2^{5-2(n-1)} = 2^{7-2n}$$

$$\log_{10}(100^2) = 2\log_{10} 100 = 4$$

$$\ln(9z^2) = \ln((3z)^2) = 2\ln(3z) \quad (z > 0)$$

$$\ln(81z^4) = \ln((3z)^4) = 4\ln(3z) \quad (z > 0)$$

$$\log_{10} z = 2 \xrightarrow{\text{还原真数}} z = 10^2 = 100$$

← 填空：①0.5　②9　③1023/8

点石成金　题目出现等比数列的首项、公比、指定项或项和时，先把各项和所求写成首项与公比的式子。

例 1　[2023 · February/March 0606/22 Q6(a)]

(a) A geometric progression has first term 64 and common ratio 0.5.

(i) Find the 10th term.

(ii) Find the sum of the first 10 terms.

(iii) Find the sum to infinity.

(a) 一个等比数列的首项为 64，公比为 0.5。(i) 求第 10 项。(ii) 求前 10 项的和。(iii) 求无穷和。

解答　由首项为 64、公比为 0.5，得第 10 项为 $u_{10}=64\times0.5^{10-1}=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{9}=\frac{1}{8}$。前 10 项的和为 $S_{10}=\frac{64(1-0.5^{10})}{1-0.5}=128\times\frac{1023}{1024}=\frac{1023}{8}$。$\because|0.5|<1$，$\therefore$ 该数列有无穷和，且 $S_{\infty}=\frac{64}{1-0.5}=128$。答：(i) 第 10 项为 $\frac{1}{8}$；(ii) 前 10 项的和为 $\frac{1023}{8}$；(iii) 无穷和为 128。

方法：先找首项、公比和项数，再选公式。
辨析：单个项的值与前若干项和不同。
拓展：公比绝对值小于一才有无穷和。

针对练习

1. [2024 · February/March 0606/12 Q9(b)]
提示：把真数的指数移到对数前，比较三项的系数。

(b) The first three terms of a geometric progression are $\lg\phi^{3}$, $\lg\phi$ and $\lg\phi^{\frac{1}{3}}$.

(i) Determine whether this geometric progression has a sum to infinity.

(ii) Find the nth term of this geometric progression, giving your answer in the form $3^{A}\lg\phi$, where A is a function of n.

(iii) Find the value of ϕ, given that the 20th term is 3^{-18}.

(b) 一个等比数列的前三项为 $\log_{10}(\varphi^{3})$、$\log_{10}\varphi$ 和 $\log_{10}\left(\varphi^{\frac{1}{3}}\right)$。(i) 判断该等比数列是否有无穷和。(ii) 求该等比数列的第 n 项，答案写成 $3^{A}\log_{10}\varphi$ 的形式，其中 A 是 n 的函数。(iii) 已知第 20 项为 3^{-18}，求 φ 的值。

✓ **答案**　(i) 有无穷和；(ii) $u_{n}=3^{2-n}\log_{10}\varphi$，$A=2-n$；(iii) $\varphi=10$。

解析　由对数运算，前三项可写为 $\log_{10}(\varphi^{3})=3\log_{10}\varphi$，$\log_{10}\varphi$，$\log_{10}\left(\varphi^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}\log_{10}\varphi$。各项依次乘 $\frac{1}{3}$，故公比为 $r=\frac{1}{3}$。$\because\left|\frac{1}{3}\right|<1$，$\therefore$ 该数列有无穷和。第 n 项为 $u_{n}=3\log_{10}\varphi\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=3^{2-n}\log_{10}\varphi$。故 $A=2-n$。由第 20 项为 3^{-18}，得 $3^{2-20}\log_{10}\varphi=3^{-18}$，$\log_{10}\varphi=1$，$\varphi=10^{1}=10$。答：(i) 有无穷和；(ii) $u_{n}=3^{2-n}\log_{10}\varphi$，$A=2-n$；(iii) $\varphi=10$。

2. [2023 · May/June 0606/11 Q9(b)]
提示：相邻两项相除时先减指数，再合并通项中的指数。

(b) The first three terms of a geometric progression are p^{3x}, p^{x} and p^{-x}, where p is a positive integer. Find the nth term of this progression giving your answer in the form $p^{(a+bn)x}$.

(b) 一个等比数列的前三项为 p^{3x}、p^{x} 和 p^{-x}，其中 p 为正整数。求该等比数列的第 n 项，答案写成 $p^{(a+bn)x}$ 的形式。

✓ **答案**　$u_{n}=p^{(5-2n)x}$。

解析　由前三项为 p^{3x}、p^{x} 和 p^{-x}，得公比 $r=\frac{p^{x}}{p^{3x}}=p^{-2x}$。第 n 项为 $u_{n}=p^{3x}\left(p^{-2x}\right)^{n-1}=p^{3x-2x(n-1)}=p^{(5-2n)x}$。答：第 n 项为 $p^{(5-2n)x}$。

3. [2024 · May/June 0606/12 Q10(b)]
提示：把各真数写成同一底数的幂，再比较对数前的系数。

(b) The first 3 terms of a geometric progression are $\ln 2y$, $\ln 4y^2$, $\ln 16y^4$.

(i) Find the nth term of this geometric progression.

(ii) Find the sum to n terms of this geometric progression, giving your answer in its simplest form.

(b) 一个等比数列的前三项为 $\ln(2y)$、$\ln(4y^2)$ 和 $\ln(16y^4)$。(i) 求该等比数列的第 n 项。(ii) 求该等比数列的前 n 项和，答案写成最简形式。

✓ **答案** (i) $u_n = 2^{n-1}\ln(2y)$；(ii) $S_n = (2^n - 1)\ln(2y)$。

解析 由对数的真数为正，得 $y > 0$。前三项可写为 $\ln(2y)$，$\ln(4y^2) = \ln((2y)^2) = 2\ln(2y)$，$\ln(16y^4) = \ln((2y)^4) = 4\ln(2y)$。各项依次乘 2，故公比为 2。第 n 项为 $u_n = \ln(2y) \times 2^{n-1} = 2^{n-1}\ln(2y)$。前 n 项的和为 $S_n = \frac{\ln(2y)(1-2^n)}{1-2} = (2^n - 1)\ln(2y)$。答：(i) $u_n = 2^{n-1}\ln(2y)$；(ii) $S_n = (2^n - 1)\ln(2y)$。

4. [2022 · May/June 0606/11 Q7(b)]
提示：先统一对数的倍数，再求相邻两项的比。

(b) DO NOT USE A CALCULATOR IN THIS PART OF THE QUESTION.

The first three terms of a geometric progression are $\ln 256$, $\ln 16$, $\ln 4$. Find the sum to infinity of this progression, giving your answer in the form $p\ln 2$.

(b) 本小问不得使用计算器。
一个等比数列的前三项为$\ln 256$、$\ln 16$、$\ln 4$。求这个数列的无穷和，答案写成$p\ln 2$的形式。

✓ **答案** $16\ln 2$

解析 由对数的幂法则，得

$$\ln 256 = \ln(2^8) = 8\ln 2$$

$$\ln 16 = \ln(2^4) = 4\ln 2$$

$$\ln 4 = \ln(2^2) = 2\ln 2$$

$\because \ln 2 \neq 0$，$\therefore$ 公比为

$$r = \frac{4\ln 2}{8\ln 2} = \frac{1}{2}$$

$\because |r| = \frac{1}{2} < 1$，$\therefore$ 无穷和为

$$S_\infty = \frac{8\ln 2}{1 - \frac{1}{2}} = 16\ln 2$$

答：无穷和为$16\ln 2$。

5. [2021 · February/March 0606/12 Q6(a)(ii)]
提示：先由无穷和求公比，再用有限等比和公式。

(a) A geometric progression has first term 10 and sum to infinity 6.

(i) Find the common ratio of this progression.

(ii) Hence find the sum of the first 7 terms, giving your answer correct to 2 decimal places.

(a) 一个等比数列的首项为10，无穷和为6。
(i) 求这个数列的公比。
(ii) 由此求前7项的和，答案保留两位小数。

✓ **答案** 6.35

解析 设公比为r。由首项为10、无穷和为6，得

$$6=\frac{10}{1-r}$$

$$6(1-r)=10$$

$$-6r=4$$

$$r=-\frac{2}{3}$$

所得公比满足$|r|=\frac{2}{3}<1$。

由前n项和公式，前7项的和为

$$S_7=\frac{10\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^7\right)}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=6\left(1+\frac{128}{2187}\right)=\frac{4630}{729}\approx 6.35$$

答：前7项的和为6.35，保留两位小数。

题型 9 把对应项写成等差式与等比式后消元求公比

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **两类数列写项：**本例两个数列的首项均为 10。公差 d 表示相邻两项的差，公比 r 表示后一项与前一项的比。首项记为 a，到第 n 项需运算 _____ 次，n 为正整数。

等差数列	等比数列
$10, 10+d, 10+d+d=10+2d, \ldots$	$10, 10r, 10r\times r=10r^2, \ldots$
第 n 项：	第 n 项：
$a+(n-1)d$	ar^{n-1}

② **对应项列等式：**本例等比第 2 项等于等差第 4 项。等比第 3 项等于等差第 6 项。分别写出对应项，再用等号相连。

$$10r=10+3d$$

$$10r^2=10+5d$$

③ **联立等式消元：**两式都含公差 d，分别把 d 表示出来。令两种表示相等，得到只含公比的方程。

$$d=\frac{10r-10}{3}=\frac{10r^2-10}{5}$$

④ **非零因子约去：**将本例首项改记为 $a\neq 0$，消元式可提出因子 a。等式两边同除以 a，得到公比的方程。

$a(3r^2-5r+2)=0 \xrightarrow{\text{同除以非零的 } a} 3r^2-5r+2=0$

⑤ **乘积为零求根：**方程一边为零时，将另一边写成因式的乘积。乘积为零，至少一个因式为零。含 r^4、r^2 的式子，可按 r^2 的二次式分解。

二次式演示	偶次式演示
$r^2-3r+2=(r-1)(r-2)=0$	$r^4-5r^2+6=(r^2-2)(r^2-3)=0$
$r=1$ 或 $r=2$	$r^2=2$ 或 $r^2=3$

⑥ **条件筛根回代：**由平方求原数时，正负两根都要写出。按题设的 $r \neq 1$、$r > 1$ 或 $d < 0$ 等条件取舍。将保留的公比代回原等式，求出公差。

$r^2 = 4 \xrightarrow{\text{平方根}} r = 2$ 或 $r = -2 \xrightarrow{r>1} r = 2$

← 填空：①

$$n - 1$$

点石成金　题目出现等差数列与等比数列的对应项相等时，先把对应项写成含公差、公比的等式，再消元求公比。

例 1　[2025 · February/March 0606/12 Q8(b)]

The first term of a geometric progression is 10.
This geometric progression has a positive common ratio r.

The first term of an arithmetic progression is also 10.
This arithmetic progression has a negative common difference d.

The second term of the geometric progression is the same as the fourth term of the arithmetic progression.
The third term of the geometric progression is the same as the sixth term of the arithmetic progression.

(a) Find the values of r and d.

(b) Determine whether the geometric progression has a sum to infinity.

一个等比数列的首项为 10，公比为正数 r。一个等差数列的首项也为 10，公差为负数 d。等比数列的第 2 项与等差数列的第 4 项相等。等比数列的第 3 项与等差数列的第 6 项相等。(a) 求 r 和 d 的值。(b) 判断该等比数列是否有无穷和。

解答　由等比数列第 2 项等于等差数列第 4 项，得 $10r = 10 + 3d$。由等比数列第 3 项等于等差数列第 6 项，得 $10r^2 = 10 + 5d$。由前式得 $d = \frac{10r-10}{3}$。代入后式，得 $10r^2 = 10 + 5 \times \frac{10r-10}{3}$，$30r^2 = 50r - 20$，$3r^2 - 5r + 2 = (3r - 2)(r - 1) = 0$。∵ $d < 0$ 且 $10r = 10 + 3d$，∴ $r < 1$，舍去 $r = 1$。于是 $r = \frac{2}{3}$，$d = \frac{10 \times \frac{2}{3} - 10}{3} = -\frac{10}{9}$。∵ $|r| = \frac{2}{3} < 1$，∴ 该等比数列有无穷和。答：(a) $r = \frac{2}{3}$，$d = -\frac{10}{9}$；(b) 有无穷和。

← 提示：按对应项列两式消去公差，再用公差的符号筛根。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/23 Q10(b)]

← 提示：比较两式中公差的系数，用倍数关系消元。

(b) A geometric progression has 1st term a and common ratio r, where $a \neq 0$ and $r \neq 1$. The 1st, 2nd and 3rd terms of the geometric progression are the 1st, 3rd and 7th terms of an arithmetic progression. Find the value of r.

(b) 一个等比数列的首项为 a，公比为 r，其中 $a \neq 0$ 且 $r \neq 1$。这个等比数列的第 1、2、3 项分别是一个等差数列的第 1、3、7 项。求 r 的值。

✓ **答案**

$$r = 2$$

解析　设等差数列的公差为 d。由两数列首项相等，等差数列的首项也为 a。

由对应项相等，得

$ar = a + 2d$，

$ar^2 = a + 6d$。

由第一式，得

$2d = ar - a$。

代入第二式，得

$ar^2 = a + 3(ar - a)$，

$ar^2 - 3ar + 2a = 0$，

$a(r^2-3r+2)=0$。
$\because a\neq 0$，$\therefore$
$r^2-3r+2=0$，
$(r-1)(r-2)=0$。
$\therefore r=1$ 或 $r=2$。
$\because r\neq 1$，$\therefore r=2$。
答：公比为 2。

2. [2025 · October/November 0606/11 Q5(b)]
提示：从公差系数为一的等式起手，代入另一式消元。

(b) The 1st, 2nd and 5th terms of another arithmetic progression are the 1st, 2nd and 3rd terms of a geometric progression.

It is given that the 1st terms of the progressions are **not** 0.
Find the common ratio, r, where $r\neq 1$, of the geometric progression.

(b) 另一个等差数列的第 1、2、5 项分别是一个等比数列的第 1、2、3 项。
已知这两个数列的首项都不为 0。
求等比数列的公比 r，其中 $r\neq 1$。

✓ **答案**

$$r=3$$

解析 设等差数列的首项为 a，公差为 d，其中 $a\neq 0$。等比数列的首项也为 a。
由对应项相等，得
$a+d=ar$，
$a+4d=ar^2$。
由第一式，得
$d=ar-a$。
代入第二式，得
$a+4(ar-a)=ar^2$，
$ar^2-4ar+3a=0$，
$a(r^2-4r+3)=0$。
$\because a\neq 0$，$\therefore$
$r^2-4r+3=0$，
$(r-1)(r-3)=0$。
$\therefore r=1$ 或 $r=3$。
$\because r\neq 1$，$\therefore r=3$。
答：公比为 3。

3. [2023 · October/November 0606/23 Q10(b)]
提示：看消元后公比的幂次，按平方分解，再对照取值范围。

(b) A different arithmetic progression (AP) and a geometric progression (GP) have the following properties.

- The 1st terms of the AP and GP are both 3.
- The 2nd term of the AP is the same as the 3rd term of the GP.
- The 6th term of the AP is the same as the 5th term of the GP.
- The common ratio of the GP is greater than 1.

Find the common difference of the AP and the common ratio of the GP.

(b) 另有一个等差数列（AP）和一个等比数列（GP），具有以下性质：
• 两个数列的首项均为 3。
• 等差数列的第 2 项等于等比数列的第 3 项。

• 等差数列的第 6 项等于等比数列的第 5 项。
• 等比数列的公比大于 1。
求等差数列的公差和等比数列的公比。

✓ **答案** 公差 $d=9$，公比 $r=2$。

解析 设等差数列的公差为 d，等比数列的公比为 r。由对应项相等，得

$3+d=3r^2$，

$3+5d=3r^4$。

由第一式，得

$d=3r^2-3$。

代入第二式，得

$3+5(3r^2-3)=3r^4$，

$3r^4-15r^2+12=0$，

$r^4-5r^2+4=0$，

$(r^2-1)(r^2-4)=0$。

$\therefore r^2=1$ 或 $r^2=4$，

$r=1,-1,2,-2$。

$\because r>1$，$\therefore r=2$。

代回，得

$d=3\times 2^2-3=9$。

答：等差数列的公差为 9，等比数列的公比为 2。

题型 10 由连续三项成等比令中项平方等于两端积

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **连续三项：**例题的第 2、3、4 项是连续三项。以 u_n 表示第 n 项，相邻两项的比相等。交叉相乘，得中项平方等于两端积。

$$u_2=11x-1,\quad u_3=x+5,\quad u_4=x-1$$

$$\frac{u_3}{u_2}=\frac{u_4}{u_3}$$

$$u_3^2=_____$$

② **方程求根：**三项代入后，展开并移项。用因式分解化成乘积等于零，如未知数 z 满足下式。若另有 $z>0$，则保留正根。

$$2z^2-z-3=0$$

$$2z^2-z-3=2z(z+1)-3(z+1)=(2z-3)(z+1)=0$$

$2z-3=0$　　$z+1=0$

$z=\frac{3}{2}$　　$z=-1$

③ **相邻项求比：**前项不为零时，后一项除以前一项得公比 r。用两组相邻项，可写出两个相等的表达式。

$$r=\frac{u_3}{u_2}=\frac{x+5}{11x-1}$$

$$r=\frac{u_4}{u_3}=\frac{x-1}{x+5}$$

④ **由项还原首项：**设等比数列的首项为 a。第 2 项是首项乘以公比，公比非零时可除回首项。

$$u_2=ar$$

$$a = _____$$

⑤ **等差数列通项：**设首项为 b，公差为 h。从第 1 项到第 4 项，共加了 3 次公差。第 n 项共加了 $n-1$ 次公差，其中 n 为正整数。

$$u_4 = b + h + h + h = b + 3h$$

$$u_n = _____$$

⑥ **非零因式约去：**等式含字母乘积，先提取公因式。如已知 $h \neq 0$，则可将下式两边同除以 $6h$。

$$6bh + 12h^2 = 6h(b + 2h) = 0$$

$$b + 2h = 0$$

$$b = -2h$$

← 填空：①u_2u_4　②$\frac{u_2}{r}$　③$b + (n-1)h$

点石成金　题目出现连续三项成等比，或等差数列中指定三项依次成等比时，先写出三项，再令中项平方等于两端积。

例 1　[2026 · May/June 0606/12 Q10(b)]

It is given that a geometric progression has the following terms.

2nd term	$11x-1$
3rd term	$x+5$
4th term	$x-1$

(a) Given that $x > 0$, find the common ratio and first term of the progression.

(b) The sum to infinity of this progression is $\frac{k}{3}$ where k is an integer.

Find the value of k.

已知一个等比数列的部分项如下：第 2 项为 $11x-1$；第 3 项为 $x+5$；第 4 项为 $x-1$。(a) 已知 $x > 0$，求该数列的公比和首项。(b) 该数列的无穷和为 $\frac{k}{3}$，其中 k 为整数。求 k 的值。

解答　由第 2,3,4 项为连续的等比数列项，得 $(x+5)^2 = (11x-1)(x-1)$，$x^2 + 10x + 25 = 11x^2 - 12x + 1$，$5x^2 - 11x - 12 = 0$，$(5x+4)(x-3) = 0$。$\because x > 0$，$\therefore x = 3$。第 2,3,4 项分别为 $11 \times 3 - 1 = 32$，$3 + 5 = 8$，$3 - 1 = 2$。公比为 $r = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$。首项为 $a = \frac{32}{\frac{1}{4}} = 128$。$\because \left|\frac{1}{4}\right| < 1$，$\therefore S_\infty = \frac{128}{1-\frac{1}{4}} = \frac{512}{3}$。由题意得 $\frac{k}{3} = \frac{512}{3}$，$k = 512$。答：(a) 公比为 $\frac{1}{4}$，首项为 128；(b) $k = 512$。

← 提示：看连续三项，比较中项平方与首尾两项的积。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/22 Q8(b)]

提示：先展开三个指定的等差项，再用等比中项关系列式。

An arithmetic progression has first term t and common difference 1.5.
The 4th, 8th and 20th terms of this arithmetic progression form the 1st, 2nd and 3rd terms of a geometric progression.

(a) Find the value of t.

(b) Find the common ratio of the geometric progression.

一个等差数列的首项为 t，公差为 1.5。该等差数列的第 4 项、第 8 项和第 20 项依次构成一个等比数列的第 1 项、第 2 项和第 3 项。(a) 求 t 的值。(b) 求该等比数列的公比。

✓ **答案** (a) $t=-1.5$；(b) 3。

解析 等差数列的第 $4,8,20$ 项分别为 $t+3\times1.5=t+4.5$，$t+7\times1.5=t+10.5$，$t+19\times1.5=t+28.5$。由这三项依次成等比数列，得 $(t+10.5)^2=(t+4.5)(t+28.5)$，$t^2+21t+110.25=t^2+33t+128.25$，$12t=-18$，$t=-1.5$。等比数列的前三项为 $-1.5+4.5=3$，$-1.5+10.5=9$，$-1.5+28.5=27$。公比为 $r=\frac{9}{3}=3$。答：(a) $t=-1.5$；(b) 公比为 3。

2. [2021 · May/June 0606/21 Q11(a)(i)]

提示：用公差表示等差数列的三项，再令中项平方等于两端的积。

The 2nd, 8th and 44th terms of an arithmetic progression form the first three terms of a geometric progression. In the arithmetic progression, the first term is 1 and the common difference is positive.

(a) (i) Show that the common difference of the arithmetic progression is 5.

一个等差数列的第2、8、44项依次构成一个等比数列的前三项。该等差数列的首项为1，公差为正。
(a)(i) 证明该等差数列的公差为5。

✓ **答案** 公差为5。

解析 设等差数列的公差为d，由题意知$d>0$。第2、8、44项分别为

$$1+d,\quad 1+7d,\quad 1+43d$$

∵这三项依次为等比数列的前三项，∴

$$(1+7d)^2=(1+d)(1+43d)$$

$$1+14d+49d^2=1+44d+43d^2$$

$$6d^2-30d=0$$

$$6d(d-5)=0$$

$$d=0\quad 或\quad d=5$$

∵$d>0$，∴$d=5$。

答：该等差数列的公差为5。

3. [2023 · May/June 0606/23 Q10(a)]

提示：按原下标写三项，再比相邻项的比值，约因式前查非零性。

An arithmetic progression, A, has first term a and common difference d.
The 2nd, 14th and 17th terms of A form the first three terms of a convergent geometric progression, G, with common ratio r.

(a) (i) Given that $d\neq0$, find two expressions for r in terms of a and d and hence show that $a=-17d$.

(ii) Find the value of r.

等差数列 A 的首项为 a，公差为 d。
A 的第 2、14、17 项依次构成一个收敛等比数列 G 的前三项，公比为 r。
(a) (i) 已知 $d \neq 0$，用 a 和 d 写出 r 的两个表达式，并由此证明 $a = -17d$。
(ii) 求 r 的值。

✓ **答案** (i) $r = \frac{a+13d}{a+d}$，$r = \frac{a+16d}{a+13d}$；$a = -17d$。
(ii) $r = \frac{1}{4}$。

解析 等差数列 A 的第 2、14、17 项依次为

$$a + d, \quad a + 13d, \quad a + 16d$$

由它们依次构成等比数列 G 的前三项，得

$$r = \frac{a + 13d}{a + d}$$

$$r = \frac{a + 16d}{a + 13d}$$

$\therefore$

$$\frac{a + 13d}{a + d} = \frac{a + 16d}{a + 13d}$$

$$(a + 13d)^2 = (a + d)(a + 16d)$$

$$a^2 + 26ad + 169d^2 = a^2 + 17ad + 16d^2$$

$$9ad + 153d^2 = 0$$

$$9d(a + 17d) = 0$$

$\because d \neq 0$，$\therefore$

$$a + 17d = 0$$

$$a = -17d$$

将此结果代入公比表达式，得

$$r = \frac{-17d + 13d}{-17d + d} = \frac{-4d}{-16d} = \frac{1}{4}$$

此时两个分母分别为 $-16d$、$-4d$，均不为零。
答：(i) 公比的两个表达式为 $r = \frac{a+13d}{a+d}$、$r = \frac{a+16d}{a+13d}$，且 $a = -17d$；(ii) $r = \frac{1}{4}$。

题型 11 将等比项式相除消去首项后求公比

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **相除的前提：**按相邻项比值均有意义的定义，各项和公比均非零；每次相除仍须说明分母非零。

② **等比项的表示：**首项记为 a，公比 r 是相邻后一项与前一项的比。从首项到第 4 项，公比连乘_____次。t_n 表示第 n 项，n 为正整数。

$$t_1 = a, t_2 = ar, t_3 = ar^2, t_4 = ar^3$$

$$t_n = ar^{n-1}$$

③ **两项相除消元：**例题第 4 项是第 7 项的 -8 倍，用第 7 项除以第 4 项。首项相消，公比的指数相减。一般地，m, n 为正整数，且 $n > m$、$t_m \neq 0$。

$$\frac{t_7}{t_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = r^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\frac{t_n}{t_m} = \frac{ar^{n-1}}{ar^{m-1}} = r^{n-m}$$

$$t_{n+2} = t_n r^2$$

④ **幂式还原公比：**奇数次幂在实数范围内确定一个值。偶数次幂等于正数时，先保留正负两值。题目给出 $r > 0$ 时，取_____。

奇数次幂：

$r^3 = -\frac{1}{8}$

$r = -\frac{1}{2}$

偶数次幂：

$r^2 = \frac{1}{9}$

$r = \pm\frac{1}{3}$

⑤ **含参幂式化简：**同底数幂相除，指数相减。乘方时各因子分别乘方，开平方取非负值。下式中，e 是自然对数的底数，x, u 为实数。

$$\frac{\frac{e^{5x}}{9}}{\frac{e^{2x}}{3}} = \frac{e^{5x-2x}}{3} = \frac{e^{3x}}{3}$$

$$\left(\frac{e^x}{3}\right)^3 = \frac{e^{3x}}{27}$$

$$\sqrt{\frac{9u^4}{16}} = \frac{3\sqrt{u^4}}{4} = \frac{3u^2}{4}$$

⑥ **项和提取因式：**第 2、3 项的和与第 4、5 项的和，先分别提公因式。分母不为零时，两和相除也能消去首项。

$$t_2 + t_3 = ar + ar^2 = ar(1 + r)$$

$$t_4 + t_5 = ar^3 + ar^4 = ar^3(1 + r)$$

$$\frac{t_4 + t_5}{t_2 + t_3} = \frac{ar^3(1 + r)}{ar(1 + r)} = r^2$$

⑦ **前项求和反解：**S_5 表示前 5 项的和，将这 5 项相加并提出 a。代入例题的公比，合并 a 的系数。首项等于前 5 项的和除以_____。

$$S_5 = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 = a(1 + r + r^2 + r^3 + r^4)$$

$$S_5 = a\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = \frac{11}{16}a$$

← 填空：①3　②正根　③$\frac{11}{16}$

点石成金　题目出现等比数列的两个非零项或两组项和时，先写出含首项、公比的式子，再相除消去首项。

例 1　[2026 · May/June 0606/11 Q9(a)]

(a) A geometric progression has common ratio r and first term a, where $a \neq 0$. The 4th term is -8 times the 7th term.

(i) Find the value of r.

(ii) The sum of the first 5 terms of this progression is $\frac{99}{32}$.

Find the value of a.

(a) 一个等比数列的公比为 r，首项为 a，其中 $a \neq 0$。第 4 项是第 7 项的 -8 倍。
(i) 求 r 的值。
(ii) 这个数列前 5 项的和为 $\frac{99}{32}$。求 a 的值。

解答　由第 4 项是第 7 项的 -8 倍，得

$$ar^3 = -8ar^6$$

由相邻项比值均有意义的定义，$r \neq 0$；又题给 $a \neq 0$，故 $ar^3 \neq 0$。两边除以 ar^3，得

$$1 = -8r^3$$

$$r^3 = -\frac{1}{8}$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

由前 5 项的和为 $\frac{99}{32}$，得

$$a\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = \frac{99}{32}$$

$$\frac{11}{16}a = \frac{99}{32}$$

$$a = \frac{99}{32} \times \frac{16}{11} = \frac{9}{2}$$

答：(i) $r = -\frac{1}{2}$；(ii) $a = \frac{9}{2}$。

方法：看第 4 项与第 7 项的倍数关系，先用后项除以前项。

辨析：奇数次幂是能确定实数底数的幂，正的偶数次幂是对应正负两个实数底数的幂。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/21 Q11(b)]

提示：比较两组项和的下标间隔，提取公因式后相除。

A geometric progression has first term a and common ratio r, where $r > 0$.
The sum of the 2nd and 3rd terms of the progression is 168.
The sum of the 4th and 5th terms of the progression is 94.5.

(a) Find the 6th term of the progression.

(b) Find the sum to infinity of the progression.

一个等比数列的首项为 a，公比为 r，其中 $r > 0$。该数列第 2 项与第 3 项的和为 168。该数列第 4 项与第 5 项的和为 94.5。(a) 求该数列的第 6 项。(b) 求该数列的无穷和。

✓ **答案** (a) $\frac{243}{8}$；(b) 512。

解析 由第 $2,3$ 项的和为 168，得 $ar + ar^2 = ar(1+r) = 168$。由第 $4,5$ 项的和为 94.5，得 $ar^3 + ar^4 = ar^3(1+r) = 94.5$。两式相除，得 $r^2 = \frac{94.5}{168} = \frac{9}{16}$。$\because r > 0$，$\therefore r = \frac{3}{4}$。代入得 $a \times \frac{3}{4} \times \left(1 + \frac{3}{4}\right) = 168$，$a = 168 \times \frac{16}{21} = 128$。第 6 项为 $u_6 = 128 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{8}$。$\because \left|\frac{3}{4}\right| < 1$，$\therefore$ 无穷和为 $S_\infty = \frac{128}{1-\frac{3}{4}} = 512$。答：(a) 第 6 项为 $\frac{243}{8}$；(b) 无穷和为 512。

2. [2024 · October/November 0606/11 Q10(a)]

提示：看第 3 项与第 8 项，比较项号之差与相除后的指数。

(a) The 3rd and 8th terms of a geometric progression are 6 and 1458 respectively. Find the common ratio and the first term of this progression.

(a) 一个等比数列的第 3 项和第 8 项分别为 6 和 1458。求这个数列的公比和首项。

✓ **答案** $r = 3$，$a = \frac{2}{3}$。

解析 设首项为 a，公比为 r。由第 3 项和第 8 项的值，得

$$ar^2 = 6$$

$$ar^7 = 1458$$

两式相除，得

$$r^5 = \frac{1458}{6} = 243 = 3^5$$

$$r = 3$$

代入第 3 项，得

$$a \times 3^2 = 6$$

$$a = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

答：公比为 3，首项为 $\frac{2}{3}$。

3. [2024 · May/June 0606/13 Q10(b)]

提示：将第 10 项除以第 3 项，分别比较指数差与常数因子。

(b) In a geometric progression, the 3rd term is $\frac{e^{4x}}{4}$ and the 10th term is $\frac{e^{11x}}{512}$. Find the first term and the common ratio.

(b) 一个等比数列的第 3 项为 $\frac{e^{4x}}{4}$，第 10 项为 $\frac{e^{11x}}{512}$。求这个数列的首项和公比。

✓ **答案** 首项为 e^{2x}，公比为 $\frac{e^x}{2}$。

解析 设首项为 a，公比为 r。由题意，得

$$ar^2 = \frac{e^{4x}}{4}$$

$$ar^9 = \frac{e^{11x}}{512}$$

两式相除，得

$$r^7 = \frac{\frac{e^{11x}}{512}}{\frac{e^{4x}}{4}} = \frac{e^{7x}}{128} = \left(\frac{e^x}{2}\right)^7$$

$$r = \frac{e^x}{2}$$

代入第 3 项，得

$$a = \frac{\frac{e^{4x}}{4}}{\left(\frac{e^x}{2}\right)^2} = \frac{\frac{e^{4x}}{4}}{\frac{e^{2x}}{4}} = e^{2x}$$

答：首项为 e^{2x}，公比为 $\frac{e^x}{2}$。

4. [2025 · May/June 0606/12 Q7(b)]

提示：比较第四项与第六项的比，按公比为正选取平方根。

A geometric progression has a 4th term of $\frac{8k^6}{27}$ and a 6th term of $\frac{32k^{10}}{243}$, where k is a constant.

The common ratio of this geometric progression is positive.

(a) Find the common ratio in terms of k and the value of the first term of this geometric progression.

(b) Given that this geometric progression has a sum to infinity of 3, find the possible values of k.

一个等比数列的第 4 项为 $\frac{8k^6}{27}$，第 6 项为 $\frac{32k^{10}}{243}$，其中 k 为常数。该等比数列的公比为正数。(a) 用 k 表示公比，并求该等比数列的首项。(b) 已知该等比数列的无穷和为 3，求 k 的所有可能值。

✓ **答案** (a) $r = \frac{2k^2}{3}$，首项为 1；(b) $k = 1$ 或 $k = -1$。

解析 设首项为 a，公比为 r。由第 4 项与第 6 项，得 $ar^3 = \frac{8k^6}{27}$，$ar^5 = \frac{32k^{10}}{243}$。第 4 项非零，故 $\frac{8k^6}{27} \neq 0$，从而 $k \neq 0$。两式相除，得 $r^2 = \frac{\frac{32k^{10}}{243}}{\frac{8k^6}{27}} = \frac{4k^4}{9}$。$\because$ 公比为正，$\therefore r = \sqrt{\frac{4k^4}{9}} = \frac{2k^2}{3}$。代入第 4 项，得 $a\left(\frac{2k^2}{3}\right)^3 = \frac{8k^6}{27}$，$a = 1$。由无穷和为 3，得 $\frac{1}{1-\frac{2k^2}{3}} = 3$，$1 = 3 - 2k^2$，$k^2 = 1$，$k = 1$ 或 $k = -1$。这两个值均使 $r = \frac{2}{3}$，满足 $0 < r < 1$。答：(a) 公比为 $\frac{2k^2}{3}$，首项为 1；(b) $k = 1$ 或 $k = -1$。

5. [2023 · May/June 0606/12 Q10(b)]

提示：看相邻两项的比，再比较相隔两项的倍数关系。

(b) The first three terms of a geometric progression are $(2y+1)$, $3(2y+1)^2$ and $9(2y+1)^3$, where $y \neq -\frac{1}{2}$.

Given that the nth term of the progression is equal to 4 times the $(n+2)$th term, find the possible values of y, giving your answers as fractions.

(b) 一个等比数列的前三项为 $(2y+1)$、$3(2y+1)^2$ 和 $9(2y+1)^3$，其中 $y \neq -\frac{1}{2}$。
已知这个数列的第 n 项等于第 $(n+2)$ 项的 4 倍，求 y 的所有可能值，答案用分数表示。

✓ **答案** $y = -\frac{5}{12}$ 或 $y = -\frac{7}{12}$。

解析 设公比为 r。由于 $y \neq -\frac{1}{2}$，有 $2y + 1 \neq 0$。相邻两项相除，得

$$r=\frac{3(2y+1)^2}{2y+1}=3(2y+1)$$

设第 n 项为 t_n，则

$$t_{n+2}=t_nr^2$$

由第 n 项等于第 $(n+2)$ 项的 4 倍，得

$$t_n=4t_{n+2}=4t_nr^2$$

由于首项和公比均不为零，$t_n\neq0$。两边除以 t_n，得

$$1=4r^2$$

$$r^2=\frac{1}{4}$$

$$r=\pm\frac{1}{2}$$

当 $r=\frac{1}{2}$ 时，

$$3(2y+1)=\frac{1}{2}$$

$$2y+1=\frac{1}{6}$$

$$y=-\frac{5}{12}$$

当 $r=-\frac{1}{2}$ 时，

$$3(2y+1)=-\frac{1}{2}$$

$$2y+1=-\frac{1}{6}$$

$$y=-\frac{7}{12}$$

两个值均满足 $y\neq-\frac{1}{2}$。

答：$y=-\frac{5}{12}$ 或 $y=-\frac{7}{12}$。

题型 12　由等差前 n 项和列二次式求项数

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **相邻两项作差：**前三项为 $2x+1$、$4(2x+1)$、$7(2x+1)$。首项记作 a，相邻两项的差称为公差，记作 d。

$$a=2x+1$$

$d=4(2x+1)-(2x+1)=$ _____。

② **前项求和列式：**前 n 项的和记作 S_n，n 为正整数。从首项到第 n 项增加了 $n-1$ 个公差。

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_n=\frac{n}{2}[2(2x+1)+3(n-1)(2x+1)]=\frac{n}{2}(2x+1)(3n-1)$$

③ **项的条件列式：**第 r 项记作 u_r，项的倍数关系可写成方程。若第二项是第一项的两倍，且前三项和为 12，则

$$u_r=a+(r-1)d$$

$$a+d=2a$$

$$\frac{3}{2}(2a+2d)=12$$

$$d=a,\quad 6a=12,\quad a=d=2$$

④ **对数条件化简：**ln 表示自然对数，lg 表示常用对数。真数中的幂可化为系数；对数等式也可按定义还原。

$$\ln(t^k)=k\ln t\quad(t>0)$$

$$3\ln(t^2)=6\ln t,\quad \lg y=-2\overset{\text{按对数定义}}{\longrightarrow}y=10^{-2}$$

当 $t>1$ 时，$\ln t$ 为_____数，可除去而不改变不等号方向。

⑤ **方程确定项数：**两种和的表达式相等，消去非零公因子，整理成二次方程。求出的项数必须是_____。

$$n(n+1)=30$$

$$n^2+n-30=(n+6)(n-5)=0$$

$$n=5$$

⑥ **不等式取项数：**和大于给定值，列严格不等式，再取满足条件的最小正整数。含平方项时，可配成完全平方。

$$n^2+2n>20$$

$$(n+1)^2>21$$

由 $n+1>0$，得

$$n>\sqrt{21}-1\approx 3.58$$

故最少取_____项。

填空：①$3(2x+1)$　②正　③正整数　④4

点石成金　题目出现等差数列的前几项、前若干项和及所求项数时，先确定首项与公差，再用求和公式列二次式。

例 1　[2023 · May/June 0606/12 Q10(a)]

(a) The first three terms of an arithmetic progression are $(2x+1)$, $4(2x+1)$ and $7(2x+1)$, where $x \neq -\frac{1}{2}$.

(i) Show that the sum to n terms can be written in the form $\frac{n}{2}(2x+1)(An+B)$, where A and B are integers to be found.

(ii) Given that the sum to n terms is $(54n+37)(2x+1)$, find the value of n.

(iii) Given also that the sum to n terms in **part (ii)** is equal to 1017.5, find the value of x.

(a) 一个等差数列的前三项为 $2x+1$、$4(2x+1)$ 和 $7(2x+1)$，其中 $x \neq -\frac{1}{2}$。
(i) 证明前 n 项和可写成
$\frac{n}{2}(2x+1)(An+B)$，
其中 A 和 B 为整数，并求出它们的值。
(ii) 已知前 n 项和为 $(54n+37)(2x+1)$，求 n 的值。
(iii) 又知 (ii) 中的前 n 项和等于 1017.5，求 x 的值。

解答　由前三项得

$$a = 2x+1$$

$$d = 4(2x+1) - (2x+1) = 3(2x+1)$$

方法：先看前三项，相减求公差，再将两种总和列成等式。

辨析：项数是正整数，负根是方程的解，不能用作项数。

由等差数列求和公式，得

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2(2x+1) + 3(n-1)(2x+1)]$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2x+1)(3n-1)$$

故 $A = 3$，$B = -1$。
由已知和的表达式，得

$$\frac{n}{2}(2x+1)(3n-1) = (54n+37)(2x+1)$$

$\because x \neq -\frac{1}{2}$，$\therefore 2x+1 \neq 0$，两边同除以 $2x+1$，得

$$\frac{n}{2}(3n-1) = 54n+37$$

$$3n^2 - 109n - 74 = 0$$

$$(3n+2)(n-37) = 0$$

由 n 为正整数，得

$$n = 37$$

再将 $n=37$ 代入已知总和，得

$$(54\times 37+37)(2x+1)=1017.5$$

$$2035(2x+1)=1017.5$$

$$2x+1=\frac{1}{2}$$

$$x=-\frac{1}{4}$$

答：$A=3$，$B=-1$；$n=37$；$x=-\frac{1}{4}$。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/22 Q7(a)]

提示：先把对数中的幂移作系数，再看公因子的正负。

The first three terms of an arithmetic progression can be written as

$$2\ln\left(x^3\right),\quad 5\ln\left(x^2\right),\quad 2\ln\left(x^7\right).$$

(a) Given that $x>1$, find the least number of terms for the sum of this progression to be greater than $43\ln\left(x^{24}\right)$.

一个等差数列的前三项可写为 $2\ln(x^3)$，$5\ln(x^2)$，$2\ln(x^7)$。

(a) 已知 $x>1$，求使这个数列的前若干项和大于 $43\ln(x^{24})$ 的最少项数。

✓ **答案** 22 项

解析 由 $x>1$，得 $\ln x>0$。

将前三项化简，得

$$2\ln(x^3)=6\ln x$$

$$5\ln(x^2)=10\ln x$$

$$2\ln(x^7)=14\ln x$$

故首项与公差为

$$a=6\ln x$$

$$d=10\ln x-6\ln x=4\ln x$$

由求和公式，得

$$S_n=\frac{n}{2}[12\ln x+4(n-1)\ln x]$$

$$S_n=2n(n+2)\ln x$$

由题意，得

$$2n(n+2)\ln x>43\ln(x^{24})$$

$$2n(n+2)\ln x > 1032\ln x$$

两边同除以正数 $2\ln x$，得

$$n^2+2n>516$$

$$(n+1)^2>517$$

由 n 为正整数，得 $n+1>0$，故

$$n>\sqrt{517}-1\approx 21.74$$

答：最少需要 22 项。

2. [2026 · May/June 0606/21 Q3(b)]

提示：先看第六项与第三项的倍数关系，再结合前十项和。

An arithmetic progression has first term a and common difference d.

The 6th term is 1.5 times the 3rd term.

The sum of the first ten terms is 255.

(a) Find the values of a and d.

(b) Using your values of a and d, find the least number of terms for the sum of this arithmetic progression to be greater than 40 000.

一个等差数列的首项为 a，公差为 d。
第六项是第三项的 1.5 倍。
前十项的和为 255。
(a) 求 a 和 d 的值。
(b) 使用所求的 a 和 d 的值，求使这个等差数列的前若干项和大于 40000 的最少项数。

✓ **答案** (a) $a=12$，$d=3$；(b) 160 项。

解析 第六项是第三项的 1.5 倍，故

$$a+5d=1.5(a+2d)$$

$$2d=0.5a$$

$$a=4d$$

由前十项和为 255，得

$$\frac{10}{2}(2a+9d)=255$$

$$2a+9d=51$$

代入 $a=4d$，得

$$17d=51$$

$$d=3$$

$$a=12$$

因此，前 n 项和为

$$S_n = \frac{n}{2}[24 + 3(n-1)]$$

$$S_n = \frac{3}{2}n(n+7)$$

由题意，得

$$\frac{3}{2}n(n+7) > 40000$$

$$3n^2 + 21n > 80000$$

两边同乘以 4，配方得

$$12n^2 + 84n + 147 > 320147$$

$$3(2n+7)^2 > 320147$$

由 n 为正整数，得 $2n+7>0$，故

$$2n + 7 > \sqrt{\frac{320147}{3}}$$

$$n > \frac{\sqrt{\frac{320147}{3}} - 7}{2} \approx 159.84$$

答：(a) $a=12$，$d=3$；(b) 最少需要 160 项。

3. [2022 · May/June 0606/11 Q7(a)]

提示：先由相邻两项求公差，再把总和写成同底幂。

(a) The first three terms of an arithmetic progression are $\lg 3$, $3\lg 3$, $5\lg 3$. Given that the sum to n terms of this progression can be written as $256\lg 81$, find the value of n.

(a) 一个等差数列的前三项为$\lg 3$、$3\lg 3$和$5\lg 3$。已知该数列的前n项和可写成$256\lg 81$，求n的值。

✓ **答案** $n = 32$。

解析 首项记为a，公差记为d，得

$$a = \lg 3$$

$$d = 3\lg 3 - \lg 3 = 2\lg 3$$

由等差数列求和公式，得

$$S_n = \frac{n}{2}[2\lg 3 + (n-1)\times 2\lg 3] = n^2 \lg 3$$

又由对数运算法则，得

$$256\lg 81 = 256\lg(3^4) = 1024\lg 3$$

两种和的表达式相等，得

$$n^2 \lg 3 = 1024\lg 3$$

∵ $\lg 3 > 0$，两边同除以$\lg 3$，得

$$n^2 = 1024$$

由n为正整数，得

$$n = 32$$

答：$n = 32$。

4. [2024 · February/March 0606/12 Q9(a)]

提示：先看总和能否排除零公因子，再按对数定义还原。

(a) The first three terms of an arithmetic progression are $\lg\theta^2$, $\lg\theta^5$ and $\lg\theta^8$.

(i) Given that the sum to n terms of this progression is $4732\lg\theta$, find the value of n.

(ii) This sum is equal to -14196. Find the exact value of θ.

(a) 一个等差数列的前三项为 $\lg(\theta^2)$、$\lg(\theta^5)$ 和 $\lg(\theta^8)$。
(i) 已知这个数列的前 n 项和为 $4732\lg\theta$，求 n 的值。
(ii) 这个和等于 -14196。求 θ 的精确值。

✓ **答案** (i) $n = 56$；(ii) $\theta = \frac{1}{1000}$。

解析 将前三项化简，得

$2\lg\theta$，$5\lg\theta$，$8\lg\theta$。

故首项与公差为

$$a = 2\lg\theta$$

$$d = 3\lg\theta$$

由求和公式，得

$$S_n = \frac{n}{2}[4\lg\theta + 3(n-1)\lg\theta]$$

$$S_n = \frac{n}{2}(3n+1)\lg\theta$$

由已知总和，得

$$\frac{n}{2}(3n+1)\lg\theta = 4732\lg\theta$$

由 (ii) 中总和为 -14196，知 $\lg\theta \neq 0$，两边同除以 $\lg\theta$，得

$$\frac{n}{2}(3n+1) = 4732$$

$$3n^2 + n - 9464 = 0$$

$$(n-56)(3n+169) = 0$$

由 n 为正整数，得

$$n = 56$$

再由总和为 -14196，得

$$4732\lg\theta=-14196$$

$$\lg\theta=-3$$

由常用对数的定义，得

$$\theta=10^{-3}=\frac{1}{1000}$$

答：(i) $n=56$；(ii) $\theta=\frac{1}{1000}$。

题型 13 由等比有限和或无穷和条件列方程求公比

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **等比数列展开：**首项为 4，公比记为 r。后一项等于前一项乘_____。首项记为 a 时，也按此规律展开。

$$4,4r,4r^2,4r^3,\ldots$$

$$a,ar,ar^2,ar^3,\ldots$$

② **有限和求公比：**前三项和记为 S_3，本例中它等于 7。展开求和，移项后用因式分解求解。

$$S_3=4+4r+4r^2=7$$

$$4r^2+4r-3=0$$

例如，未知数 x 满足下式时，分别令两个因式为零。

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)=0$$

$x-1=0$	$x+2=0$
$x=1$	$x=-2$

③ **无穷和的条件：**公比的_____小于 1 时，数列收敛。首项为 2、公比为 $\frac{1}{3}$ 时，可求得下列无穷和。无穷和记为 S_∞，再将首项和公比换成一般记号。

$$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\ldots=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$$

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}$$

$\lvert r\rvert<1$	$\lvert r\rvert\geq 1$
有无穷和	无无穷和

④ **两种和式相除：**例如，前两项和为 6，无穷和为 8。两式相除，消去非零首项 a。求出公比的平方后，保留正负两值。

$$a+ar=a(1+r)=6$$

$$\frac{a}{1-r}=8$$

$$\frac{6}{8}=\frac{a(1+r)}{\frac{a}{1-r}}=(1+r)(1-r)=1-r^2$$

$$r^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$r = \frac{1}{2}$ | $r = -\frac{1}{2}$

⑤ **相邻项求公比：**相邻两项已知，用后一项除以前一项。角 θ 的余割记为 $\operatorname{cosec}\theta$，等于正弦的倒数。

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \sin\theta \neq 0$$

$$\frac{\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^2\theta}{\frac{1}{9}\operatorname{cosec}^4\theta} = \frac{3}{\operatorname{cosec}^2\theta} = 3\sin^2\theta$$

第三项为 1 时，第四项为 r，两项之和为：

$$1 + r$$

⑥ **正弦平方求角：**已知正弦的平方，先开平方，保留正负号。例如，在下列范围内，正负两个正弦值分别对应一个角。角用弧度表示。

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2}$$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\theta = \frac{\pi}{4}$

| $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\theta = -\frac{\pi}{4}$

填空：①公比　②绝对值

点石成金　题目出现等比数列的有限和或无穷和条件时，先用首项和公比表示各项，再列方程。

例 1　[2024 · May/June 0606/21 Q8(b)]

(b) A geometric progression is such that the first term is 4 and the sum of the first three terms is 7. Find the two possible values of the common ratio and find the sum to infinity for the convergent progression.

(b) 一个等比数列的首项为 4，前三项之和为 7。
求公比的两个可能值，并求其中收敛数列的无穷和。

解答　设公比为 r，由前三项和为 7，得

$$4 + 4r + 4r^2 = 7$$

$$4r^2 + 4r - 3 = 0$$

$$(2r - 1)(2r + 3) = 0$$

$$r = \frac{1}{2} \quad 或 \quad r = -\frac{3}{2}$$

方法：先看前三项和，将三项用首项与公比展开后列方程。

辨析：有限和是指定项数的和，无穷和是部分和的极限。

拓展：公比为负时各项正负交替，收敛仍需公比绝对值小于一。

∵ 无穷和存在的条件为 $|r| < 1$，
∴ 收敛的数列对应 $r = \frac{1}{2}$。

$$S_\infty = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8$$

答：公比的两个可能值为 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{3}{2}$，收敛数列的无穷和为 8。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/12 Q3(b)]

提示：将前两项和除以无穷和消去首项，检查正负两根。

The sum of the first two terms of a geometric progression is 9.
The sum to infinity of this geometric progression is 25.

(a) Find the possible values of the common ratio of this geometric progression.

(b) Find the first term of this geometric progression for each possible value of the common ratio.

一个等比数列的前两项之和为 9。该等比数列的无穷和为 25。(a) 求该等比数列公比的所有可能值。(b) 对公比的每一个可能值，求该等比数列的首项。

✓ **答案** (a) $r=\frac{4}{5}$ 或 $r=-\frac{4}{5}$；(b) $r=\frac{4}{5}$ 时首项为 5，$r=-\frac{4}{5}$ 时首项为 45。

解析 设首项为 a，公比为 r。由前两项的和为 9，得 $a(1+r)=9$。由无穷和为 25，得 $|r|<1$，且 $\frac{a}{1-r}=25$，$a=25(1-r)$。代入得 $25(1-r)(1+r)=9$，$1-r^2=\frac{9}{25}$，$r^2=\frac{16}{25}$。于是 $r=\frac{4}{5}$ 或 $r=-\frac{4}{5}$。两者均满足 $|r|<1$。当 $r=\frac{4}{5}$ 时，$a=25\left(1-\frac{4}{5}\right)=5$。当 $r=-\frac{4}{5}$ 时，$a=25\left(1+\frac{4}{5}\right)=45$。答：(a) 公比为 $\frac{4}{5}$ 或 $-\frac{4}{5}$；(b) 对应的首项分别为 5 和 45。

2. [2021 · February/March 0606/12 Q6(a)(i)]

提示：用首项和无穷和列出含公比的方程。

(a) A geometric progression has first term 10 and sum to infinity 6.

(i) Find the common ratio of this progression.

(a) 一个等比数列的首项为10，无穷和为6。
(i) 求这个数列的公比。

✓ **答案** $-\frac{2}{3}$

解析 设公比为r。由首项为10、无穷和为6，得

$$6=\frac{10}{1-r}$$

$$6(1-r)=10$$

$$-6r=4$$

$$r=-\frac{2}{3}$$

所得公比满足$|r|=\frac{2}{3}<1$。
答：公比为$-\frac{2}{3}$。

3. [2023 · October/November 0606/11 Q9(b)]

提示：先求相邻项之比，再结合角的范围与收敛条件检查。

(b) The first three terms of a geometric progression are $\frac{1}{16}\operatorname{cosec}^4\phi$, $\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\phi$, 1, where $-\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2}$.

(i) Given that the sum of the 3rd and 4th terms of this progression is equal to 4, find the possible values of ϕ.

(ii) Determine whether or not this progression has a sum to infinity.

(b) 一个等比数列的前三项为

$$\frac{1}{16}\operatorname{cosec}^4\varphi,\quad \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\varphi,\quad 1,$$

其中 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$。
(i) 已知这个数列的第三项与第四项之和等于 4，求 φ 的可能值。
(ii) 判断这个数列是否有无穷和。

✓ **答案** (i) $\varphi=\pm\frac{\pi}{3}$；(ii) 该数列没有无穷和。

解析 设公比为 r，由相邻两项之比，得

$$r=\frac{\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\varphi}{\frac{1}{16}\operatorname{cosec}^4\varphi}=\frac{4}{\operatorname{cosec}^2\varphi}=4\sin^2\varphi$$

第三项为 1，故第四项为 r。由第三项与第四项之和为 4，得

$$1+r=4$$

$$r=3$$

$$4\sin^2\varphi=3$$

$$\sin^2\varphi=\frac{3}{4}$$

$$\sin\varphi=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\therefore$

$$\varphi=\pm\frac{\pi}{3}$$

又 $\because |r|=3>1$，$\therefore$ 该数列没有无穷和。
答：(i) $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 或 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$；(ii) 该数列没有无穷和。

题型 14 由公比绝对值小于 1 求参数范围

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **相邻两项求比：**本例的三项为 $\sin\theta$、$2\sin^3\theta$、$4\sin^5\theta$。后一项除以前一项所得的商相同，称为公比，记为 r。相除时，分母须非零。

$$r=\frac{2\sin^3\theta}{\sin\theta}=2\sin^{3-1}\theta=2\sin^2\theta.$$

$$\frac{4\sin^5\theta}{2\sin^3\theta}=2\sin^2\theta.$$

② **无穷和的条件：**从本例的首项起依次相加，所得的和随项数改变。若这些和趋近某个有限值，称有无穷和。条件为_____，等价于_____，两端均不取。

③ **一次式的范围：**公比含一次式时，将它代入双向不等式。三部分同加一个数、同除正数，不等号方向不变。如公比为 $3t-\frac{1}{2}$，其中 t 为实数，有

$$-1<3t-\frac{1}{2}<1.$$

$$-\frac{1}{2}<3t<\frac{3}{2}.$$

$$-\frac{1}{6}<t<\frac{1}{2}.$$

④ **平方开方求界：**公比含平方时，先将上界化成平方小于正数。设 z 为实数，k 为正数，开方时保留正、负两侧。若已知 z 为正数，再保留正的一侧。

$$z^2<k^2 \quad \text{等价于} \quad -k<z<k.$$

已知 $z>0$：

$$z^2<\frac{1}{2}$$

$$0<z<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

符号未定：

$$z^2<\frac{1}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<z<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

⑤ **三角范围判定：**表中 u 表示所研究的角，弧度制满足 π rad $=180°$。正弦、正切在第一象限递增，余弦在 0 到 π 递减。利用下列对称关系，可求负角或钝角的范围。

$$\cos(-u)=\cos u.$$

$$\sin(\pi-u)=\sin u.$$

已知角的范围	函数值的条件	所得角的范围
$0<u<\frac{\pi}{2}$	$\sin u<\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0<u<\frac{\pi}{4}$
$0<u<\frac{\pi}{2}$	$\tan u<1$	$0<u<\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$	$\cos u<\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{2}<u\leftarrow\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}<u<\frac{\pi}{2}$
$0<u<\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos u<\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}<u<3\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}\leq u\leq 3\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin u<\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}<u<\frac{\pi}{4}$ 或 $3\frac{\pi}{4}<u<5\frac{\pi}{4}$

⑥ **复合角的还原：**角中出现倍数或加减式，令整个角为 u，同步变换原范围。求出 u 的范围后，三部分同除倍数或同加常数，还原原角。含直角的移角也可用差角公式展开。

倍角：令 $u=2\theta$。

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$0<u<\pi$$

若 $\frac{\pi}{4}<u<3\frac{\pi}{4}$，则 $\frac{\pi}{8}<\theta<3\frac{\pi}{8}$

移角：令 $u=\theta-\frac{\pi}{3}$。

$$0<\theta<\pi$$

$$-\frac{\pi}{3}<u<2\frac{\pi}{3}$$

若 $-\frac{\pi}{4}<u<\frac{\pi}{4}$，则 $\frac{\pi}{12}<\theta<7\frac{\pi}{12}$

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta.$$

⟵ 填空：①$|r|<1$　②$-1<r<1$

点石成金　题目出现等比数列的前三项，并要求有无穷和时，先求公比，再由公比的绝对值小于一求参数范围。

例 1　[2023 · May/June 0606/12 Q10(c)]

(c) The first three terms of a different geometric progression are $\sin\theta$, $2\sin^3\theta$ and $4\sin^5\theta$, for $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Find the values of θ for which the progression has a sum to infinity.

(c) 另一个等比数列的前三项为

$$\sin\theta,\quad 2\sin^3\theta,\quad 4\sin^5\theta,$$

其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。求使这个数列有无穷和的 θ 的取值范围。

解答　设公比为 r。由 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，得 $\sin\theta > 0$，故

$$r = \frac{2\sin^3\theta}{\sin\theta} = 2\sin^2\theta.$$

方法：先看前三项与角的范围，相邻项相除求公比，再列收敛条件。

辨析：有限和是前若干项的总和，无穷和是部分和趋近的有限值。

有无穷和，须满足

$$-1 < r < 1.$$

$$-1 < 2\sin^2\theta < 1.$$

$\because \sin\theta > 0$，$\therefore$

$$0 < \sin^2\theta < \frac{1}{2}.$$

$$0 < \sin\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

在 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 内，正弦递增，且

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

答：$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/13 Q11(b)]

提示：先求相邻项之比，再用正切的递增性比较角度。

(b) The first 3 terms of a geometric progression are 1, $3\tan^2\theta$, $9\tan^4\theta$, for $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Find the values of θ for which this geometric progression has a sum to infinity.

(b) 一个等比数列的前三项为

$$1,\quad 3\tan^2\theta,\quad 9\tan^4\theta,$$

其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。求使这个等比数列有无穷和的 θ 的取值范围。

✓ **答案**　$0 < \theta < \frac{\pi}{6}$

解析　设公比为 r，则

$$r = \frac{3\tan^2\theta}{1} = 3\tan^2\theta.$$

由 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，得 $\tan\theta > 0$。有无穷和，须满足

$$-1 < 3\tan^2\theta < 1.$$

$$0 < \tan^2\theta < \frac{1}{3}.$$

$$0 < \tan\theta < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

在 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 内，正切递增，且

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

答：$0 < \theta < \frac{\pi}{6}$。

2. [2024 · October/November 0606/11 Q10(b)]

提示：看余弦的正负与对称性，比较正负两侧的角度。

(b) The first 3 terms of a second geometric progression are $\cos\theta$, $2\cos^2\theta$, $4\cos^3\theta$, where $-90° < \theta < 90°$. Find the values of θ for which this geometric progression has a sum to infinity.

(b) 第二个等比数列的前三项为

$$\cos\theta,\quad 2\cos^2\theta,\quad 4\cos^3\theta,$$

其中 $-90° < \theta < 90°$。求使这个等比数列有无穷和的 θ 的取值范围。

✓ **答案** $-90° < \theta \leftarrow 60°$ 或 $60° < \theta < 90°$

解析 设公比为 r。由 $-90° < \theta < 90°$，得 $\cos\theta > 0$，故

$$r = \frac{2\cos^2\theta}{\cos\theta} = 2\cos\theta.$$

有无穷和，须满足

$$-1 < 2\cos\theta < 1.$$

$$0 < \cos\theta < \frac{1}{2}.$$

由余弦的对称性，

$$\cos\theta = \cos(|\theta|).$$

又有

$$0° \leq |\theta| < 90°.$$

余弦在此范围内递减，且

$$\cos(60°) = \frac{1}{2}.$$

$\therefore$

$$60° < |\theta| < 90°.$$

答：$-90° < \theta \leftarrow 60°$ 或 $60° < \theta < 90°$。

3. [2024 · May/June 0606/12 Q10(c)]
提示：看相邻项的乘数，将公比上下界同时移项。

(c) The first 3 terms of a different geometric progression are $\left(2w-\frac{1}{4}\right)$, $\left(2w-\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(2w-\frac{1}{4}\right)^3$.

Find the values of w for which this geometric progression has a sum to infinity.

(c) 另一个等比数列的前三项为

$$\left(2w-\frac{1}{4}\right),\quad \left(2w-\frac{1}{4}\right)^2,\quad \left(2w-\frac{1}{4}\right)^3.$$

求使这个等比数列有无穷和的 w 的取值范围。

✓ **答案** $-\frac{3}{8}<w<\frac{5}{8}$

解析 由每一项乘以 $2w-\frac{1}{4}$ 得到后一项，知公比为

$$r=2w-\frac{1}{4}.$$

有无穷和，须满足

$$-1<2w-\frac{1}{4}<1.$$

三部分同加 $\frac{1}{4}$，得

$$-\frac{3}{4}<2w<\frac{5}{4}.$$

再同除以 2，得

$$-\frac{3}{8}<w<\frac{5}{8}.$$

答：$-\frac{3}{8}<w<\frac{5}{8}$。

4. [2023 · May/June 0606/11 Q9(c)]
提示：先确定整个复合角的范围，开方后比较正负两界。

(c) The first three terms of a different geometric progression are $\frac{4}{3}\cos^2 3\theta$, $\frac{16}{9}\cos^4 3\theta$ and $\frac{64}{27}\cos^6 3\theta$, for $0<\theta<\frac{\pi}{3}$. Find the set of values of θ for which this progression has a sum to infinity.

(c) 另一个等比数列的前三项为

$$\frac{4}{3}\cos^2(3\theta),\quad \frac{16}{9}\cos^4(3\theta),\quad \frac{64}{27}\cos^6(3\theta),$$

其中 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$。求使这个数列有无穷和的 θ 的取值集合。

✓ **答案** $\frac{\pi}{18}<\theta<5\frac{\pi}{18}$

解析 前三项分别为 $\frac{4}{3}\cos^2(3\theta)$ 的一次方、二次方、三次方，故公比为

$$r=\frac{4}{3}\cos^2(3\theta).$$

有无穷和，须满足

$$-1<\frac{4}{3}\cos^2(3\theta)<1.$$

∵ 平方不小于 0，∴

$$0 \le \cos^2(3\theta) < \frac{3}{4}.$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos(3\theta) < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由题设角度范围，得

$$0 < 3\theta < \pi.$$

余弦在此范围内递减，且

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\left(5\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

∴

$$\frac{\pi}{6} < 3\theta < 5\frac{\pi}{6}.$$

三部分同除以 3，得

$$\frac{\pi}{18} < \theta < 5\frac{\pi}{18}.$$

两端点均使公比等于 1，故不取。
答：$\frac{\pi}{18} < \theta < 5\frac{\pi}{18}$。

5. [2024 · October/November 0606/12 Q10(b)]
提示：核对相除时分母非零，再比较正弦各段与边界值。

(b) The first 3 terms of a geometric progression are

$$5\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\quad 20\cos^4\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\quad 80\cos^6\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\quad \text{where } -\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{7\pi}{6}.$$

Find the values of θ for which this geometric progression has a sum to infinity.

(b) 一个等比数列的前三项为

$$5\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\quad 20\cos^4\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\quad 80\cos^6\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $-\frac{\pi}{6} \le \theta \le 7\frac{\pi}{6}$。求使这个等比数列有无穷和的 θ 的取值范围。

✓ **答案** $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$ 且 $\theta \neq 0$，或 $5\frac{\pi}{6} < \theta < 7\frac{\pi}{6}$ 且 $\theta \neq \pi$

解析 设公比为 r，取相邻两项的比，得

$$r = \frac{20\cos^4(\theta-\frac{\pi}{2})}{5\cos^2(\theta-\frac{\pi}{2})} = 4\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right).$$

由差角公式，

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta.$$

$\therefore$

$$r = 4\sin^2\theta.$$

求公比时分母须非零，故

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0.$$

$$\sin\theta \neq 0.$$

在题设范围内，须排除

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi.$$

有无穷和，须满足

$$-1 < 4\sin^2\theta < 1.$$

$$0 \leq \sin^2\theta < \frac{1}{4}.$$

$$-\frac{1}{2} < \sin\theta < \frac{1}{2}.$$

在 $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq 7\frac{\pi}{6}$ 内，边界角满足

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\sin\left(5\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\sin\left(7\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

由正弦在各段的取值，得

$$-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$$

或

$$5\frac{\pi}{6} < \theta < 7\frac{\pi}{6}.$$

再排除 0 和 π。
答：$-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$ 且 $\theta \neq 0$，或 $5\frac{\pi}{6} < \theta < 7\frac{\pi}{6}$ 且 $\theta \neq \pi$。

第 13 章 平面向量

Chapter 13

13.1 平面向量

题型 1 沿路径相加减，求两点间向量

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **反向向量：**图中 $\overrightarrow{OA}$ 表示从 O 到 A 的向量，$\boldsymbol{a}$ 为已知向量。交换起终点，所得反向向量与原向量方向_____。

$$\overrightarrow{OA}=4\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}=-4\boldsymbol{a}$$

② **沿路相加：**图中从 A 到 B，可经过 O、C。沿路径首尾相接的向量可以逐段_____。

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}$$

③ **位置向量：**以 O 为原点，$\overrightarrow{OA}$ 称为点 A 的位置向量。两点间向量等于终点的位置向量减去_____的位置向量。

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

④ **分量相减：**列向量相减，将_____的分量分别相减。如已知下列两个向量，第二个分量中减去负数变为加上正数。

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}3-1\\1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

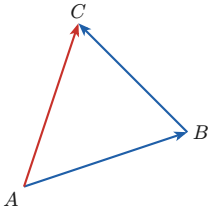
⑤ **倍数还原：**已知向量的非零倍数，先除以这个倍数。如已知下式，两边同乘 $\frac{1}{2}$，每个分量都乘 $\frac{1}{2}$。

$$2\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

⑥ 首尾相接与位移合成

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



⑦ **线段比与同向倍数：**若T在线段OA上，且$OT:TA=1:3$，则全长OA对应$1+3=4$份。$\overrightarrow{OT}$与$\overrightarrow{OA}$同向，故$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{1+3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{4}\times 4\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

其余一段为

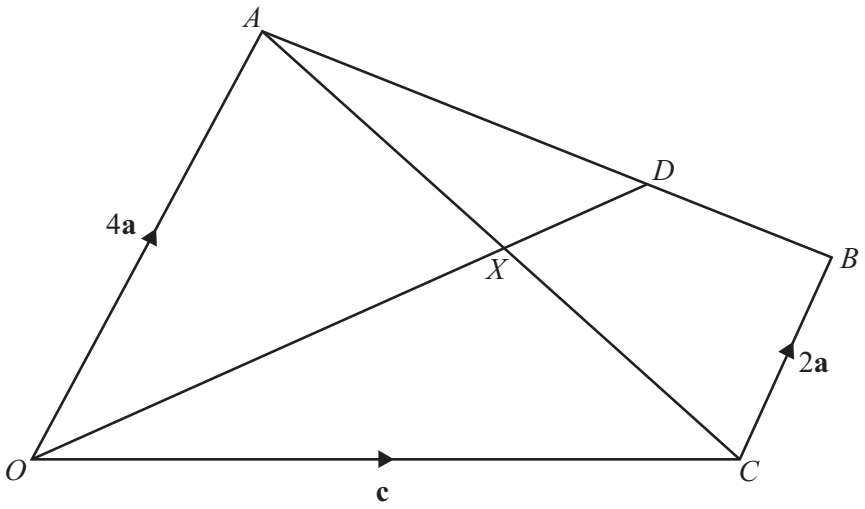
$\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OT}=4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{a}$

若改求反向的$\overrightarrow{AT}$，则$\overrightarrow{AT}=-3\boldsymbol{a}$。

填空：①相反　②相加　③起点　④对应位置

点石成金　题目出现两点间向量或位移时，先确定起点与终点，再沿已知路径相加减。

例 1　[2024 · October/November 0606/13 Q9(a)]



The diagram shows the trapezium $OABC$, where $\overrightarrow{OA}=4\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$, and $\overrightarrow{CB}=2\mathbf{a}$. The point D lies on AB such that $AD:DB=2:1$. The point X is the point of intersection of the lines OD and AC. It is given that $\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AC}$ and $\overrightarrow{OX}=\mu\overrightarrow{OD}$.

Find in terms of **a** and **c**

(a) $\overrightarrow{AB}$

图示为梯形 $OABC$，其中 $\overrightarrow{OA}=4\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{a}$。点 D 在线段 AB 上，且 $AD:DB=2:1$。点 X 是直线 OD 与 AC 的交点。已知 $\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OX}=\mu\overrightarrow{OD}$。

用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 表示：

(a) $\overrightarrow{AB}$。

解答　沿 A 经 O、C 到 B，得

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}$$

由反向向量互为相反向量，得

$$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}=-4\boldsymbol{a}$$

代入得

$$\overrightarrow{AB}=-4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}$$

答：$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}$。

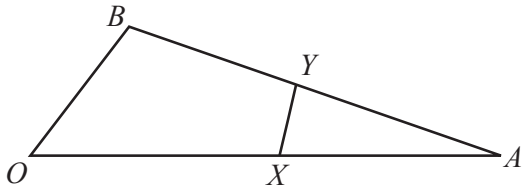
方法：先看所求向量的起终点，再沿已知线段串出路径，逐段判定正负。

辨析：反向向量是交换起终点所得的向量，位置向量是从原点指向该点的向量。

针对练习

1. [2023 · May/June 0606/13 Q8(a)]

提示：看经原点的两段路径，比较行进方向与已知向量方向。



The diagram shows the triangle OAB with $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. The point X lies on the line OA such that $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{5}\mathbf{a}$. The point Y is the mid-point of the line AB. Find, in terms of **a** and **b**,

(a) $\overrightarrow{AB}$

图示为三角形 OAB，其中 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$。点 X 在线段 OA 上，且 $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{5}\boldsymbol{a}$。点 Y 是线段 AB 的中点。用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示：

(a) $\overrightarrow{AB}$。

✓ **答案**

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$

解析 沿 A 经 O 到 B，得

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = -\boldsymbol{a}$$

代入得

$$\overrightarrow{AB} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$

答：$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$。

2. [2023 · October/November 0606/11 Q3(a)]

提示：先辨位移的起终点，再按对应分量相减，留意负号。

The point A has position vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. The point B has position vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(a) Find, in vector form, the displacement of B from A.

点 A 的位置向量为 $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$。点 B 的位置向量为 $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$。

(a) 用向量形式求 B 相对于 A 的位移。

✓ **答案**

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

解析 B 相对于 A 的位移为 $\overrightarrow{AB}$。由终点的位置向量减去起点的位置向量，得

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3-2\\6-(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$$

答：位移向量为 $\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$。

3. [2025 · May/June 0606/11 Q1(a)]

提示：先看四倍关系还原各分量，再核对经 P 的路径方向。

(a) Given that $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ and $4\overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$, find $\overrightarrow{RQ}$.

(a) 已知 $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$，且 $4\overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$，求 $\overrightarrow{RQ}$。

✓ **答案**

$$\begin{pmatrix}-2.5\\5\end{pmatrix}$$

解析 由已知的四倍向量，得

$$\overrightarrow{PR}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$$

沿 R 经 P 到 Q，得

$$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}$$

$$\overrightarrow{RQ}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{RQ}=\begin{pmatrix}-3-\left(-\frac{1}{2}\right)\\7-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2.5\\5\end{pmatrix}$$

答：$\overrightarrow{RQ}=\begin{pmatrix}-2.5\\5\end{pmatrix}$。

4. [2022 · February/March 0606/12 Q8(c)]

提示：先求同一时刻两粒子的位置向量，再用终点位置减去起点位置。

In this question, all lengths are in metres and all times are in seconds.

A particle A is moving in the direction $\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$ with a speed of 58.

(a) Find the velocity vector of A.

(b) Given that A is initially at the point with position vector $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$, write down the position vector of A at time t.

A particle B starts to move such that its position vector at time t is $\begin{pmatrix}-35t+4\\44t-2\end{pmatrix}$.

(c) Find the displacement vector $\overrightarrow{AB}$ at time t.

本题中，所有长度的单位均为m，所有时间的单位均为s。

粒子A沿向量$\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$的方向运动，速率为58m s^{-1}。

(a) 求A的速度向量。

(b) 已知A初始时所在点的位置向量为$\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$，写出时刻$t$粒子$A$的位置向量。

粒子B开始运动，时刻t的位置向量为

$$\begin{pmatrix} -35t+4 \\ 44t-2 \end{pmatrix}$$

(c) 求时刻t从A到B的位移向量$\overrightarrow{AB}$。

✓ **答案** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5t-1 \\ 2t+1 \end{pmatrix}$ m

解析 方向向量的模为

$$\sqrt{(-20)^2 + 21^2} = 29$$

由速率及运动方向，得

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{58}{29}\begin{pmatrix} -20 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 42 \end{pmatrix} \text{m s}^{-1}$$

由初始位置加位移，得

$$\boldsymbol{r}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -40 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-40t \\ -3+42t \end{pmatrix} \text{m}$$

从A到B的位移等于B的位置向量减去A的位置向量，故

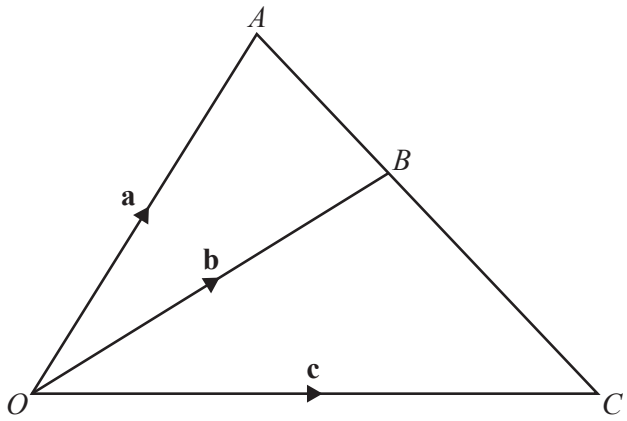
$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = \begin{pmatrix} (-35t+4)-(5-40t) \\ (44t-2)-(-3+42t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5t-1 \\ 2t+1 \end{pmatrix} \text{m}$$

答：$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5t-1 \\ 2t+1 \end{pmatrix}$ m。

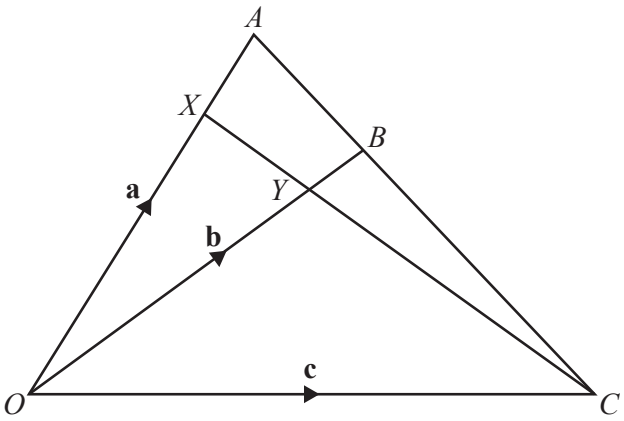
5. [2022 · October/November 0606/11 Q11(b)]

提示：沿已知路径相加，再用前问关系消去未知向量。



The diagram shows a triangle OAC. The point B lies on AC such that $AB : AC = 2 : 5$. It is given that $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ and $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$.

(a) Show that $5\mathbf{b} - 3\mathbf{a} = 2\mathbf{c}$.



The diagram now includes points X and Y, such that $\overrightarrow{OX}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$ and $\overrightarrow{OY}=m\overrightarrow{OB}$, where m is a constant. It is also given that $XY:XC=\lambda:1$, where λ is a constant.

(b) Using **part (a)**, find $\overrightarrow{XC}$ in terms of **a** and **b**.

图示为三角形OAC。点B在线段AC上，且$AB:AC=2:5$。已知

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$$

(a) 证明$5\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{c}$。
现图中增加点X和Y，满足

$$\overrightarrow{OX}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{OY}=m\overrightarrow{OB}$$

其中m为常数。又已知$XY:XC=\lambda:1$，其中λ为常数。
(b) 利用 (a) 的结果，用$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$表示$\overrightarrow{XC}$。

✓ **答案** $\overrightarrow{XC}=\frac{5}{2}\boldsymbol{b}-\frac{9}{4}\boldsymbol{a}$

解析 由B在线段AC上且$AB:AC=2:5$，得

$$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$$

沿O经A到B，得

$$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{5}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+\frac{2}{5}\boldsymbol{c}$$

$$5\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{c}$$

(a) 得证。由$\overrightarrow{OX}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$，得

$$\overrightarrow{OX}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$$

沿X经O到C，并利用 (a) 的结果，得

$$\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OC}=-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$$

$$\overrightarrow{XC}=-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{5\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{2}=\frac{5}{2}\boldsymbol{b}-\frac{9}{4}\boldsymbol{a}$$

答：$\overrightarrow{XC}=\frac{5}{2}\boldsymbol{b}-\frac{9}{4}\boldsymbol{a}$。

题型 2 列向量等式，比较分量或系数求参数与分比

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **向量首尾相接：**图中从 O 经 A 到 P，两段向量相加。以 O 为原点，$\overrightarrow{OA}$ 表示 A 的位置向量。反向向量乘_____，两点间向量用终点位置减起点位置。

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$$

$$\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$$

② **分点确定位置：**图中 $OD:DC=2:3$，整段共有五份。先按整段份数求比例，再乘整段向量。

内分点

$$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{2+3}\boldsymbol{c}=_____\ \boldsymbol{c}$$

若 M 为 OB 的中点，则

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

延长线

若 OA 延长至 T，且 $OA:AT=1:2$，则

$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OA}$

③ **交点沿线表示：**图中 P 同时在 OB 和 AD 上，分别沿两线表示位置向量。λ、μ 是标量，表示实数倍数。

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OB}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{c}$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\mu\left(\frac{2}{5}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\right)=(1-\mu)\boldsymbol{a}+\frac{2}{5}\mu\boldsymbol{c}$$

④ **分量系数对应：**$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不平行，同一向量的对应系数应当_____。$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 是水平、竖直正向的单位向量，对应列向量上、下分量。小演示中 α、β、u、v 均为标量，未出现的方向系数为 0。

$$\lambda=1-\mu$$

$$\lambda=\frac{2}{5}\mu$$

$$2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}=\alpha\boldsymbol{i}+(\beta+1)\boldsymbol{j}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta+1\end{pmatrix}$$

$$\alpha=2$$

$$\beta+1=3$$

$$\beta=2$$

$$u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{c}=4\boldsymbol{c}=0\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{c}$$

$$u=0$$

$$v=4$$

⑤ **分比依序书写：**图中 $\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AD}$，且 $0<\mu<1$。用整段减去前段，得到后段；分比按端点的_____书写。

按 A,P,D 排列

$AP:PD=\mu:(1-\mu)$

按 D,P,A 排列

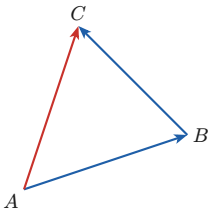
$DP:PA=(1-\mu):\mu$

⑥ **延长合并倍数：**把 OP 延长至 Q，设 $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{OP}$，其中 $k>0$。沿同一直线同向相加，原来的 OP 占一份。

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{OP}=(\quad\quad)\overrightarrow{OP}$$

⑦ 首尾相接与位移合成

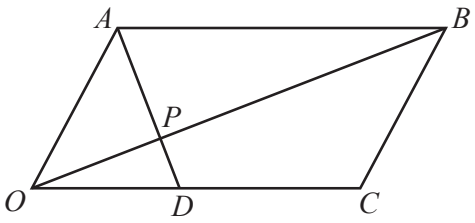
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



填空：①-1　②$\frac{2}{5}$　③相等　④顺序　⑤$1+k$

点石成金　题目出现同一点在两条直线上，或两个向量相等时，先分别表示向量，再比较对应分量或系数。

例 1 [2024 · May/June 0606/23 Q10]



The diagram shows a parallelogram $OABC$. The point D divides the line OC in the ratio 2 : 3.

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}\quad\text{and}\quad\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$$

The point P lies on AD such that $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OB}$ and $\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AD}$, where λ and μ are scalars.

Find two expressions for $\overrightarrow{OP}$, each in terms of $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ and a scalar, and hence show that P divides both DA and OB in the ratio m : n, where m and n are integers to be found.

图示为平行四边形 $OABC$。点 D 将线段 OC 按 $OD:DC=2:3$ 分成两部分。
已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$。
点 P 在线段 AD 上，满足
$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AD}$，
其中 λ 和 μ 为标量。
求 $\overrightarrow{OP}$ 的两个表达式，每个表达式均用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$ 和一个标量表示，并由此证明 P 分线段 DA 和 OB 所得的分比均为 $m:n$，其中 m 和 n 为待求的整数。

解答 由平行四边形及分比得

$$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$$

$$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{2+3}\boldsymbol{c}=\frac{2}{5}\boldsymbol{c}$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\frac{2}{5}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$$

方法：先看交点所在的两条直线，沿两路列出位置向量。

辨析：AP 是从 A 起的前段，DP 是余下后段，分比按所求顺序写。

沿 OB 表示，得

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OB}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{c}$$

沿 AD 表示，得

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \boldsymbol{a} + \mu\left(\frac{2}{5}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}\right) = (1-\mu)\boldsymbol{a} + \frac{2}{5}\mu\boldsymbol{c}$$

∵ $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不平行，比较对应系数，得

$$\lambda = 1 - \mu$$

$$\lambda = \frac{2}{5}\mu$$

代入得

$$1 - \mu = \frac{2}{5}\mu$$

$$\mu = \frac{5}{7}$$

$$\lambda = \frac{2}{7}$$

∴

$$DP : PA = (1-\mu) : \mu = \left(1 - \frac{5}{7}\right) : \frac{5}{7} = 2 : 5$$

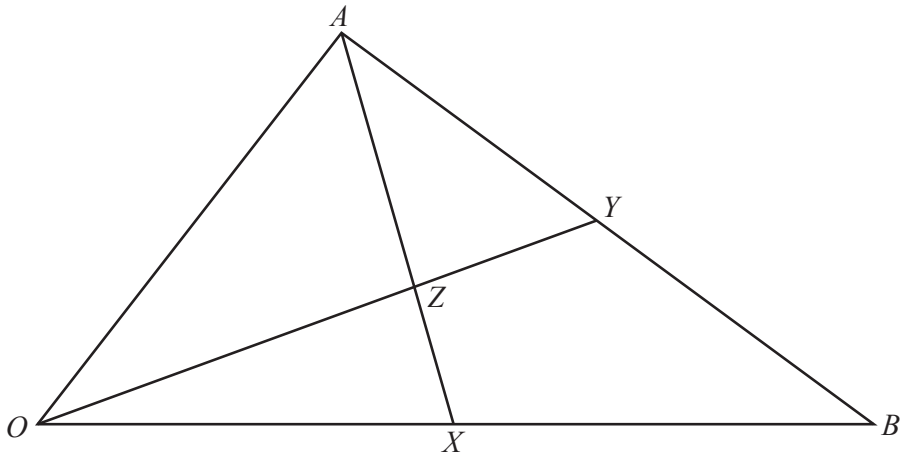
$$OP : PB = \lambda : (1-\lambda) = \frac{2}{7} : \left(1 - \frac{2}{7}\right) = 2 : 5$$

答：$\overrightarrow{OP} = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{c}$，或 $\overrightarrow{OP} = (1-\mu)\boldsymbol{a} + \frac{2}{5}\mu\boldsymbol{c}$；$m = 2$，$n = 5$。

针对练习

1. [2023 · October/November 0606/12 Q11(d)]

提示：从两条经过 Z 的路径列式，比较不平行向量的系数。



In the triangle OAB, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. The mid-point of the line OB is X, and the mid-point of the line AB is Y. The lines OY and AX intersect at the point Z. It is given that $\overrightarrow{AZ} = \lambda\overrightarrow{AX}$ and $\overrightarrow{OZ} = \mu\overrightarrow{OY}$ where λ and μ are rational numbers.

(a) Find $\overrightarrow{OZ}$ in terms of **a**, **b** and λ.

(b) Find $\overrightarrow{OZ}$ in terms of **a**, **b** and μ.

(c) Find the values of λ and μ.

(d) Hence find $\overrightarrow{OZ}$ in terms of **a** and **b** only.

在三角形 OAB 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$。点 X 是线段 OB 的中点，点 Y 是线段 AB 的中点。直线 OY 与 AX 相交于点 Z。已知 $\overrightarrow{AZ}=\lambda\overrightarrow{AX}$，$\overrightarrow{OZ}=\mu\overrightarrow{OY}$，
其中 λ,μ 均为有理数。
(a) 用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\lambda$ 表示 $\overrightarrow{OZ}$。
(b) 用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\mu$ 表示 $\overrightarrow{OZ}$。
(c) 求 λ,μ 的值。
(d) 由此求出仅含 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的 $\overrightarrow{OZ}$ 的表达式。

✓ **答案** (a) $\overrightarrow{OZ}=(1-\lambda)\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}$；(b) $\overrightarrow{OZ}=\frac{\mu}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；(c) $\lambda=\mu=\frac{2}{3}$；(d) $\overrightarrow{OZ}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{3}$。

解析 X 是 OB 的中点，故
$\overrightarrow{OX}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，
$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$。
由 $\overrightarrow{AZ}=\lambda\overrightarrow{AX}$，得

$$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AZ}$$

$$=\boldsymbol{a}+\lambda\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\right)$$

$=(1-\lambda)\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}$。
Y 是 AB 的中点，故
$\overrightarrow{OY}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$。
由 $\overrightarrow{OZ}=\mu\overrightarrow{OY}$，得
$\overrightarrow{OZ}=\frac{\mu}{2}\boldsymbol{a}+\frac{\mu}{2}\boldsymbol{b}$。
$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不平行，比较对应系数，得
$1-\lambda=\frac{\mu}{2}$，
$\frac{\lambda}{2}=\frac{\mu}{2}$。
于是
$\lambda=\mu$，
$1-\lambda=\frac{\lambda}{2}$，
$\lambda=\mu=\frac{2}{3}$。
代入得
$\overrightarrow{OZ}=\frac{\frac{2}{3}}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$。
答：(a) $\overrightarrow{OZ}=(1-\lambda)\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}$；(b) $\overrightarrow{OZ}=\frac{\mu}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；(c) $\lambda=\mu=\frac{2}{3}$；(d) $\overrightarrow{OZ}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{3}$。

2. [2025 · May/June 0606/11 Q1(b)]
提示：先比竖直分量，所得参数再代入水平分量等式。

(b) The vectors **a**, **b** and **c** are such that $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{i}+6\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}$ and $\mathbf{c}=(2\alpha+5\beta)\mathbf{i}+20\mathbf{j}$, where α and β are scalars.

Given that $\mathbf{c}=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, find the values of α and β.

(b) 向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足
$\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=(2\alpha+5\beta)\boldsymbol{i}+20\boldsymbol{j}$，
其中 α 和 β 为标量。
已知 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求 α 和 β 的值。

✓ **答案** $\alpha=3$，$\beta=-1$。

解析 由已知向量得

$$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3(\alpha\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j})-2(4\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j})=(3\alpha-8)\boldsymbol{i}+(18-2\beta)\boldsymbol{j}$$

$\because \boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，比较对应分量，得

$$2\alpha+5\beta=3\alpha-8$$

$$20=18-2\beta$$

由第二个等式得

$$\beta=-1$$

代入第一个等式，得

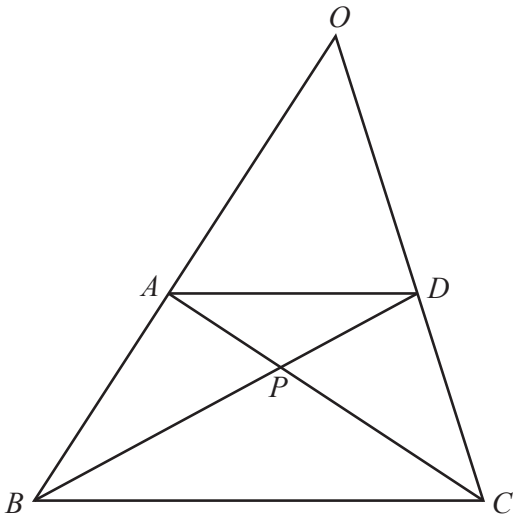
$$2\alpha-5=3\alpha-8$$

$$\alpha=3$$

答：$\alpha=3$，$\beta=-1$。

3. [2024 · May/June 0606/21 Q12(a)]

提示：沿 AC 与 BD 表示同一位置向量，再比对应系数。



The diagram shows a triangle OBC.
$OA : OB = 4 : 7$ and $OD : OC = 4 : 7$.

$$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b} \text{ and } \overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$$

The point P is the point of intersection of AC and BD such that $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}$ and $\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BD}$ where λ and μ are scalars.

(a) Find two expressions for $\overrightarrow{OP}$, each in terms of **b**, **c** and a scalar, and hence show that P divides both AC and DB in the ratio 4 : 7.

图示为三角形 OBC。点 A 在线段 OB 上，点 D 在线段 OC 上，且
$OA : OB = 4 : 7$，$OD : OC = 4 : 7$。
已知 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$。
点 P 是 AC 与 BD 的交点，满足
$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BD}$，
其中 λ 和 μ 为标量。
(a) 求 $\overrightarrow{OP}$ 的两个表达式，每个表达式均用 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和一个标量表示，并由此证明 P 分线段 AC 和 DB 所得的分比均为 4 : 7。

✓ **答案** $\overrightarrow{OP}=\frac{4}{7}(1-\lambda)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$，或 $\overrightarrow{OP}=(1-\mu)\boldsymbol{b}+\frac{4}{7}\mu\boldsymbol{c}$；$AP:PC=DP:PB=4:7$。

解析 由已知分比得

$$\overrightarrow{OA}=\frac{4}{7}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{OD}=\frac{4}{7}\boldsymbol{c}$$

沿 AC 表示，得

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AC}=\frac{4}{7}\boldsymbol{b}+\lambda\left(\boldsymbol{c}-\frac{4}{7}\boldsymbol{b}\right)=\frac{4}{7}(1-\lambda)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$$

沿 BD 表示，得

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}+\mu\left(\frac{4}{7}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\right)=(1-\mu)\boldsymbol{b}+\frac{4}{7}\mu\boldsymbol{c}$$

$\because$ $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不平行，比较对应系数，得

$$\frac{4}{7}(1-\lambda)=1-\mu$$

$$\lambda=\frac{4}{7}\mu$$

代入得

$$\frac{4}{7}\left(1-\frac{4}{7}\mu\right)=1-\mu$$

$$\frac{33}{49}\mu=\frac{3}{7}$$

$$\mu=\frac{7}{11}$$

$$\lambda=\frac{4}{11}$$

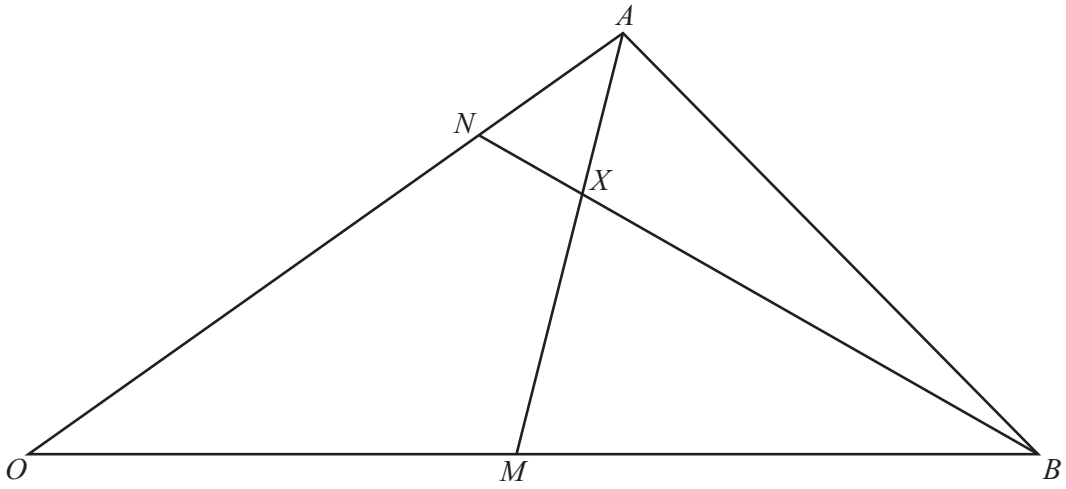
$\therefore$

$$AP:PC=\lambda:(1-\lambda)=\frac{4}{11}:\frac{7}{11}=4:7$$

$$DP:PB=(1-\mu):\mu=\frac{4}{11}:\frac{7}{11}=4:7$$

答：两个表达式如上，且 P 分线段 AC 和 DB 所得的分比均为 $4:7$。

4. [2025 · February/March 0606/12 Q11(c)]
提示：看两种位置向量中各方向的系数，分别列等式。



In the diagram, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.
The point M is the midpoint of OB.
The point N is such that $\overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{NA}$.
The lines BN and AM intersect at the point X.
$\overrightarrow{BX} = \lambda\overrightarrow{BN}$, where λ is a constant.
$\overrightarrow{MX} = \mu\overrightarrow{MA}$, where μ is a constant.

(a) Find $\overrightarrow{OX}$ in terms of **a**, **b** and λ.

(b) Find $\overrightarrow{OX}$ in terms of **a**, **b** and μ.

(c) Hence find the values of λ and μ.

图中，$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$。
点 M 是 OB 的中点。
点 N 满足 $\overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{NA}$。
直线 BN 与 AM 相交于点 X。
$\overrightarrow{BX} = \lambda\overrightarrow{BN}$，其中 λ 为常数。
$\overrightarrow{MX} = \mu\overrightarrow{MA}$，其中 μ 为常数。
(a) 用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 λ 表示 $\overrightarrow{OX}$。
(b) 用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 μ 表示 $\overrightarrow{OX}$。
(c) 由此求 λ 和 μ 的值。

✓ **答案** (a) $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{4}\lambda\boldsymbol{a} + (1-\lambda)\boldsymbol{b}$；(b) $\overrightarrow{OX} = \mu\boldsymbol{a} + \frac{1-\mu}{2}\boldsymbol{b}$；(c) $\lambda = \frac{4}{5}$，$\mu = \frac{3}{5}$。

解析 $\because \overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{NA}$，$\therefore$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NA} = 4\overrightarrow{NA}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{3}{4}\boldsymbol{a}$$

沿 BN 表示，得

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BX} = \boldsymbol{b} + \lambda\left(\frac{3}{4}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\right) = \frac{3}{4}\lambda\boldsymbol{a} + (1-\lambda)\boldsymbol{b}$$

$\because M$ 是 OB 的中点，$\therefore$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

沿 MA 表示，得

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MX} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \mu\left(\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right) = \mu\boldsymbol{a} + \frac{1-\mu}{2}\boldsymbol{b}$$

比较 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的系数，得

$$\frac{3}{4}\lambda = \mu$$

$$1 - \lambda = \frac{1-\mu}{2}$$

由第二个等式得

$$2\lambda - \mu = 1$$

代入得

$$2\lambda - \frac{3}{4}\lambda = 1$$

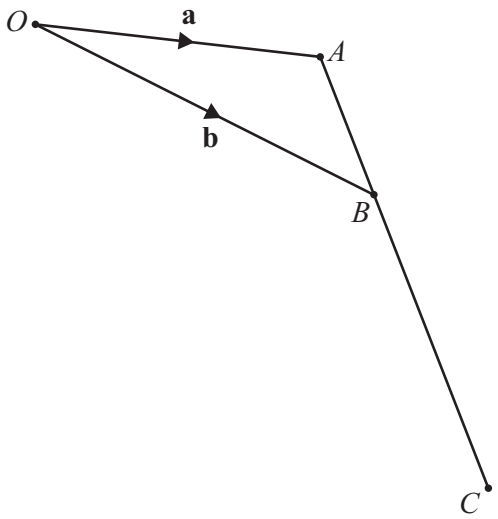
$$\lambda = \frac{4}{5}$$

$$\mu = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

答：(a) $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{4}\lambda\boldsymbol{a} + (1-\lambda)\boldsymbol{b}$；(b) $\overrightarrow{OX} = \mu\boldsymbol{a} + \frac{1-\mu}{2}\boldsymbol{b}$；(c) $\lambda = \frac{4}{5}$，$\mu = \frac{3}{5}$。

5. [2025 · May/June 0606/13 Q10(b)]

提示：看 OE 缺少哪个方向，将该方向的系数与零比较。



The diagram shows four points, O, A, B and C.

A, B and C lie in a straight line and are such that $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$.

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.

(a) Find $\overrightarrow{OC}$ in terms of **a** and **b**.
Simplify your answer.

(b) The line OA is extended to the point D such that $OA : AD = 2 : 7$.
Point E lies on CD such that $\overrightarrow{OE} = \lambda\mathbf{b}$.

Find the value of λ.

图中有四个点 O、A、B 和 C。
A、B、C 依次在同一直线上，且 $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$。
已知 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$。
(a) 用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$，并化简答案。
(b) 将直线 OA 延长至点 D，使 $OA : AD = 2 : 7$。点 E 在线段 CD 上，满足 $\overrightarrow{OE} = \lambda\boldsymbol{b}$。求 λ 的值。

✓ **答案** (a) $\overrightarrow{OC} = 3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$；(b) $\lambda = \frac{27}{13}$。

解析 ∵ A、B、C 依次共线，且 $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$，∴

$$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} = 3(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + 3(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = 3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$$

由 $OA : AD = 2 : 7$ 得

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a} + \frac{7}{2}\boldsymbol{a} = \frac{9}{2}\boldsymbol{a}$$

设 $\overrightarrow{CE} = t\overrightarrow{CD}$，其中 t 为标量，则

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \frac{9}{2}\boldsymbol{a} - (3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}) = \frac{13}{2}\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CD} = 3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a} + t\left(\frac{13}{2}\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}\right) = \left(-2 + \frac{13}{2}t\right)\boldsymbol{a} + (3 - 3t)\boldsymbol{b}$$

∵ $\overrightarrow{OE} = \lambda\boldsymbol{b}$，比较对应系数，得

$$-2 + \frac{13}{2}t = 0$$

$$\lambda = 3 - 3t$$

解得

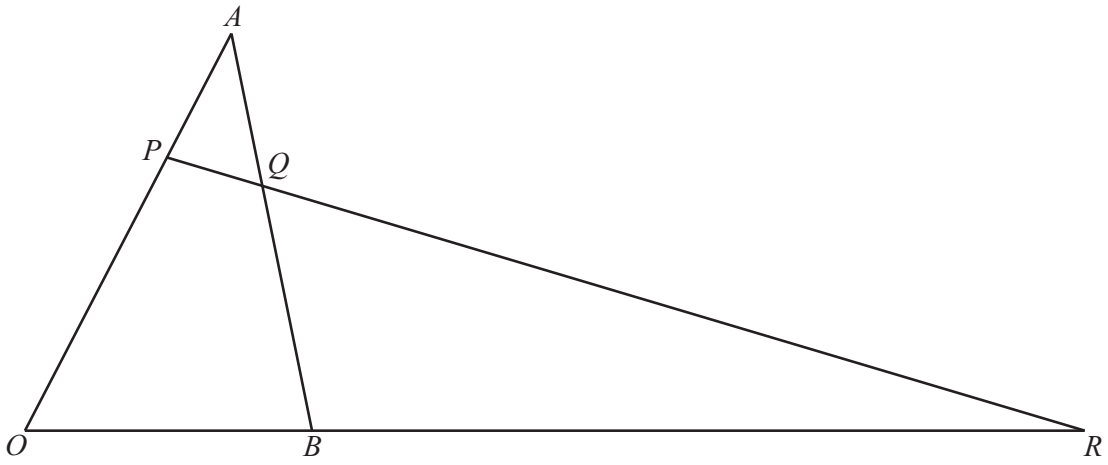
$$t = \frac{4}{13}$$

$$\lambda = 3 - 3 \times \frac{4}{13} = \frac{27}{13}$$

答：(a) $\overrightarrow{OC} = 3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$；(b) $\lambda = \frac{27}{13}$。

6. [2025 · May/June 0606/12 Q11(b)]

提示：看 OR 仅含哪个方向，先令另一方向的系数为零。



The diagram shows the triangle OAB, where $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.

The point P lies on OA such that $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$.

The point Q lies on AB such that $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

The straight line through P and Q meets the straight line through O and B at the point R.
It is given that $\overrightarrow{OR} = \lambda\mathbf{b}$ and $\overrightarrow{PR} = \mu\overrightarrow{PQ}$, where λ and μ are constants.

(a) Find $\overrightarrow{OR}$ in terms of **a**, **b** and μ.

(b) Hence find the values of λ and μ.

图示为三角形 OAB，其中 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$。
点 P 在线段 OA 上，满足 $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$。
点 Q 在线段 AB 上，满足 $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$。
经过 P、Q 的直线与经过 O、B 的直线相交于点 R。
已知 $\overrightarrow{OR} = \lambda\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PR} = \mu\overrightarrow{PQ}$，其中 λ 和 μ 为常数。
(a) 用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 μ 表示 $\overrightarrow{OR}$。
(b) 由此求 λ 和 μ 的值。

✓ **答案** (a) $\overrightarrow{OR} = \left(\frac{3}{4} - \frac{\mu}{12}\right)\boldsymbol{a} + \frac{\mu}{3}\boldsymbol{b}$；(b) $\lambda = 3$，$\mu = 9$。

解析 由已知条件得

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{3}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \frac{2}{3}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b} - \frac{3}{4}\boldsymbol{a} = -\frac{1}{12}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

$\therefore$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \frac{3}{4}\boldsymbol{a} + \mu\left(-\frac{1}{12}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right) = \left(\frac{3}{4} - \frac{\mu}{12}\right)\boldsymbol{a} + \frac{\mu}{3}\boldsymbol{b}$$

$\because \overrightarrow{OR} = \lambda\boldsymbol{b} = 0\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$，比较对应系数，得

$$\frac{3}{4}-\frac{\mu}{12}=0$$

$$\lambda=\frac{\mu}{3}$$

解得

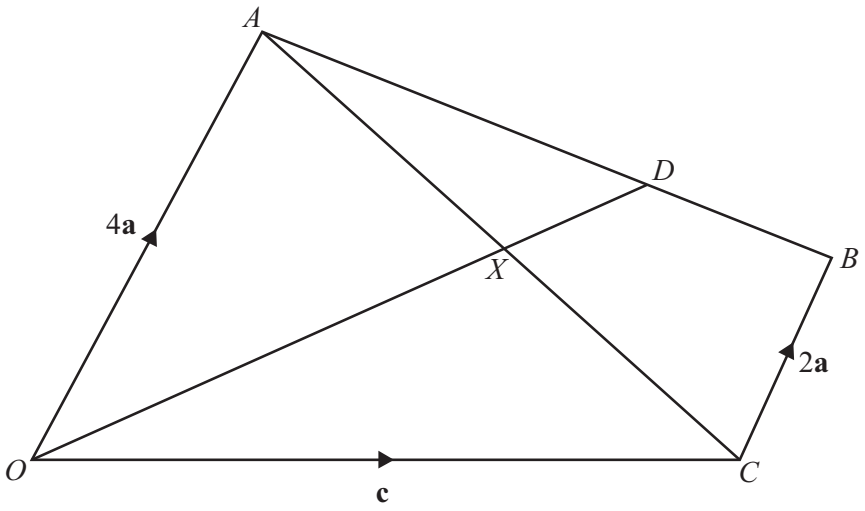
$$\mu=9$$

$$\lambda=\frac{9}{3}=3$$

答：(a) $\overrightarrow{OR}=\left(\frac{3}{4}-\frac{\mu}{12}\right)\boldsymbol{a}+\frac{\mu}{3}\boldsymbol{b}$；(b) $\lambda=3$，$\mu=9$。

7. [2024 · October/November 0606/13 Q9(e)]

提示：先把 AX 补成 OX，再与沿 OD 所得表达式比较。



The diagram shows the trapezium $OABC$, where $\overrightarrow{OA}=4\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$, and $\overrightarrow{CB}=2\mathbf{a}$. The point D lies on AB such that $AD:DB=2:1$. The point X is the point of intersection of the lines OD and AC. It is given that $\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AC}$ and $\overrightarrow{OX}=\mu\overrightarrow{OD}$.

Find in terms of **a** and **c**

(a) $\overrightarrow{AB}$

(b) $\overrightarrow{OD}$.

(c) Find $\overrightarrow{OX}$ in terms of **a**, **c** and μ.

(d) Find $\overrightarrow{AX}$ in terms of **a**, **c** and λ.

(e) Hence find the values of λ and μ.

图示为梯形 $OABC$，其中
$\overrightarrow{OA}=4\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{a}$。
点 D 在线段 AB 上，满足 $AD:DB=2:1$。
点 X 是直线 OD 与 AC 的交点。
已知 $\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OX}=\mu\overrightarrow{OD}$。
用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 表示：
(a) $\overrightarrow{AB}$；
(b) $\overrightarrow{OD}$。
(c) 用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$ 和 μ 表示 $\overrightarrow{OX}$。

(d) 用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$ 和 λ 表示 $\overrightarrow{AX}$。
(e) 由此求 λ 和 μ 的值。

✓ **答案** (a) $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}$；(b) $\overrightarrow{OD}=\frac{8}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$；(c) $\overrightarrow{OX}=\mu\left(\frac{8}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)$；(d) $\overrightarrow{AX}=\lambda(\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{a})$；(e) $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{3}{4}$。

解析 沿 OCB 相加，得

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}$$

由 $AD:DB=2:1$ 得

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a})$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=4\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a})=\frac{8}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$$

由 $\overrightarrow{OX}=\mu\overrightarrow{OD}$ 得

$$\overrightarrow{OX}=\mu\left(\frac{8}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)=\frac{8}{3}\mu\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\mu\boldsymbol{c}$$

由 $\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AC}$ 得

$$\overrightarrow{AX}=\lambda\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\lambda(\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{a})$$

沿 OAX 表示，得

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}=4\boldsymbol{a}+\lambda(\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{a})=4(1-\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{c}$$

比较对应系数，得

$$\frac{8}{3}\mu=4(1-\lambda)$$

$$\frac{2}{3}\mu=\lambda$$

代入得

$$\frac{8}{3}\mu=4-\frac{8}{3}\mu$$

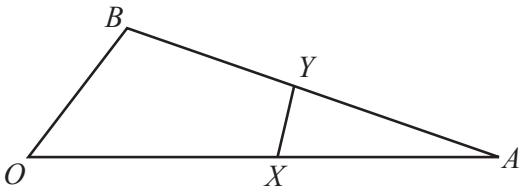
$$\frac{16}{3}\mu=4$$

$$\mu=\frac{3}{4}$$

$$\lambda=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

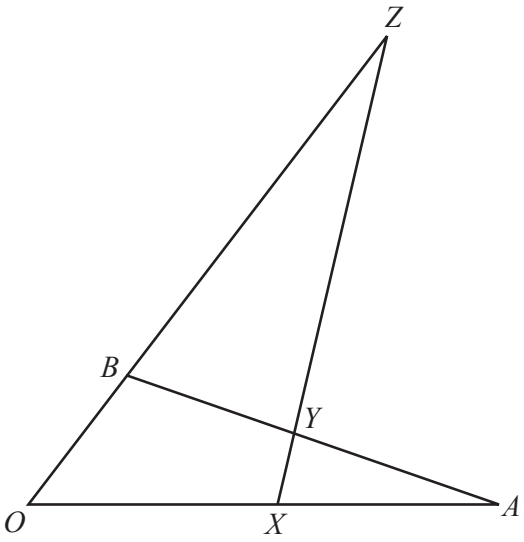
答：(a) $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}$；(b) $\overrightarrow{OD}=\frac{8}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$；(c) $\overrightarrow{OX}=\mu\left(\frac{8}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)$；(d) $\overrightarrow{AX}=\lambda(\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{a})$；(e) $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{3}{4}$。

8. [2023 · May/June 0606/13 Q8(e)]
提示：看 X Z 包含哪两段，合并倍数后再比对应系数。



The diagram shows the triangle OAB with $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. The point X lies on the line OA such that $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{5}\mathbf{a}$. The point Y is the mid-point of the line AB. Find, in terms of **a** and **b**,

(b) $\overrightarrow{XY}$.



The lines OB and XY are extended to meet at the point Z. It is given that $\overrightarrow{YZ} = \lambda\overrightarrow{XY}$ and $\overrightarrow{BZ} = \mu\mathbf{b}$.

(c) Find $\overrightarrow{XZ}$ in terms of λ, **a** and **b**.

(d) Find $\overrightarrow{XZ}$ in terms of μ, **a** and **b**.

(e) Hence find the values of λ and μ.

图示为三角形 OAB，其中 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$。
点 X 在线段 OA 上，满足 $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{5}\boldsymbol{a}$。点 Y 是线段 AB 的中点。
(b) 用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{XY}$。
将 OB 和 XY 延长，相交于点 Z。已知
$\overrightarrow{YZ} = \lambda\overrightarrow{XY}$，$\overrightarrow{BZ} = \mu\boldsymbol{b}$。
(c) 用 λ、$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{XZ}$。
(d) 用 μ、$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{XZ}$。
(e) 由此求 λ 和 μ 的值。

✓ **答案** (b) $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{1}{10}\boldsymbol{a}$；(c) $\overrightarrow{XZ} = (1+\lambda)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{1}{10}\boldsymbol{a}\right)$；(d) $\overrightarrow{XZ} = -\frac{3}{5}\boldsymbol{a} + (1+\mu)\boldsymbol{b}$；(e) $\lambda = 5$，$\mu = 2$。

解析 ∵ Y 是 AB 的中点，∴

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{3}{5}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{1}{10}\boldsymbol{a}$$

由 $\overrightarrow{YZ}=\lambda\overrightarrow{XY}$ 得

$$\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}=(1+\lambda)\overrightarrow{XY}=(1+\lambda)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{10}\boldsymbol{a}\right)$$

沿 $XOBZ$ 表示，得

$$\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BZ}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{b}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+(1+\mu)\boldsymbol{b}$$

比较对应系数，得

$$-\frac{1+\lambda}{10}=-\frac{3}{5}$$

$$\frac{1+\lambda}{2}=1+\mu$$

由第一个等式得

$$1+\lambda=6$$

$$\lambda=5$$

代入第二个等式，得

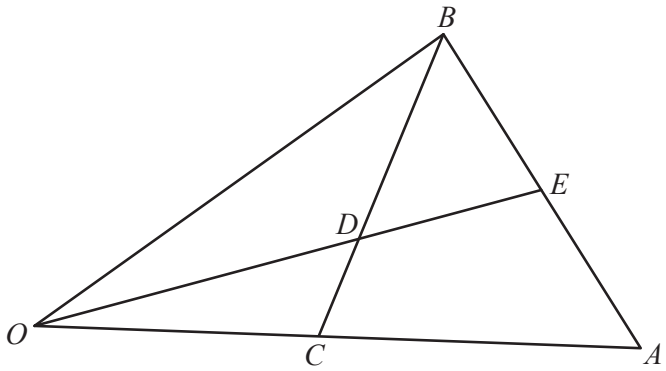
$$3=1+\mu$$

$$\mu=2$$

答：(b) $\overrightarrow{XY}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{10}\boldsymbol{a}$；(c) $\overrightarrow{XZ}=(1+\lambda)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{10}\boldsymbol{a}\right)$；(d) $\overrightarrow{XZ}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+(1+\mu)\boldsymbol{b}$；(e) $\lambda=5$，$\mu=2$。

9. [2023 · May/June 0606/22 Q10]

提示：沿 OD 与 AB 列出 OE，求分比时核对 AE 占整段的比例。



The diagram shows a triangle OAB. The point C is the mid-point of OA. The point D lies on CB such that $CD : DB = 2 : 3$.

$$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}\qquad\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}$$

The point E lies on AB such that $\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{OD}$ and $\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AB}$ where λ and μ are scalars.
Find two expressions for $\overrightarrow{OE}$, each in terms of **b**, **c** and a scalar, and hence find $AE : EB$.

图示为三角形 OAB。点 C 是 OA 的中点。点 D 在线段 CB 上，满足 $CD:DB=2:3$。
已知 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$。
点 E 在线段 AB 上，满足
$\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AB}$，
其中 λ 和 μ 为标量。
求 $\overrightarrow{OE}$ 的两个表达式，每个表达式均用 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和一个标量表示，并由此求 $AE:EB$。

✓ **答案** $\overrightarrow{OE}=\lambda\left(\boldsymbol{c}+\frac{2}{5}\boldsymbol{b}\right)$，或 $\overrightarrow{OE}=(2-\mu)\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{b}$；$AE:EB=4:3$。

解析 $\because C$ 是 OA 的中点，$\therefore$

$$\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{c}$$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$$

由 $CD:DB=2:3$ 得

$$\overrightarrow{CD}=\frac{2}{5}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}+\frac{2}{5}\boldsymbol{b}$$

沿 OD 表示，得

$$\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{OD}=\lambda\left(\boldsymbol{c}+\frac{2}{5}\boldsymbol{b}\right)=\lambda\boldsymbol{c}+\frac{2}{5}\lambda\boldsymbol{b}$$

沿 AB 表示，得

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=2\boldsymbol{c}+\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=(2-\mu)\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{b}$$

比较对应系数，得

$$\lambda=2-\mu$$

$$\frac{2}{5}\lambda=\mu$$

代入得

$$\lambda=2-\frac{2}{5}\lambda$$

$$\frac{7}{5}\lambda=2$$

$$\lambda=\frac{10}{7}$$

$$\mu=\frac{2}{5}\times\frac{10}{7}=\frac{4}{7}$$

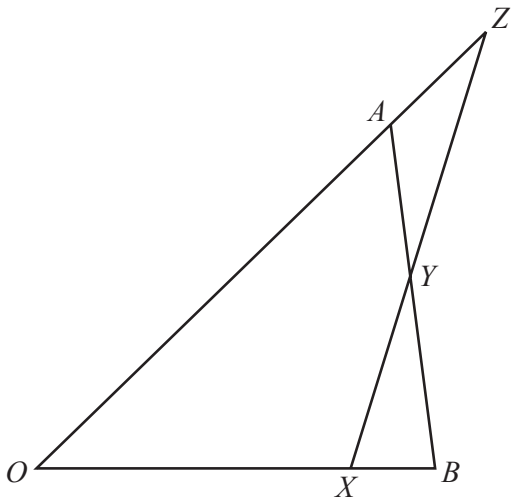
$\therefore$

$$AE : EB = \mu : (1-\mu) = \frac{4}{7} : \frac{3}{7} = 4 : 3$$

答：$\overrightarrow{OE} = \lambda\left(\boldsymbol{c} + \frac{2}{5}\boldsymbol{b}\right)$，或 $\overrightarrow{OE} = (2-\mu)\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{b}$；$AE : EB = 4 : 3$。

10. [2023 · October/November 0606/13 Q11(d)]

← 提示：先比 b 的系数求一个参数，再比 a 的系数。



In the triangle OAB, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.

The straight line XYZ is such that:

- $\overrightarrow{OX} = \frac{4}{5}\mathbf{b}$
- $\overrightarrow{AY} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AZ} = \mu\mathbf{a}$, where μ is a constant
- $\overrightarrow{YZ} = \lambda\overrightarrow{XY}$, where λ is a constant.

(a) Show that $\overrightarrow{XY} = \frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{7}{15}\mathbf{b}$.

(b) Find $\overrightarrow{YZ}$ in terms of λ, **a** and **b**.

(c) Find $\overrightarrow{YZ}$ in terms of μ, **a** and **b**.

(d) Hence find the values of λ and μ,

在三角形 OAB 中，$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$。
直线 XYZ 满足以下条件：
$\overrightarrow{OX} = \frac{4}{5}\boldsymbol{b}$；
$\overrightarrow{AY} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$；
$\overrightarrow{AZ} = \mu\boldsymbol{a}$，其中 μ 为常数；
$\overrightarrow{YZ} = \lambda\overrightarrow{XY}$，其中 λ 为常数。
(a) 证明 $\overrightarrow{XY} = \frac{2}{3}\boldsymbol{a} - \frac{7}{15}\boldsymbol{b}$。
(b) 用 λ、$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{YZ}$。
(c) 用 μ、$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{YZ}$。
(d) 由此求 λ 和 μ 的值。

✓ **答案**　(a) $\overrightarrow{XY}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{7}{15}\boldsymbol{b}$；(b) $\overrightarrow{YZ}=\lambda\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{7}{15}\boldsymbol{b}\right)$；(c) $\overrightarrow{YZ}=\left(\mu+\frac{1}{3}\right)\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$；(d) $\lambda=\frac{5}{7}$，$\mu=\frac{1}{7}$。

解析　由 $\overrightarrow{AY}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ 得

$$\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AY}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

$\therefore$

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{4}{5}\boldsymbol{b}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{7}{15}\boldsymbol{b}$$

由 $\overrightarrow{YZ}=\lambda\overrightarrow{XY}$ 得

$$\overrightarrow{YZ}=\lambda\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{7}{15}\boldsymbol{b}\right)=\frac{2}{3}\lambda\boldsymbol{a}-\frac{7}{15}\lambda\boldsymbol{b}$$

沿 YAZ 表示，得

$$\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{YA}+\overrightarrow{AZ}=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\mu\boldsymbol{a}=\left(\mu+\frac{1}{3}\right)\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

比较对应系数，得

$$\frac{2}{3}\lambda=\mu+\frac{1}{3}$$

$$-\frac{7}{15}\lambda=-\frac{1}{3}$$

由第二个等式得

$$\lambda=\frac{5}{7}$$

代入第一个等式，得

$$\mu=\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}-\frac{1}{3}=\frac{10}{21}-\frac{7}{21}=\frac{1}{7}$$

答：(a) $\overrightarrow{XY}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{7}{15}\boldsymbol{b}$；(b) $\overrightarrow{YZ}=\lambda\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{7}{15}\boldsymbol{b}\right)$；(c) $\overrightarrow{YZ}=\left(\mu+\frac{1}{3}\right)\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$；(d) $\lambda=\frac{5}{7}$，$\mu=\frac{1}{7}$。

题型 3　用分比或模长条件确定共线点的向量

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **位置向量相减：**图中从 O 到 A,B 的向量分别为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，称为两点的位置向量。沿 O,A,B 首尾相接，求从 A 到 B 的向量。

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}=\underline{\qquad}$$

② **线段分比取份：**图中 $AP:PB=1:3$，整段 AB 共分为四份。先求 AP 占整段的比例，再沿 O,A,P 相接。一般内分与中点情形如下，p,q 为正数。

$$\overrightarrow{AP}=\underline{\qquad}\overrightarrow{AB}$$

分比为 $p:q$

$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}+\frac{p}{p+q}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{q\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}}{p+q}$

分点为中点

$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$

③ **延长向量换写：** 点 T 在 AB 越过 B 的延长线上。若 $2\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{AT}$，先把两边改写成从 A 出发的向量，再求位置向量。

$$2\left(\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AT}$$

$$\overrightarrow{AT}=2\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OT}=\boldsymbol{a}+2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\underline{\qquad}$$

④ **两路表示相等：** 图中 P 同时在线段 AB 和直线 OP 上。用 λ,μ 表示两条路径中的倍数，令所得位置向量相等。$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不平行，比较对应系数并联立。

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{OP}=\mu\left(\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}\right)$$

$$(1-\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\frac{3}{4}\mu\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\mu\boldsymbol{b}$$

$$1-\lambda=\frac{3}{4}\mu,\quad \lambda=\frac{1}{4}\mu$$

$$\lambda=\frac{1}{4},\quad \mu=\underline{\qquad}$$

⑤ **坐标分量运算：** $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别表示水平、竖直正向的单位向量。列向量的上、下分量分别对应这两个方向。给出点 U,V 的位置向量，按分量分别相减。

$$\overrightarrow{OU}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OV}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{UV}=\begin{pmatrix}3-1\\1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$$

⑥ **共线定长取点：** 若 W 在直线 UV 上，设 $\overrightarrow{VW}=t\overrightarrow{UV}$。模长表示向量长度，记作 $\left|\overrightarrow{UV}\right|$。若两向量等长，倍数有正、负两种取值。

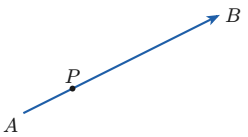
$$\left|\overrightarrow{UV}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$\left|\overrightarrow{VW}\right|=|t|\sqrt{5}=\sqrt{5},\quad t=\pm1$$

$t=1$	$t=-1$
$\overrightarrow{OW}=(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})+(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})=5\boldsymbol{i}$	$\overrightarrow{OW}=(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})-(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$

⑦ 同一直线上的分比

$$A=(0,0),\quad B=(4,2),\quad AP:PB=1:3$$

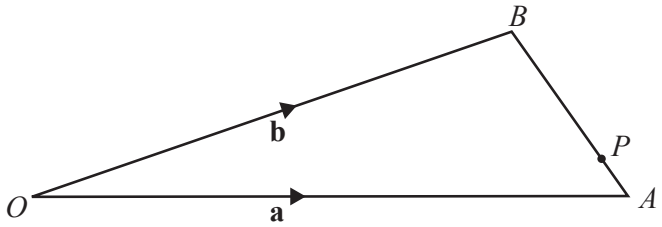


⟵ 填空：①$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$　②$\frac{1}{4}$　③$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$　④$1$

点石成金　题目出现线段分比、向量倍数或延长点时，先把所求向量写成已知向量的和，再代入相应倍数。

例 1　[2024 · February/March 0606/22 Q3(a)]

(a)



The diagram shows a triangle OAB. The point P lies on AB. The ratio $AP:PB$ is $1:3$.
Given that $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, find an expression for $\overrightarrow{OP}$ in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. Simplify your answer.

(a) 图示为三角形 OAB。点 P 在线段 AB 上，且 $AP:PB=1:3$。已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$，并化简。

解答　由分比得

$AB = AP + PB = 4AP$，

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$。

沿 O, A, P 相接，得

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$= \boldsymbol{a} + \frac{1}{4}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

$= \frac{3}{4}\boldsymbol{a} + \frac{1}{4}\boldsymbol{b}$。

答：$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\boldsymbol{a} + \frac{1}{4}\boldsymbol{b}$。

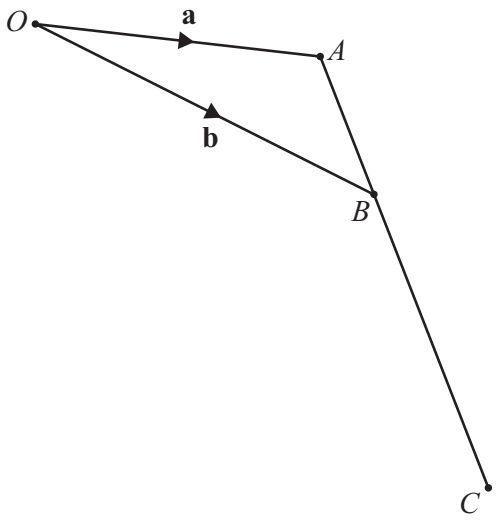
方法：先看 AP 与 PB 的分比，合计份数，再选经过 A 的路径求位置向量。

辨析：AP 与 PB 之比是两部分的比，AP 与 AB 之比是部分占整体的比例。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/13 Q10(a)]

提示：看 B 在 AC 上的位置，把长度比换成同向向量的倍数。



The diagram shows four points, O, A, B and C.

A, B and C lie in a straight line and are such that $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$.

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.

(a) Find $\overrightarrow{OC}$ in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$.
Simplify your answer.

图中有四个点 O, A, B, C。点 A, B, C 依次在同一直线上，且满足 $A\frac{B}{A}C = \frac{1}{3}$。
已知
$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$。
(a) 用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$，并化简。

✓ **答案**

$$\overrightarrow{OC} = 3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$$

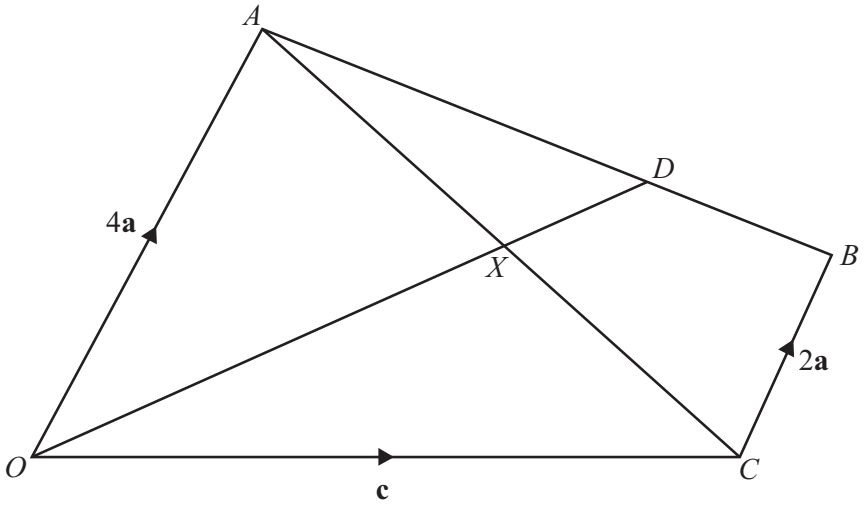
解析 由 $A\frac{B}{A}C = \frac{1}{3}$，且 B 在线段 AC 上，得 $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$。
$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$，

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$$= \boldsymbol{a} + 3(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

$= 3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$。
答：$\overrightarrow{OC} = 3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$。

2. [2024 · October/November 0606/13 Q9(b)]
提示：先沿经过 C 的路径求 B 的位置，再看 D 占 AB 的份数。



The diagram shows the trapezium $OABC$, where $\overrightarrow{OA} = 4\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, and $\overrightarrow{CB} = 2\mathbf{a}$. The point D lies on AB such that $AD : DB = 2 : 1$. The point X is the point of intersection of the lines OD and AC. It is given that $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AC}$ and $\overrightarrow{OX} = \mu\overrightarrow{OD}$.

Find in terms of **a** and **c**

(a) $\overrightarrow{AB}$

(b) $\overrightarrow{OD}$.

图示为梯形 $OABC$，其中
$\overrightarrow{OA} = 4\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CB} = 2\boldsymbol{a}$。
点 D 在线段 AB 上，且 $AD : DB = 2 : 1$。直线 OD 与 AC 相交于点 X。已知
$\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OX} = \mu\overrightarrow{OD}$。
用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ 表示：
(a) $\overrightarrow{AB}$;
(b) $\overrightarrow{OD}$。

✓ **答案** (a) $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{a}$；(b) $\overrightarrow{OD} = \frac{8}{3}\boldsymbol{a} + \frac{2}{3}\boldsymbol{c}$。

解析 沿 O, C, B 相接，得
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{a}$。
于是

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{a}$$

$= \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{a}$。
由 $AD : DB = 2 : 1$，得
$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$。

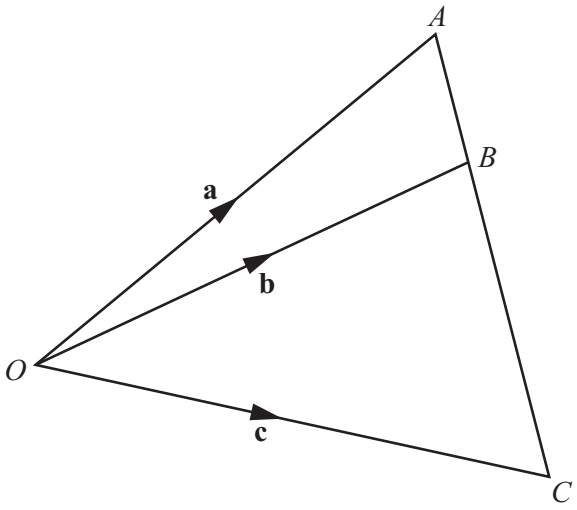
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$$

$$= 4\boldsymbol{a} + \frac{2}{3}(\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{a})$$

$= \frac{8}{3}\boldsymbol{a} + \frac{2}{3}\boldsymbol{c}$。
答：(a) $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{a}$；(b) $\overrightarrow{OD} = \frac{8}{3}\boldsymbol{a} + \frac{2}{3}\boldsymbol{c}$。

3. [2024 · October/November 0606/21 Q4]

提示：看两段的总份数，先求 AB 占 AC 的比例。



The diagram shows the triangle OAC. The point B lies on AC such that $AB:BC=p:q$, where p and q are constants $(p\neq -q)$.

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{OB}=\mathbf{b}\ \text{and}\ \overrightarrow{OC}=\mathbf{c}.$$

Show that $\mathbf{b}=\dfrac{q\mathbf{a}+p\mathbf{c}}{q+p}$.

图示为三角形 OAC。点 B 在线段 AC 上，满足 $AB:BC=p:q$，其中 p,q 为常数，且 $p\neq -q$。已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$。

证明

$\boldsymbol{b}=\frac{q\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{c}}{q+p}$。

✓ **答案**

$$\boldsymbol{b}=\frac{q\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{c}}{q+p}$$

解析 由 $AB:BC=p:q$，得

$\overrightarrow{AB}=\frac{p}{p+q}\overrightarrow{AC}$。

沿 O,A,B 相接，得

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\frac{p}{p+q}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$$

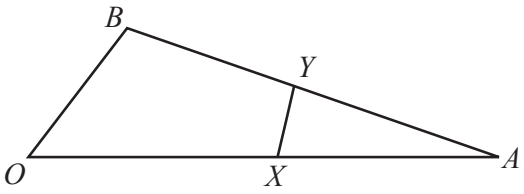
$$=\frac{(p+q)\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{c}-p\boldsymbol{a}}{p+q}$$

$=\frac{q\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{c}}{q+p}$。

由 $p\neq -q$，知分母不为零。

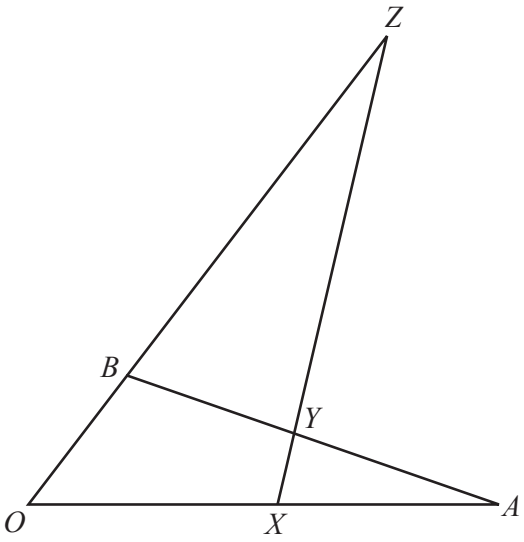
答：$\boldsymbol{b}=\frac{q\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{c}}{q+p}$，得证。

4. [2023 · May/June 0606/13 Q8(b)]
提示：先用中点关系表示 Y 的位置，再辨清 XY 的起点与终点。



The diagram shows the triangle OAB with $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. The point X lies on the line OA such that $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{5}\mathbf{a}$. The point Y is the mid-point of the line AB. Find, in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$,

(b) $\overrightarrow{XY}$.



The lines OB and XY are extended to meet at the point Z. It is given that $\overrightarrow{YZ} = \lambda\overrightarrow{XY}$ and $\overrightarrow{BZ} = \mu\mathbf{b}$.

图示为三角形 OAB，其中 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$。点 X 在线段 OA 上，且 $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{5}\boldsymbol{a}$。
点 Y 是线段 AB 的中点。用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 表示：
(b) $\overrightarrow{XY}$。
将直线 OB 和 XY 延长，相交于点 Z。已知 $\overrightarrow{YZ} = \lambda\overrightarrow{XY}$，$\overrightarrow{BZ} = \mu\boldsymbol{b}$。

✓ **答案**

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{1}{10}\boldsymbol{a}$$

解析 Y 是 AB 的中点，故

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

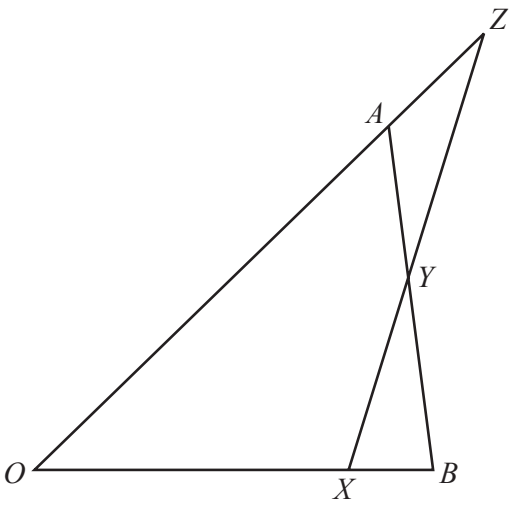
$= \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$。
于是

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{3}{5}\boldsymbol{a}$$

$= \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{1}{10}\boldsymbol{a}$。
答：$\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \frac{1}{10}\boldsymbol{a}$。

5. [2023 · October/November 0606/13 Q11(a)]
提示：从 A 出发确定 Y 的位置，再按终点减起点处理 XY。



In the triangle OAB, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.

The straight line XYZ is such that:

- $\overrightarrow{OX} = \frac{4}{5}\mathbf{b}$
- $\overrightarrow{AY} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AZ} = \mu\mathbf{a}$, where μ is a constant
- $\overrightarrow{YZ} = \lambda\overrightarrow{XY}$, where λ is a constant.

(a) Show that $\overrightarrow{XY} = \frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{7}{15}\mathbf{b}$.

在三角形 OAB 中，$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$。图中 X 在线段 OB 上，Y 在线段 AB 上，Z 在 OA 越过 A 的延长线上。点 X, Y, Z 在同一直线上，且满足：
$\overrightarrow{OX} = \frac{4}{5}\boldsymbol{b}$；
$\overrightarrow{AY} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$；
$\overrightarrow{AZ} = \mu\boldsymbol{a}$，其中 μ 为常数；
$\overrightarrow{YZ} = \lambda\overrightarrow{XY}$，其中 λ 为常数。
(a) 证明
$\overrightarrow{XY} = \frac{2}{3}\boldsymbol{a} - \frac{7}{15}\boldsymbol{b}$。

✓ **答案**

$$\overrightarrow{XY} = \frac{2}{3}\boldsymbol{a} - \frac{7}{15}\boldsymbol{b}$$

解析 由 $\overrightarrow{AY} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，得

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AY}$$

$$= \boldsymbol{a} + \frac{1}{3}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

$= \frac{2}{3}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}$。
于是

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$$

$$= \frac{2}{3}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b} - \frac{4}{5}\boldsymbol{b}$$

$= \frac{2}{3}\boldsymbol{a} - \frac{7}{15}\boldsymbol{b}$。
答：$\overrightarrow{XY} = \frac{2}{3}\boldsymbol{a} - \frac{7}{15}\boldsymbol{b}$，得证。

6. [2026 · February/March 0606/12 Q9(b)]
提示：比较 RS 与 QR 的长度，沿直线的两个方向分别取点。

(b) The point Q has position vector $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$.
The point R has position vector $-\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.
The point S has position vector $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$, where a and b are integers.

It is given that:

- S lies on the straight line QR
- $\left|\overrightarrow{RS}\right| = \sqrt{5}$.

Find the possible values of a and b.

(b) 点 Q 的位置向量为 $3i+2j$。点 R 的位置向量为 $-i+4j$。点 S 的位置向量为 $ai+bj$，其中 a, b 均为整数。已知：
点 S 在直线 QR 上；
$\left|\overrightarrow{RS}\right| = \sqrt{5}$。
求 a, b 所有可能的值。

✓ **答案** $(a, b) = (1, 3)$ 或 $(-3, 5)$。
解析 由两点的位置向量得
$\overrightarrow{QR} = (-i+4j) - (3i+2j) = -4i+2j$，
$\left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{(-4)^2+2^2} = 2\sqrt{5}$。
S 在直线 QR 上，设
$\overrightarrow{RS} = t\overrightarrow{QR}$。
由模长条件得
$|t|2\sqrt{5} = \sqrt{5}$，
$t = \pm\frac{1}{2}$。
当 $t = \frac{1}{2}$ 时，

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$$

$$= -i + 4j + \frac{1}{2}(-4i+2j)$$

$= -3i+5j$。
当 $t = -\frac{1}{2}$ 时，

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$$

$$= -\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}(-4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})$$

$= \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$。
两组坐标均为整数。
答：$(a, b) = (1, 3)$ 或 $(-3, 5)$。

7. [2023 · October/November 0606/11 Q3(c)]
提示：看等式中 AB 与 AX 的倍数，再从 A 的位置接上位移。

The point A has position vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. The point B has position vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(a) Find, in vector form, the displacement of B from A.

The point X is such that $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AX}$.

(c) Find the position vector of X.

点 A 的位置向量为 $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$。点 B 的位置向量为 $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$。
(a) 用向量形式表示 B 相对于 A 的位移。
点 X 满足
$3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AX}$。
(c) 求点 X 的位置向量。

✓ **答案** (a) $\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$；(c) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ 12 \end{pmatrix}$。

解析 B 相对于 A 的位移为

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$。
由 $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AX}$，得
$\overrightarrow{AX} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} \\ 18 \end{pmatrix}$。
于是

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$$

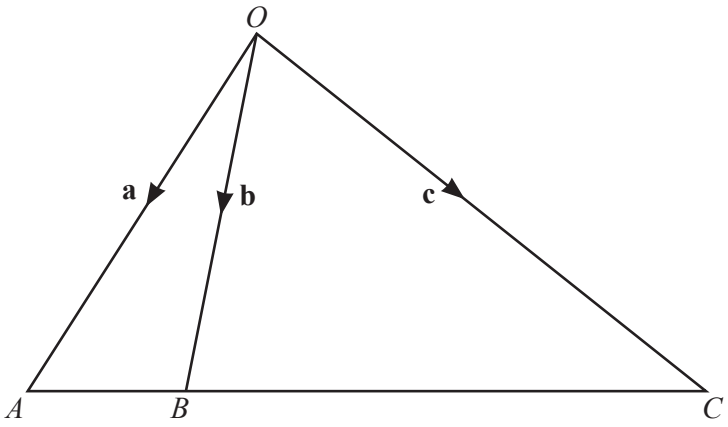
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} \\ 18 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ 12 \end{pmatrix}$。
答：(a) $\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$；(c) 点 X 的位置向量为 $\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ 12 \end{pmatrix}$。

8. [2023 · February/March 0606/12 Q9(b)]
提示：看分比涉及哪两段，先把 AC 写成 AB 的倍数。

In this question, all lengths are in metres.

(b)



The diagram shows the triangle OAC. The point B lies on AC such that $AB:AC = 1:4$. Given that $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ and $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, find $\mathbf{c}$ in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$.

本题中所有长度均以米为单位。
(b) 图示为三角形 OAC。点 B 在线段 AC 上，且 $AB : AC = 1 : 4$。已知
$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$，
用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$。

✓ **答案**

$$\boldsymbol{c} = 4\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a}$$

解析 由 $AB : AC = 1 : 4$，且 B 在线段 AC 上，得
$\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$。
$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$，

$$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$$= \boldsymbol{a} + 4(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

$= 4\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a}$。
答：$\boldsymbol{c} = 4\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a}$。

9. [2023 · May/June 0606/21 Q6(a)]
← 提示：辨清 QR 与 PR 各自的起点，再比较横、纵分量。

(a) The position vectors of the points P, Q and R relative to an origin O are $\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ respectively. The point R lies on PQ extended such that $3\overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{PR}$. Use a vector method to find the values of x and y.

(a) 点 P, Q, R 相对于原点 O 的位置向量依次为 $\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$。点 R 在 PQ 越过 Q 的延长线上，且满足 $3\overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{PR}$。
用向量方法求 x, y 的值。

✓ **答案**

$$x = 16, \quad y = 1$$

解析 由位置向量相减得
$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix}x-8\\y-5\end{pmatrix}$，
$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix}x-4\\y-7\end{pmatrix}$。

由 $3\overrightarrow{QR}=2\overrightarrow{PR}$，得
$3\begin{pmatrix}x-8\\y-5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x-4\\y-7\end{pmatrix}$。
比较对应分量，得
$3x-24=2x-8$，
$3y-15=2y-14$。
解得
$x=16,\quad y=1$。
此时
$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$，
$\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}=2\overrightarrow{PQ}$，
故 R 在 PQ 越过 Q 的延长线上。
答：$x=16,\quad y=1$。

10. [2026 · May/June 0606/12 Q11(a)]
提示：先由线段比求 AC，再沿 O、A、C、D 的路径相加。

The position vectors of points A and B relative to an origin O are

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\text{ and }\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}.$$

The point C lies on AB and is such that $AC:CB=3:1$.

The point D lies on OA such that $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}$ and $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}5\\-5.5\end{pmatrix}$.

(a) Find $\overrightarrow{OD}$.

点 A、B 相对于原点 O 的位置向量为
$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ 及 $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$

点 C 在线段 AB 上，且 $AC:CB=3:1$。
点 D 在线段 OA 上，满足
$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}$ 及 $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}5\\-5.5\end{pmatrix}$

(a) 求 $\overrightarrow{OD}$。

✓ **答案** $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}3\\-1.5\end{pmatrix}$。

解析

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\8\end{pmatrix}$$

由 $AC:CB=3:1$，得

$$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{3+1}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}-8\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\-5.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1.5\end{pmatrix}$$

答：$\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}3\\-1.5\end{pmatrix}$。

题型 4 将方向向量单位化，求指定长度向量与匀速位置

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **向量的模长：**题中的方向向量记为 $\boldsymbol{d}$。向量的模表示长度，由两分量平方和开方得到。

$$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{d}|=\sqrt{(-20)^2+21^2}=\sqrt{841}=_____$$

若两分量分别为 a、b，则

$$\left|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$$

② **化为单位向量：**将方向向量除以它的模，得到同方向的单位向量，记为 $\boldsymbol{u}$。

$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{u}|=\frac{1}{29}\sqrt{(-20)^2+21^2}=_____$$

对任意非零方向向量 $\boldsymbol{d}$，有

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{d}|}$$

③ **按照模长放大：**题中速率为 14.5m s^{-1}，将单位向量乘速率。所得速度向量的模等于速率。

$$\boldsymbol{v}=14.5\boldsymbol{u}=\frac{14.5}{29}\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}=_____\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$$

同方向且模为 $L>0$ 的向量 $\boldsymbol{a}$ 满足

$$\boldsymbol{a}=L\boldsymbol{u}=\frac{L}{|\boldsymbol{d}|}\boldsymbol{d}$$

④ **两种表示互换：**$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别表示水平向右、竖直向上的单位向量。列向量的两个分量分别作为它们的系数。

$$\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}=-20\boldsymbol{i}+21\boldsymbol{j}$$

⑤ **对应分量相加：**两个向量相加时，将对应分量分别相加。所得和向量仍可按前述方法求模、单位化。

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

⑥ **匀速运动位置：**初始位置为 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\text{m}$，恒定速度为 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$。经过 t 秒，位移为 $\begin{pmatrix}2t\\3t\end{pmatrix}\text{m}$，加上初始位置得到位置向量。

$$\boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t\\2+3t\end{pmatrix}$$

一般地，记 $\boldsymbol{r}_0$ 为初始位置、$\boldsymbol{v}$ 为恒定速度，则

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v}$$

⑦ **和向量再单位化：**上面的和为 $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，其模为

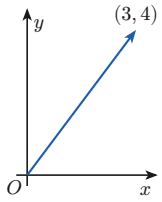
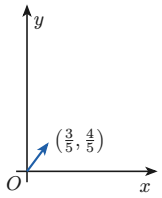
$$\sqrt{3^2+4^2}=5$$

故同方向的单位向量为

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

填空：①29　②1　③$\frac{1}{2}$

方向不变，长度改变

	向量 $\boldsymbol{a}$	单位向量 $\boldsymbol{u}$
图像		
长度	$\sqrt{3^2+4^2}=5$	1
关系	$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{a}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}$	

点石成金　题目出现给定方向向量和速率或模长时，先求方向向量的模，再除以模并乘给定长度。

例 1　[2024 · May/June 0606/12 Q9(a)]

In this question, all distances are in metres and time, t, is in seconds.

A particle P moves with a speed of 14.5 parallel to the vector $\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$.

(a) Find the velocity vector of P.

本题中，所有距离均以米为单位，时间 t 以秒为单位。
粒子 P 以 14.5m s^{-1} 的速率沿平行于向量 $\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$ 的方向运动。
(a) 求 P 的速度向量。

解答　给定方向向量的模为

$$\left|\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-20)^2+21^2}=29$$

将同方向的单位向量乘速率，得

$$\boldsymbol{v}=\frac{14.5}{29}\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}$$

答：P 的速度向量为 $\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}$m s^{-1}。

方法：先找方向向量和给定速率，从两分量平方和开方起手。

辨析：速率是速度的大小，速度向量是兼有大小和方向的量。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/22 Q6(a)]

提示：看方向向量的模，比较给定速率与它的比值。

In this question lengths are in centimetres and time, t, is in seconds.

A particle P is moving in a straight line with a speed of 26 in the direction of the vector $\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$.

(a) Find the velocity vector of P.

本题中，长度以厘米为单位，时间 t 以秒为单位。
粒子 P 沿直线运动，速率为 26cm s^{-1}，方向与向量 $\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$ 相同。
(a) 求 P 的速度向量。

✓ **答案** $\begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix}\text{cm s}^{-1}$

解析 给定方向向量的模为

$$\left|\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = 13$$

将同方向的单位向量乘速率，得

$$\boldsymbol{v} = \frac{26}{13}\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix}$$

答：P 的速度向量为 $\begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix}\text{cm s}^{-1}$。

2. [2025 · October/November 0606/13 Q7(a)]

提示：看同方向条件，比较目标模长与方向向量的模。

The point O is the origin.
Two points P and Q are such that $\overrightarrow{PQ}$ is in the same direction as $-\mathbf{i}+5\mathbf{j}$.

(a) The point R is such that $\overrightarrow{OR}$ is in the same direction as $\overrightarrow{PQ}$ and the magnitude of $\overrightarrow{OR}$ is $3\sqrt{26}$.

Find $\overrightarrow{OR}$.

点 O 是原点。
两点 P、Q 满足 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $-i+5j$ 同方向。
(a) 点 R 满足 $\overrightarrow{OR}$ 与 $\overrightarrow{PQ}$ 同方向，且 $\overrightarrow{OR}$ 的模为 $3\sqrt{26}$。
求 $\overrightarrow{OR}$。

✓ **答案** $\overrightarrow{OR} = -3\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{j}$

解析 $\overrightarrow{OR}$ 与 $\overrightarrow{PQ}$ 同方向，故其方向为 $-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$。

$$|-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}| = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{26}$$

由 $\overrightarrow{OR}$ 的模为 $3\sqrt{26}$，得

$$\overrightarrow{OR} = \frac{3\sqrt{26}}{\sqrt{26}}(-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}) = -3\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{j}$$

答：$\overrightarrow{OR} = -3\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{j}$。

3. [2025 · May/June 0606/23 Q10(a)]

提示：看方向与速率确定缩放倍数，再看初始位置。

In this question, time is in seconds.

(a) At time $t = 0$, particle P starts from the point with position vector $-30\mathbf{j}$. P travels with speed $58\,\text{ms}^{-1}$ in the direction $20\mathbf{i}+21\mathbf{j}$.

Find the position vector of P at time t.

本题中，时间以秒为单位。
(a) 在时刻 $t = 0$，粒子 P 从位置向量为 $-30j$ 的点出发。
P 以 58m s^{-1} 的速率沿 $20i + 21j$ 的方向运动。
求 P 在时刻 t 的位置向量。

✓ **答案** $(40ti + (-30 + 42t)j)$ m

解析 给定方向向量的模为

$$|20i + 21j| = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$$

由速率为 58m s^{-1}，得速度向量

$$v = \frac{58}{29}(20i + 21j) = 40i + 42j$$

将初始位置向量加上经过 t 秒的位移，得

$$r(t) = -30j + t(40i + 42j) = 40ti + (-30 + 42t)j$$

答：P 在时刻 t 的位置向量为 $(40ti + (-30 + 42t)j)$ m。

4. [2024 · February/March 0606/22 Q3(b)]
提示：看各自模长恢复两向量，相加后再求和向量的模。

(b) Vector $\mathbf{q}$ has magnitude $12\sqrt{5}$ and direction $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Vector $\mathbf{r}$ has magnitude $15\sqrt{2}$ and direction $\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Find the unit vector in the direction of $\mathbf{q}+\mathbf{r}$.

(b) 向量 q 的模为 $12\sqrt{5}$，方向与向量 $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ 相同。
向量 r 的模为 $15\sqrt{2}$，方向与向量 $\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ 相同。
求与 $q + r$ 同方向的单位向量。

✓ **答案** $\frac{1}{\sqrt{90}}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

解析 向量 q 的方向向量的模为

$$\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5}$$

由 q 的模为 $12\sqrt{5}$，得

$$q = \frac{12\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

向量 r 的方向向量的模为

$$\left|\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

由 r 的模为 $15\sqrt{2}$，得

$$r = \frac{15\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}24\\-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}|=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{90}$$

将和向量除以它的模，得

$$\frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}|}=\frac{1}{\sqrt{90}}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$$

答：所求单位向量为 $\frac{1}{\sqrt{90}}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$。

5. [2022・February/March 0606/12 Q8(a)]

提示：先求方向向量的模，再将同方向的单位向量乘速率。

In this question, all lengths are in metres and all times are in seconds.

A particle A is moving in the direction $\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$ with a speed of 58.

(a) Find the velocity vector of A.

本题中，所有长度均以米为单位，所有时间均以秒为单位。
粒子A沿向量$\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$的方向运动，速率为58m s^{-1}。
(a) 求A的速度向量。

✓ **答案** $\begin{pmatrix}-40\\42\end{pmatrix}$m s^{-1}。

解析 方向向量的模为

$$\left|\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-20)^2+21^2}=29$$

将同方向的单位向量乘速率，得

$$\boldsymbol{v}=\frac{58}{29}\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-40\\42\end{pmatrix}$$

答：A的速度向量为$\begin{pmatrix}-40\\42\end{pmatrix}$m s^{-1}。

题型 5 用参数倍乘方向向量，写线上点的向量

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **首尾相接求和：** 图中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$。$\overrightarrow{OA}$ 表示从 O 到 A 的向量。沿途向量首尾相接，反向时变号。

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\underline{\qquad\qquad}$$

② **分点写位置向量：** 点 P、Q 的位置由题中的倍数确定。求 $\overrightarrow{OQ}$，沿 O,A,Q 相加。

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

③ **中点比例换算：** 中点把线段分成两等份。分点比例须换成占全长的份数。

若 H 是 AB 的中点：
$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

若 K 在线段 OA 上，且 $OK=2KA$：
$OA=OK+KA=3KA$
$\overrightarrow{OK}=\frac{2}{2+1}\overrightarrow{OA}=$ _____ $\boldsymbol{a}$

④ **两点向量相减：** 已知 P、Q 相对于 O 的向量。终点的位置向量减去起点的位置向量。

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=_____\ \boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

⑤ **参数倍乘展开：** 题中 $\overrightarrow{PR}=\mu\overrightarrow{PQ}$，$\mu$ 是常数。把 $\overrightarrow{PQ}$ 的每一项都乘以 μ。

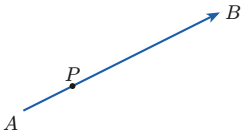
$$\overrightarrow{PR}=\mu\left(-\frac{1}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)=-\frac{\mu}{12}\boldsymbol{a}+\frac{\mu}{3}\boldsymbol{b}$$

⑥ **延长后的向量：** 沿用图中 P,Q,R 的位置。若另设 $\overrightarrow{QR}=t\overrightarrow{PQ}$，其中 t 为常数，求 $\overrightarrow{PR}$ 须加上前一段。

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PQ}=_____\ \overrightarrow{PQ}$$

⑦ 同一直线上的分比

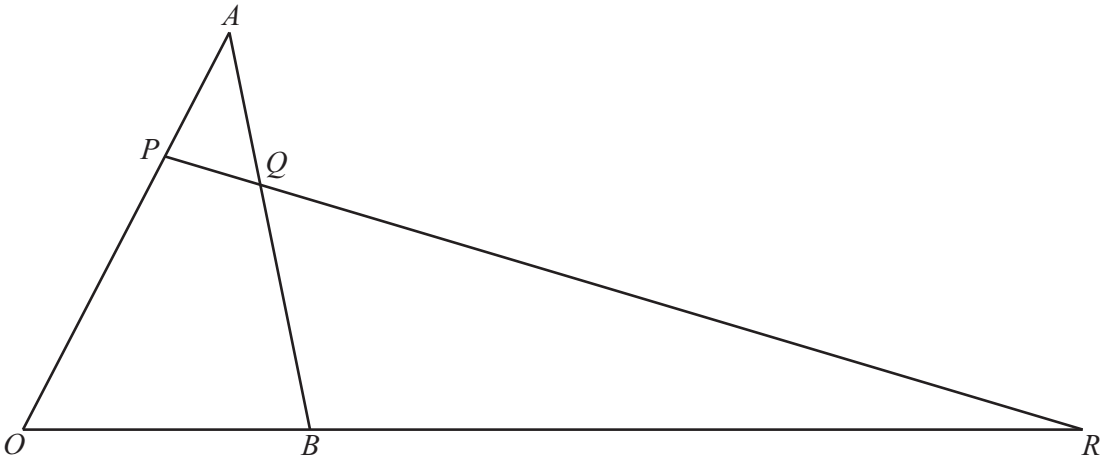
$$A=(0,0),\quad B=(4,2),\quad AP:PB=1:3$$



⟵ 填空：①$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ ②$\frac{2}{3}$ ③$-\frac{1}{12}$ ④$1+t$

点石成金　题目出现向量的参数倍乘关系并要求线上点的向量时，先写出被倍乘的向量，再沿首尾相接的路线相加。

例 1 [2025 · May/June 0606/12 Q11(a)]



The diagram shows the triangle OAB, where $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$.

The point P lies on OA such that $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$.

The point Q lies on AB such that $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

The straight line through P and Q meets the straight line through O and B at the point R.
It is given that $\overrightarrow{OR}=\lambda\mathbf{b}$ and $\overrightarrow{PR}=\mu\overrightarrow{PQ}$, where λ and μ are constants.

(a) Find $\overrightarrow{OR}$ in terms of **a**, **b** and μ.

图示三角形 OAB 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$。点 P 在线段 OA 上，且 $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$。点 Q 在线段 AB 上，且 $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$。经过 P、Q 的直线与经过 O、B 的直线相交于点 R。已知 $\overrightarrow{OR}=\lambda\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PR}=\mu\overrightarrow{PQ}$，其中 λ 和 μ 为常数。(a) 用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 μ 表示 $\overrightarrow{OR}$。

解答　由点 Q 的分点条件，得

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}=-\frac{1}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

由题意，得

$$\overrightarrow{PR}=\mu\overrightarrow{PQ}=-\frac{\mu}{12}\boldsymbol{a}+\frac{\mu}{3}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}-\frac{\mu}{12}\boldsymbol{a}+\frac{\mu}{3}\boldsymbol{b}=\left(\frac{3}{4}-\frac{\mu}{12}\right)\boldsymbol{a}+\frac{\mu}{3}\boldsymbol{b}$$

答：$\overrightarrow{OR}=\left(\frac{3}{4}-\frac{\mu}{12}\right)\boldsymbol{a}+\frac{\mu}{3}\boldsymbol{b}$。

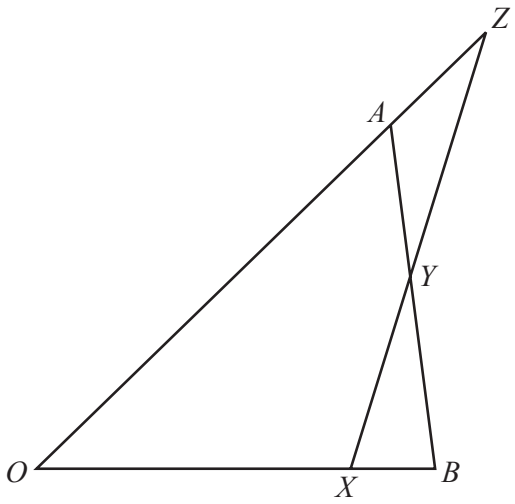
方法：先看 PR 与 PQ 的倍乘关系，从两点的位置向量相减起手。

辨析：向量 PR 是从 P 到 R 的位移，向量 OR 是 R 相对于 O 的位置向量。

针对练习

1. [2023 · October/November 0606/13 Q11(b)]

提示：看 YZ 的倍乘关系，核对 XY 各项是否都乘了参数。



In the triangle OAB, $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$.

The straight line XYZ is such that:

- $\overrightarrow{OX}=\frac{4}{5}\mathbf{b}$
- $\overrightarrow{AY}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AZ}=\mu\mathbf{a}$, where μ is a constant
- $\overrightarrow{YZ}=\lambda\overrightarrow{XY}$, where λ is a constant.

(a) Show that $\overrightarrow{XY}=\frac{2}{3}\mathbf{a}-\frac{7}{15}\mathbf{b}$.

(b) Find $\overrightarrow{YZ}$ in terms of λ, $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$.

在三角形 OAB 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$。直线 XYZ 满足以下条件：$\overrightarrow{OX}=\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$；$\overrightarrow{AY}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$；$\overrightarrow{AZ}=\mu\boldsymbol{a}$，其中 μ 为常数；$\overrightarrow{YZ}=\lambda\overrightarrow{XY}$，其中 λ 为常数。(a) 证明 $\overrightarrow{XY}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{7}{15}\boldsymbol{b}$。(b) 用 λ、$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{YZ}$。

✓ **答案** (a) $\overrightarrow{XY}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{7}{15}\boldsymbol{b}$；(b) $\overrightarrow{YZ}=2\frac{\lambda}{3}\boldsymbol{a}-7\frac{\lambda}{15}\boldsymbol{b}$。

解析 由点 Y 的分点条件，得

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AY}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{4}{5}\boldsymbol{b}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{7}{15}\boldsymbol{b}$$

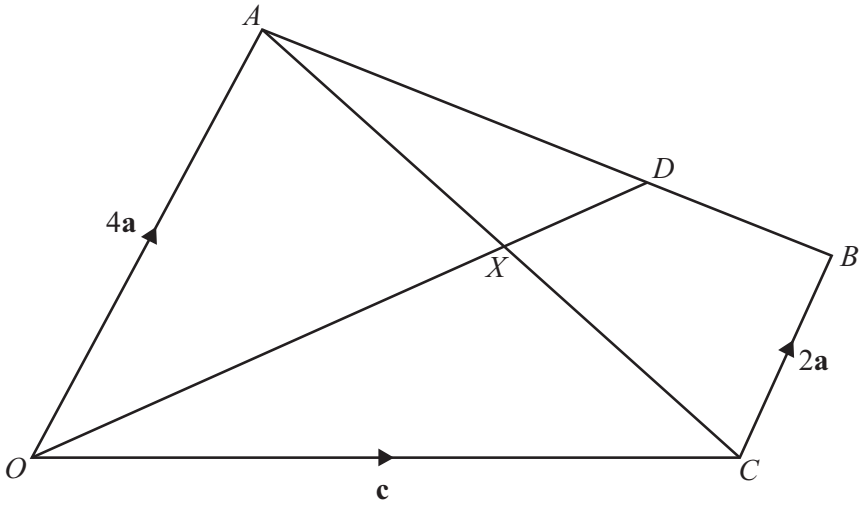
故所证等式成立。又由题意，得

$$\overrightarrow{YZ}=\lambda\overrightarrow{XY}=\lambda\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{7}{15}\boldsymbol{b}\right)=2\frac{\lambda}{3}\boldsymbol{a}-7\frac{\lambda}{15}\boldsymbol{b}$$

答：(b) $\overrightarrow{YZ}=2\frac{\lambda}{3}\boldsymbol{a}-7\frac{\lambda}{15}\boldsymbol{b}$。

2. [2024 · October/November 0606/13 Q9(c)]

提示：看 AD 与 DB 的比例，先算 AD 占全长的份数。



The diagram shows the trapezium $OABC$, where $\overrightarrow{OA}=4\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$, and $\overrightarrow{CB}=2\mathbf{a}$. The point D lies on AB such that $AD:DB=2:1$. The point X is the point of intersection of the lines OD and AC. It is given that $\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AC}$ and $\overrightarrow{OX}=\mu\overrightarrow{OD}$.

Find in terms of **a** and **c**

(a) $\overrightarrow{AB}$

(b) $\overrightarrow{OD}$.

(c) Find $\overrightarrow{OX}$ in terms of **a**, **c** and μ.

图示梯形 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=4\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{a}$。点 D 在线段 AB 上，且 $AD:DB=2:1$。点 X 是直线 OD 与 AC 的交点。已知 $\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OX}=\mu\overrightarrow{OD}$。用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 表示：(a) $\overrightarrow{AB}$；(b) $\overrightarrow{OD}$。(c) 用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$ 和 μ 表示 $\overrightarrow{OX}$。

✓ **答案** (a) $\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}$；(b) $\frac{8}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$；(c) $\mu\left(\frac{8}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)$。

解析 沿 O,C,B 相加，得

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}$$

由 $AD:DB=2:1$，得

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a})$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=4\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a})=\frac{8}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$$

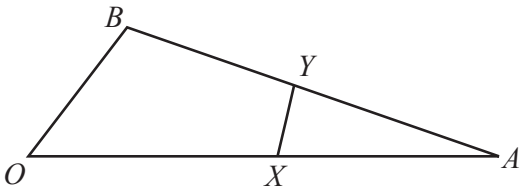
由题意，得

$$\overrightarrow{OX}=\mu\overrightarrow{OD}=\mu\left(\frac{8}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)$$

答：(a) $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}$；(b) $\overrightarrow{OD}=\frac{8}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$；(c) $\overrightarrow{OX}=\mu\left(\frac{8}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)$。

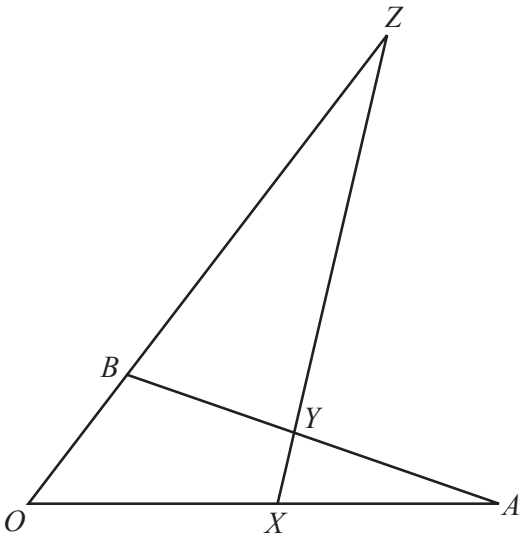
3. [2023 · May/June 0606/13 Q8(c)]

提示：看 X 到 Z 经过的两段，比较各段与向量 XY 的倍数。



The diagram shows the triangle OAB with $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$. The point X lies on the line OA such that $\overrightarrow{OX}=\frac{3}{5}\mathbf{a}$. The point Y is the mid-point of the line AB. Find, in terms of **a** and **b**,

(b) $\overrightarrow{XY}$.



The lines OB and XY are extended to meet at the point Z. It is given that $\overrightarrow{YZ}=\lambda\overrightarrow{XY}$ and $\overrightarrow{BZ}=\mu\mathbf{b}$.

(c) Find $\overrightarrow{XZ}$ in terms of λ, **a** and **b**.

图示三角形 OAB 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$。点 X 在线段 OA 上，且 $\overrightarrow{OX}=\frac{3}{5}\boldsymbol{a}$。点 Y 是线段 AB 的中点。(b) 用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{XY}$。将直线 OB 和 XY 延长，交于点 Z。已知 $\overrightarrow{YZ}=\lambda\overrightarrow{XY}$，$\overrightarrow{BZ}=\mu\boldsymbol{b}$。(c) 用 λ、$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{XZ}$。

✓ **答案** (b) $\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{10}\boldsymbol{a}$；(c) $(1+\lambda)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{10}\boldsymbol{a}\right)$。

解析 由 Y 是 AB 的中点，得

$$\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{10}\boldsymbol{a}$$

沿 X,Y,Z 相加，得

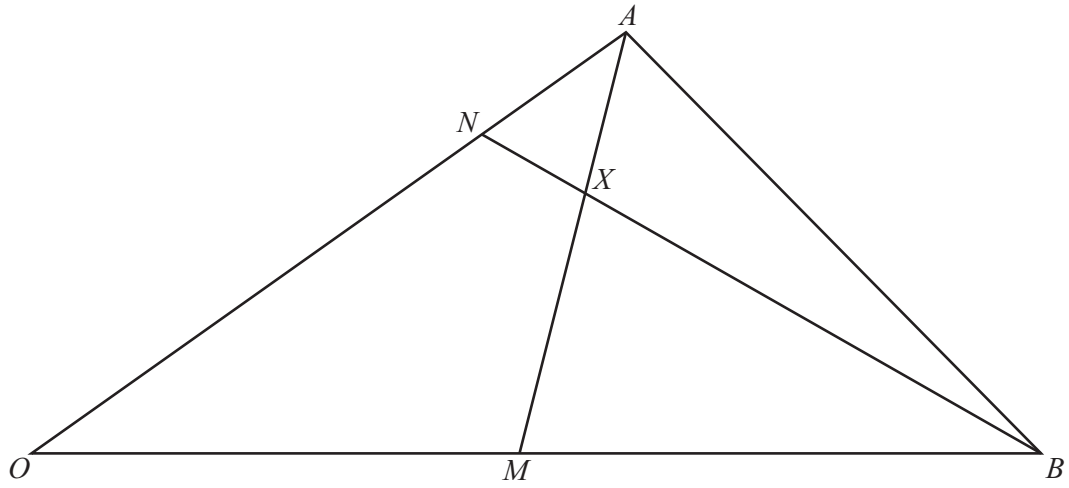
$$\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{XY}+\lambda\overrightarrow{XY}=(1+\lambda)\overrightarrow{XY}$$

$$\overrightarrow{XZ}=(1+\lambda)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{10}\boldsymbol{a}\right)$$

答：(b) $\overrightarrow{XY}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{10}\boldsymbol{a}$；(c) $\overrightarrow{XZ}=(1+\lambda)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{10}\boldsymbol{a}\right)$。

4. [2025・February/March 0606/12 Q11(a)]

提示：看 ON 与 NA 的倍数，沿 O、B、X 核对所需向量。



In the diagram, $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$.
The point M is the midpoint of OB.
The point N is such that $\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{NA}$.
The lines BN and AM intersect at the point X.
$\overrightarrow{BX}=\lambda\overrightarrow{BN}$, where λ is a constant.
$\overrightarrow{MX}=\mu\overrightarrow{MA}$, where μ is a constant.

(a) Find $\overrightarrow{OX}$ in terms of **a**, **b** and λ.

图中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$。点 M 是线段 OB 的中点。点 N 满足 $\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{NA}$。直线 BN 与 AM 相交于点 X。$\overrightarrow{BX}=\lambda\overrightarrow{BN}$，其中 λ 为常数。$\overrightarrow{MX}=\mu\overrightarrow{MA}$，其中 μ 为常数。(a) 用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 λ 表示 $\overrightarrow{OX}$。

✓ **答案** $\overrightarrow{OX}=\boldsymbol{b}+\lambda\left(\frac{3}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)$。

解析 由 $\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{NA}$，得

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NA}=4\overrightarrow{NA}$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

由题意，得

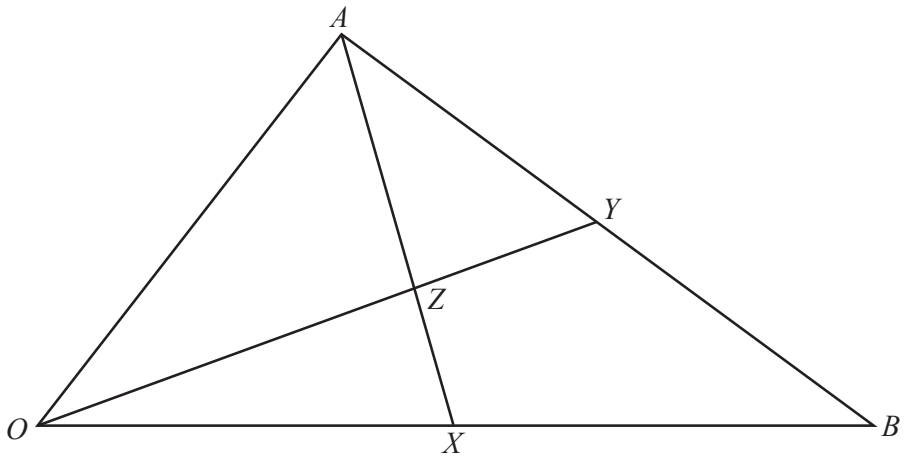
$$\overrightarrow{BX}=\lambda\overrightarrow{BN}=\lambda\left(\frac{3}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)$$

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BX}=\boldsymbol{b}+\lambda\left(\frac{3}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)$$

答：$\overrightarrow{OX}=\boldsymbol{b}+\lambda\left(\frac{3}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)$。

5. [2023・October/November 0606/12 Q11(a)]

提示：看中点 X 的位置，比较 AX 与 AZ 的起点和倍数。



In the triangle OAB, $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$. The mid-point of the line OB is X, and the mid-point of the line AB is Y. The lines OY and AX intersect at the point Z. It is given that $\overrightarrow{AZ}=\lambda\overrightarrow{AX}$ and $\overrightarrow{OZ}=\mu\overrightarrow{OY}$ where λ and μ are rational numbers.

(a) Find $\overrightarrow{OZ}$ in terms of $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ and λ.

在三角形 OAB 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$。线段 OB 的中点为 X，线段 AB 的中点为 Y。直线 OY 与 AX 相交于点 Z。已知 $\overrightarrow{AZ}=\lambda\overrightarrow{AX}$，$\overrightarrow{OZ}=\mu\overrightarrow{OY}$，其中 λ 和 μ 为有理数。(a) 用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 λ 表示 $\overrightarrow{OZ}$。

✓ **答案** $\overrightarrow{OZ}=\boldsymbol{a}+\lambda\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\right)$。

解析 由 X 是 OB 的中点，得

$$\overrightarrow{OX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

由题意，得

$$\overrightarrow{AZ}=\lambda\overrightarrow{AX}=\lambda\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\right)$$

$$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AZ}=\boldsymbol{a}+\lambda\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\right)$$

答：$\overrightarrow{OZ}=\boldsymbol{a}+\lambda\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\right)$。

题型 6 相减位置向量后取模，求距离或距离平方

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **位置向量相减：**以 O 为原点，本例两点的位置向量为

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$$

从 A 到 B 的位移向量，用_____的位置向量减去_____的位置向量。

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$$

② **位移向量取模：**本例横、纵位移分别为 -5、12，距离等于位移向量的长度。

$AB = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} =$ _____

一般地，设位移向量为 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，两点距离为 d。

求距离	求距离平方
$d = \sqrt{x^2 + y^2}$	$d^2 = x^2 + y^2$

③ **速度向量确定：**速率为 10m s^{-1}，运动方向与下列向量同向。

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{q}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

方向向量除以自身长度，再乘速率，得到速度向量。

$$\boldsymbol{v} = 10 \times \frac{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$$

一般地，u 表示速率，$\boldsymbol{q}$ 为同向的非零方向向量。

$$\boldsymbol{v} = \frac{u}{|\boldsymbol{q}|}\boldsymbol{q}$$

④ **匀速位置向量：**初始位置为 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 米，速度沿用上条结果。

以出发后的秒数为 t，初始位置、速度分别记为 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{v}$，位置向量为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+6t\\2+8t\end{pmatrix}$$

各自从出发时刻计时，时间单位与速度一致。

$$t = 11 - 9 = 2\text{ h} \quad (09{:}00 \text{ 至 } 11{:}00)$$

⑤ **距离式的展开：**位置向量含 t 时，仍先求同一时刻的位移。

$$\boldsymbol{r}_S = \begin{pmatrix}2+t\\3+3t\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_T = \begin{pmatrix}1\\4+t\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix}(2+t)-1\\(3+3t)-(4+t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t+1\\2t-1\end{pmatrix}$$

设 d 为两点距离，分量平方相加得距离平方。

$$d^2 = (t+1)^2 + (2t-1)^2 = t^2 + 2t + 1 + 4t^2 - 4t + 1 = 5t^2 - 2t + 2$$

求距离时，取非负平方根。

$$d = \sqrt{5t^2 - 2t + 2}$$

⑥ **方位角的分解：**$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别表示正东、正北方向的单位向量。

方位角从正北方向顺时针量起，速率为 u、方位角为 $300°$ 时，速度为

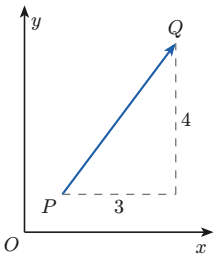
$$\boldsymbol{v} = u\sin(300°)\boldsymbol{i} + u\cos(300°)\boldsymbol{j} = -\frac{\sqrt{3}}{2}u\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}u\boldsymbol{j}$$

其中，东西分量用正弦，南北分量用余弦。

$$\sin(300°) = -\sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(300°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$$

⑦　　相减位置后取模

$$P = (1, 1), \quad Q = (4, 5)$$



填空：①B　②A　③13

点石成金　题目出现两点或两粒子的位置向量并要求距离时，先求同一时刻的位置向量，再相减后取模。

例 1　[2023 · October/November 0606/11 Q3(b)]

The point A has position vector $\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$. The point B has position vector $\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$.

(a) Find, in vector form, the displacement of B from A.

(b) Find the distance AB.

点 A 的位置向量为 $\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$。点 B 的位置向量为 $\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$。
(a) 用向量形式求从 A 到 B 的位移。
(b) 求距离 AB。

解答　(a) 由终点位置向量减去起点位置向量，得

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$$

方法：先看两点的位置坐标，横纵分量分别作差，再求长度。

辨析：位移是有方向的向量，距离是非负的长度。

(b) 距离等于位移向量的长度，故

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

答：(a) $\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$；(b) 13。

针对练习

1.　[2024 · May/June 0606/12 Q9(c)]

提示：对照同一时刻的位置式，横纵分量各自作差后求模。

In this question, all distances are in metres and time, t, is in seconds.

A particle P moves with a speed of 14.5 parallel to the vector $\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$.

(a) Find the velocity vector of P.

Initially, P has position vector $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

(b) Write down the position vector of P at time t.

A second particle Q has position vector $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\7.5\end{pmatrix}t$ at time t.

(c) Find, in terms of t, the distance between P and Q at time t. Simplify your answer.

本题中，所有距离均以米为单位，时间 t 以秒为单位。
粒子 P 以 14.5m s^{-1} 的速率运动，运动方向平行于向量 $\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$。
(a) 求 P 的速度向量。
初始时，P 的位置向量为 $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$。
(b) 写出时刻 t 时 P 的位置向量。
另一粒子 Q 在时刻 t 的位置向量为 $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\7.5\end{pmatrix}t$。
(c) 用含 t 的式子表示时刻 t 时 P 与 Q 之间的距离，并化简答案。

✓ **答案** (a) $\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$；(b) $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}$ 米；(c) $\sqrt{34t^2-28t+20}$ 米。

解析 (a) 方向向量的长度为

$$\left|\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-20)^2+21^2}=\sqrt{841}=29$$

由速率及运动方向得

$$\boldsymbol{v}_P=\frac{14.5}{29}\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$$

(b) 由初始位置加上运动位移，得

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-10t\\5+10.5t\end{pmatrix}$$

(c) 同一时刻，Q 的位置向量为

$$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\7.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-5t\\3+7.5t\end{pmatrix}$$

故两粒子间的位移向量为

$$\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}(3-10t)-(-1-5t)\\(5+10.5t)-(3+7.5t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-5t\\2+3t\end{pmatrix}$$

两粒子间的距离为

$$PQ=\sqrt{(4-5t)^2+(2+3t)^2}$$

$$PQ=\sqrt{16-40t+25t^2+4+12t+9t^2}=\sqrt{34t^2-28t+20}$$

答：(a) 速度向量为 $\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$；(b) 位置向量为 $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}$ 米；(c) 距离为 $\sqrt{34t^2-28t+20}$ 米。

2. [2025 · October/November 0606/22 Q6(c)]
提示：看清所求为距离平方，分量差平方相加后比较系数。

In this question lengths are in centimetres and time, t, is in seconds.

A particle P is moving in a straight line with a speed of 26 in the direction of the vector $\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$.

(a) Find the velocity vector of P.

When $t = 0$, P passes through a point A which has position vector $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$.

(b) Write down the position vector of P at time t.

At the same time that P passes through A, a particle Q passes through a point B.

The position vector of Q at time t is given by $\begin{pmatrix}8t-5\\2-25t\end{pmatrix}$.

The distance between P and Q at time t is d.

(c) Show that $d^2 = mt^2 + nt + r$, where m, n and r are integers to be found.

本题中，长度以厘米为单位，时间 t 以秒为单位。
粒子 P 沿直线运动，速率为 26cm s^{-1}，运动方向与向量 $\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$ 同向。
(a) 求 P 的速度向量。
当 $t = 0$ 时，P 经过点 A，A 的位置向量为 $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$。
(b) 写出时刻 t 时 P 的位置向量。
在 P 经过 A 的同一时刻，粒子 Q 经过点 B。
时刻 t 时，Q 的位置向量为 $\begin{pmatrix}8t-5\\2-25t\end{pmatrix}$。
时刻 t 时，P 与 Q 之间的距离为 d。
(c) 证明 $d^2 = mt^2 + nt + r$，其中 m、n、r 是待求的整数，并求出它们的值。

✓ **答案** (a) $\begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix}\text{cm s}^{-1}$；(b) $\begin{pmatrix}3+10t\\6-24t\end{pmatrix}$ 厘米；(c) $d^2 = 5t^2 + 40t + 80$，$m = 5$，$n = 40$，$r = 80$。

解析 (a) 方向向量的长度为

$$\left|\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$$

由速率及运动方向得

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{26}{13}\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix}\text{cm s}^{-1}$$

(b) 由初始位置加上运动位移，得

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+10t\\6-24t\end{pmatrix}$$

(c) 同一时刻，两粒子间的位移向量为

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix}(3+10t)-(8t-5)\\(6-24t)-(2-25t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t+8\\t+4\end{pmatrix}$$

由两分量平方相加，得

$$d^2 = (2t+8)^2 + (t+4)^2 = 4t^2 + 32t + 64 + t^2 + 8t + 16 = 5t^2 + 40t + 80$$

与题给形式比较，得

$$m = 5,\quad n = 40,\quad r = 80$$

答：(a) 速度向量为 $\begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix}\text{cm s}^{-1}$；(b) 位置向量为 $\begin{pmatrix}3+10t\\6-24t\end{pmatrix}$ 厘米；(c) $d^2 = 5t^2 + 40t + 80$，其中 $m = 5$，$n = 40$，$r = 80$。

3. [2026 · May/June 0606/22 Q7(d)]

提示：先核对两船各自航行的时长，再求同一时刻的位置差。

In this question, **i** is a unit vector due east and **j** is a unit vector due north.
Distances are measured in kilometres and time is measured in hours.

Point P has position vector $2\mathbf{i}+5\mathbf{j}$ relative to an origin O.
At 13 00, boat A sails from point P with velocity vector $8\mathbf{i}+8\mathbf{j}$.

(b) Write down the position vector of A at the end of t hours of sailing.

(c) Point Q has position vector $20\mathbf{i}+8\mathbf{j}$ relative to the origin O.
At 15 00, boat B sails from point Q on a bearing of 300° with a constant speed of $5\sqrt{3}$.

Find the position vector of B at 17 00.

(d) Find the distance between the two boats at 17 00.

本题中，i 是正东方向的单位向量，j 是正北方向的单位向量。
距离以千米为单位，时间以小时为单位。
点 P 相对于原点 O 的位置向量为 $2i+5j$。
13:00 时，船 A 从点 P 出发，速度向量为 $8i+8j$ 千米每小时。
(b) 写出船 A 航行 t 小时后的位置向量。
(c) 点 Q 相对于原点 O 的位置向量为 $20i+8j$。
15:00 时，船 B 从点 Q 出发，沿方位角 300° 的方向，以 $5\sqrt{3}$ 千米每小时的恒定速率航行。
求 17:00 时船 B 的位置向量。
(d) 求 17:00 时两船之间的距离。

✓ **答案**　(b) $(2+8t)\boldsymbol{i}+(5+8t)\boldsymbol{j}$ 千米；(c) $5\boldsymbol{i}+\left(8+5\sqrt{3}\right)\boldsymbol{j}$ 千米；(d) 35.4 千米。

解析　(b) 船 A 航行 t 小时后的位移为 $t(8\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j})$，故

$$\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+t(8\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j})=(2+8t)\boldsymbol{i}+(5+8t)\boldsymbol{j}$$

(c) 方位角从正北方向顺时针量起，故船 B 的速度向量为

$$\boldsymbol{v}_B=5\sqrt{3}\sin(300°)\boldsymbol{i}+5\sqrt{3}\cos(300°)\boldsymbol{j}=-\frac{15}{2}\boldsymbol{i}+5\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$$

从 15:00 至 17:00，船 B 航行的时间为

$$17-15=2\ \text{h}$$

所以 17:00 时船 B 的位置向量为

$$\overrightarrow{OB}=20\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+2\left(-\frac{15}{2}\boldsymbol{i}+5\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}\right)=5\boldsymbol{i}+\left(8+5\sqrt{3}\right)\boldsymbol{j}$$

(d) 从 13:00 至 17:00，船 A 航行的时间为

$$t=17-13=4\ \text{h}$$

代入船 A 的位置向量，得

$$\overrightarrow{OA}=(2+8\times4)\boldsymbol{i}+(5+8\times4)\boldsymbol{j}=34\boldsymbol{i}+37\boldsymbol{j}$$

同一时刻，两船间的位移向量为

$$\overrightarrow{BA}=(34-5)\boldsymbol{i}+\left(37-\left(8+5\sqrt{3}\right)\right)\boldsymbol{j}=29\boldsymbol{i}+\left(29-5\sqrt{3}\right)\boldsymbol{j}$$

故两船间的距离为

$$AB=\sqrt{29^2+\left(29-5\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1757-290\sqrt{3}}\approx 35.4\text{ km}$$

答：（b）位置向量为 $(2+8t)\boldsymbol{i}+(5+8t)\boldsymbol{j}$ 千米；（c）位置向量为 $5\boldsymbol{i}+\left(8+5\sqrt{3}\right)\boldsymbol{j}$ 千米；（d）两船相距 35.4 千米。

4. [2022 · February/March 0606/12 Q8(d)]

提示：由（c）的位移向量求模，将两个分量分别平方后相加。

In this question, all lengths are in metres and all times are in seconds.

A particle A is moving in the direction $\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$ with a speed of 58.

(a) Find the velocity vector of A.

(b) Given that A is initially at the point with position vector $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$, write down the position vector of A at time t.

A particle B starts to move such that its position vector at time t is $\begin{pmatrix}-35t+4\\44t-2\end{pmatrix}$.

(c) Find the displacement vector $\overrightarrow{AB}$ at time t.

(d) Hence find the distance AB, at time t, in the form $\sqrt{pt^2+qt+r}$, where p, q and r are constants.

本题中，所有长度的单位均为m，所有时间的单位均为s。
粒子A沿向量$\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$的方向运动，速率为58m s^{-1}。
（a）求A的速度向量。
（b）已知A初始时所在点的位置向量为$\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$，写出时刻$t$粒子$A$的位置向量。
粒子B开始运动，时刻t的位置向量为

$$\begin{pmatrix}-35t+4\\44t-2\end{pmatrix}$$

（c）求时刻t从A到B的位移向量$\overrightarrow{AB}$。
（d）由此求时刻t的距离AB，将答案写成$\sqrt{pt^2+qt+r}$的形式，其中p、q、r为常数。

✓ **答案** $AB=\sqrt{29t^2-6t+2}$ m

解析 方向向量的模为

$$\sqrt{(-20)^2+21^2}=29$$

由速率及运动方向，得

$$\boldsymbol{v}_A=\frac{58}{29}\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-40\\42\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$$

由初始位置加位移，得

$$\boldsymbol{r}_A=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-40\\42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-40t\\-3+42t\end{pmatrix}\text{ m}$$

两粒子在同一时刻的位移向量为

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=\begin{pmatrix}(-35t+4)-(5-40t)\\(44t-2)-(-3+42t)\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5t-1 \\ 2t+1 \end{pmatrix} \text{ m}$$

由此对位移向量取模，得

$$AB = \sqrt{(5t-1)^2 + (2t+1)^2} = \sqrt{25t^2 - 10t + 1 + 4t^2 + 4t + 1} = \sqrt{29t^2 - 6t + 2} \text{ m}$$

答：$AB = \sqrt{29t^2 - 6t + 2}$ m。

5. [2024 · February/March 0606/22 Q7(b)]
提示：先联立求出两个交点，再用距离公式。

(a) The curves $4x^2 - 3y^2 + xy = 24$ and $y = \dfrac{2}{x}$ intersect at the points P and Q. Find the coordinates of P and Q.

(b) Find the length of PQ. Give your answer in the form $a\sqrt{b}$, where a is rational and b is the smallest possible integer.

(a) 曲线$4x^2 - 3y^2 + xy = 24$与$y = \frac{2}{x}$相交于点P和Q。求P和Q的坐标。
(b) 求线段PQ的长度。将答案写成$a\sqrt{b}$的形式，其中a为有理数，b为尽可能小的整数。

✓ **答案** $PQ = \frac{4\sqrt{15}}{3}$

解析 由$y = \frac{2}{x}$，有$x \neq 0$。代入另一曲线，得

$$4x^2 - 3\left(\frac{2}{x}\right)^2 + x \times \frac{2}{x} = 24$$

$$4x^2 - \frac{12}{x^2} = 22$$

两边同乘x^2并整理，得

$$2x^4 - 11x^2 - 6 = 0$$

$$(2x^2 + 1)(x^2 - 6) = 0$$

因x为实数，$2x^2 + 1 > 0$，故

$$x^2 = 6$$

当$x = \sqrt{6}$时，

$$y = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

当$x = -\sqrt{6}$时，

$$y = -\frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

两组坐标均满足原方程。可记为

$$P\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad Q\left(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

由两点坐标相减，得

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-\sqrt{6}-\sqrt{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{6}\\-\frac{2\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

对位移向量取模，得

$$PQ=\sqrt{\left(-2\sqrt{6}\right)^2+\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\sqrt{24+\frac{8}{3}}=\frac{\sqrt{240}}{3}=\frac{4\sqrt{15}}{3}$$

15不含大于1的平方因子，故根式已化为最简形式。

答：$PQ=\frac{4\sqrt{15}}{3}$。

题型 7　把向量化成倍数，求比例或判定平行共线

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **位置向量相减：**以 O 为原点，$\overrightarrow{OA}$ 是点 A 的位置向量。两点间的向量等于_____减去起点的位置向量。

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

② **分段比例换算：**点在线段上，先把所给比例化成占整段的份数。

本例中，$OD:OB=1:3$。

$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

若点 M 在线段 AB 上，且 $AM:MB=1:2$。

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{1+2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

设 $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$，其中 $0<t<1$。另一段占整段的 $1-t$，故 $AM:MB=$_____。

③ **平行四边形：**平行四边形 $OABC$ 中，同向的对边向量_____。先求 $\overrightarrow{OC}$，再作位置向量相减。

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$$

④ **列向量的运算：**列向量 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 的上、下分量分别为 x、y。相加、相减与数乘都对对应分量运算，例如

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

⑤ **比较向量系数：**两条路径到达同一点，可写出同一位置向量。本例中 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，同一向量的对应系数_____。例如，$\boldsymbol{r}$ 表示同一向量，s、t 为实数，

$$\boldsymbol{r}=(1-s)\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}=t\boldsymbol{a}+2t\boldsymbol{b}$$

$$1-s=t$$

$$s=2t$$

$$1=s+t=3t$$

$$t=\frac{1}{3}$$

$$s=2t=\frac{2}{3}$$

⑥ **倍数判定关系：**两个非零向量化成倍数，可判定平行。若两个向量还有公共起点，则三个端点共线。其中 k 为非零实数，

$\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{AB}$

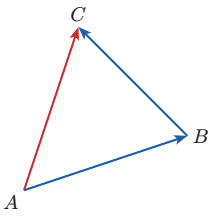
DE 与 AB 平行。

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$

两向量共用起点 O，故 O、Q、P 共线。

⑦ 首尾相接与位移合成

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



填空：①终点的位置向量　②$t:(1-t)$　③相等　④相等

点石成金　题目出现线段比、向量倍数或平行共线的所求时，先用位置向量表示各段，再求倍数关系。

例 1　[2026 · May/June 0606/13 Q10]

The parallelogram $OABC$ is such that $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$.
The point D lies on OB such that $OD:OB=1:3$.
The point E lies on AC such that $AE:AC=2:3$.

Show that $\overrightarrow{DE}$ is parallel to $\overrightarrow{AB}$.

平行四边形 $OABC$ 满足

$\overrightarrow{OA}=a$　且　$\overrightarrow{OB}=b$

点 D 在线段 OB 上，且 $OD:OB=1:3$。
点 E 在线段 AC 上，且 $AE:AC=2:3$。
证明 DE 与 AB 平行。

解答　由平行四边形的对边向量相等，得

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$$

由 $AE:AC=2:3$，得

$$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{4}{3}\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$$

由 $OD:OB=1:3$，得

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

方法：先看对边关系和线段比，从表示 OC 向量起手。

辨析：分段比是两部分相比，占整段比是一部分与整体相比。

∵ 两个非零向量互为倍数，∴ DE 与 AB 平行。
答：DE 与 AB 平行。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/12 Q11(b)]
提示：先把分段比换成整段占比，再核对两分量的倍数。

The position vectors of points A and B relative to an origin O are

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} \text{ and } \overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}.$$

The point C lies on AB and is such that $AC : CB = 3 : 1$.

The point D lies on OA such that $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}$ and $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}5\\-5.5\end{pmatrix}$.

(a) Find $\overrightarrow{OD}$.

(b) Hence find the value of λ.

点 A、B 相对于原点 O 的位置向量为

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} \text{ 及 } \overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$$

点 C 在线段 AB 上，且 $AC : CB = 3 : 1$。
点 D 在线段 OA 上，满足

$$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA} \text{ 及 } \overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}5\\-5.5\end{pmatrix}$$

(a) 求 $\overrightarrow{OD}$。
(b) 由此求 λ 的值。

✓ **答案** (a) $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}3\\-1.5\end{pmatrix}$；(b) $\lambda = 0.75$。

解析

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\8\end{pmatrix}$$

由 $AC : CB = 3 : 1$，得

$$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{3+1}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}-8\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\-5.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1.5\end{pmatrix}$$

又由 $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}$，得

$$\begin{pmatrix}3\\-1.5\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\lambda\\-2\lambda\end{pmatrix}$$

比较上分量，得

$$4\lambda = 3$$

$$\lambda = \frac{3}{4} = 0.75$$

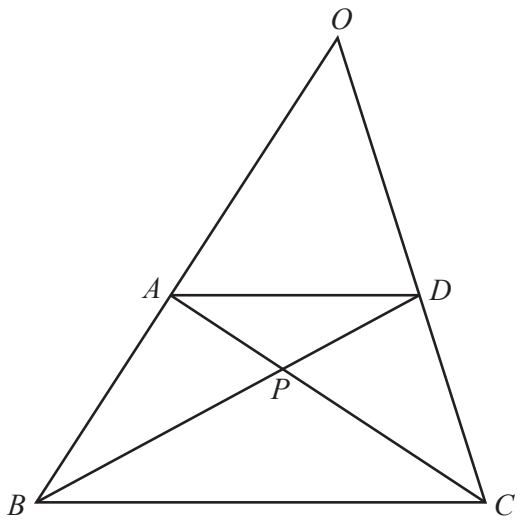
此时下分量也满足

$$-2\lambda = -2 \times 0.75 = -1.5$$

答：（a）$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1.5 \end{pmatrix}$；（b）$\lambda = 0.75$。

2. [2024 · May/June 0606/21 Q12(b)]

提示：沿两条路径表示 OP，比较系数后再比 OQ 与 OP。



The diagram shows a triangle OBC.
$OA : OB = 4 : 7$ and $OD : OC = 4 : 7$.

$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} \text{ and } \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$$

The point P is the point of intersection of AC and BD such that $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AC}$ and $\overrightarrow{BP} = \mu\overrightarrow{BD}$ where λ and μ are scalars.

(a) Find two expressions for $\overrightarrow{OP}$, each in terms of **b**, **c** and a scalar, and hence show that P divides both AC and DB in the ratio 4 : 7.

(b) The point Q is such that $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{7}\mathbf{b} + \frac{2}{7}\mathbf{c}$.

Use a vector method to show that O, Q and P are collinear. Justify your answer.

如图，三角形 OBC 中，点 A 在线段 OB 上，点 D 在线段 OC 上，图中连接了 AD、AC 和 BD。已知

$$OA : OB = 4 : 7 \quad \text{且} \quad OD : OC = 4 : 7$$

$$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b} \quad \text{且} \quad \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$$

点 P 是 AC 与 BD 的交点，满足

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AC} \quad \text{及} \quad \overrightarrow{BP} = \mu\overrightarrow{BD}$$

其中 λ、μ 为标量。
（a）求 $\overrightarrow{OP}$ 的两个表达式，每个表达式均用 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 及一个标量表示，并由此证明，P 将 AC 和 DB 均分成 4 : 7。
（b）点 Q 满足

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{7}\boldsymbol{b} + \frac{2}{7}\boldsymbol{c}$$

用向量方法证明 O、Q、P 三点共线，并说明理由。

✓ **答案**　(a) $\overrightarrow{OP}=\frac{4}{7}(1-\lambda)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OP}=(1-\mu)\boldsymbol{b}+\frac{4}{7}\mu\boldsymbol{c}$；$AP:PC=DP:PB=4:7$。(b) $\overrightarrow{OQ}=\frac{11}{14}\overrightarrow{OP}$，故 O、Q、P 共线。

解析　由已知比例，得

$$\overrightarrow{OA}=\frac{4}{7}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{OD}=\frac{4}{7}\boldsymbol{c}$$

沿 OA、AP 表示 $\overrightarrow{OP}$，得

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{c}-\frac{4}{7}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AC}=\frac{4}{7}(1-\lambda)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$$

沿 OB、BP 表示 $\overrightarrow{OP}$，得

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\frac{4}{7}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{BD}=(1-\mu)\boldsymbol{b}+\frac{4}{7}\mu\boldsymbol{c}$$

$\because$ OBC 为三角形，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不平行，$\therefore$ 对应系数相等，

$$\frac{4}{7}(1-\lambda)=1-\mu$$

$$\lambda=\frac{4}{7}\mu$$

由前一式，得

$$7\mu-4\lambda=3$$

代入后一式，得

$$7\mu-\frac{16}{7}\mu=3$$

$$\frac{33}{7}\mu=3$$

$$\mu=\frac{7}{11}$$

$$\lambda=\frac{4}{7}\times\frac{7}{11}=\frac{4}{11}$$

$\because$ $0<\lambda<1$ 且 $0<\mu<1$，$\therefore$ P 在两条线段内部，

$$AP:PC=\lambda:(1-\lambda)=\frac{4}{11}:\frac{7}{11}=4:7$$

$$DP:PB=(1-\mu):\mu=\frac{4}{11}:\frac{7}{11}=4:7$$

故 P 将 AC 和 DB 均分成 $4:7$。
将 $\lambda=\frac{4}{11}$ 代入 $\overrightarrow{OP}$，得

$$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{7}\left(1-\frac{4}{11}\right)\boldsymbol{b}+\frac{4}{11}\boldsymbol{c}=\frac{4}{11}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{7}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\frac{11}{14}\overrightarrow{OP}$$

∵ 两个位置向量互为非零倍数，且有公共起点 O，∴ O、Q、P 共线。
答：(a) $\overrightarrow{OP}=\frac{4}{7}(1-\lambda)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OP}=(1-\mu)\boldsymbol{b}+\frac{4}{7}\mu\boldsymbol{c}$，且 $AP:PC=DP:PB=4:7$；(b) O、Q、P 共线。

3. [2022 · February/March 0606/22 Q10(b)]
提示：先求点 R 的位置向量，再由平行关系比较分量。

Relative to an origin O, the position vector of point P is $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ and the position vector of point Q is $8\mathbf{i}+13\mathbf{j}$.

(a) The point R is such that $\overrightarrow{PQ}=5\overrightarrow{PR}$. Find the unit vector in the direction $\overrightarrow{OR}$.

(b) The position vector of S relative to O is $\lambda\mathbf{j}$. Given that RS is parallel to PQ, find the value of λ.

以 O 为原点，点 P 的位置向量为 $3i-2j$，点 Q 的位置向量为 $8i+13j$。
(a) 点 R 满足 $\overrightarrow{PQ}=5\overrightarrow{PR}$。求沿 $\overrightarrow{OR}$ 方向的单位向量。
(b) 点 S 相对于 O 的位置向量为 λj。已知 RS 与 PQ 平行，求 λ 的值。

✓ **答案**　(a) $\frac{4i+j}{\sqrt{17}}$；(b) $\lambda=-11$。

解析　由两点的位置向量相减，得

$$\overrightarrow{PQ}=(8i+13j)-(3i-2j)=5i+15j$$

由 $\overrightarrow{PQ}=5\overrightarrow{PR}$，得

$$\overrightarrow{PR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{PQ}=i+3j$$

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=4i+j$$

所以
$\left|\overrightarrow{OR}\right|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$
沿OR方向的单位向量为
$\frac{4i+j}{\sqrt{17}}$

$$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}=-4i+(\lambda-1)j$$

由 RS 与 PQ 平行，设 $\overrightarrow{RS}=k\overrightarrow{PQ}$，其中 k 为非零实数。比较对应分量，得

$$-4=5k$$

$$k=-\frac{4}{5}$$

$$\lambda - 1 = 15k = 15 \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -12$$

$$\lambda = -11$$

答：$\lambda = -11$。

题型 8 用正弦余弦分解航向速度

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **速度的分解：**粒子 A 的速率为 10m s^{-1}，航向在 x 轴上方 $60°$。v_x、v_y 分别表示沿两轴的速度分量。

$$v_x = 10\cos 60° = 10 \times \frac{1}{2} = \underline{\qquad}$$

$$v_y = 10\sin 60° = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\qquad}$$

② **速度向量表示：**例题中的 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别是沿两轴正方向的单位向量。把两个分量写成速度向量，列向量上行为横向分量，下行为纵向分量。

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_A = 5\boldsymbol{i} + 5\sqrt{3}\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$$

③ **方位角的分解：**例题中粒子 A 的航向，对应方位角 $030°$。方位角从正北顺时针量起，东为 x 轴正方向，北为 y 轴正方向。速率仍取 10m s^{-1}，两种航向的分量如下。

方位角为 $030°$：

$$v_x = 10\sin 30° = 5$$

$$v_y = 10\cos 30° = 5\sqrt{3}$$

方位角为 $300°$：

$$v_x = 10\sin 300° = -10\sin 60° = -5\sqrt{3}$$

$$v_y = 10\cos 300° = 10\cos 60° = 5$$

速率记为 v，方位角记为 β，则

$$v_x = v\sin\beta$$

$$v_y = v\cos\beta$$

④ **正切转为分量：**锐角 α 满足 $\tan\alpha = \frac{3}{4}$，可取对边为 3、邻边为 4。先求斜边长，再求正弦、余弦。若速率为 10m s^{-1}，速度分量如下。

$$\text{斜边长} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \underline{\qquad}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$v_x = 10 \times \frac{4}{5} = 8$$

$$v_y = 10 \times \frac{3}{5} = 6$$

⑤ **位置向量计算：**图中粒子 B 的初始位置向量记为 $\boldsymbol{r}_0$，恒定速度记为 $\boldsymbol{v}$。经过时间 t 后，位置向量 $\boldsymbol{r}$ 等于初始位置向量加位移。

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 9 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \text{m s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} + \frac{5}{3}t \\ 9 \end{pmatrix} \text{ m}$$

⑥ **经过时间与单位：**题给起航与到达时刻，先作差求经过时间。如从 14:00 航行至 16:00，经过时间如下。时间单位须与速度中的时间单位一致。

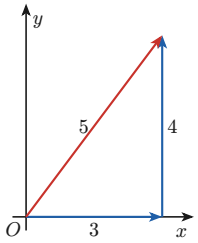
$$t = (16 - 14) \text{ h} = \underline{\qquad} \text{ h}$$

速度单位为 m s^{-1}：
时间用 s，位移用 m。

速度单位为 km h^{-1}：
时间用 h，位移用 km。

⑦ 水平、竖直速度相加

$$\boldsymbol{v} = (3, 0) + (0, 4) = (3, 4)$$



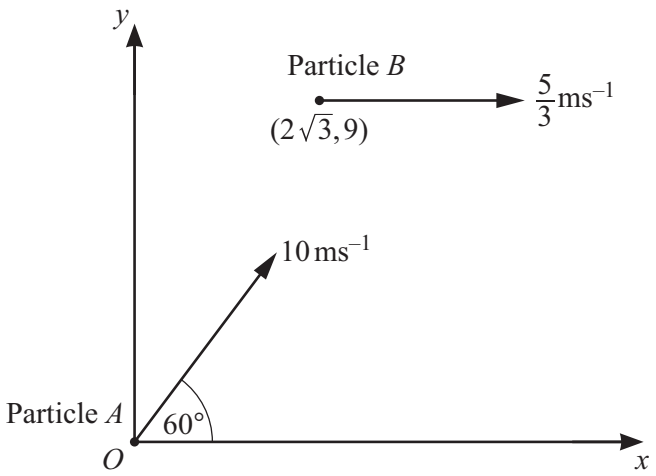
填空：①5　②$5\sqrt{3}$　③5　④2

点石成金　题目出现速率与航向角，并要求速度或位置向量时，先辨明角从哪条轴量起，再求沿两轴的速度分量。

例 1　[2024 · October/November 0606/22 Q11(a)]

In this question **i** is a unit vector in the positive x-direction and **j** is a unit vector in the positive y-direction. Time is in seconds and distances are in metres.

The diagram shows the initial positions and velocities of two particles, A and B, that move in the x-y plane.



Particle A starts from the origin O at time $t = 0$. It moves with constant speed $10\,\text{ms}^{-1}$ in the direction $60°$ above the x-axis.

(a) Find the exact values of the components of the velocity of particle A in the x-direction and the y-direction.

本题中，i 是沿 x 轴正方向的单位向量，j 是沿 y 轴正方向的单位向量。时间以 s 为单位，距离以 m 为单位。
图示为在 x-y 平面内运动的两个粒子 A 和 B 的初始位置及速度。
图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，原点标为 O。粒子 A 位于 O，速度大小为 10m s^{-1}，方向在 x 轴正方向上方，与其夹角为 $60°$。粒子 B 位于 $\left(2\sqrt{3},9\right)$，速度沿 x 轴正方向，大小为 $\frac{5}{3}\text{m s}^{-1}$。
粒子 A 在时刻 $t = 0$ 从原点 O 出发，以恒定速率 10m s^{-1} 沿 x 轴上方 $60°$ 的方向运动。
(a) 求粒子 A 在 x 方向和 y 方向的速度分量的精确值。

解答　粒子 A 的速度与 x 轴正方向夹角为 $60°$，故

$$v_x = 10\cos 60° = 10 \times \frac{1}{2} = 5\text{m s}^{-1}$$

$$v_y = 10\sin 60° = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\text{m s}^{-1}$$

答：x 方向的速度分量为 5m s^{-1}，y 方向的速度分量为 $5\sqrt{3}\text{m s}^{-1}$。

方法：先看航向角从哪条轴量起，再按邻边、对边分解速度。

辨析：速率是速度的大小，速度分量是沿坐标轴带符号的量。

拓展：两轴垂直时，速率的平方等于两个速度分量的平方和。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/21 Q12(a)]

提示：看方位角的起算方向，比较两船航向与正北的夹角。

In this question, the x- and y-directions are east and north respectively. The units are metres and seconds.
Boat A starts from the origin O and moves with constant speed $5\sqrt{3}\,\text{ms}^{-1}$ on a bearing of 030°.
After 100 seconds boat B starts from point P, which has position vector $\begin{pmatrix}0\\1000\end{pmatrix}$.
Boat B moves with constant speed $10\,\text{ms}^{-1}$ on a bearing of 060°.

(a) Find the velocity of each boat in vector form.

本题中，x 方向和 y 方向分别为正东和正北，长度和时间的单位分别为 m 和 s。
船 A 从原点 O 出发，以恒定速率 $5\sqrt{3}\text{m s}^{-1}$ 沿方位角 030° 航行。
经过 100 s 后，船 B 从点 P 出发，P 的位置向量为 $\begin{pmatrix}0\\1000\end{pmatrix}$。
船 B 以恒定速率 10m s^{-1} 沿方位角 060° 航行。
(a) 用向量形式表示每艘船的速度。

✓ **答案** $\boldsymbol{v}_A=\begin{pmatrix}5\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{15}{2}\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$，$\boldsymbol{v}_B=\begin{pmatrix}5\sqrt{3}\\5\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$。

解析 方位角从正北顺时针量起，横向分量用正弦，纵向分量用余弦，得

$$\boldsymbol{v}_A=\begin{pmatrix}5\sqrt{3}\sin 30°\\5\sqrt{3}\cos 30°\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_A=\begin{pmatrix}5\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\\5\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{15}{2}\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{v}_B=\begin{pmatrix}10\sin 60°\\10\cos 60°\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_B=\begin{pmatrix}10\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\10\times\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\sqrt{3}\\5\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$$

答：两船的速度向量分别为 $\begin{pmatrix}5\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{15}{2}\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$ 和 $\begin{pmatrix}5\sqrt{3}\\5\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$。

2. [2025 · May/June 0606/23 Q10(b)]

提示：看正切给出的边长比，补出斜边后再结合初始位置。

In this question, time is in seconds.

(b) Also at time $t=0$, particle Q starts from the point with position vector $-10\mathbf{i}+18\mathbf{j}$.
Q travels with speed $75\,\text{ms}^{-1}$ at an angle α above the positive x-axis, where $\tan\alpha=\frac{7}{24}$.
Find the position vector of Q at time t.

本题中，时间以 s 为单位。
(b) 同样在时刻 $t=0$，粒子 Q 从位置向量为 $-10i+18j$ 的点出发。
Q 以速率 75m s^{-1} 运动，运动方向在 x 轴正方向上方，与其夹角为 α，其中 $\tan\alpha=\frac{7}{24}$。
求时刻 t 时 Q 的位置向量。

✓ **答案** $(-10+72t)\boldsymbol{i}+(18+21t)\boldsymbol{j}$ m。

解析 由 $\tan\alpha=\frac{7}{24}$，取直角三角形的对边为 7、邻边为 24，得

$$\text{斜边长}=\sqrt{7^2+24^2}=25$$

$$\cos\alpha = \frac{24}{25}$$

$$\sin\alpha = \frac{7}{25}$$

粒子 Q 的速度向量为

$$\boldsymbol{v}_Q = 75\cos\alpha\boldsymbol{i} + 75\sin\alpha\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_Q = 75\times\frac{24}{25}\boldsymbol{i} + 75\times\frac{7}{25}\boldsymbol{j} = 72\boldsymbol{i} + 21\boldsymbol{j}\ \text{m s}^{-1}$$

由位置向量等于初始位置向量加位移，得

$$\boldsymbol{r}_Q = -10\boldsymbol{i} + 18\boldsymbol{j} + t(72\boldsymbol{i} + 21\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{r}_Q = (-10 + 72t)\boldsymbol{i} + (18 + 21t)\boldsymbol{j}\ \text{m}$$

答：时刻 t，Q 的位置向量为 $(-10+72t)\boldsymbol{i} + (18+21t)\boldsymbol{j}$ m。

3. [2026 · May/June 0606/22 Q7(c)]

提示：看航向所在象限判断分量符号，再核对经过时间的单位。

In this question, **i** is a unit vector due east and **j** is a unit vector due north.
Distances are measured in kilometres and time is measured in hours.

Point P has position vector $2\mathbf{i}+5\mathbf{j}$ relative to an origin O.
At 13 00, boat A sails from point P with velocity vector $8\mathbf{i}+8\mathbf{j}$.

(c) Point Q has position vector $20\mathbf{i}+8\mathbf{j}$ relative to the origin O.
At 15 00, boat B sails from point Q on a bearing of 300° with a constant speed of $5\sqrt{3}$.

Find the position vector of B at 17 00.

本题中，i 是指向正东的单位向量，j 是指向正北的单位向量。距离以 km 为单位，时间以 h 为单位。
点 P 相对于原点 O 的位置向量为 $2i+5j$。
13:00，船 A 从点 P 出发，速度向量为 $8i+8j$。
(c) 点 Q 相对于原点 O 的位置向量为 $20i+8j$。
15:00，船 B 从点 Q 出发，以恒定速率 $5\sqrt{3}$ 沿方位角 300° 航行。
求 17:00 时船 B 的位置向量。

✓ **答案** $5\boldsymbol{i} + \left(8+5\sqrt{3}\right)\boldsymbol{j}$ km。

解析 船 B 的方位角为 300°，航向朝西北，得

$$\sin 300° = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 300° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{v}_B = 5\sqrt{3}\sin 300°\boldsymbol{i} + 5\sqrt{3}\cos 300°\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_B = -\frac{15}{2}\boldsymbol{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}\ \text{km h}^{-1}$$

从 15:00 至 17:00，经过时间为

$$t = 17 - 15 = 2 \text{ h}$$

故 17:00 时，船 B 的位置向量为

$$\boldsymbol{r}_B = 20\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} + 2\left(-\frac{15}{2}\boldsymbol{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{r}_B = 5\boldsymbol{i} + \left(8 + 5\sqrt{3}\right)\boldsymbol{j} \text{ km}$$

答：17:00 时，船 B 的位置向量为 $5\boldsymbol{i} + \left(8 + 5\sqrt{3}\right)\boldsymbol{j}$ km。

4. [2022 · May/June 0606/21 Q8(a)]

提示：方位角从正北量起，东向分量用正弦，北向分量用余弦。

In this question, **i** is a unit vector due east and **j** is a unit vector due north. Distances are measured in kilometres and time is measured in hours.

At 09 00, ship A leaves a point P with position vector $5\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$ relative to an origin O. It sails with a constant speed of $6\sqrt{3}$ on a bearing of 120°.

(a) Show that the velocity vector of A is $9\mathbf{i} - 3\sqrt{3}\mathbf{j}$.

本题中，i 是指向正东的单位向量，j 是指向正北的单位向量。距离以千米为单位，时间以小时为单位。
在 09:00，船 A 从点 P 出发。相对于原点 O，点 P 的位置向量为 $5\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j}$。船以恒定速率 $6\sqrt{3}$km h^{-1}，沿方位角 120° 航行。
(a) 证明船 A 的速度向量为 $9\boldsymbol{i} - 3\sqrt{3}\boldsymbol{j}$。

✓ **答案** $\left(9\boldsymbol{i} - 3\sqrt{3}\boldsymbol{j}\right)$km h^{-1}

解析 方位角从正北顺时针量起，取向东、向北为正方向。

设船 A 的东向、北向速度分量分别为 v_x、v_y，则

$$v_x = 6\sqrt{3}\sin 120° = 6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\text{km h}^{-1}$$

$$v_y = 6\sqrt{3}\cos 120° = 6\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3\sqrt{3}\text{km h}^{-1}$$

因此船 A 的速度向量为

$$\boldsymbol{v}_A = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = \left(9\boldsymbol{i} - 3\sqrt{3}\boldsymbol{j}\right)\text{km h}^{-1}$$

答：船 A 的速度向量为 $\left(9\boldsymbol{i} - 3\sqrt{3}\boldsymbol{j}\right)$km h^{-1}，得证。

5. [2023 · May/June 0606/21 Q6(b)(i)]

提示：先用向量的大小乘方位角的正弦、余弦，分别求东向、北向分量。

(b) You are given that **i** is a unit vector due east and **j** is a unit vector due north.

Three vectors, **a**, **b** and **c** are in the same horizontal plane as **i** and **j** and are such that $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$.
The magnitude and bearing of **a** are 5 and 210°.
The magnitude and bearing of **c** are 10 and 330°.

(i) Find **a** and **c** in terms of **i** and **j**.

(b) 已知 i 是指向正东的单位向量，j 是指向正北的单位向量。
三个向量 a、b 和 c 与 i、j 位于同一水平面内，且满足

$$a + b = c$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小为 5，方位角为 210°。
向量 $\boldsymbol{c}$ 的大小为 10，方位角为 330°。
(i) 用 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$。

✓ **答案** $\boldsymbol{a}=-\frac{5}{2}\boldsymbol{i}-\frac{5\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=-5\boldsymbol{i}+5\sqrt{3}\boldsymbol{j}$。

解析 取向东、向北为正方向，按方位角分解向量，得

$$\boldsymbol{a}=5\sin 210°\boldsymbol{i}+5\cos 210°\boldsymbol{j}$$

$$\sin 210°=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$$

$$\cos 210°=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{a}=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{i}+5\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\boldsymbol{j}=-\frac{5}{2}\boldsymbol{i}-\frac{5\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$$

又由 $\boldsymbol{c}$ 的大小及方位角，得

$$\boldsymbol{c}=10\sin 330°\boldsymbol{i}+10\cos 330°\boldsymbol{j}$$

$$\sin 330°=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$$

$$\cos 330°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{c}=10\times\left(-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{i}+10\times\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}=-5\boldsymbol{i}+5\sqrt{3}\boldsymbol{j}$$

答：$\boldsymbol{a}=-\frac{5}{2}\boldsymbol{i}-\frac{5\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=-5\boldsymbol{i}+5\sqrt{3}\boldsymbol{j}$。

题型 9 初始位置加时间乘速度，写匀速位置

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **方向向量的模：**粒子 P 的运动方向由向量 d 给出。向量的模是各分量平方和的平方根。

$$d=\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$$

$$|d|=\sqrt{(-20)^2+21^2}=_____$$

② **速率求速度：**粒子速率为 14.5m s^{-1}。速度向量 v 与所给向量同向，各分量按同一倍数缩放。

$$v=\frac{14.5}{29}d=0.5\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}$$

③ **时间乘速度：**从出发起经过的时间记为 t，单位为 s。位移 Δr 等于速度向量乘以经过的时间，单位为_____。

$$\Delta r=tv=t\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10t\\10.5t\end{pmatrix}$$

④ **初始位置加位移：**位置向量表示从原点指向粒子位置的向量。初始位置向量记为 r_0，时刻 t 的位置向量记为 r。由_____加上位移，得到当前位置向量。

$$r = r_0 + tv$$

本例从给定位置出发

$r_0 = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

$r = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-10t\\10.5t\end{pmatrix}$

$r = \begin{pmatrix}3-10t\\5+10.5t\end{pmatrix}$

若从原点出发

$r_0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$r = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-10t\\10.5t\end{pmatrix}$

$r = \begin{pmatrix}-10t\\10.5t\end{pmatrix}$

⑤ **夹角求速度分量：**速度与 x 轴正方向成锐角时，以速度为斜边作直角三角形。横向分量用余弦，纵向分量用正弦。以速率为 2m s^{-1}、方向为 x 轴上方 $60°$ 作演示。

横向速度分量

$v_x = 2\cos 60° = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

纵向速度分量

$v_y = 2\sin 60° = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$$v = \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

⑥ **基向量表示法：**沿两坐标轴正方向的单位向量分别记为 i、j。将列向量的两个分量分别写成 i 项、j 项。以正东、正北为两轴正方向时，写法相同。

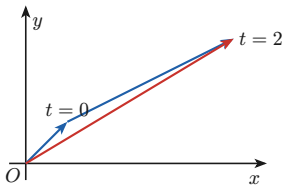
$$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = 3i + 5j$$

$$\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix} = -10i + 10.5j$$

$$r = (3i + 5j) + t(-10i + 10.5j) = (3 - 10t)i + (5 + 10.5t)j$$

⑦ 初位置加上同一时间内的位移

$$\boldsymbol{r}(t) = (1, 1) + t(2, 1)$$



← 填空：①29　②米　③初始位置向量

点石成金　题目出现初始位置和匀速运动条件，要求某时刻的位置向量时，先求速度向量，再将初始位置加上时间乘速度。

例 1　[2024 · May/June 0606/12 Q9(b)]

In this question, all distances are in metres and time, t, is in seconds.

A particle P moves with a speed of 14.5 parallel to the vector $\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$.

(a) Find the velocity vector of P.

Initially, P has position vector $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

(b) Write down the position vector of P at time t.

本题中，所有距离均以米为单位，时间 t 以 s 为单位。
粒子 P 的运动速率为 14.5m s^{-1}，运动方向平行于向量

$$\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$$

(a) 求 P 的速度向量。
初始时，P 的位置向量为

$$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

(b) 写出时刻 t 粒子 P 的位置向量。

解答　所给方向向量的模为

$$\sqrt{(-20)^2+21^2}=\sqrt{841}=29$$

由速率及运动方向，得速度向量

$$v_P=\frac{14.5}{29}\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$$

由初始位置加位移，得

$$r_P=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-10t\\5+10.5t\end{pmatrix}\text{ m}$$

答：(a) 速度向量为 $\begin{pmatrix}-10\\10.5\end{pmatrix}$m s^{-1}；(b) 位置向量为 $\begin{pmatrix}3-10t\\5+10.5t\end{pmatrix}$ m。

方法：先看初始位置与方向向量，求方向向量的模，再按速率缩放。

辨析：位置向量是从原点指向当前位置的向量，位移是位置向量的改变量。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/22 Q6(b)]

提示：比较速率与方向向量的模，再看起点坐标与分量正负。

In this question lengths are in centimetres and time, t, is in seconds.

A particle P is moving in a straight line with a speed of 26 in the direction of the vector $\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$.

(a) Find the velocity vector of P.

When $t=0$, P passes through a point A which has position vector $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$.

(b) Write down the position vector of P at time t.

本题中，长度以厘米为单位，时间 t 以 s 为单位。
粒子 P 沿直线运动，速率为 26cm s^{-1}，运动方向与下列向量的方向相同：

$$\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$$

(a) 求 P 的速度向量。
当 $t=0$ 时，P 经过点 A，点 A 的位置向量为

$$\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

(b) 写出时刻 t 粒子 P 的位置向量。

✓ **答案** (a) $\begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix}$cm s^{-1}；(b) $\begin{pmatrix}3+10t\\6-24t\end{pmatrix}$ cm。

解析 所给方向向量的模为

$$\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{169}=13$$

由速率及运动方向，得

$$v_P=\frac{26}{13}\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix}\text{cm s}^{-1}$$

当 $t=0$ 时，粒子位于 A，故

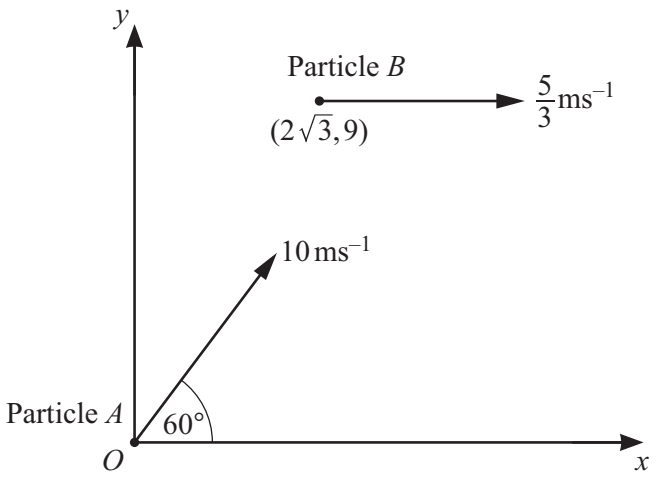
$$r_P=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+10t\\6-24t\end{pmatrix}\text{ cm}$$

答：(a) 速度向量为 $\begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix}$cm s^{-1}；(b) 位置向量为 $\begin{pmatrix}3+10t\\6-24t\end{pmatrix}$ cm。

2. [2024 · October/November 0606/22 Q11(b)]
提示：看方向角从哪条轴量起，分清正弦、余弦，再看出发点。

In this question **i** is a unit vector in the positive x-direction and **j** is a unit vector in the positive y-direction. Time is in seconds and distances are in metres.

The diagram shows the initial positions and velocities of two particles, A and B, that move in the x-y plane.



Particle A starts from the origin O at time $t=0$. It moves with constant speed $10\,\text{ms}^{-1}$ in the direction 60° above the x-axis.

(a) Find the exact values of the components of the velocity of particle A in the x-direction and the y-direction.

(b) Find, in terms of t, the position vector of particle A at time t.

本题中，i 是沿 x 轴正方向的单位向量，j 是沿 y 轴正方向的单位向量。时间以 s 为单位，距离以米为单位。
图示为在 x-y 平面内运动的两个粒子 A、B 的初始位置和速度。图中，O 为原点，x 轴水平向右，y 轴竖直向上。粒子 A 初始位于 O，速度箭头指向右上方，与 x 轴正方向成 60°，标注的速率为 10m s^{-1}。粒子 B 的初始坐标为 $\left(2\sqrt{3},9\right)$，速度箭头水平向右，标注的速率为 $\frac{5}{3}$m s^{-1}。
粒子 A 在 $t=0$ 时从原点 O 出发，以恒定速率 10m s^{-1} 沿 x 轴上方 60° 的方向运动。

(a) 求粒子 A 在 x 方向和 y 方向的速度分量的精确值。
(b) 用 t 表示时刻 t 粒子 A 的位置向量。

✓ **答案** (a) x 方向为 5m s^{-1}，y 方向为 $5\sqrt{3}\text{m s}^{-1}$；(b) $\left(5ti+5\sqrt{3}tj\right)$ m。

解析 速度方向在 x 轴上方，与 x 轴成 $60°$，两分量均为正，故

$$v_x = 10\cos 60° = 10\times\frac{1}{2} = 5\text{m s}^{-1}$$

$$v_y = 10\sin 60° = 10\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\text{m s}^{-1}$$

因此

$$v_A = \left(5i+5\sqrt{3}j\right)\text{m s}^{-1}$$

粒子 A 从原点出发，初始位置向量为零，故

$$r_A = 0i+0j+t\left(5i+5\sqrt{3}j\right) = \left(5ti+5\sqrt{3}tj\right)\text{ m}$$

答：(a) x、y 方向的速度分量分别为 5m s^{-1}、$5\sqrt{3}\text{m s}^{-1}$；(b) 位置向量为 $\left(5ti+5\sqrt{3}tj\right)$ m。

3. [2026 · May/June 0606/22 Q7(a)]
提示：看初始位置与航行时间，核对时间和速度的单位是否配套。

In this question, **i** is a unit vector due east and **j** is a unit vector due north.
Distances are measured in kilometres and time is measured in hours.

Point P has position vector $2\mathbf{i}+5\mathbf{j}$ relative to an origin O.
At 13 00, boat A sails from point P with velocity vector $8\mathbf{i}+8\mathbf{j}$.

(a) Find the position vector of A at the end of 2 hours of sailing.

本题中，i 是正东方向的单位向量，j 是正北方向的单位向量。距离以千米为单位，时间以小时为单位。
点 P 相对于原点 O 的位置向量为 $(2i+5j)$ km。
在 13 : 00，船 A 从点 P 出发，速度向量为 $(8i+8j)\text{km h}^{-1}$。
(a) 求船 A 航行 2 小时后的位置向量。

✓ **答案** $(18i+21j)$ km。

解析 航行时间为 2 小时，由初始位置加位移，得

$$r_A = (2i+5j)+2(8i+8j) = (2+16)i+(5+16)j = (18i+21j)\text{ km}$$

答：航行 2 小时后，船 A 的位置向量为 $(18i+21j)$ km。

4. [2022 · May/June 0606/21 Q8(c)]
提示：以船 B 出发时为计时起点，再由速度求这段时间的位移。

In this question, **i** is a unit vector due east and **j** is a unit vector due north. Distances are measured in kilometres and time is measured in hours.

At 09 00, ship A leaves a point P with position vector $5\mathbf{i}+16\mathbf{j}$ relative to an origin O. It sails with a constant speed of $6\sqrt{3}$ on a bearing of 120°.

(c) At 11 00 ship B leaves a point Q with position vector $29\mathbf{i}+16\mathbf{j}$. It sails with constant velocity $-12\sqrt{3}\mathbf{j}$. Write down the position vector of B, t hours after it starts sailing.

本题中，i 为正东方向的单位向量，j 为正北方向的单位向量。距离以千米为单位，时间以小时为单位。
09:00，船 A 从点 P 出发，P 相对于原点 O 的位置向量为 $5i+16j$。船 A 以 $6\sqrt{3}\text{km h}^{-1}$ 的恒定速率沿方位角 120° 航行。
(c) 11:00，船 B 从点 Q 出发，Q 的位置向量为 $29i+16j$。船 B 以恒定速度 $-12\sqrt{3}j\text{km h}^{-1}$ 航行。写出船 B 开始航行 t 小时后的位置向量。

✓ **答案** $\left(29\boldsymbol{i}+\left(16-12\sqrt{3}t\right)\boldsymbol{j}\right)$ km

解析 t从船B出发时起计算。由初始位置加位移，得

$$\boldsymbol{r}_B = 29\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}+t\left(-12\sqrt{3}\boldsymbol{j}\right)$$

$$\boldsymbol{r}_B = 29\boldsymbol{i}+\left(16-12\sqrt{3}t\right)\boldsymbol{j}$$

答：船B的位置向量为$\left(29\boldsymbol{i}+\left(16-12\sqrt{3}t\right)\boldsymbol{j}\right)$ km。

5. [2022 · February/March 0606/12 Q8(b)]

提示：先将方向向量按速率缩放，再把经过时间内的位移加到初始位置上。

In this question, all lengths are in metres and all times are in seconds.

A particle A is moving in the direction $\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$ with a speed of 58.

(a) Find the velocity vector of A.

(b) Given that A is initially at the point with position vector $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$, write down the position vector of A at time t.

本题中，所有长度的单位均为m，所有时间的单位均为s。

粒子A沿向量$\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}$的方向运动，速率为58m s^{-1}。

(a) 求A的速度向量。

(b) 已知A初始时所在点的位置向量为$\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$，写出时刻$t$粒子$A$的位置向量。

✓ **答案** $\begin{pmatrix}5-40t\\-3+42t\end{pmatrix}$ m

解析 方向向量的模为

$$\sqrt{(-20)^2+21^2}=\sqrt{841}=29$$

由速率及运动方向，得速度向量

$$\boldsymbol{v}_A=\frac{58}{29}\begin{pmatrix}-20\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-40\\42\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$$

由初始位置加位移，得

$$\boldsymbol{r}_A=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-40\\42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-40t\\-3+42t\end{pmatrix}\text{m}$$

答：时刻t的位置向量为$\begin{pmatrix}5-40t\\-3+42t\end{pmatrix}$ m。

题型 10 令两个坐标同时相等，检验到达或碰撞

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **写出位置向量：**粒子 A 从原点以速度 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$m s^{-1} 运动，经过 t s，位置为：

$$\boldsymbol{r}_{A(t)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t\\t\end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{r}_0$ 为初始位置向量，$\boldsymbol{v}$ 为速度，匀速运动满足：

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v}\quad(t\geq 0)$$

其中常量项为_____，t 的系数组成速度向量。

② **求出运动速率：**例题中 B 的速度为 $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$，_____等于速度向量的模。两个分量先平方相加，再开平方。

$$|\boldsymbol{v}_B| = \sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\text{m s}^{-1}$$

③ **方向化为速度：**$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别为 x、y 正方向的单位向量。沿 $3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$ 方向以速率 10m s^{-1} 运动，先将方向向量除以它的模，再乘速率。

$$|3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$\boldsymbol{v} = 10\times\frac{3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}}{5} = 6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}\quad(\text{m s}^{-1})$$

④ **角度化为分量：**设速率为 V，与 x 正轴的夹角为 θ。方位角 β 从正北按_____方向量起。锐角满足 $\tan\theta=\frac{3}{4}$ 时，先求斜边，再求正弦和余弦。

$$\sqrt{3^2+4^2}=5,\quad \sin\theta=\frac{3}{5},\quad \cos\theta=\frac{4}{5}$$

从正东向上量角

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}V\cos\theta\\V\sin\theta\end{pmatrix}$$

取 $V=10$、$\theta=30°$：

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}10\cos30°\\10\sin30°\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\sqrt{3}\\5\end{pmatrix}$

从正北顺时针量角

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}V\sin\beta\\V\cos\beta\end{pmatrix}$$

取 $V=10$、$\beta=30°$：

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}10\sin30°\\10\cos30°\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\sqrt{3}\end{pmatrix}$

⑤ **两坐标同时相等：**经过指定点或发生碰撞，两个坐标须在_____相等。分别解两个坐标方程，所得时间须相同且符合题设范围。

经过指定点

A 的位置为 $\begin{pmatrix}2t\\t\end{pmatrix}$，目标点为 (a,b)：

$$2t=a$$

$$t=b$$

两粒子碰撞

令 A、B 的对应坐标相等：

$$2t=-3+4t$$

$$t=4-2t$$

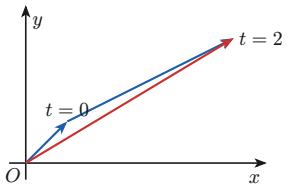
⑥ **出发时刻不同：**以 A 出发为 $t=0$，若 B 晚 2 s 出发，则 B 运动了_____。仍用例题中 B 的初始位置和速度，位置应写为：

$$\boldsymbol{r}_{B(t)} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}+(t-2)\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\quad(t\geq2)$$

⑦

初位置加上同一时间内的位移

$$\boldsymbol{r}(t) = (1,1)+t(2,1)$$



← 填空：①初始位置向量　②速率　③顺时针　④同一时刻　⑤$(t-2)$ s

点石成金　题目出现匀速运动及是否经过某点或碰撞的所求时，先写位置向量，再令两个坐标同时相等。

例 1　[2026 · February/March 0606/12 Q9(a)]

(a) In this question, time is in seconds and distances are in metres.

At time $t = 0$, particle A starts at the origin and moves with velocity $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

At the same time, particle B starts from the point with position vector $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ and moves with velocity $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

(i) Write down the position vector of B at time t.

(ii) Determine whether or not the particles collide.

(a) 本题中，时间以 s 计，距离以 m 计。
在时刻 $t = 0$，粒子 A 从原点出发，以速度 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$ 运动。
与此同时，粒子 B 从位置向量为 $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ 的点出发，以速度 $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$ 运动。
(i) 写出 B 在时刻 t 的位置向量。
(ii) 判断两粒子是否碰撞。

解答　由初始位置和速度得，B 在时刻 t 的位置向量为
$\boldsymbol{r}_{B(t)} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3+4t\\4-2t\end{pmatrix}$。
A 在时刻 t 的位置向量为
$\boldsymbol{r}_{A(t)} = t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t\\t\end{pmatrix}$。
若两粒子碰撞，则对应坐标在同一时刻相等，由横坐标得
$2t = -3 + 4t$，
$t = \frac{3}{2}$。
由纵坐标得
$t = 4 - 2t$，
$t = \frac{4}{3}$。
$\because \frac{3}{2} \neq \frac{4}{3}$，两个坐标不能在同一时刻分别相等，
$\therefore$ 两粒子不碰撞。
答：(i) $\begin{pmatrix}-3+4t\\4-2t\end{pmatrix}$；(ii) 两粒子不碰撞。

方法：先看初始位置与速度，列出位置向量，再分别求两坐标相等的时间。

辨析：轨迹相交是路径有公共点，碰撞是同一时刻占据同一位置。

针对练习

1.　[2025 · May/June 0606/23 Q10(c)]
提示：看两粒子的位置分量，比较横、纵坐标相等时各自求得的时间。

In this question, time is in seconds.

(a) At time $t = 0$, particle P starts from the point with position vector $-30\mathbf{j}$.
P travels with speed $58\,\text{ms}^{-1}$ in the direction $20\mathbf{i} + 21\mathbf{j}$.

Find the position vector of P at time t.

(b) Also at time $t = 0$, particle Q starts from the point with position vector $-10\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$.

Q travels with speed $75\,\text{ms}^{-1}$ at an angle α above the positive x-axis, where $\tan\alpha = \frac{7}{24}$.

Find the position vector of Q at time t.

(c) Determine whether P and Q collide.

本题中，时间以 s 计。
(a) 在时刻 $t=0$，粒子 P 从位置向量为 $-30\boldsymbol{j}$ 的点出发。P 沿 $20\boldsymbol{i}+21\boldsymbol{j}$ 的方向，以速率 58m s^{-1} 运动。求 P 在时刻 t 的位置向量。
(b) 同样在时刻 $t=0$，粒子 Q 从位置向量为 $-10\boldsymbol{i}+18\boldsymbol{j}$ 的点出发。Q 以速率 75m s^{-1} 运动，其运动方向位于 x 轴正方向上方，与 x 轴正方向的夹角为 α，其中 $\tan\alpha=\frac{7}{24}$。求 Q 在时刻 t 的位置向量。
(c) 判断 P 和 Q 是否碰撞。

✓ **答案** (a) $40t\boldsymbol{i}+(-30+42t)\boldsymbol{j}$；(b) $(-10+72t)\boldsymbol{i}+(18+21t)\boldsymbol{j}$；(c) 不碰撞。

解析 P 的运动方向为 $20\boldsymbol{i}+21\boldsymbol{j}$，其模为
$\sqrt{20^2+21^2}=\sqrt{841}=29$。
由速率为 58m s^{-1} 得
$\boldsymbol{v}_P=58\times\frac{20\boldsymbol{i}+21\boldsymbol{j}}{29}=40\boldsymbol{i}+42\boldsymbol{j}$。
$\therefore$ P 在时刻 t 的位置向量为
$\boldsymbol{r}_{P(t)}=-30\boldsymbol{j}+t(40\boldsymbol{i}+42\boldsymbol{j})=40t\boldsymbol{i}+(-30+42t)\boldsymbol{j}$。
由 $\tan\alpha=\frac{7}{24}$，且 α 为锐角，得
$\sqrt{7^2+24^2}=25$，
$\cos\alpha=\frac{24}{25}$，
$\sin\alpha=\frac{7}{25}$。
$\therefore$ Q 的速度为
$\boldsymbol{v}_Q=75\cos\alpha\boldsymbol{i}+75\sin\alpha\boldsymbol{j}=72\boldsymbol{i}+21\boldsymbol{j}$。
Q 在时刻 t 的位置向量为
$\boldsymbol{r}_{Q(t)}=-10\boldsymbol{i}+18\boldsymbol{j}+t(72\boldsymbol{i}+21\boldsymbol{j})=(-10+72t)\boldsymbol{i}+(18+21t)\boldsymbol{j}$。
若 P、Q 碰撞，由横坐标相等得
$40t=-10+72t$，
$t=\frac{5}{16}$。
由纵坐标相等得
$-30+42t=18+21t$，
$t=\frac{16}{7}$。
$\because$ $\frac{5}{16}\neq\frac{16}{7}$，
$\therefore$ P、Q 不碰撞。
答：(a) $40t\boldsymbol{i}+(-30+42t)\boldsymbol{j}$；(b) $(-10+72t)\boldsymbol{i}+(18+21t)\boldsymbol{j}$；(c) 不碰撞。

2. [2023 · February/March 0606/12 Q9(a)]
提示：将目标点的两坐标分别代入，比较求得的时间。

In this question, all lengths are in metres.

(a) A particle P has position vector $\begin{pmatrix}2+12t\\5-5t\end{pmatrix}$ at a time t seconds, $t\geqslant 0$.

(i) Write down the initial position vector of P.

(ii) Find the speed of P.

(iii) Determine whether P passes through the point with position vector $\begin{pmatrix}158\\-48\end{pmatrix}$.

本题中，所有长度均以 m 计。
(a) 粒子 P 在时刻 t s 的位置向量为 $\begin{pmatrix}2+12t\\5-5t\end{pmatrix}$，其中 $t\geq 0$。
(i) 写出 P 的初始位置向量。
(ii) 求 P 的速率。
(iii) 判断 P 是否经过位置向量为 $\begin{pmatrix}158\\-48\end{pmatrix}$ 的点。

✓ **答案** (i) $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$；(ii) 13m s^{-1}；(iii) 不经过。

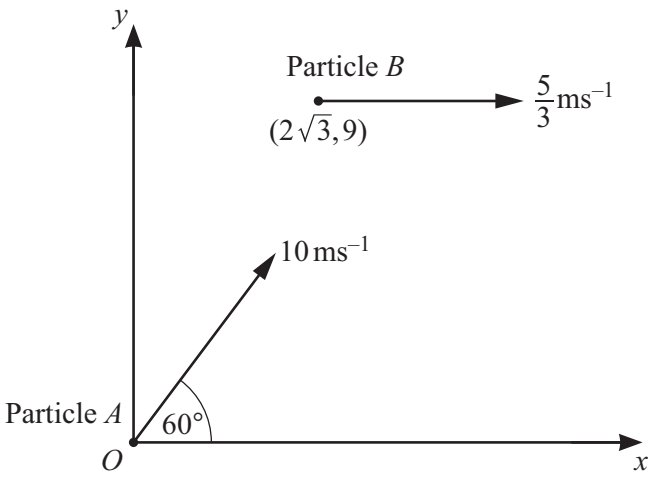
解析 令 $t=0$，得 P 的初始位置向量为

$\boldsymbol{r}_{P(0)} = \begin{pmatrix} 2+12\times 0 \\ 5-5\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$。
由位置向量
$\boldsymbol{r}_{P(t)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$,
得速度向量为 $\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$，故速率为
$|\boldsymbol{v}_P| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13\text{m s}^{-1}$。
若 P 经过位置向量为 $\begin{pmatrix} 158 \\ -48 \end{pmatrix}$ 的点，由横坐标得
$2 + 12t = 158$,
$t = 13$。
由纵坐标得
$5 - 5t = -48$,
$t = \frac{53}{5} = 10.6$。
$\because 13 \neq 10.6$，两个坐标不能在同一时刻分别等于目标坐标，
$\therefore P$ 不经过该点。
答：(i) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$；(ii) 13m s^{-1}；(iii) 不经过。

3. [2024・October/November 0606/22 Q11(d)]
提示：从不变的纵坐标求时间，再检验此时两横坐标是否相等。

In this question **i** is a unit vector in the positive x-direction and **j** is a unit vector in the positive y-direction. Time is in seconds and distances are in metres.

The diagram shows the initial positions and velocities of two particles, A and B, that move in the x-y plane.



Particle A starts from the origin O at time $t = 0$. It moves with constant speed $10\,\text{ms}^{-1}$ in the direction 60° above the x-axis.

(a) Find the exact values of the components of the velocity of particle A in the x-direction and the y-direction.

(b) Find, in terms of t, the position vector of particle A at time t.

Particle B starts from the point $(2\sqrt{3}, 9)$ at time $t = 0$. It moves with constant speed $\frac{5}{3}\text{ms}^{-1}$ parallel to the positive x-axis.

(c) Find, in terms of t, the position vector of particle B at time t.

(d) Hence show that the particles collide.

本题中，i 是 x 轴正方向的单位向量，j 是 y 轴正方向的单位向量。时间以 s 计，距离以 m 计。
图示给出了在 xy 平面内运动的两个粒子 A、B 的初始位置和速度。图中，O 为原点，水平轴标为 x，竖直轴标为 y；粒子 A 位于 O，速度箭头与 x 轴正方向成 60°，标注速率为 10m s^{-1}；粒子 B 位于 $\left(2\sqrt{3}, 9\right)$，速度箭头水平向右，标注速率为 $\frac{5}{3}\text{m s}^{-1}$。
粒子 A 在时刻 $t=0$ 从原点 O 出发，以恒定速率 10m s^{-1}，沿 x 轴上方与其正方向成 60° 的方向运动。
(a) 求粒子 A 的速度在 x 方向和 y 方向上的分量的精确值。
(b) 用 t 表示粒子 A 在时刻 t 的位置向量。
粒子 B 在时刻 $t=0$ 从点 $\left(2\sqrt{3}, 9\right)$ 出发，以恒定速率 $\frac{5}{3}\text{m s}^{-1}$，沿平行于 x 轴正方向的方向运动。
(c) 用 t 表示粒子 B 在时刻 t 的位置向量。
(d) 由此证明两粒子碰撞。

✓ **答案** (a) 5m s^{-1}，$5\sqrt{3}\text{m s}^{-1}$；(b) $\begin{pmatrix}5t\\5\sqrt{3}t\end{pmatrix}$；(c) $\begin{pmatrix}2\sqrt{3}+5\frac{t}{3}\\9\end{pmatrix}$；(d) 在 $t=3\frac{\sqrt{3}}{5}$ s 时于 $\left(3\sqrt{3}, 9\right)$ 碰撞。

解析 由 A 的速率为 10m s^{-1}，运动方向与 x 轴正方向成 60°，得
$v_{Ax}=10\cos 60°=5\text{m s}^{-1}$，
$v_{Ay}=10\sin 60°=5\sqrt{3}\text{m s}^{-1}$。
$\because$ A 从原点出发，
$\therefore$ A 在时刻 t 的位置向量为
$\boldsymbol{r}_{A(t)}=t\begin{pmatrix}5\\5\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5t\\5\sqrt{3}t\end{pmatrix}$。
B 沿 x 轴正方向运动，故其速度为
$\boldsymbol{v}_B=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\0\end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$。
由 B 的初始位置得
$\boldsymbol{r}_{B(t)}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\9\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}+5\frac{t}{3}\\9\end{pmatrix}$。
令两粒子的横坐标相等，得
$5t=2\sqrt{3}+5\frac{t}{3}$，
$10\frac{t}{3}=2\sqrt{3}$，
$t=3\frac{\sqrt{3}}{5}$。
令两粒子的纵坐标相等，得
$5\sqrt{3}t=9$，
$t=\frac{9}{5\sqrt{3}}=3\frac{\sqrt{3}}{5}$。
两个坐标方程给出相同的正时间，且此时
$\boldsymbol{r}_{A\left(3\frac{\sqrt{3}}{5}\right)}=\begin{pmatrix}3\sqrt{3}\\9\end{pmatrix}$，
$\boldsymbol{r}_{B\left(3\frac{\sqrt{3}}{5}\right)}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}+\sqrt{3}\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\sqrt{3}\\9\end{pmatrix}$。
答：两粒子在 $t=3\frac{\sqrt{3}}{5}$ s 时于点 $\left(3\sqrt{3}, 9\right)$ 碰撞。

4. [2025 · October/November 0606/21 Q12(b)]
提示：先看出发时差，统一计时起点，再比较两坐标方程所得时间。

In this question, the x- and y-directions are east and north respectively. The units are metres and seconds.
Boat A starts from the origin O and moves with constant speed $5\sqrt{3}\,\text{ms}^{-1}$ on a bearing of 030°.
After 100 seconds boat B starts from point P, which has position vector $\begin{pmatrix}0\\1000\end{pmatrix}$.
Boat B moves with constant speed $10\,\text{ms}^{-1}$ on a bearing of 060°.

(a) Find the velocity of each boat in vector form.

(b) Show that the two boats will collide.

本题中，x 方向和 y 方向分别为向东和向北，长度和时间的单位分别为 m 和 s。
船 A 从原点 O 出发，以恒定速率 $5\sqrt{3}\text{m s}^{-1}$，沿方位角为 030° 的方向运动。
经过 100 s 后，船 B 从点 P 出发，P 的位置向量为 $\begin{pmatrix}0\\1000\end{pmatrix}$。
船 B 以恒定速率 10m s^{-1}，沿方位角为 060° 的方向运动。
(a) 用向量形式求每艘船的速度。
(b) 证明两船将会碰撞。

✓ **答案** (a) $\boldsymbol{v}_A = \begin{pmatrix} 5\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$，$\boldsymbol{v}_B = \begin{pmatrix} 5\sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$；(b) A 出发后 200 s、B 出发后 100 s，两船于 $\left(500\sqrt{3}, 1500\right)$ 碰撞。

解析 取向东为 x 正方向，向北为 y 正方向。方位角从正北顺时针量起，故

$\boldsymbol{v}_A = \begin{pmatrix} 5\sqrt{3}\sin 30° \\ 5\sqrt{3}\cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$，

$\boldsymbol{v}_B = \begin{pmatrix} 10\sin 60° \\ 10\cos 60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix}\text{m s}^{-1}$。

设 A 出发后经过 t s，则 B 已运动 $(t-100)$ s，其中 $t \geq 100$。

两船的位置向量分别为

$\boldsymbol{r}_{A(t)} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}}{2}t \\ \frac{15}{2}t \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{r}_{B(t)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} + (t-100)\begin{pmatrix} 5\sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{3}(t-100) \\ 1000+5(t-100) \end{pmatrix}$。

令两船的横坐标相等，得

$\frac{5\sqrt{3}}{2}t = 5\sqrt{3}(t-100)$，

$\frac{t}{2} = t - 100$，

$t = 200$。

令两船的纵坐标相等，得

$\frac{15}{2}t = 1000 + 5(t-100)$，

$\frac{15}{2}t = 500 + 5t$，

$\frac{5}{2}t = 500$，

$t = 200$。

$\because$ 两个坐标方程给出的时间相同，且 $200 \geq 100$，

$\therefore$ 两船碰撞。此时

$\boldsymbol{r}_{A(200)} = \begin{pmatrix} 500\sqrt{3} \\ 1500 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{r}_{B(200)} = \begin{pmatrix} 500\sqrt{3} \\ 1500 \end{pmatrix}$。

答：两船在 A 出发后 200 s、B 出发后 100 s，于点 $\left(500\sqrt{3}, 1500\right)$ 碰撞。

5. [2025 · October/November 0606/22 Q6(d)]

提示：先将方向向量化为速度向量；碰撞时距离为零，时间须在运动范围内。

In this question lengths are in centimetres and time, t, is in seconds.

A particle P is moving in a straight line with a speed of 26 in the direction of the vector $\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$.

(a) Find the velocity vector of P.

When $t = 0$, P passes through a point A which has position vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(b) Write down the position vector of P at time t.

At the same time that P passes through A, a particle Q passes through a point B.

The position vector of Q at time t is given by $\begin{pmatrix} 8t-5 \\ 2-25t \end{pmatrix}$.

The distance between P and Q at time t is d.

(c) Show that $d^2 = mt^2 + nt + r$, where m, n and r are integers to be found.

(d) Hence show that P and Q do **not** collide.

本题中，长度以厘米计，时间t以s计。

粒子P沿直线运动，速率为26cm s^{-1}，运动方向与向量$\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$的方向相同。

(a) 求P的速度向量。

当$t = 0$时，P经过点A，点A的位置向量为$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$。

(b) 写出P在时刻t的位置向量。

在P经过A的同一时刻，粒子Q经过点B。
Q在时刻t的位置向量为

$$\begin{pmatrix} 8t-5 \\ 2-25t \end{pmatrix}$$

时刻t时，P与Q之间的距离为d。
(c) 证明

$$d^2 = mt^2 + nt + r$$

其中m、n、r为待求的整数。
(d) 由此证明P与Q不碰撞。

✓ **答案** 粒子P与Q不碰撞。

解析 方向向量的模为

$$\sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$$

故P的速度向量为

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{26}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \end{pmatrix} \quad (\text{cm s}^{-1})$$

由$t=0$时的位置，得P在时刻t的位置向量为

$$\boldsymbol{r}_P = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 10 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10t \\ 6-24t \end{pmatrix}$$

两粒子对应坐标的差为

$$(3+10t) - (8t-5) = 8 + 2t$$

$$(6-24t) - (2-25t) = 4 + t$$

由两点间距离公式，得

$$d^2 = (8+2t)^2 + (4+t)^2$$

$$d^2 = 64 + 32t + 4t^2 + 16 + 8t + t^2 = 5t^2 + 40t + 80$$

故

$$m = 5, \quad n = 40, \quad r = 80$$

由此得

$$d^2 = 5(t+4)^2$$

若两粒子碰撞，则$d=0$，因而

$$5(t+4)^2 = 0$$

$$t = -4$$

此时两个坐标虽同时相等，但题中运动时间满足$t \geq 0$，故$t=-4$不合题意。
答：粒子P与Q不碰撞。

第 14 章 微积分

Chapter 14

14.1 微积分

变化与斜率：对 $f(x)=x^2$，从 $x=1$ 到 $x=1+h$ 的平均变化率为

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1}{h}=2+h,\quad h\neq 0$$

当 h 越来越接近 0 时，平均变化率越来越接近 2，即曲线在 $x=1$ 处的切线斜率。这一瞬时变化率记为 $f'(1)$。

一阶与二阶：对任意 x 求得的导函数记为 $f'(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；再求一次导数，记为 $f''(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。本例中 $f'(x)=2x$，$f''(x)=2$。

题型 1 逐项求导与复合函数的链式法则

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **幂式求导：**例题把正切值整体取三次方，记这个值为 u。

$$y=u^3,\quad u=\tan(5x)$$

记号 $\frac{dy}{du}$ 表示 y 对 u 的导数，n 为常数。

$$\frac{dy}{du}=3u^2$$

幂式求导时，指数移作系数，指数减去 _____。

$$\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$$

分母中的幂改写为负指数：

$\frac{1}{x}=x^{-1}$

$\frac{d(x^{-1})}{dx}=-x^{-2}$

平方根改写为分数指数：

$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{d\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

② **逐层复合求导：**例题先算五倍角，再取正切，最后取三次方。

$$v=5x,\quad u=\tan(v),\quad y=u^3$$

按链式法则，各层导数相 _____。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

根号内还有幂式时，也逐层求导。

$$\frac{d\left(\sqrt{1+(2x+1)^3}\right)}{dx}=\frac{1}{2}(1+(2x+1)^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3(2x+1)^2\cdot 2=\frac{3(2x+1)^2}{\sqrt{1+(2x+1)^3}}$$

③ **三角函数求导：**例题中正切的角为 $5x$，角须用弧度制。

$$\sec(t)=\frac{1}{\cos(t)},\quad \cos(t)\neq 0$$

正切求导后可写成正切的平方与 _____ 的和。

$\frac{d(\tan(t))}{dt} = \sec^2(t) = 1 + \tan^2(t)$
$\frac{d(\tan(5x))}{dx} = 5(1 + \tan^2(5x))$

$\frac{d(\cos(t))}{dt} = -\sin(t)$
$\frac{d(\cos(2x))}{dx} = -2\sin(2x)$

④ **指数对数求导：**指数或对数内部还有式子时，记内部式子为 u。

$\frac{d(e^u)}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$

$\frac{d(\ln(u))}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}, \quad u > 0$

指数中的倒数先改写，对数求导后的分式再分解约分。

$u = \frac{3}{x} = 3x^{-1}$
$\frac{du}{dx} = -3x^{-2}$
$\frac{d\left(e^{\frac{3}{x}}\right)}{dx} = -\frac{3e^{\frac{3}{x}}}{x^2}$

$u = x^2 + 2x > 0$
$\frac{d(\ln(x^2+2x))}{dx} = \frac{2x+2}{x^2+2x} = \frac{2(x+1)}{x(x+2)}$

⑤ **和差分别求导：**式子由几项相加减时，各项分别求导，保留原有符号。

$$\frac{d(x^2 + 3x - 4)}{dx} = 2x + 3$$

分式能拆成幂式时，先逐项除以分母，再求导。

$$\frac{3x^3 - 2}{x^2} = 3x - 2x^{-2}, \quad x \neq 0$$

$$\frac{d(3x - 2x^{-2})}{dx} = 3 + 4x^{-3} = \frac{3x^3 + 4}{x^3}$$

⑥ **指定点的导数：**题目给出横坐标时，先求导，再代入该横坐标。

$$y = \tan(2x), \quad \frac{dy}{dx} = 2(1 + \tan^2(2x))$$

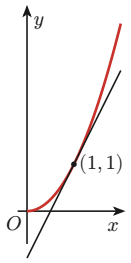
$$x = \frac{\pi}{8}, \quad \frac{dy}{dx} = 2\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2(1 + 1^2) = 4$$

要求精确值时，保留分数和根式。

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

⑦ 某点导数等于切线斜率

$f(x) = x^2, \quad f'(1) = 2$



填空：①1　②乘　③1

点石成金　题目出现正切、指数、对数或根号内还含有式子时，先分清各层，再将各层导数相乘。

例 1　[2026 · May/June 0606/21 Q5(a)]

It is given that $y = \tan^3 5x$.

(a) Find $\frac{dy}{dx}$ in terms of $\tan 5x$.

已知 $y = (\tan(5x))^3$。　(a) 求 $\frac{dy}{dx}$，答案用 $\tan(5x)$ 表示。

解答　原式可写为

$$y = (\tan(5x))^3$$

由链式法则，得

$$\frac{dy}{dx} = 3\tan^2(5x)\cdot(1+\tan^2(5x))\cdot 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 15\tan^2(5x)(1+\tan^2(5x))$$

方法：先看三次方包住的整体，从外层幂式起手，再逐层求导。

辨析：正切值的三次方是外层幂式，五倍角是正切内部的角。

拓展：三角函数的标准求导公式以弧度制为前提。

答：$\frac{dy}{dx} = 15\tan^2(5x)(1+\tan^2(5x))$。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/21 Q2(a)]

提示：先逐项求导，再看正割平方与正切平方的关系。

(a) Given that $y = \tan x - x$, find $\dfrac{dy}{dx}$. Write your answer in terms of $\tan x$.

(a) 已知 $y = \tan(x) - x$，求 $\frac{dy}{dx}$，答案用 $\tan(x)$ 表示。

✓ **答案**

$$\tan^2(x)$$

解析　对各项分别求导，得

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(x) - 1$$

由正切与正割的关系，得

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$$

答：$\frac{dy}{dx} = \tan^2(x)$。

2. [2024 · May/June 0606/12 Q3]

提示：先看角内的系数，求导后再代入并保留精确值。

Given that $y = \tan\dfrac{x}{2}$, find the exact value of $\dfrac{dy}{dx}$ when $x = \dfrac{\pi}{3}$.

已知 $y = \tan(\frac{x}{2})$，求当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的精确值。

✓ **答案**

$$\frac{2}{3}$$

解析　由链式法则，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时，

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)=\frac{2}{3}$$

答：$\frac{dy}{dx}$ 的精确值为 $\frac{2}{3}$。

3. [2026 · May/June 0606/13 Q12(a)]

提示：先把指数中的倒数改成负幂，求导时把参数视为常数。

A curve has equation $y=\mathrm{e}^{\frac{2a}{x}}$ where a is a positive constant.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in terms of a.

一条曲线的方程为 $y=e^{2\frac{a}{x}}$，其中 a 是正常数。（a）求 $\frac{dy}{dx}$，答案用含 a 的式子表示。

✓ **答案**

$$-\frac{2ae^{2\frac{a}{x}}}{x^2}$$

解析 a 为常数，且 $x\neq 0$，故

$$2\frac{a}{x}=2ax^{-1}$$

$$\frac{d\left(2\frac{a}{x}\right)}{dx}=-2ax^{-2}$$

由链式法则，得

$$\frac{dy}{dx}=e^{2\frac{a}{x}}\cdot\left(-2ax^{-2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2ae^{2\frac{a}{x}}}{x^2}$$

答：$\frac{dy}{dx}=-\frac{2ae^{2\frac{a}{x}}}{x^2}$。

4. [2025 · May/June 0606/23 Q2]

提示：先看分母能否逐项除入，把分式化成幂式再求导。

Given that $y=\dfrac{4x^3-5}{x^2}$, show that $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ can be written as $\dfrac{2(2x^3+5)}{x^3}$.

已知 $y=\frac{4x^3-5}{x^2}$，证明 $\frac{dy}{dx}$ 可以写成 $\frac{2(2x^3+5)}{x^3}$。

✓ **答案**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(2x^3+5)}{x^3}$$

解析 由 $x\neq 0$，将原式逐项除以分母，得

$$y=\frac{4x^3-5}{x^2}=4x-5x^{-2}$$

对各项分别求导，得

$$\frac{dy}{dx} = 4 + 10x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 + 10}{x^3} = \frac{2(2x^3 + 5)}{x^3}$$

答：$\frac{dy}{dx}$ 可写为 $\frac{2(2x^3+5)}{x^3}$。

5. [2026 · May/June 0606/22 Q3(a)]

提示：分别看根号内和余弦角内的式子，核对各自的内层导数。

(a) Differentiate $y = \sqrt{x+1} + \cos(5x+3)$ with respect to x.

(a) 将 $y = \sqrt{x+1} + \cos(5x+3)$ 对 x 求导。

✓ **答案**

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 5\sin(5x+3)$$

解析 将平方根写成幂式，得

$$y = (x+1)^{\frac{1}{2}} + \cos(5x+3)$$

对两项分别使用链式法则，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 - \sin(5x+3) \cdot 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 5\sin(5x+3), \quad x > -1$$

答：$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 5\sin(5x+3)$。

6. [2024 · October/November 0606/12 Q5(b)]

提示：看求导变量是否就是正切的角，再对应三角求导公式。

(b) Write down the derivative of $\tan\theta$ with respect to θ.

(b) 写出 $\tan(\theta)$ 对 θ 的导数。

✓ **答案**

$$\sec^2(\theta)$$

解析 由正切函数的求导公式，得

$$\frac{d(\tan(\theta))}{d\theta} = \sec^2(\theta)$$

答：$\sec^2(\theta)$。

7. [2023 · May/June 0606/23 Q3(a)]

提示：先看真数的导数，再比较分子分母能约去哪些公因式。

(a) Differentiate $\ln(x^3+3x^2)$ with respect to x, simplifying your answer.

(a) 将 $\ln(x^3+3x^2)$ 对 x 求导，并化简答案。

✓ **答案**

$$\frac{3(x+2)}{x(x+3)}$$

解析　对数的真数须为正，故

$$x^3+3x^2=x^2(x+3)>0$$

$$x>-3,\quad x\neq 0$$

由链式法则，得

$$\frac{d(\ln(x^3+3x^2))}{dx}=\frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2}$$

分解分子、分母并约去公因式，得

$$\frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2}=\frac{3x(x+2)}{x^2(x+3)}=\frac{3(x+2)}{x(x+3)}$$

答：导数为 $\frac{3(x+2)}{x(x+3)}$。

8. [2023 · May/June 0606/22 Q7(a)]

提示：从根号向内数复合层次，核对每层是否都贡献了导数。

(a) $f(x)=\sqrt{3+(4x-2)^5}$ where $x>1$.

Find an expression for $f'(x)$, giving your answer as a simplified algebraic fraction.

(a) $f(x)=\sqrt{3+(4x-2)^5}$，其中 $x>1$。求 $f'(x)$ 的表达式，答案写成化简后的分式。

✓ **答案**

$$\frac{10(4x-2)^4}{\sqrt{3+(4x-2)^5}}$$

解析　将平方根写成幂式，得

$$f(x)=(3+(4x-2)^5)^{\frac{1}{2}}$$

由 $x>1$，得 $3+(4x-2)^5>0$。由链式法则，得

$$f'(x)=\frac{1}{2}(3+(4x-2)^5)^{-\frac{1}{2}}\cdot 5(4x-2)^4\cdot 4$$

$$f'(x)=\frac{10(4x-2)^4}{\sqrt{3+(4x-2)^5}}$$

答：$f'(x)=\frac{10(4x-2)^4}{\sqrt{3+(4x-2)^5}}$。

题型 2　逐次微分位移、速度求速度或加速度

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **位移逐次微分：**粒子沿直线运动，位移随时间变化如下。时间 t 的单位为 s，位移 s 的单位为 m。位移对时间求导得_____，再求导得_____。

$$s=1.5e^{2t}+2e^{-2t}-t$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

速度 v 的单位为 $\mathrm{m\ s^{-1}}$，加速度 a 的单位为 $\mathrm{m\ s^{-2}}$。

② **复合函数求导：**位移含 e^{2t}，求导时须乘指数 $2t$ 的导数。设 $u=u(t)$，撇号表示对 t 求导，C、n 为常数。三角函数的角用弧度。

函数形式	求导公式	演算
C	$C'=0$	$(7)'=0$
u^n	$(u^n)'=nu^{n-1}u'$	$(t)'=1$；$\left((t^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$
e^u	$(e^u)'=e^u u'$	$(e^{2t})'=e^{2t}\cdot 2=2e^{2t}$；$(e^{-2t})'=e^{-2t}\cdot(-2)=-2e^{-2t}$
$\sin u$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	$(\sin(3t))'=\cos(3t)\cdot 3=3\cos(3t)$
$\cos u$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	$(\cos(3t))'=-\sin(3t)\cdot 3=-3\sin(3t)$
$\ln u\quad(u>0)$	$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$	$(\ln(3t+1))'=\frac{3}{3t+1}$

③ **乘积形式求导：**表达式含两个因式相乘，用乘积求导法则。若要求因式分解形式，求导后提取公因式。

$$(uw)'=u'w+uw'$$

其中 $u=u(t)$，$w=w(t)$。如

$$y=(t-1)^2(t+2)$$

$$y'=2(t-1)(t+2)+(t-1)^2=(t-1)(2t+4+t-1)=3(t-1)(t+1)$$

④ **分式继续求导：**速度含分式时，用商的求导法则求加速度。设分子为 $u=u(t)$，分母为 $w=w(t)\neq 0$。

$$\left(\frac{u}{w}\right)'=\frac{u'w-uw'}{w^2}$$

如对下式求导，分母整体平方。

$$y=\frac{2t}{t^2+1}$$

$$y'=\frac{2(t^2+1)-2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}$$

⑤ **指定时刻代入：**题目给出某时刻，先求所需量的表达式，再代入时间。如速度为 $v=\sin t$，求 $t=\frac{\pi}{6}$ 时的加速度。

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\cos t$$

$$a|_{t=\frac{\pi}{6}}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \mathrm{m\ s^{-2}}$$

⑥ **速度符号判断：**瞬时静止与运动方向都由速度判断。速度为零表示该时刻静止，速度在所给范围内不变号表示不改变方向。

瞬时静止时，令 $v=$ _____。

如 $v=2t-6$，则

$2t-6=0$

$t=3$

判断方向时，考察速度的符号。

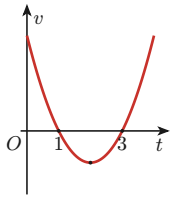
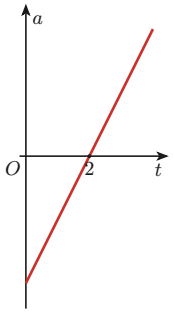
如 $v=t(t^2+1)$，当 $t>0$ 时，

$t>0$，　$t^2+1>0$

$v>0$，故粒子不改变方向。

← 填空：①速度　②加速度　③0

同一运动的速度与加速度

	$v(t)=t^2-4t+3$	$a(t)=2t-4$
图像		
联系	$a(t)=v'(t)$	
零点	$t=1,3$	$t=2$
符号变化	速度变号时换向	加速度变号时速度取极值

点石成金　题目出现位移或速度关于时间的表达式，并要求速度或加速度时，先确定需要对时间求导几次。

例 1　[2023 · October/November 0606/22 Q7(a)]

A particle is travelling in a straight line. Its displacement, s metres, from the origin at time t seconds is given by $s=1.5\mathrm{e}^{2t}+2\mathrm{e}^{-2t}-t$.

(a) Find expressions for the velocity, $v\,\mathrm{ms}^{-1}$, and acceleration, $a\,\mathrm{ms}^{-2}$, of the particle.

一粒子沿直线运动。在时刻 t（单位：s），粒子相对于原点的位移 s（单位：m）由下式给出：

$$s=1.5e^{2t}+2e^{-2t}-t$$

(a) 求粒子的速度 v（单位：$\mathrm{m\ s^{-1}}$）和加速度 a（单位：$\mathrm{m\ s^{-2}}$）的表达式。

解答　由速度是位移对时间的导数，得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=1.5\cdot 2e^{2t}+2\cdot(-2)e^{-2t}-1$$

$$v=3e^{2t}-4e^{-2t}-1$$

由加速度是速度对时间的导数，得

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3\cdot 2e^{2t}-4\cdot(-2)e^{-2t}$$

$$a=6e^{2t}+8e^{-2t}$$

答：速度为 $v=3e^{2t}-4e^{-2t}-1$，单位为 $\mathrm{m\ s^{-1}}$；加速度为 $a=6e^{2t}+8e^{-2t}$，单位为 $\mathrm{m\ s^{-2}}$。

方法：先看位移式中两项指数的正负，再逐项求导两次。

辨析：速度是位移的变化率，加速度是速度的变化率。

拓展：负指数项每求导一次都乘一个负因子，符号随之交替。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/23 Q12(a)]

提示：先看速度中的三角项，求导后再代入指定时刻。

A particle moves in a straight line. Its velocity, $v\,\mathrm{ms}^{-1}$, at time t seconds is given by

$$v=\cos t-\sin t.$$

(a) Find the acceleration, $a\ \text{ms}^{-2}$, when $t = \frac{\pi}{3}$.

一粒子沿直线运动。在时刻 t（单位：s），其速度 v（单位：m s^{-1}）由下式给出：

$$v = \cos t - \sin t$$

(a) 求 $t = \frac{\pi}{3}$ 时的加速度 a，单位为 m s^{-2}。

✓ **答案**

$$a = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{m s}^{-2}$$

解析 将速度对时间求导，得

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\sin t - \cos t$$

当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时，

$$a = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

答：加速度为 $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ m s^{-2}。

2. [2025 · May/June 0606/22 Q2(b)]

提示：看位移的两个因式，乘积求导后找共有因式。

In this question, all lengths are in metres and time is in seconds.

A particle P moves in a straight line such that its displacement s from a fixed point O at time t is given by $s = (t-4)^2(t-1)$ for $t \geqslant 0$.

(b) Find an expression for the velocity, v, of P.
Give your answer in a factorised form.

本题中，所有长度的单位均为 m，时间的单位为 s。

粒子 P 沿直线运动，在时刻 t，它相对于固定点 O 的位移 s 由下式给出：

$$s = (t-4)^2(t-1), \quad t \geq 0$$

(b) 求 P 的速度 v 的表达式。答案须写成因式分解形式。

✓ **答案**

$$v = 3(t-4)(t-2) \quad \text{m s}^{-1}$$

解析 由乘积求导法则，得

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2(t-4)(t-1) + (t-4)^2$$

$$v = (t-4)(2(t-1) + (t-4))$$

$$v = (t-4)(3t-6) = 3(t-4)(t-2)$$

答：$v = 3(t-4)(t-2)$，单位为 m s^{-1}。

3. [2023 · October/November 0606/21 Q7(a)]

提示：看三角函数前的符号，并核对内层角的导数。

A particle moves in a straight line. At time t seconds after passing through a fixed point O, its velocity, $v\,\text{ms}^{-1}$, is given by $v = 10\sin 2t - 6\cos 2t$.

(a) Find an expression for the acceleration of the particle.

一粒子沿直线运动。粒子经过固定点 O 后，经过时间 t（单位：s）时，其速度 v（单位：m s^{-1}）由下式给出：

$$v = 10\sin(2t) - 6\cos(2t)$$

(a) 求粒子加速度的表达式。

✓ **答案**

$$a = 20\cos(2t) + 12\sin(2t) \quad \text{m s}^{-2}$$

解析 将速度对时间求导，得

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10 \cdot 2\cos(2t) - 6 \cdot (-2\sin(2t))$$

$$a = 20\cos(2t) + 12\sin(2t)$$

答：加速度为 $a = 20\cos(2t) + 12\sin(2t)$，单位为 m s^{-2}。

4. [2024 · May/June 0606/13 Q9(a)]

提示：分别看一次项、余弦项和常数项，逐项求导。

In this question, all lengths are in metres, and time, t, is in seconds.

A particle P moves in a straight line such that, t seconds after leaving a fixed point O, its displacement, s, is given by $s = 4t - 4\cos 2t + 4$.

(a) Find the velocity, v, of P at time t.

本题中，所有长度的单位均为 m，时间 t 的单位为 s。

粒子 P 沿直线运动。粒子离开固定点 O 后，经过时间 t 时，其位移 s 由下式给出：

$$s = 4t - 4\cos(2t) + 4$$

(a) 求 P 在时刻 t 的速度 v。

✓ **答案**

$$v = 4 + 8\sin(2t) \quad \text{m s}^{-1}$$

解析 将位移对时间求导，得

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4 - 4 \cdot (-2\sin(2t)) + 0$$

$$v = 4 + 8\sin(2t)$$

答：P 在时刻 t 的速度为 $v = 4 + 8\sin(2t)$，单位为 m s^{-1}。

5. [2025 · February/March 0606/22 Q9(c)]

提示：从位移求速度，用零速度列式，再对速度求导。

In this question, all lengths are in metres and time is in seconds.

A particle, P, moves in a straight line such that t seconds after passing through a fixed point O its displacement, s, is given by $s = 5\ln(2t+1) - 5t$.

(a) Find the value of t for which P is instantaneously at rest.

(c) Find an expression for the acceleration of P in terms of t.

本题中，所有长度的单位均为 m，时间的单位为 s。

粒子 P 沿直线运动。粒子经过固定点 O 后，经过时间 t 时，其位移 s 由下式给出：

$$s = 5\ln(2t+1) - 5t$$

(a) 求 P 瞬时静止时 t 的值。

(c) 求 P 的加速度关于 t 的表达式。

✓ **答案** (a) $t = \frac{1}{2}$ s；(c) $a = -\frac{20}{(2t+1)^2}$ m s^{-2}。

解析 将位移对时间求导，得

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 5 \cdot \frac{2}{2t+1} - 5 = \frac{10}{2t+1} - 5$$

粒子瞬时静止时，$v = 0$，故

$$\frac{10}{2t+1} - 5 = 0$$

$$10 = 5(2t+1)$$

$$t = \frac{1}{2}$$

所得时间为正，且 $2t+1 = 2 > 0$，满足对数的定义条件。

再将速度对时间求导，得

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10 \cdot (-1)(2t+1)^{-2} \cdot 2$$

$$a = -\frac{20}{(2t+1)^2}$$

答：粒子在 $t = \frac{1}{2}$ s 时瞬时静止；加速度为 $a = -\frac{20}{(2t+1)^2}$，单位为 m s^{-2}。

6. [2023 · October/November 0606/23 Q6(a)]

提示：看对数真数的导数，再核对商法则中两项的次序。

A particle travels in a straight line. Its displacement, s metres, from the origin, at time t seconds, where $t > 2$, is given by $s = \ln(4t^2 - 5) - t$.

(a) Find expressions for the velocity, v ms^{-1}, and acceleration, a ms^{-2}, of the particle.

一粒子沿直线运动。在时刻 t（单位：s），其中 $t > 2$，粒子相对于原点的位移 s（单位：m）由下式给出：

$$s = \ln(4t^2 - 5) - t$$

(a) 求粒子的速度 v（单位：m s^{-1}）和加速度 a（单位：m s^{-2}）的表达式。

✓ **答案**　$v=\frac{8t}{4t^2-5}-1$　$\mathrm{m\ s^{-1}}$；$a=-\frac{32t^2+40}{(4t^2-5)^2}$　$\mathrm{m\ s^{-2}}$。

解析　由 $t>2$，得 $4t^2-5>0$。将位移对时间求导，得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{8t}{4t^2-5}-1$$

再由商的求导法则，得

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{8(4t^2-5)-8t\cdot 8t}{(4t^2-5)^2}$$

$$a=\frac{32t^2-40-64t^2}{(4t^2-5)^2}=-\frac{32t^2+40}{(4t^2-5)^2}$$

答：速度为 $v=\frac{8t}{4t^2-5}-1$，单位为 $\mathrm{m\ s^{-1}}$；加速度为 $a=-\frac{32t^2+40}{(4t^2-5)^2}$，单位为 $\mathrm{m\ s^{-2}}$。

7. [2024 · February/March 0606/12 Q6(b)]

提示：求加速度看乘积两因式，判断方向比速度各因式的符号。

In this question all distances are in metres and all times are in seconds.

(b) A different particle moves in a straight line such that its velocity, $v\ \mathrm{ms^{-1}}$, t seconds after leaving a fixed point O, is given by $v=t\left(t^2+5\right)^{\frac{1}{2}}$.

(i) Find the exact acceleration of the particle when $t=2$.

(ii) Explain why the particle does not change direction for $t>0$.

本题中，所有距离的单位均为 m，所有时间的单位均为 s。

(b) 另一粒子沿直线运动。粒子离开固定点 O 后，经过时间 t 时，其速度 v（单位：$\mathrm{m\ s^{-1}}$）由下式给出：

$$v=t(t^2+5)^{\frac{1}{2}}$$

(i) 求 $t=2$ 时粒子加速度的精确值。

(ii) 说明粒子在 $t>0$ 时不改变运动方向的原因。

✓ **答案**　(i) $\frac{13}{3}$　$\mathrm{m\ s^{-2}}$；(ii) 当 $t>0$ 时，速度始终为正，故粒子不改变方向。

解析　由乘积求导法则，得

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(t^2+5)^{\frac{1}{2}}+t\cdot\frac{1}{2}(t^2+5)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t$$

$$a=\sqrt{t^2+5}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+5}}=\frac{2t^2+5}{\sqrt{t^2+5}}$$

当 $t=2$ 时，

$$a=\frac{2\cdot 2^2+5}{\sqrt{2^2+5}}=\frac{13}{3}$$

当 $t>0$ 时，$t>0$ 且 $\sqrt{t^2+5}>0$，故

$$v=t\sqrt{t^2+5}>0$$

速度始终为正，因此粒子不改变方向。

答：$t=2$ 时的加速度为 $\frac{13}{3}$　$\mathrm{m\ s^{-2}}$；$t>0$ 时速度始终为正，粒子不改变方向。

题型 3　连续积分两次并由斜率、过点条件定常数

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **连续积分两次：**本例给出二阶导数，求曲线需积分_____次。记 y' 为斜率，y'' 为二阶导数。每次积分加一个_____，分别记为 C、D。

$$\left(\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\right)'=4\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y'=\frac{1}{4}\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+C$$

$$\left(\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\right)'=-4\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y=-\frac{1}{16}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+Cx+D$$

② **条件确定常数：**本例在给定点的斜率为 $\frac{3}{4}$，将横坐标代入导函数。给定点在曲线上，将两个坐标代入原函数。先定 C，再定 D。

斜率条件

$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\sin(4\cdot(3\frac{\pi}{16})-\frac{\pi}{4})+C$

过点条件

$\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{16}\cos(4\cdot(3\frac{\pi}{16})-\frac{\pi}{4})+C\cdot(3\frac{\pi}{16})+D$

③ **幂函数的积分：**被积式含一次式的幂，积分时须计入内层的系数。如下式，根式求导中的两个系数相消。一般式中 a、b、n 为常数，且 $a\neq0$、$n\neq-1$。

$$\left((2x+1)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot2=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=(2x+1)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$\int(ax+b)^n\,\mathrm{d}x=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$$

④ **驻点坐标求法：**曲线在某点有驻点，该点斜率为_____。已知驻点可定积分常数，求驻点则先求横坐标。含根式的方程先分离根式，再求解并代回原函数。

已知驻点 (p,q)

$f'(p)=0$

$f(p)=q$

求驻点坐标

$f'(x)=0$

$y=f(x)$

如 $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$，其中 $x>-\frac{1}{2}$。

$$1-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=0$$

$$\sqrt{2x+1}=1$$

$$2x+1=1$$

$$x=0$$

$$y=f(0)$$

⑤ **直线运动积分：**题给加速度 a，先积分得速度 v，再积分得位移 s。本题组中时间 t 以秒计，各量单位如下。分段给出加速度时，所用表达式须覆盖积分区间。

$$a \quad (\mathrm{m\ s^{-2}}), \quad v \quad (\mathrm{m\ s^{-1}}), \quad s \quad (\mathrm{m})$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$a = t^2 - 3 \quad (0 \le t \le 5)$$

$$v = \int (t^2 - 3)\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - 3t + C$$

$$s = \int \left(\frac{t^3}{3} - 3t + C\right)\mathrm{d}t = \frac{t^4}{12} - 3\frac{t^2}{2} + Ct + D$$

⑥ **静止时刻求法：**粒子静止时，速度为_____，令 $v = 0$ 求时间。负数的立方根为负，所得时间须满足题设范围。如 $v = (2t-3)^3 + 1$，且 $t \ge 0$。

$$(2t-3)^3 + 1 = 0$$

$$(2t-3)^3 = -1$$

$$2t - 3 = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$t = 1$$

填空：①两　②积分常数　③0　④0

点石成金　题目出现二阶导数及斜率、过点条件，或加速度及速度、位移条件时，先积分一次并用对应条件定常数。

例 1　[2024 · May/June 0606/23 Q8]

A curve is such that $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \cos\left(4x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Given that $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3}{4}$ at the point $\left(\dfrac{3\pi}{16}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ on the curve, find the equation of the curve.

一条曲线满足 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$。已知曲线上点 $\left(3\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{4}\right)$ 处有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{4}$，求曲线的方程。

解答　由二阶导数积分得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + C$。

将 $x = 3\frac{\pi}{16}$、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{4}$ 代入，得

$\frac{3}{4} = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$，

$C = \frac{1}{2}$。

再积分得

$y = -\frac{1}{16}\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{x}{2} + D$。

$\because$ 曲线经过点 $\left(3\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{16}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\frac{\pi}{32} + D$，

$D = 5\frac{\pi}{32}$。

答：曲线方程为 $y = -\frac{1}{16}\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{x}{2} + 5\frac{\pi}{32}$。

方法：先找斜率与过点条件，从二阶导数积分起手，再用斜率定常数。

辨析：斜率是导函数的值，纵坐标是原函数的值。

拓展：第一次积分的常数，再积分后成为一次项的系数。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/11 Q10]

提示：先用驻点的横坐标使导函数为零，再用纵坐标定另一常数。

A curve has equation $y = \mathrm{f}(x)$, where $\mathrm{f}''(x) = (2x+10)^{-\frac{1}{2}} - 2x$.

The curve has a stationary point at $\left(3, \frac{64}{3}\right)$.

Find the equation of the curve.

一条曲线的方程为 $y = f(x)$，其中
$f''(x) = (2x+10)^{-\frac{1}{2}} - 2x$。
曲线在点 $(3, \frac{64}{3})$ 处有一个驻点。
求曲线的方程。

✓ **答案**

$$y = \frac{(2x+10)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} + 5x - 6$$

解析 由二阶导数积分得
$f'(x) = (2x+10)^{\frac{1}{2}} - x^2 + C$。
$\because$ 曲线在 $(3, \frac{64}{3})$ 处有驻点，
$\therefore f'(3) = 0$，
$0 = 4 - 9 + C$，
$C = 5$。
再积分得
$f(x) = \frac{(2x+10)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} + 5x + D$。
由 $f(3) = \frac{64}{3}$，得
$\frac{64}{3} = \frac{64}{3} - 9 + 15 + D$，
$D = -6$。
答：曲线方程为 $y = \frac{(2x+10)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} + 5x - 6$。

2. [2024 · October/November 0606/11 Q8]

提示：看两次积分后的幂次，核对内层系数与新指数的乘积。

Given that $\mathrm{f}''(x) = (3x+5)^{-\frac{2}{3}}$, $\mathrm{f}'(1) = 6$, and $\mathrm{f}(1) = 20$, find an expression for $\mathrm{f}(x)$.

已知 $f''(x) = (3x+5)^{-\frac{2}{3}}$，$f'(1) = 6$，且 $f(1) = 20$，求 $f(x)$ 的表达式。

✓ **答案**

$$f(x) = \frac{(3x+5)^{\frac{4}{3}}}{4} + 4x + 12$$

解析 由二阶导数积分得
$f'(x) = (3x+5)^{\frac{1}{3}} + C$。
由 $f'(1) = 6$，得
$6 = 8^{\frac{1}{3}} + C = 2 + C$，
$C = 4$。
再积分得
$f(x) = \frac{(3x+5)^{\frac{4}{3}}}{4} + 4x + D$。
由 $f(1) = 20$，得
$20 = \frac{8^{\frac{4}{3}}}{4} + 4 + D = 8 + D$，
$D = 12$。
答：$f(x) = \frac{(3x+5)^{\frac{4}{3}}}{4} + 4x + 12$。

3. [2025 · October/November 0606/21 Q8(a)]
提示：静止条件对应速度式，解出时间后核对范围与立方根符号。

In this question, the units are metres and seconds.

A particle P is travelling in a straight line through a fixed point O.
At time t its acceleration, a, is given by $a = (2t-3)^2$, where $t \geqslant 0$.

When $t = 3$, P has a velocity of 6.

(a) (i) Find an expression for the velocity, v, of P at time t.

(ii) Find the time when P is at rest.

When $t = \frac{5}{2}$, the displacement of P from O is 4.

(iii) Find the displacement of P from O when $t = 3$.

本题中的长度和时间单位分别为米和秒。
粒子 P 沿一条经过固定点 O 的直线运动。时刻 t 的加速度为 a，其中 $a = (2t-3)^2$，$t \geq 0$。
当 $t = 3$ 时，P 的速度为 6。
(a)(i) 求 P 在时刻 t 的速度 v 的表达式。
(ii) 求 P 静止的时刻。
当 $t = \frac{5}{2}$ 时，P 相对于 O 的位移为 4。
(iii) 求 $t = 3$ 时 P 相对于 O 的位移。

✓ **答案** (a)(i) $v = \frac{(2t-3)^3}{6} + \frac{3}{2}$；(ii) $t = \frac{3-\sqrt[3]{9}}{2} \approx 0.460$ s；(iii) $\frac{293}{48}$ m。

解析 由加速度积分得
$v = \frac{(2t-3)^3}{6} + C$。
当 $t = 3$ 时，$v = 6$，故
$6 = \frac{27}{6} + C$，
$C = \frac{3}{2}$。
因此
$v = \frac{(2t-3)^3}{6} + \frac{3}{2}$。
粒子静止时，$v = 0$，故
$\frac{(2t-3)^3}{6} + \frac{3}{2} = 0$，
$(2t-3)^3 = -9$，
$2t - 3 = -\sqrt[3]{9}$，
$t = \frac{3-\sqrt[3]{9}}{2} \approx 0.460$。
该时间满足 $t \geq 0$。
由速度再积分得位移
$s = \frac{(2t-3)^4}{48} + 3\frac{t}{2} + D$。
当 $t = \frac{5}{2}$ 时，$s = 4$，故
$4 = \frac{2^4}{48} + \frac{15}{4} + D = \frac{49}{12} + D$，
$D = -\frac{1}{12}$。
当 $t = 3$ 时，
$s = \frac{3^4}{48} + \frac{9}{2} - \frac{1}{12} = \frac{293}{48}$。
答：(a)(i) $v = \frac{(2t-3)^3}{6} + \frac{3}{2}$；(ii) 静止时刻为 $t \approx 0.460$ s；(iii) 相对于 O 的位移为 $\frac{293}{48}$ m。

4. [2023 · February/March 0606/12 Q6]
提示：两次积分都核对内层系数，再将斜率条件与过点条件分开使用。

Given that $\mathrm{f}''(x) = (5x+2)^{-\frac{2}{5}}$, $\mathrm{f}'(6) = \frac{17}{3}$ and $\mathrm{f}(6) = \frac{26}{3}$, find an expression for $\mathrm{f}(x)$.

已知 $f''(x) = (5x+2)^{-\frac{2}{5}}$，$f'(6) = \frac{17}{3}$，且 $f(6) = \frac{26}{3}$，求 $f(x)$ 的表达式。

✓ **答案**

$$f(x)=\frac{1}{24}(5x+2)^{\frac{8}{5}}+3x-20$$

解析 由二阶导数积分得
$f'(x)=\frac{1}{3}(5x+2)^{\frac{3}{5}}+C$。
由 $f'(6)=\frac{17}{3}$，得
$\frac{17}{3}=\frac{1}{3}\cdot 32^{\frac{3}{5}}+C=\frac{8}{3}+C$，
$C=3$。
再积分得
$f(x)=\frac{1}{24}(5x+2)^{\frac{8}{5}}+3x+D$。
由 $f(6)=\frac{26}{3}$，得
$\frac{26}{3}=\frac{1}{24}\cdot 32^{\frac{8}{5}}+18+D=\frac{86}{3}+D$，
$D=-20$。
答：$f(x)=\frac{1}{24}(5x+2)^{\frac{8}{5}}+3x-20$。

5. [2025 · October/November 0606/12 Q9(a)]
提示：令导函数为零后分离根式，核对定义域，再回原函数求纵坐标。

A curve $y=\mathrm{f}(x)$ is such that $\mathrm{f}''(x)=(2x+5)^{-\frac{3}{2}}$.

The curve has gradient $\frac{2}{3}$ at the point $(2, 2)$.

(a) Find the coordinates of the stationary point on the curve.

曲线 $y=f(x)$ 满足
$f''(x)=(2x+5)^{-\frac{3}{2}}$。
曲线在点 $(2,2)$ 处的斜率为 $\frac{2}{3}$。
(a) 求曲线上驻点的坐标。

✓ **答案**

$$(-2,0)$$

解析 由二阶导数积分得
$f'(x)=-(2x+5)^{-\frac{1}{2}}+C$。
曲线在点 $(2,2)$ 处的斜率为 $\frac{2}{3}$，故
$\frac{2}{3}=-9^{-\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{3}+C$，
$C=1$。
因此
$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$。
再积分得
$f(x)=x-\sqrt{2x+5}+D$。
由 $f(2)=2$，得
$2=2-3+D$，
$D=3$。
因此
$f(x)=x-\sqrt{2x+5}+3$。
驻点处 $f'(x)=0$，故
$1-\frac{1}{\sqrt{2x+5}}=0$，
$\sqrt{2x+5}=1$，
$2x+5=1$，

$x=-2$。
该值满足 $2x+5>0$，代入原函数得
$y=-2-\sqrt{1}+3=0$。
答：驻点坐标为 $(-2,0)$。

题型 4　由导数值与因子、余数条件求系数

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **导数条件列式：**对下式逐项求导，记 $p'(x)$ 为导函数。

$$p(x)=ax^3+11x^2+bx+c$$

系数乘原幂次，幂次减一；常数项的导数为_____。

$$p'(x)=3ax^2+22x+b$$

求某处的导数值时，将该处的 x 值代入导函数。
代入 $x=0$：
$p'(0)=3a\times0^2+22\times0+b=b$

代入 $x=-1$：
$p'(-1)=3a\times(-1)^2+22\times(-1)+b=3a-22+b$

② **因子条件列式：**见到一次因式，先令该因式等于零。由因子定理，所得的 x 值使多项式值为_____。
若 $x+3$ 是因式：

$$x+3=0,\quad x=-3$$

$p(-3)=0$

若 $2x-3$ 是因式：

$$2x-3=0,\quad x=\frac{3}{2}$$

$p\left(\frac{3}{2}\right)=0$

被 x 整除时，取 $x=0$。

$$p(0)=0$$

③ **余数条件列式：**除以 $x-1$ 的余数是 16，先令除式等于零。

$$x-1=0,\quad x=1$$

由余数定理，此时多项式值等于_____。

$$p(1)=16$$

若除以 $2x+1$ 的余数为 r，其中 r 表示余数，则

$$2x+1=0,\quad x=-\frac{1}{2}$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right)=r$$

④ **导式条件列式：**条件涉及 $p'(x)$ 时，对导函数使用相同定理。两类条件分别写成下式。
若 $p'(x)$ 除以 $x-1$ 的余数为 r：
$p'(1)=r$

若 $x+3$ 是 $p(x)$ 与 $p'(x)$ 的共同因式：

$$p(-3)=0$$

$$p'(-3)=0$$

共同因式须分别对原式与导式写出_____个方程。

⑤ **分式方程去分母：**代入分数时，先算乘方，再整理分母。

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},\quad \left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

以 u,v 表示待求系数，如有下式，两边同乘各分母的最小公倍数。

$\frac{u}{8}+\frac{v}{4}=\frac{3}{2}\xrightarrow{\text{两边乘 }8} u+2v=12$

两边乘_____后，分母全部消去。

⑥ **联立方程消元：**两个方程含有相同的 u 项时，两式相减消去 u。

$$u+2v=12$$

$$u+v=7$$

$$(u+2v)-(u+v)=12-7$$

$$v=5$$

将所得的 v 值代回任一原方程，求出 u。

$$u=7-5=2$$

填空：①0　②0　③余数　④2　⑤8

点石成金　题目出现导数值、因子或除法余数，要求多项式系数时，先把各条件写成函数值或导数值方程。

例 1　[2024 · October/November 0606/11 Q6]

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x)=ax^3+11x^2+bx+c$, where a, b and c are integers.
It is given that $\mathrm{p}'(0)=12$.
It is also given that $x+3$ is a factor of p.
When p is divided by $x-1$ the remainder is 16.

Find the values of a, b and c.

多项式 p 满足
$p(x)=ax^3+11x^2+bx+c$，
其中 a,b,c 均为整数。
已知 $p'(0)=12$。
另已知 $x+3$ 是 p 的一个因式。
p 除以 $x-1$ 的余数为 16。
求 a,b,c 的值。

解答　对多项式逐项求导，得

$$p'(x)=3ax^2+22x+b$$

由题意，

$$p'(0)=b=12$$

由 $x+3$ 是 $p(x)$ 的因式，得

$$p(-3)=0$$

$$-27a+99-3b+c=0$$

代入 $b=12$，得

$$-27a+c=-63$$

方法：先看零点处的导数条件，求导后从不含自变量的项起手。

辨析：因式的根是代入的自变量值，余数是代入后的多项式值。

拓展：一次因式同时整除原式与导式时，对应的根是重根。

由除以 $x-1$ 的余数为 16，得

$$p(1)=16$$

$$a+11+b+c=16$$

代入 $b=12$，得

$$a+c=-7$$

两式相减，得

$$(a+c)-(-27a+c)=-7-(-63)$$

$$28a=56$$

$$a=2$$

代回得

$$c=-7-2=-9$$

答：$a=2, b=12, c=-9$。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/12 Q5(a)]

提示：先看负一处的导数条件，再将因式的根代入原式。

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x)=3x^3-7x^2+ax+b$, where a and b are integers.

It is given that $\mathrm{p}'(-1)=21$ and that $x-2$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$.

(a) Find the values of a and b.

多项式 p 满足
$p(x)=3x^3-7x^2+ax+b$，
其中 a, b 均为整数。
已知 $p'(-1)=21$，且 $x-2$ 是 $p(x)$ 的一个因式。
(a) 求 a, b 的值。

✓ **答案**

$$a=-2, b=8$$

解析 对多项式逐项求导，得

$$p'(x)=9x^2-14x+a$$

由题意，

$$p'(-1)=21$$

$$9\times(-1)^2-14\times(-1)+a=21$$

$$23+a=21$$

$$a=-2$$

由 $x-2$ 是 $p(x)$ 的因式，得

$$p(2)=0$$

$$3\times 2^3-7\times 2^2+2a+b=0$$

代入 $a=-2$，得

$$24-28-4+b=0$$

$$b=8$$

答：$a=-2, b=8$。

2. [2024 · October/November 0606/13 Q5(b)]
提示：比较两个原式方程中 c 的系数，再看导式余数条件。

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x)=ax^3+bx^2-19x+c$, where a, b and c are integers. It is given that $x+2$ is a factor of $\mathrm{p}(x)$. When $\mathrm{p}(x)$ is divided by $x+1$ the remainder is 20.

(a) Show that $7a-3b=39$.

It is also given that when $\mathrm{p}'(x)$ is divided by $x-1$ the remainder is 1.

(b) Find the values of a, b and c.

多项式 p 满足
$p(x)=ax^3+bx^2-19x+c$,
其中 a, b, c 均为整数。已知 $x+2$ 是 $p(x)$ 的一个因式。$p(x)$ 除以 $x+1$ 的余数为 20。
(a) 证明
$7a-3b=39$。
另已知 $p'(x)$ 除以 $x-1$ 的余数为 1。
(b) 求 a, b, c 的值。

✓ **答案** $7a-3b=39$；$a=6, b=1, c=6$

解析 由 $x+2$ 是 $p(x)$ 的因式，得

$$p(-2)=0$$

$$-8a+4b+38+c=0$$

$$-8a+4b+c=-38$$

由除以 $x+1$ 的余数为 20，得

$$p(-1)=20$$

$$-a+b+19+c=20$$

$$-a+b+c=1$$

两式相减，得

$$(-a+b+c)-(-8a+4b+c)=1-(-38)$$

$$7a-3b=39$$

所证关系成立。对多项式求导，得

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx - 19$$

由 $p'(x)$ 除以 $x-1$ 的余数为 1，得

$$p'(1) = 1$$

$$3a + 2b - 19 = 1$$

$$3a + 2b = 20$$

将前一关系两边乘 2，后一关系两边乘 3，得

$$14a - 6b = 78$$

$$9a + 6b = 60$$

两式相加，得

$$23a = 138$$

$$a = 6$$

代回得

$$b = \frac{20 - 3 \times 6}{2} = 1$$

$$c = 1 + a - b = 1 + 6 - 1 = 6$$

答：$a = 6, b = 1, c = 6$。

3. [2023 · October/November 0606/12 Q6(a)]

提示：先看零点处的导数条件，分数代入后比较各项分母。

The polynomial $\mathrm{p}(x)$ is such that $\mathrm{p}(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$, where a, b and c are integers. It is given that $\mathrm{p}'(0) = 12$. It is also given that $\mathrm{p}(x)$ has a factor of $3x-1$ and a remainder of 95 when divided by $x-2$.

(a) Find the values of a, b and c.

多项式 $p(x)$ 满足
$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$，
其中 a, b, c 均为整数。已知 $p'(0) = 12$。另已知 $3x - 1$ 是 $p(x)$ 的一个因式，且 $p(x)$ 除以 $x - 2$ 的余数为 95。
(a) 求 a, b, c 的值。

✓ **答案**

$$a = 6, b = 7, c = 12$$

解析 对多项式逐项求导，得

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

由题意，

$$p'(0) = c = 12$$

由 $3x-1$ 是 $p(x)$ 的因式，令

$$3x-1=0$$

$$x=\frac{1}{3}$$

故

$$p\left(\frac{1}{3}\right)=0$$

$$\frac{a}{27}+\frac{b}{9}+\frac{c}{3}-5=0$$

代入 $c=12$，得

$$\frac{a}{27}+\frac{b}{9}+4-5=0$$

$$\frac{a}{27}+\frac{b}{9}=1$$

两边乘 27，得

$$a+3b=27$$

由除以 $x-2$ 的余数为 95，得

$$p(2)=95$$

$$8a+4b+2c-5=95$$

代入 $c=12$，得

$$8a+4b=76$$

$$2a+b=19$$

将后一关系两边乘 3，再减去前一关系，得

$$3(2a+b)-(a+3b)=57-27$$

$$5a=30$$

$$a=6$$

代回得

$$b=19-2\times 6=7$$

答：$a=6, b=7, c=12$。

4. [2024 · February/March 0606/12 Q5(a)]

提示：分别看原式与导式，比较代入共同因式的根后所含未知数。

The polynomial p is such that $\mathrm{p}(x)=5x^3+ax^2+39x+b$, where a and b are constants.

(a) Given that $x+3$ is a factor of both $\mathrm{p}(x)$ and $\mathrm{p}'(x)$, find the values of a and b.

多项式 p 满足
$p(x)=5x^3+ax^2+39x+b$,
其中 a,b 均为常数。
(a) 已知 $x+3$ 是 $p(x)$ 和 $p'(x)$ 的共同因式，求 a,b 的值。

✓ **答案**

$$a=29, b=-9$$

解析 对多项式逐项求导，得

$$p'(x)=15x^2+2ax+39$$

由 $x+3$ 是 $p'(x)$ 的因式，得

$$p'(-3)=0$$

$$15\times(-3)^2+2a\times(-3)+39=0$$

$$174-6a=0$$

$$a=29$$

由 $x+3$ 也是 $p(x)$ 的因式，得

$$p(-3)=0$$

$$5\times(-3)^3+a\times(-3)^2+39\times(-3)+b=0$$

代入 $a=29$，得

$$-135+261-117+b=0$$

$$9+b=0$$

$$b=-9$$

答：$a=29, b=-9$。

5. [2023 · October/November 0606/11 Q2(a)]
提示：先看整除条件，再按对除式的根及其奇偶次幂的符号。

The polynomial $\mathrm{P}(x)$ is such that $\mathrm{P}(x)=ax^3-11x^2+bx+c$, where a, b and c are integers. $\mathrm{P}(x)$ is divisible by x and has a remainder of $\frac{3}{2}$ when divided by $2x+1$. It is also given that $\mathrm{P}'(2)=18$.

(a) Find the values of a, b and c.

多项式 $P(x)$ 满足
$P(x)=ax^3-11x^2+bx+c$,
其中 a,b,c 均为整数。$P(x)$ 能被 x 整除，且除以 $2x+1$ 的余数为 $\frac{3}{2}$。另已知 $P'(2)=18$。
(a) 求 a,b,c 的值。

✓ **答案**

$$a=6, b=-10, c=0$$

解析 由 $P(x)$ 能被 x 整除，得

$$P(0)=c=0$$

由除以 $2x+1$ 的余数为 $\frac{3}{2}$，令

$$2x+1=0$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

故

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

$$-\frac{a}{8}-\frac{11}{4}-\frac{b}{2}=\frac{3}{2}$$

两边乘 8，得

$$-a-22-4b=12$$

$$a+4b=-34$$

对多项式求导，得

$$P'(x)=3ax^2-22x+b$$

由题意，

$$P'(2)=18$$

$$12a-44+b=18$$

$$12a+b=62$$

将后一关系两边乘 4，再减去前一关系，得

$$4(12a+b)-(a+4b)=248-(-34)$$

$$47a=282$$

$$a=6$$

代回得

$$b=62-12\times 6=-10$$

答：$a=6,b=-10,c=0$。

题型 5　令三角导数或速度为零并按区间取根

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **位移逐次求导：**题中位移 s 以米计，时间 t 以秒计。位移求导得_____（米每秒），再求导得_____（米每二次方秒）。每次对三角函数求导，还要乘内部 $2t$ 的导数 2。

$$s=4t-4\cos 2t+4$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=4-4(-\sin 2t)\times 2=4+8\sin 2t$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=8\cos 2t\times 2=16\cos 2t$$

② **倍角区间换元：**加速度为零，先令所得表达式等于零。用 θ 表示三角函数中的角，原区间也乘相同倍数。

$$a=0\quad\Rightarrow\quad 16\cos 2t=0\quad\Rightarrow\quad \cos 2t=0$$

$$\theta=2t$$

$$0\le t\le\pi\quad\Rightarrow\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

③ **按区间取根：**在下面的角度区间内，正弦、余弦的零点分别如下。求出角后，除以原来的倍数。求离开原点后首次满足条件的时刻，舍去零，取最小正根。

$$0\le\theta\le 2\pi$$

正弦为零：

$$\sin\theta=0$$

$\theta=0,\pi,2\pi$

余弦为零：

$$\cos\theta=0$$

$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

$$\theta=2t\quad\Rightarrow\quad t=\frac{\theta}{2}$$

④ **正切幂式求导：**以正切函数的三次幂为例。先对三次幂求导，再乘内部正切函数的导数。将余弦的倒数改写为正切式。

$$y=(\tan 2x)^3$$

$$\frac{\mathrm{d}(\tan 2x)}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{(\cos 2x)^2}=2(1+(\tan 2x)^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3(\tan 2x)^2\times 2(1+(\tan 2x)^2)=6(\tan 2x)^2(1+(\tan 2x)^2)$$

⑤ **乘积为零取根：**在上式导数存在处，括号内的因式恒为_____数。乘积为零，便有正切因式为零。用 k 表示整数，写出全部根，再按题给区间选取。

$$1+(\tan 2x)^2\ge 1>0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\quad\Rightarrow\quad(\tan 2x)^2=0\quad\Rightarrow\quad\tan 2x=0$$

$$2x=k\pi\quad\Rightarrow\quad x=\frac{k\pi}{2}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

⑥ **正弦余弦同现：**例如下式加速度为零时，先移项。余弦为零时原式不为零，故可除以余弦。正切为负，首个正角在第二象限。

$$a=2\cos 2t+4\sin 2t=0$$

$$4\sin 2t=-2\cos 2t\quad\Rightarrow\quad\tan 2t=-\frac{1}{2}$$

$$2t=\pi-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad t=\frac{1}{2}\left(\pi-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

← 填空：①速度　②加速度　③正

点石成金　题目出现三角函数形式的导数、速度或加速度为零时，先列零值方程，再按角的区间取根。

例 1　[2024 · May/June 0606/13 Q9(d)]

In this question, all lengths are in metres, and time, t, is in seconds.

A particle P moves in a straight line such that, t seconds after leaving a fixed point O, its displacement, s, is given by $s=4t-4\cos 2t+4$.

(a) Find the velocity, v, of P at time t.

(c) Find the acceleration of P at time t.

(d) Find the times when the acceleration of P is zero for $0\leqslant t\leqslant\pi$. Give your answers in terms of π.

本题中，所有长度均以米为单位，时间 t 以秒为单位。
质点 P 沿直线运动，离开固定点 O 后 t 秒时，它的位移 s 为
$s=4t-4\cos 2t+4$。
(a) 求 P 在时刻 t 的速度 v。
(c) 求 P 在时刻 t 的加速度。
(d) 求在以下范围内 P 的加速度为零的各个时刻，答案用含 π 的式子表示。
$0\leq t\leq\pi$。

解答　速度是位移对时间的导数，
$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=4-4(-\sin 2t)\times 2=4+8\sin 2t$。
加速度是速度对时间的导数，
$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=8\cos 2t\times 2=16\cos 2t$。
令加速度为零，得
$16\cos 2t=0$，
$\cos 2t=0$。
由题给时间范围，
$0\leq t\leq\pi\quad\Rightarrow\quad 0\leq 2t\leq 2\pi$。
在此范围内，
$2t=\frac{\pi}{2}$　或　$2t=\frac{3\pi}{2}$，
$t=\frac{\pi}{4}$　或　$t=\frac{3\pi}{4}$。
答：(a) $v=4+8\sin 2t$，单位为 m s^{-1}；(c) $a=16\cos 2t$，单位为 m s^{-2}；(d) 所求时刻为 $\frac{\pi}{4}$ 秒和 $\frac{3\pi}{4}$ 秒。

方法：先看零值条件与时间范围，从位移连续求导两次，再换算角的范围。

! 辨析：速度为零是位移图像斜率为零，加速度为零是速度图像斜率为零。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/11 Q10(a)]
← 提示：看离开原点后的限定，比较正弦零点对应的正时刻。

In this question, all distances are in metres and time, t, is in seconds.

A particle P is at a fixed point O at time $t=0$.
The velocity, v, of P is given by $v=3\sin 2t$ for $t\geqslant 0$.

(a) Find the exact value of t for which the velocity is zero for the first time after P leaves O.

本题中，所有距离均以米为单位，时间 t 以秒为单位。
当 $t=0$ 时，质点 P 位于固定点 O。质点 P 的速度 v 为

$v = 3\sin 2t \quad (t \geq 0)$。
(a) 求 P 离开 O 后速度首次为零时 t 的精确值。

✓ **答案** $t = \frac{\pi}{2}$ 秒。

解析 令速度为零，得
$3\sin 2t = 0$，
$\sin 2t = 0$。
由 $t \geq 0$，得
$2t \geq 0$。
非负范围内，正弦为零的角依次为
$2t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$。
离开 O 后首次速度为零，须取最小正根，
$2t = \pi$，
$t = \frac{\pi}{2}$。
答：所求时间的精确值为 $\frac{\pi}{2}$ 秒。

2. [2026 · May/June 0606/21 Q5(b)]
提示：比较各因式能否为零，再看角的范围及端点是否包含。

It is given that $y = \tan^3 5x$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in terms of $\tan 5x$.

(b) Hence solve the equation $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ for $0 \leqslant x < \dfrac{4\pi}{5}$.

已知
$y = (\tan 5x)^3$。
(a) 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，用 $\tan 5x$ 表示。
(b) 由此解方程
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，
其中
$0 \leq x < \frac{4\pi}{5}$。

✓ **答案** (a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 15(\tan 5x)^2(1 + (\tan 5x)^2)$；(b) $x = 0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}$。

解析 对三次幂求导，再乘内部正切函数的导数，
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3(\tan 5x)^2 \times \frac{5}{(\cos 5x)^2}$，
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 15(\tan 5x)^2(1 + (\tan 5x)^2)$。
由此，令导数为零，得
$15(\tan 5x)^2(1 + (\tan 5x)^2) = 0$。
在导数存在处，
$1 + (\tan 5x)^2 \geq 1 > 0$，
故
$(\tan 5x)^2 = 0$，
$\tan 5x = 0$。
由题给范围，
$0 \leq x < \frac{4\pi}{5} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 5x < 4\pi$。
在此范围内，
$5x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$，
$x = 0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}$。
这些值均使原函数及其导数有定义。
答：(a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 15(\tan 5x)^2(1 + (\tan 5x)^2)$；(b) $x = 0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}$。

3. [2023 · October/November 0606/21 Q7(c)]
提示：先查余弦为零是否满足原式，再按正切符号选取首个正角。

A particle moves in a straight line. At time t seconds after passing through a fixed point O, its velocity, $v\,\text{ms}^{-1}$, is given by $v = 10\sin 2t - 6\cos 2t$.

(a) Find an expression for the acceleration of the particle.

(c) Find the first time at which the acceleration is zero.

一质点沿直线运动。经过固定点 O 后 t 秒时，它的速度 v（单位为 m s^{-1}）为 $v = 10\sin 2t - 6\cos 2t$。
(a) 求该质点加速度的表达式。
(c) 求加速度首次为零的时刻。

✓ **答案** (a) $a = 20\cos 2t + 12\sin 2t$，单位为 m s^{-2}；(c) $t = 1.06$ 秒。

解析 加速度是速度对时间的导数，

$a = \frac{dv}{dt} = 10\cos 2t \times 2 - 6(-\sin 2t) \times 2$，

$a = 20\cos 2t + 12\sin 2t$。

令加速度为零，得

$20\cos 2t + 12\sin 2t = 0$。

若余弦为零，则

$\cos 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin 2t = \pm 1$，

此时加速度不为零，故所求时刻满足

$\cos 2t \neq 0$。

移项并除以余弦，得

$12\sin 2t = -20\cos 2t$，

$\tan 2t = -\frac{5}{3}$。

正切为负，首个符合条件的正角在第二象限，

$2t = \pi - \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$，

$t = \frac{1}{2}\left(\pi - \arctan\left(\frac{5}{3}\right)\right) \approx 1.06$。

答：(a) $a = 20\cos 2t + 12\sin 2t$，单位为 m s^{-2}；(c) 加速度首次为零的时刻为 $t = 1.06$ 秒。

题型 6 用商法则与链式法则求导并通分

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **复合幂式求导：**母例分子含三分之一次幂。撇号表示对 x 求导，n 为常数。用链式法则求导，外层导数还要乘_____。

$$t = 3x^2 - 5, \quad t' = 3 \cdot 2x = 6x$$

$$(t^n)' = nt^{n-1}t', \quad t > 0$$

$\left(t^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}} \cdot 6x = \frac{2x}{t^{\frac{2}{3}}}$，$t \neq 0$

$\left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x = \frac{3x}{\sqrt{t}}$，$t > 0$

② **商式分母平方：**母例的分子记为 u，分母记为 v。用商法则求导，分母变为_____；分子按下式排列。

$$u = (3x^2 - 5)^{\frac{1}{3}}, \quad v = x + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

③ **分子通分化简：**代入商法则后，分子出现分数。分子、分母同乘 $t^{\frac{2}{3}}$，消去分子中的分母。

$$\left(t^{\frac{1}{3}}\right)t^{\frac{2}{3}} = t^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = t$$

$$\frac{\frac{2x(x+4)}{t^{\frac{2}{3}}}-t^{\frac{1}{3}}}{(x+4)^2}=\frac{2x(x+4)-t}{t^{\frac{2}{3}}(x+4)^2}$$

$$-(3x^2-5)=-3x^2+5$$

④ **指数对数求导：**分子含指数或对数时，仍须乘内层导数。

ln 表示以 e 为底的自然对数，真数须为_____。

$(e^t)'=t'e^t$　　$(\ln t)'=\frac{t'}{t},\quad t>0$

$\left(e^{3x^2-5}\right)'=6xe^{3x^2-5}$　　$(\ln(3x^2-5))'=\frac{6x}{3x^2-5}$

⑤ **商外幂次求导：**分式外还有幂，先对外层求导，再求分式的导数。以下式为例。

$$w=\frac{x^2-2}{x^2+2},\quad y=w^2$$

$$w'=\frac{2x(x^2+2)-(x^2-2)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{8x}{(x^2+2)^2}$$

$$y'=2ww'=2\cdot\frac{x^2-2}{x^2+2}\cdot\frac{8x}{(x^2+2)^2}=\frac{16x(x^2-2)}{(x^2+2)^3}$$

⑥ **指定点处代入：**求某点的导数，先求导，再代入该点的 x 值。答案要求 $\ln p$，把对数的系数写成指数；p 为常数。例如，对下式求 $x=0$ 时的导数。

$$y=\frac{\ln(x^2+4)}{x+2}$$

$$y'(0)=\frac{(0+2)\cdot\frac{2\cdot 0}{0^2+4}-\ln(0^2+4)}{(0+2)^2}=-\frac{1}{4}\ln 4=\ln\left(4^{-\frac{1}{4}}\right)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

填空：①内层函数的导数　②v^2　③正数

点石成金　题目出现分子含复合函数的分式，要求求导并写成指定分式时，先分别求分子、分母的导数。

例 1　[2024 · May/June 0606/12 Q8(a)]

A curve has equation $y=\dfrac{(3x^2-5)^{\frac{1}{3}}}{x+4}$.

(a) Show that $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ can be written in the form $\dfrac{Ax^2+Bx+C}{(3x^2-5)^{\frac{2}{3}}(x+4)^2}$, where A, B and C are integers.

一条曲线的方程为

$$y=\frac{(3x^2-5)^{\frac{1}{3}}}{x+4}$$

(a) 证明 $\frac{dy}{dx}$ 可写成以下形式，其中 A、B、C 为整数：

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{(3x^2-5)^{\frac{2}{3}}(x+4)^2}$$

解答　由链式法则得

$$\left((3x^2-5)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}(3x^2-5)^{-\frac{2}{3}}\cdot 6x=\frac{2x}{(3x^2-5)^{\frac{2}{3}}}$$

方法：先看分子的三分之一次幂，从内层求导起手，再套商法则。

由商法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+4)\cdot\frac{2x}{(3x^2-5)^{\frac{2}{3}}}-(3x^2-5)^{\frac{1}{3}}}{(x+4)^2}$$

通分并展开分子，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x(x+4)-(3x^2-5)}{(3x^2-5)^{\frac{2}{3}}(x+4)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^2+8x+5}{(3x^2-5)^{\frac{2}{3}}(x+4)^2}$$

上述导式适用于 $x\neq -4$ 且 $3x^2-5\neq 0$。答：$A=-1$，$B=8$，$C=5$。

! 辨析：链式法则是各层导数相乘，商法则是两项乘积相减后除以分母平方。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/11 Q6(a)]

提示：先看分式外的四次幂，再合并内外求导产生的分母幂次。

A curve has equation $y=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4$.

(a) Show that $\dfrac{dy}{dx}$ can be written as $\dfrac{Ax\left(x^2-1\right)^3}{\left(x^2+1\right)^5}$, where A is a positive integer to be found.

一条曲线的方程为

$$y=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4$$

(a) 证明 $\frac{dy}{dx}$ 可写成以下形式，并求出正整数 A：

$$\frac{Ax(x^2-1)^3}{(x^2+1)^5}$$

✓ **答案**

$$A=16$$

解析 设

$$u=\frac{x^2-1}{x^2+1},\quad y=u^4$$

由商法则得

$$u'=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$u'=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

由链式法则得

$$\frac{dy}{dx}=4u^3u'$$

$$\frac{dy}{dx}=4\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3\cdot\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{16x(x^2-1)^3}{(x^2+1)^5}$$

答：$A=16$。

2. [2024 · October/November 0606/11 Q9(a)]

提示：先看指数中一次项的系数，提取指数公因式后核对减号。

The equation of a curve is $y=\dfrac{e^{-3x+2}}{x+1}$ where $x<-1$.

(a) Show that $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{-3x+2}}{(x+1)^2}(Ax+B)$ where A and B are integers to be found.

一条曲线的方程为

$$y=\frac{e^{-3x+2}}{x+1},\quad x<-1$$

(a) 证明 $\frac{dy}{dx}$ 可写成以下形式，并求出整数 A、B：

$$\frac{e^{-3x+2}}{(x+1)^2}(Ax+B)$$

✓ **答案** $A=-3$，$B=-4$

解析 由链式法则得

$$\left(e^{-3x+2}\right)'=-3e^{-3x+2}$$

由商法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+1)\cdot(-3e^{-3x+2})-e^{-3x+2}}{(x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{-3x+2}}{(x+1)^2}(-3(x+1)-1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{-3x+2}}{(x+1)^2}(-3x-4),\quad x<-1$$

答：$A=-3$，$B=-4$。

3. [2024 · May/June 0606/11 Q12(a)]

提示：先看对数真数的内层导数，再找通分后分子的公因式。

(a) It is given that $y=\dfrac{\ln 3x}{x^2}$ for $x>0$.

Find $\dfrac{dy}{dx}$. Give your answer in the form $\dfrac{A+B\ln 3x}{x^3}$, where A and B are integers.

(a) 已知

$$y=\frac{\ln(3x)}{x^2},\quad x>0$$

求 $\frac{dy}{dx}$，答案写成以下形式，其中 A、B 为整数：

$$\frac{A+B\ln(3x)}{x^3}$$

✓ **答案** $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2\ln(3x)}{x^3}$；$A=1$，$B=-2$

解析 由链式法则得

$$(\ln(3x))'=\frac{3}{3x}=\frac{1}{x}$$

又

$$(x^2)'=2x$$

由商法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2\cdot\frac{1}{x}-\ln(3x)\cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-2x\ln(3x)}{x^4}=\frac{1-2\ln(3x)}{x^3},\quad x>0$$

答：$A=1$，$B=-2$，所求导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-2\ln(3x)}{x^3}$$

4. [2025 · May/June 0606/12 Q8(a)]

提示：先求导再代入指定点，把对数前的系数移到真数的指数上。

It is given that $y=\dfrac{\ln(3x^2+16)}{x+2}$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ when $x=0$.

Give your answer in the form $\ln p$, where p is a constant.

已知

$$y=\frac{\ln(3x^2+16)}{x+2}$$

(a) 求 $x=0$ 时的 $\frac{dy}{dx}$。答案写成 $\ln p$ 的形式，其中 p 为常数。

✓ **答案**

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

解析 由链式法则得

$$(\ln(3x^2+16))'=\frac{6x}{3x^2+16}$$

由商法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+2)\cdot\frac{6x}{3x^2+16}-\ln(3x^2+16)}{(x+2)^2}$$

当 $x=0$ 时，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cdot\frac{0}{16}-\ln 16}{2^2}=-\frac{1}{4}\ln 16$$

$$-\frac{1}{4}\ln 16 = \ln\left(16^{-\frac{1}{4}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

答：$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$，其中 $p = \frac{1}{2}$。

5. [2025 · February/March 0606/22 Q6(a)]

提示：看分子中的小分母，通分时核对两项各自所乘的因式。

It is given that $y = \dfrac{\ln\left(2x^2+1\right)}{x+2}$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

已知

$y = \dfrac{\ln(2x^2+1)}{x+2}$

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$。

✓ **答案**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x(x+2) - (2x^2+1)\ln(2x^2+1)}{(2x^2+1)(x+2)^2}$$

解析 由链式法则得

$$(\ln(2x^2+1))' = \frac{4x}{2x^2+1}$$

由商法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)\cdot\frac{4x}{2x^2+1} - \ln(2x^2+1)}{(x+2)^2}$$

分子、分母同乘 $2x^2+1$，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x(x+2) - (2x^2+1)\ln(2x^2+1)}{(2x^2+1)(x+2)^2}$$

因 $2x^2+1>0$，上述导式适用于 $x \neq -2$。答：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x(x+2) - (2x^2+1)\ln(2x^2+1)}{(2x^2+1)(x+2)^2}$$

6. [2025 · October/November 0606/12 Q12(a)]

提示：先用商法则求导，再代入横坐标为零的条件。

A curve has equation $y=\dfrac{e^{(x^2)}}{x-2}$ for $x<2$.

(a) Find the value of $\dfrac{dy}{dx}$ when $x=0$.

一条曲线的方程为 $y=\frac{e^{x^2}}{x-2}$，$x<2$。

(a) 求 $x=0$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值。

✓ **答案** $-\frac{1}{4}$。

解析 由商的求导法则，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-2)\cdot 2xe^{x^2}-e^{x^2}}{(x-2)^2}$$

当 $x=0$ 时，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0-1}{(-2)^2}=-\frac{1}{4}$$

答：$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4}$。

7. [2023 · October/November 0606/12 Q12(b)]

提示：看根式求导带来的分母，通分时核对第二项所乘的因式。

A curve has equation $y=\dfrac{\sqrt{5x-2}}{x-3}$.

(b) Show that $\dfrac{dy}{dx}$ can be written in the form $\dfrac{-(Ax+B)}{2(x-3)^2\sqrt{5x-2}}$, where A and B are positive integers.

一条曲线的方程为

$$y=\frac{\sqrt{5x-2}}{x-3}$$

(b) 证明 $\frac{dy}{dx}$ 可写成以下形式，其中 A、B 为正整数：

$$-\frac{Ax+B}{2(x-3)^2\sqrt{5x-2}}$$

✓ **答案** $A=5$，$B=11$

解析 由链式法则得

$$\left(\sqrt{5x-2}\right)'=\frac{1}{2}(5x-2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 5=\frac{5}{2\sqrt{5x-2}}$$

由商法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-3)\cdot\frac{5}{2\sqrt{5x-2}}-\sqrt{5x-2}}{(x-3)^2}$$

通分得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5(x-3)-2(5x-2)}{2(x-3)^2\sqrt{5x-2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x-15-10x+4}{2(x-3)^2\sqrt{5x-2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{5x+11}{2(x-3)^2\sqrt{5x-2}}$$

上述导式适用于 $x>\frac{2}{5}$ 且 $x\neq 3$。答：$A=5$，$B=11$。

8. [2023 · October/November 0606/13 Q9]

提示：看分母平方后的幂次，再找通分后分子可约去的公因式。

Given that $y=\dfrac{(5x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x-1)^2}$, show that $\dfrac{dy}{dx}$ can be written in the form $\dfrac{-(Ax+B)}{3(5x+2)^{\frac{2}{3}}(x-1)^3}$, where A and B are integers.

已知

$$y=\frac{(5x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x-1)^2}$$

证明 $\frac{dy}{dx}$ 可写成以下形式，其中 A、B 为整数：

$$-\frac{Ax+B}{3(5x+2)^{\frac{2}{3}}(x-1)^3}$$

✓ **答案** $A=25$，$B=17$

解析 由链式法则得

$$\left((5x+2)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}(5x+2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 5=\frac{5}{3(5x+2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\left((x-1)^2\right)'=2(x-1)$$

由商法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)^2\cdot\frac{5}{3(5x+2)^{\frac{2}{3}}}-(5x+2)^{\frac{1}{3}}\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

通分并约去 $x-1$，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5(x-1)-6(5x+2)}{3(5x+2)^{\frac{2}{3}}(x-1)^3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x-5-30x-12}{3(5x+2)^{\frac{2}{3}}(x-1)^3}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{25x+17}{3(5x+2)^{\frac{2}{3}}(x-1)^3}$$

上述导式适用于 $x\neq 1$ 且 $x\neq -\frac{2}{5}$。答：$A=25$，$B=17$。

9. [2023 · May/June 0606/11 Q8(a)]

提示：看原分母的导数，通分后核对减号是否作用于整个括号。

A curve has the equation $y=\dfrac{(3x-4)^{\frac{1}{3}}}{2x+1}$.

(a) Show that $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{Ax+B}{(2x+1)^2(3x-4)^{\frac{2}{3}}}$, where A and B are integers to be found.

一条曲线的方程为

$$y=\frac{(3x-4)^{\frac{1}{3}}}{2x+1}$$

(a) 证明

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Ax+B}{(2x+1)^2(3x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

其中 A、B 为待求的整数。

✓ **答案** $A=-4$，$B=9$

解析 由链式法则得

$$\left((3x-4)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}(3x-4)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3=\frac{1}{(3x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

又

$$(2x+1)'=2$$

由商法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2x+1}{(3x-4)^{\frac{2}{3}}}-2(3x-4)^{\frac{1}{3}}}{(2x+1)^2}$$

通分得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x+1)-2(3x-4)}{(2x+1)^2(3x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+1-6x+8}{(2x+1)^2(3x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4x+9}{(2x+1)^2(3x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

上述导式适用于 $x\neq-\frac{1}{2}$ 且 $x\neq\frac{4}{3}$。答：$A=-4$，$B=9$。

10. [2023 · October/November 0606/11 Q10(a)]

提示：看根式内层的导数，通分后比较两项的二次项能否抵消。

(a) Given that $y=\dfrac{\sqrt{3x^2-2}}{x-4}$, show that $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ can be written in the form $\dfrac{Ax+B}{(x-4)^2\sqrt{3x^2-2}}$, where A and B are integers to be found.

(a) 已知

$$y=\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-4}$$

证明 $\frac{dy}{dx}$ 可写成以下形式，并求出整数 A、B：

$$\frac{Ax+B}{(x-4)^2\sqrt{3x^2-2}}$$

✓ **答案**　$A=-12$，$B=2$

解析　由链式法则得

$$\left(\sqrt{3x^2-2}\right)'=\frac{1}{2}(3x^2-2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 6x=\frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}}$$

由商法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-4)\cdot\frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}}-\sqrt{3x^2-2}}{(x-4)^2}$$

通分得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x(x-4)-(3x^2-2)}{(x-4)^2\sqrt{3x^2-2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-12x-3x^2+2}{(x-4)^2\sqrt{3x^2-2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-12x+2}{(x-4)^2\sqrt{3x^2-2}}$$

上述导式适用于 $3x^2-2>0$ 且 $x\neq 4$。答：$A=-12$，$B=2$。

题型 7　用乘积法则求导并整理

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **识别乘积因子：**函数 $y=x^2\ln x$ 中，两个因子为 x^2 和 $\ln x$。撇号表示对 x 求导，n 表示正整数。自然对数要求 x 为_____。

$$(x^2)'=2x,\quad(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

② **乘积求导法则：**令 $u=x^2$，$v=\ln x$，则 $y=uv$。每次保留一个因子，对另一个求导，两项_____。这称为乘积法则。

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$(x^2\ln x)'=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x$$

③ **复合因子求导：**因子内含一次式，外层求导后乘_____。例如，$(2x+1)'=2\cdot 1+0=2$。三角函数求导时，角用弧度制。

因子	求导演算
$(2x+1)^2$	$\left((2x+1)^2\right)'=2(2x+1)\cdot 2=4(2x+1)$
$\ln(2x+1)$	$(\ln(2x+1))'=\frac{1}{2x+1}\cdot 2=\frac{2}{2x+1}$
e^{2x+1}	$\left(e^{2x+1}\right)'=e^{2x+1}\cdot 2=2e^{2x+1}$
$\sqrt{2x+1}$	$\left(\sqrt{2x+1}\right)'=\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
$\sin(2x+1)$	$(\sin(2x+1))'=\cos(2x+1)\cdot 2=2\cos(2x+1)$
$\cos(2x+1)$	$(\cos(2x+1))'=-\sin(2x+1)\cdot 2=-2\sin(2x+1)$

④ **指数分母改写：**分母为指数式，先用负指数改写为乘积。因子中有和或差，逐项求导。

$$\frac{x+\sin x}{e^{2-5x}} = (x+\sin x)e^{-(2-5x)} = (x+\sin x)e^{5x-2}$$

$$(\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$$

⑤ **提取公因式：**求导结果含相同因子，先提取，再合并括号。同一因子的次数不同时，取较低次数。

$$2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$$

$$((x+1)(x+2)^2)' = (x+2)^2 + 2(x+1)(x+2) = (x+2)[(x+2)+2(x+1)] = (x+2)(3x+4)$$

⑥ **代入指定位置：**题目给出 x 的值，先求导，再代入导数式。例如，求 $y = x\sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的导数值。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin x + x\cos x$$

$$x = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{代入}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2}\cdot 0 = 1$$

← 填空：①正数　②相加　③内层导数

点石成金　题目出现两个含变量的因子相乘并要求导时，先分别求出两个因子的导数，再用乘积法则。

例 1　[2024 · May/June 0606/12 Q11(a)]

(a) Given that $y = x^2\ln x$, find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(a) 已知 $y = x^2\ln x$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解答　由 $y = x^2\ln x$，得 $x > 0$。由乘积法则，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + 2x\ln x$$

答：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + 2x\ln x$。

方法：先圈出幂函数与对数两个因子，分别求导后交叉相乘。

! 辨析：乘积的导数是交叉相乘后求和，导数的乘积是各自求导后相乘。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/13 Q7(a)]

提示：看幂函数求导后的次数，再比两项共有的幂因子。

(a) Given that $y = x^3 \ln x$, find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(a) 已知 $y = x^3 \ln x$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

✓ **答案**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + 3x^2 \ln x$$

解析 由 $y = x^3 \ln x$，得 $x > 0$。由乘积法则，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + 3x^2 \ln x$$

答：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + 3x^2 \ln x$。

2. [2025 · February/March 0606/12 Q12(a)]

提示：看指数内一次式的斜率，再找求导两项共有的指数因子。

It is given that $y = xe^{3x+2}$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

已知 $y = xe^{3x+2}$。 (a) 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

✓ **答案**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1 + 3x)e^{3x+2}$$

解析 指数中 $3x + 2$ 的导数为 3，得

$$\left(e^{3x+2}\right)' = 3e^{3x+2}$$

由乘积法则，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \cdot e^{3x+2} + x \cdot 3e^{3x+2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1 + 3x)e^{3x+2}$$

答：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1 + 3x)e^{3x+2}$。

3. [2025 · October/November 0606/13 Q2]
提示：看两个因子各自的导数，指数因子还需乘内层导数。

Differentiate x^2e^{3x} with respect to x.

将 x^2e^{3x} 对 x 求导。

✓ **答案**

$$2xe^{3x}+3x^2e^{3x}$$

解析 由乘积法则，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2e^{3x})=2xe^{3x}+x^2\cdot 3e^{3x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2e^{3x})=2xe^{3x}+3x^2e^{3x}$$

答：导数为 $2xe^{3x}+3x^2e^{3x}$。

4. [2025 · May/June 0606/22 Q4(a)]
提示：先看两个三角因子的内层，再按对代入时的角。

(a) Given that $y=4\sin 2x\cos 2x$, find the value of $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ when $x=\dfrac{\pi}{6}$.

(a) 已知 $y=4\sin(2x)\cos(2x)$，求 $x=\frac{\pi}{6}$ 时 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的值。

✓ **答案**

$$-4$$

解析 由乘积法则，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4[2\cos(2x)\cos(2x)+\sin(2x)(-2\sin(2x))]$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=8\cos^2(2x)-8\sin^2(2x)$$

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$2x=\frac{\pi}{3}$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=8\left(\frac{1}{2}\right)^2-8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2-6=-4$$

答：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的值为 -4。

5. [2023 · October/November 0606/23 Q9(a)]
提示：分别看一次因子与指数因子的导数，再找公因式。

A curve has equation $y = xe^{2x}$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

一条曲线的方程为 $y = xe^{2x}$。（a）求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

✓ **答案**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{2x}(1+2x)$$

解析 由乘积法则，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2e^{2x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{2x}(1+2x)$$

答：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{2x}(1+2x)$。

6. [2023 · May/June 0606/11 Q10(a)]
提示：看两因子共有的内层，再比求导两项中它的次数。

It is given that $y = (3x+1)^2 \ln(3x+1)$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

已知 $y = (3x+1)^2 \ln(3x+1)$。（a）求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

✓ **答案**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3(3x+1)[1 + 2\ln(3x+1)]$$

解析 由对数的真数为正，得

$$3x + 1 > 0$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

分别对两个因子求导，得

$$\left((3x+1)^2\right)' = 2(3x+1) \cdot 3 = 6(3x+1)$$

$$(\ln(3x+1))' = \frac{3}{3x+1}$$

由乘积法则，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6(3x+1)\ln(3x+1) + (3x+1)^2 \cdot \frac{3}{3x+1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6(3x+1)\ln(3x+1) + 3(3x+1)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3(3x+1)[1+2\ln(3x+1)]$$

答：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3(3x+1)[1+2\ln(3x+1)]$。

7. [2023 · October/November 0606/22 Q8(a)]

提示：看正弦的角是否含系数，再配齐乘积求导的两项。

A curve has equation $y = x\sin 2x$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

一条曲线的方程为 $y = x\sin(2x)$。（a）求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

✓ **答案**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin(2x) + 2x\cos(2x)$$

解析 由乘积法则，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1\cdot\sin(2x) + x\cdot 2\cos(2x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin(2x) + 2x\cos(2x)$$

答：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin(2x) + 2x\cos(2x)$。

8. [2024 · October/November 0606/22 Q2(a)]

提示：看根式求导后的分母，通分时核对另一项的分子。

Variables x and y are related by the equation $y = x\sqrt{1+2x}$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

变量 x 和 y 满足方程 $y = x\sqrt{1+2x}$。（a）求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

✓ **答案**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1+3x}{\sqrt{1+2x}}$$

解析 当 $x > -\frac{1}{2}$ 时，

$$\left(\sqrt{1+2x}\right)' = \frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

由乘积法则，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+2x} + \frac{x}{\sqrt{1+2x}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1+2x+x}{\sqrt{1+2x}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1+3x}{\sqrt{1+2x}}$$

答：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+3x}{\sqrt{1+2x}}$，其中 $x>-\frac{1}{2}$。

9. [2025 · October/November 0606/11 Q7(a)]

提示：先看指数分母改写后的符号，再分别合并正弦与余弦项。

(a) Differentiate $\dfrac{\sin x+\cos x}{\mathrm{e}^{1-3x}}$ with respect to x.

（a）将 $\frac{\sin x+\cos x}{e^{1-3x}}$ 对 x 求导。

✓ **答案**

$$e^{3x-1}(2\sin x+4\cos x)$$

解析 将指数式的倒数写为负指数，得

$$\frac{\sin x+\cos x}{e^{1-3x}}=(\sin x+\cos x)e^{3x-1}$$

由乘积法则，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(\sin x+\cos x)e^{3x-1}]=(\cos x-\sin x)e^{3x-1}+(\sin x+\cos x)\cdot 3e^{3x-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(\sin x+\cos x)e^{3x-1}]=e^{3x-1}[\cos x-\sin x+3\sin x+3\cos x]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(\sin x+\cos x)e^{3x-1}]=e^{3x-1}(2\sin x+4\cos x)$$

答：导数为 $e^{3x-1}(2\sin x+4\cos x)$。

10. [2023 · October/November 0606/11 Q7(a)]

提示：比两项共有括号的次数，提取后再核对一次项与常数项。

A curve has equation $y=\mathrm{f}(x)$, where $\mathrm{f}(x)=(2x+1)(3x-2)^2$.

(a) Show that $\mathrm{f}'(x)$ can be written in the form $2(3x-2)(px+q)$, where p and q are integers.

一条曲线的方程为 $y=f(x)$，其中 $f(x)=(2x+1)(3x-2)^2$。（a）证明 $f'(x)$ 可以写成 $2(3x-2)(px+q)$ 的形式，其中 p 和 q 为整数。

✓ **答案** $f'(x)=2(3x-2)(9x+1)$，$p=9$，$q=1$。

解析 由乘积法则，

$$f'(x)=2(3x-2)^2+(2x+1)\cdot 2(3x-2)\cdot 3$$

$$f'(x)=2(3x-2)[(3x-2)+3(2x+1)]$$

$$f'(x)=2(3x-2)(3x-2+6x+3)$$

$$f'(x)=2(3x-2)(9x+1)$$

其中 $p=9$，$q=1$，均为整数，故所求形式成立。

题型 8 在指定点求导并写切线或法线方程

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **代入求点：**题目给出 $x=3$，代入曲线方程求_____。用 (x_0,y_0) 表示曲线上的指定点。

$$y=\ln\left((2\times 3-4)^5\right)=\ln 32$$

$$(x_0,y_0)=(3,\ln 32)$$

② **对数求导：**原曲线中，对数的真数为正，故 $x>2$。先用对数性质展开，再求导。设 $u=2x-4$，用 y' 表示 y 对 x 的导数。

$$y=\ln\left((2x-4)^5\right)=5\ln(2x-4)$$

$$u'=(2x-4)'=2,\quad (\ln u)'=\frac{u'}{u}$$

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=5\cdot\frac{2}{2x-4}=\frac{10}{2x-4}$$

③ **逐项求导：**多项式各项分别求导，再相加减。常数的导数为零，常数因子保留。

$$\left(x^3-2x^2+4x-1\right)'=3x^2-4x+4$$

幂函数的求导法则为下式，其中 n 为常数。

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

④ **乘积求导：**对 $x\sin 3x$ 和 xe^{3x}，使用乘积求导法则。下式中，u、v 都表示 x 的函数。三角函数中的角用弧度表示。

$$(uv)'=u'v+uv'$$

三角函数乘积

$$(\sin 3x)'=3\cos 3x$$

$$(x\sin 3x)'=\sin 3x+3x\cos 3x$$

指数函数乘积

$$\left(e^{3x}\right)'=3e^{3x}$$

$$\left(xe^{3x}\right)'=e^{3x}+3xe^{3x}=e^{3x}(1+3x)$$

⑤ **切线法线：**将指定横坐标代入导数，得到切线斜率 m_t。法线垂直于切线，其斜率记为 m_n。当 $m_t\neq 0$ 时，法线斜率是切线斜率的_____。

切线斜率

$$m_t=y'(x_0)$$

法线斜率

$$m_n=-\frac{1}{m_t}$$

$$m_t=2\quad\Rightarrow\quad m_n=-\tfrac{1}{2}$$

⑥ **直线方程：**直线过 $(3,\ln 32)$，斜率为 m，可写成下式。

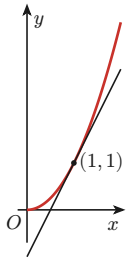
$$y-\ln 32=m(x-3)$$

直线过 (x_0,y_0)，斜率为 m，使用_____方程。

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

⑦ 某点导数等于切线斜率

$f(x)=x^2,\quad f'(1)=2$



← 填空：①纵坐标　②负倒数　③点斜式

点石成金　题目出现曲线及指定点，要求切线或法线方程时，先求该点坐标与导数值。

例 1 [2026 · May/June 0606/12 Q5]

Find, in exact form, the equation of the tangent to the curve $y=\ln\left((2x-4)^5\right)$ at the point where $x=3$.

求曲线 $y=\ln((2x-4)^5)$ 在 $x=3$ 处的切线方程，答案用精确形式表示。

解答 由对数的真数为正，得 $x>2$，故

$$y=\ln((2x-4)^5)=5\ln(2x-4)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=5\cdot\frac{2}{2x-4}=\frac{10}{2x-4}$$

当 $x=3$ 时，切点的纵坐标为

$$y=\ln((2\times3-4)^5)=\ln 32$$

切线斜率为

$$m_t=\frac{10}{2\times3-4}=5$$

由点斜式，得

$$y-\ln 32=5(x-3)$$

答：切线方程为 $y-\ln 32=5(x-3)$。

方法：先看指定横坐标，代入原式求点，再展开对数求导。

! 辨析：切线斜率是该点导数值，法线斜率是切线非零斜率的负倒数。

针对练习

1. [2023 · October/November 0606/22 Q5(a)]

← 提示：看所求是否为法线，核对两条垂线斜率的乘积。

(a) Find the equation of the normal to the curve $y=x^3-7x^2+12x-5$ at the point (1, 1).

(a) 求曲线 $y=x^3-7x^2+12x-5$ 在点 $(1,1)$ 处的法线方程。

✓ **答案**

$$y=-x+2$$

解析 对曲线方程求导，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2-14x+12$$

当 $x=1$ 时，切线斜率为

$$m_t = 3 - 14 + 12 = 1$$

法线垂直于切线，故法线斜率为

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -1$$

法线过点 $(1,1)$，由点斜式，得

$$y - 1 = -(x-1)$$

$$y = -x + 2$$

答：法线方程为 $y = -x + 2$。

2. [2023 · October/November 0606/22 Q8(b)]

提示：看两个相乘因子，求导后分别代入原式与导数式。

A curve has equation $y = x\sin 2x$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Find the equation of the tangent to the curve at $x = \dfrac{\pi}{4}$.

一条曲线的方程为 $y = x\sin 2x$。（a）求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。（b）求曲线在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程。

✓ **答案**　（a）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin 2x + 2x\cos 2x$；（b）$y = x$。

解析　（a）由乘积求导法则，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1\cdot\sin 2x + x\cdot 2\cos 2x = \sin 2x + 2x\cos 2x$$

（b）当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，切点的纵坐标为

$$y = \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

切线斜率为

$$m_t = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

由点斜式，得

$$y - \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4}$$

$$y = x$$

答：（a）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin 2x + 2x\cos 2x$；（b）切线方程为 $y = x$。

3. [2023 · October/November 0606/23 Q9(b)]

提示：看指数中的内层函数，再核对法线与切线的斜率关系。

A curve has equation $y = x\mathrm{e}^{2x}$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Find the equation of the normal to the curve at $x = 1$.

一条曲线的方程为 $y = xe^{2x}$。（a）求 $\frac{dy}{dx}$。（b）求曲线在 $x = 1$ 处的法线方程。

✓ **答案** （a）$\frac{dy}{dx} = e^{2x}(1+2x)$；（b）$y - e^2 = -\frac{x-1}{3e^2}$。

解析 （a）由乘积求导法则，得

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = e^{2x}(1+2x)$$

（b）当 $x = 1$ 时，曲线上对应点的纵坐标为

$$y = 1 \cdot e^2 = e^2$$

该点处的切线斜率为

$$m_t = e^2(1+2) = 3e^2$$

法线垂直于切线，故法线斜率为

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{3e^2}$$

法线过点 $(1, e^2)$，由点斜式，得

$$y - e^2 = -\frac{x-1}{3e^2}$$

答：（a）$\frac{dy}{dx} = e^{2x}(1+2x)$；（b）法线方程为 $y - e^2 = -\frac{x-1}{3e^2}$。

4. [2022 · October/November 0606/21 Q3(b)]

提示：法线垂直于切线，先求指定点处的切线斜率。

(b) Find the equation of the normal to the curve $y = \sqrt{1+3x}$ at the point (8, 5) in the form $y = mx + c$.

（b）求曲线 $y = \sqrt{1+3x}$ 在点 $(8, 5)$ 处的法线方程，写成 $y = mx + c$ 的形式。

✓ **答案** $y = -\frac{10}{3}x + \frac{95}{3}$。

解析 将根式写成分数幂，得

$$y = (1+3x)^{\frac{1}{2}}$$

对复合幂函数求导，乘以内层函数 $1+3x$ 的导数，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1+3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$$

当 $x = 8$ 时，切线斜率为

$$m_t = \frac{3}{2\sqrt{1+3\times 8}} = \frac{3}{10}$$

法线垂直于切线，故法线斜率为

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{10}{3}$$

法线经过点 $(8, 5)$，由点斜式，得

$$y - 5 = -\frac{10}{3}(x-8)$$

$$y=-\frac{10}{3}x+\frac{80}{3}+5=-\frac{10}{3}x+\frac{95}{3}$$

答：法线方程为$y=-\frac{10}{3}x+\frac{95}{3}$。

5. [2022 · October/November 0606/21 Q8(b)]

提示：先用乘积求导法则完成（a），再将指定横坐标代入原式和导数。

The equation of a curve is $y=x\sin x$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Find the equation of the tangent to the curve at $x=\dfrac{\pi}{2}$ in the form $y=mx+c$.

一条曲线的方程为$y=x\sin x$。

（a）求$\frac{dy}{dx}$。

（b）求曲线在$x=\frac{\pi}{2}$处的切线方程，写成$y=mx+c$的形式。

✓ **答案** $y=x$。

解析 由乘积求导法则，得

$$\frac{dy}{dx}=1\cdot\sin x+x\cos x=\sin x+x\cos x$$

当$x=\frac{\pi}{2}$时，切点的纵坐标为

$$y=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

故切点为$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。切线斜率为

$$m_t=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

由点斜式，得

$$y-\frac{\pi}{2}=1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y=x$$

答：切线方程为$y=x$。

题型 9 列切线或法线方程求轴截距或直线交点

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **切点代入求值：**将母例中给定的横坐标代入，得纵坐标_____。其中，e 是自然对数的底。记 $T(a,b)$ 为曲线上一点，a、b 分别为横、纵坐标。

$$y=5e^{2\times1-1}+e=6e$$

② **基本函数求导：**各项分别求导，常数因子保留。记 $u=u(x)$ 为可导函数，u' 为其导数。三角函数的自变量用弧度。

函数及条件	导数	演算
c，c 为常数	0	$(5e)'=0$
x^n，n 为常数	nx^{n-1}	$(x^2-3x)'=2x-3$
e^u	$e^u u'$	$(e^{3x})'=3e^{3x}$

$\ln u$，$u>0$	$\frac{u'}{u}$	$(\ln(x^2+1))'=\frac{2x}{x^2+1}$
$\sqrt{u}$，$u>0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\sqrt{2x+1}\right)'=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
$\sin u$	$u'\cos u$	$(\sin(3x))'=3\cos(3x)$
$\cos u$	$-u'\sin u$	$(\cos(2x))'=-2\sin(2x)$

母例中，指数求导所得的因子为：

$$(2x-1)'=2$$

$$\left(5e^{2x-1}+e\right)'=5e^{2x-1}\times 2+0=10e^{2x-1}$$

③ **乘积商式求导：**两式相乘或相除，分别使用下列法则。三角乘积也可先用二倍角公式。

乘积：

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$(xe^x)'=e^x+xe^x$$

商式：

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)$$

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)'=\frac{xe^x-e^x}{x^2}$$

$$2\sin x\cos x=\sin(2x)$$

$$(2\sin x\cos x)'=2\cos(2x)$$

④ **切线法线方程：**切点为 $T(a,b)$，在该处代入导数求切线斜率 m。法线与切线垂直，斜率乘积为 _____。当切线斜率为零时，法线为竖直线。

切线：

$$m=y'|_{x=a}$$

$$y-b=m(x-a)$$

法线，斜率记为 k：

$$k=-\frac{1}{m}\quad(m\neq 0)$$

$$y-b=-\frac{1}{m}(x-a)$$

$$m=0\quad\text{时，}\quad x=a$$

⑤ **坐标轴上交点：**直线与坐标轴相交，按所交坐标轴代入零值。以下列直线为例。

$$y=2x-4$$

与 x 轴相交，纵坐标为 _____：

$$0=2x-4$$

$$x=2$$

交点为 $(2,0)$。

与 y 轴相交，横坐标为 _____：

$$y=2\times 0-4=-4$$

交点为 $(0,-4)$。

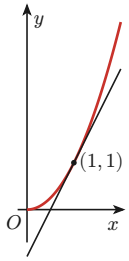
⑥ **联立求出交点：**交点同时满足两个方程，联立后求坐标。过已知点的水平线，纵坐标与该点相同。曲线与直线有两个交点时，按图中左右位置确定各点。

卷面条件	演算
直线与直线相交	$y=2x-4,\quad y=x$ $2x-4=x$ $x=4,\quad y=4$
水平线经过 $(1,3)$	$y=3$ $2x-4=3$ $x=\frac{7}{2}$

曲线与直线相交	$y=x^2,\quad y=x+2$ $x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$ $x=-1 \quad 或 \quad x=2$ 左、右交点分别为 $(-1,1)$、$(2,4)$。

⑦ 某点导数等于切线斜率

$f(x)=x^2,\quad f'(1)=2$



⟵ 填空：①$6e$　②-1　③$0$　④$0$

点石成金　题目出现指定点的切线或法线，并求轴截距或直线交点时，先代入曲线求该点坐标，再求导确定切线斜率。

例 1　[2024 · May/June 0606/22 Q5]

A curve has equation $y=5\mathrm{e}^{2x-1}+\mathrm{e}$. The tangent to the curve at the point where $x=1$ cuts the x-axis at the point P.

Find the equation of the tangent in the form $y=mx+c$, where m and c are exact values, and hence find the x-coordinate of P.

一条曲线的方程为 $y=5e^{2x-1}+e$。该曲线在 $x=1$ 处的切线与 x 轴交于点 P。
求切线方程，写成 $y=mx+c$ 的形式，其中 m 和 c 均为精确值，并由此求出 P 的横坐标。

解答　当 $x=1$ 时，

$$y=5e^{2\times1-1}+e=6e$$

方法：先看给定横坐标，代入曲线求切点，再求导定斜率。

辨析：横截距是横轴交点的横坐标，纵截距是纵轴交点的纵坐标。

由复合函数求导法则，得

$$\frac{dy}{dx}=10e^{2x-1}$$

切线斜率为

$$m=10e^{2\times1-1}=10e$$

切线经过 $(1,6e)$，故

$$y-6e=10e(x-1)$$

$$y=10ex-4e$$

在 x 轴上，

$$y=0$$

$$10ex-4e=0$$

$$x = \frac{2}{5} = 0.4$$

答：切线方程为 $y = 10ex - 4e$，P 的横坐标为 $\frac{2}{5}$。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/13 Q8]

提示：看所求点属于哪条线，核对法线与切线斜率的关系。

The line L is the normal to the curve $y = 3(5x+6)^{\frac{1}{2}}$ at the point where $x = 2$. The point $(-2, k)$, where k is a constant, lies on L. Find the exact value of k.

直线 L 是曲线 $y = 3(5x+6)^{\frac{1}{2}}$ 在 $x = 2$ 处的法线。点 $(-2, k)$ 在 L 上，其中 k 为常数。求 k 的精确值。

✓ **答案**

$$k = \frac{212}{15}$$

解析 当 $x = 2$ 时，

$$y = 3\sqrt{5 \times 2 + 6} = 12$$

由复合函数求导法则，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15}{2\sqrt{5x+6}}$$

该处切线斜率为

$$m = \frac{15}{2\sqrt{16}} = \frac{15}{8}$$

故法线 L 的斜率为

$$-\frac{1}{m} = -\frac{8}{15}$$

法线经过 $(2, 12)$，故

$$y - 12 = -\frac{8}{15}(x - 2)$$

将 $(-2, k)$ 代入，得

$$k - 12 = -\frac{8}{15}(-2 - 2) = \frac{32}{15}$$

$$k = 12 + \frac{32}{15} = \frac{212}{15}$$

答：$k = \frac{212}{15}$。

2. [2026 · February/March 0606/12 Q8(b)]

提示：看函数的两个乘积因子，再按所交坐标轴选置零的坐标。

A curve has equation $y = xe^{2x+1}$.

(a) Find $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) The line L is the tangent to the curve at the point where $x = \frac{1}{2}$.

Find the exact coordinates of the two points where L meets the axes.

一条曲线的方程为 $y = xe^{2x+1}$。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$。

(b) 直线 L 是该曲线在 $x = \frac{1}{2}$ 处的切线。求 L 与两条坐标轴相交的两个点的精确坐标。

✓ **答案**　(a) $\frac{dy}{dx} = (1+2x)e^{2x+1}$；(b) $\left(0, -\frac{e^2}{2}\right)$、$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$。

解析　(a) 由乘积求导法则，得

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+1} + 2xe^{2x+1} = (1+2x)e^{2x+1}$$

(b) 当 $x = \frac{1}{2}$ 时，

$$y = \frac{1}{2}e^{2\times\frac{1}{2}+1} = \frac{e^2}{2}$$

切线斜率为

$$m = \left(1 + 2 \times \frac{1}{2}\right)e^2 = 2e^2$$

故切线 L 的方程为

$$y - \frac{e^2}{2} = 2e^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = 2e^2x - \frac{e^2}{2}$$

在 y 轴上，

$$x = 0$$

$$y = -\frac{e^2}{2}$$

在 x 轴上，

$$y = 0$$

$$2e^2x - \frac{e^2}{2} = 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

答：(a) $\frac{dy}{dx} = (1+2x)e^{2x+1}$；(b) 两个交点为 $\left(0, -\frac{e^2}{2}\right)$、$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$。

3. [2025 · May/June 0606/22 Q4(b)]

提示：看三角乘积能否用二倍角公式，求导时核对内层系数。

(a) Given that $y = 4\sin 2x \cos 2x$, find the value of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ when $x = \frac{\pi}{6}$.

(b) A curve has equation $y = 4\sin 2x \cos 2x$.

The normal to the curve at the point where $x = \dfrac{\pi}{6}$ meets the x-axis at the point P.

Find the exact coordinates of P.

(a) 已知 $y = 4\sin(2x)\cos(2x)$，求 $x = \frac{\pi}{6}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值。
(b) 一条曲线的方程为 $y = 4\sin(2x)\cos(2x)$。该曲线在 $x = \frac{\pi}{6}$ 处的法线与 x 轴交于点 P。求 P 的精确坐标。

✓ **答案** (a) -4；(b) $P\left(\frac{\pi}{6} - 4\sqrt{3}, 0\right)$。

解析 (a) 由二倍角公式，得

$$y = 4\sin(2x)\cos(2x) = 2\sin(4x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 8\cos(4x)$$

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时，

$$\frac{dy}{dx} = 8\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

(b) 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时，

$$y = 2\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

法线斜率为

$$-\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$$

故法线方程为

$$y - \sqrt{3} = \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

在 x 轴上，

$$y = 0$$

$$-\sqrt{3} = \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{6} - 4\sqrt{3}$$

答：(a) 导数的值为 -4；(b) P 的精确坐标为 $\left(\frac{\pi}{6} - 4\sqrt{3}, 0\right)$。

4. [2023 · May/June 0606/22 Q8]
提示：看余弦内层的系数，再核对切线与法线斜率的符号。

A curve has equation $y = \cos\dfrac{x}{4}$ where x is in radians. The normal to the curve at the point where $x = \dfrac{4\pi}{3}$ cuts the x-axis at the point P. Find the exact coordinates of P.

一条曲线的方程为 $y = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$，其中 x 以弧度计。该曲线在 $x = 4\frac{\pi}{3}$ 处的法线与 x 轴交于点 P。求 P 的精确坐标。

✓ **答案**

$$P\left(4\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{16},0\right)$$

解析　当 $x=4\frac{\pi}{3}$ 时，

$$y=\cos\left(\frac{4\frac{\pi}{3}}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

由复合函数求导法则，得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{4}\right)$$

该处切线斜率为

$$m=-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

故法线斜率为

$$-\frac{1}{m}=\frac{8}{\sqrt{3}}$$

法线方程为

$$y-\frac{1}{2}=\frac{8}{\sqrt{3}}\left(x-4\frac{\pi}{3}\right)$$

在 x 轴上，

$$y=0$$

$$-\frac{1}{2}=\frac{8}{\sqrt{3}}\left(x-4\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x-4\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$x=4\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{16}$$

答：P 的精确坐标为 $\left(4\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{16},0\right)$。

5. [2024 · February/March 0606/12 Q3]

提示：看交点所在直线给出的横纵坐标关系，再与法线联立。

The curve C has equation $y=\ln\left(x^3+3\right)$. The normal to C at the point where $x=1$ meets the line $y=x$ at the point P. Find the exact coordinates of P.

曲线 C 的方程为 $y=\ln(x^3+3)$。曲线 C 在 $x=1$ 处的法线与直线 $y=x$ 交于点 P。求 P 的精确坐标。

✓ **答案**

$$P\left(\frac{4+3\ln 4}{7},\frac{4+3\ln 4}{7}\right)$$

解析　当 $x=1$ 时，

$$y = \ln(1^3 + 3) = \ln 4$$

由复合函数求导法则，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{x^3 + 3}$$

该处切线斜率为

$$m = \frac{3 \times 1^2}{1^3 + 3} = \frac{3}{4}$$

故法线斜率为

$$-\frac{1}{m} = -\frac{4}{3}$$

法线方程为

$$y - \ln 4 = -\frac{4}{3}(x - 1)$$

交点 P 在直线 $y = x$ 上，代入得

$$x - \ln 4 = -\frac{4}{3}(x - 1)$$

$$3x - 3\ln 4 = -4x + 4$$

$$7x = 4 + 3\ln 4$$

$$x = y = \frac{4 + 3\ln 4}{7}$$

答：P 的精确坐标为 $\left(\frac{4+3\ln 4}{7}, \frac{4+3\ln 4}{7}\right)$。

6. [2024 · October/November 0606/23 Q5]

提示：看商式的分子与分母，求出切线后比较两直线的纵坐标。

The tangent to the curve $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ at the point where $x = 3$ meets the line $y = x - 16$ at the point A. Find the coordinates of A.

曲线 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 在 $x = 3$ 处的切线与直线 $y = x - 16$ 交于点 A。求 A 的坐标。

✓ **答案**

$$A(15, -1)$$

解析 当 $x = 3$ 时，

$$y = \frac{\sqrt{3+1}}{3} = \frac{2}{3}$$

由商式求导法则，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{x^2} = -\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

该处切线斜率为

$$m=-\frac{3+2}{2\times 3^2\times\sqrt{3+1}}=-\frac{5}{36}$$

故切线方程为

$$y-\frac{2}{3}=-\frac{5}{36}(x-3)$$

$$y=-\frac{5}{36}x+\frac{13}{12}$$

与直线 $y=x-16$ 联立，得

$$-\frac{5}{36}x+\frac{13}{12}=x-16$$

$$\frac{41}{36}x=\frac{205}{12}$$

$$x=15$$

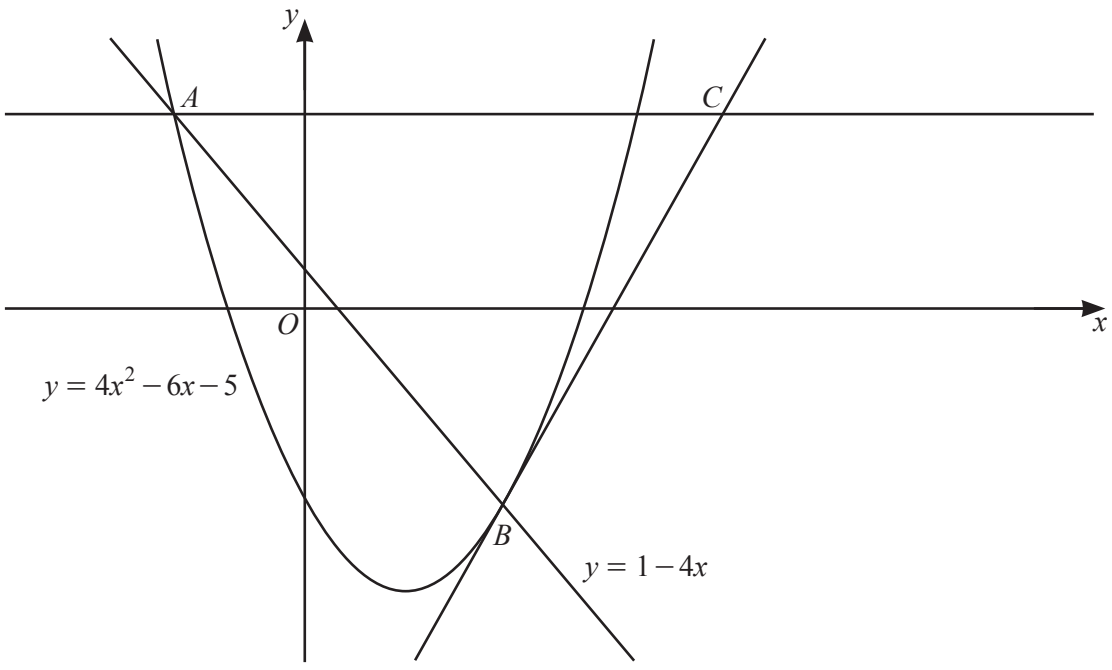
代入直线方程，得

$$y=15-16=-1$$

答：A 的坐标为 $(15,-1)$。

7. [2023 · October/November 0606/11 Q8]

提示：看图中两交点的左右位置，再比较水平线与切线的纵坐标。



The diagram shows the line $y=1-4x$ meeting the curve $y=4x^2-6x-5$ at the points A and B. The tangent to the curve at B meets the horizontal line through A at the point C. Find the x-coordinate of C, giving your answer correct to 2 decimal places.

图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，O 为原点。直线 $y=1-4x$ 与曲线 $y=4x^2-6x-5$ 交于点 A 和 B，其中 A 为左侧交点，B 为右侧交点。曲线在 B 处的切线与过 A 的水平直线交于点 C。求 C 的横坐标，答案精确到小数点后两位。

✓ **答案**

3.17

解析 联立直线与曲线的方程，得

$$4x^2-6x-5=1-4x$$

$$4x^2-2x-6=2(2x-3)(x+1)=0$$

$$x=-1 \quad 或 \quad x=\frac{3}{2}$$

由图知，A 在左侧，B 在右侧。代入直线方程，得

$$A(-1,5),\quad B\left(\frac{3}{2},-5\right)$$

曲线的导数为

$$\frac{dy}{dx}=8x-6$$

在 B 处的切线斜率为

$$m=8\times\frac{3}{2}-6=6$$

故切线方程为

$$y+5=6\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$y=6x-14$$

过 A 的水平线方程为

$$y=5$$

联立得

$$6x-14=5$$

$$x=\frac{19}{6}\approx 3.17$$

答：C 的横坐标为 3.17，精确到小数点后两位。

题型 10 由切线或法线的轴截距求三角形面积

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **乘积函数求导：** 曲线 $y=2x\cos x$ 的右边是两函数的乘积。一个因子求导时，另一个因子保留，再将两项相加。导数 y' 表示切线斜率，$y'(\pi)$ 表示在 $x=\pi$ 处的值。

$$(2x)'=2$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$y' = (2x)'\cos x + 2x(\cos x)' = 2\cos x - 2x\sin x$$

$y'(\pi) = 2\cos\pi - 2\pi\sin\pi =$ _____

② **复合函数求导：**正弦、对数内含另一式子时，求导还要乘 _____。角用弧度，对数真数须大于 0。与 x^2 相乘时，仍按乘积求导。

$(\sin x)' = \cos x$
$(\sin(2x-\pi))' = \cos(2x-\pi)\times 2 = 2\cos(2x-\pi)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\ln(x^2+1))' = \frac{1}{x^2+1}\times 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^2\ln(x^2+1))' = 2x\ln(x^2+1) + x^2\times\frac{2x}{x^2+1} = 2x\ln(x^2+1) + \frac{2x^3}{x^2+1}$$

③ **确定横轴交点：**横轴上的点纵坐标为 _____。记角为 t，整数为 k，正弦为零时满足下式。如有以下方程及区间，可筛出唯一的横坐标。

$$\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$$

$$\sin(2x-\pi) = 0,\quad 0 < x < \pi$$

$$2x - \pi = k\pi$$

$$x = \frac{(k+1)\pi}{2}$$

$$0 < \frac{(k+1)\pi}{2} < \pi$$

$$-1 < k < 1$$

$$k = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

④ **写出法线方程：**在 $(\pi, -2\pi)$ 处，法线与切线垂直。记切线、法线斜率为 m_t、m_n，此处两者存在且 $m_t \neq 0$。把该点坐标和法线斜率代入点斜式。

$$m_t m_n = -1$$

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y - (-2\pi) = \frac{1}{2}(x - \pi)$$

⑤ **求出两轴截距：**将法线方程整理后，分别求两轴交点。横轴交点令 _____，纵轴交点令 _____。

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5\pi}{2}$$

与 x 轴相交　　与 y 轴相交

$$0=\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{2}$$

$$x=5\pi$$

$P(5\pi,0)$

$$y=\frac{1}{2}\times 0-\frac{5\pi}{2}=-\frac{5\pi}{2}$$

$Q(0,-\frac{5\pi}{2})$

⑥ **计算三角形面积：**三角形 POQ 在原点 O 处是直角。底和高取相应截距的 _____。记三角形面积为 S，用底乘高的一半计算。

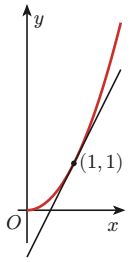
$$OP=|5\pi|=5\pi$$

$$OQ=\left|-\frac{5\pi}{2}\right|=\frac{5\pi}{2}$$

$$S=\frac{1}{2}\times 5\pi\times\frac{5\pi}{2}$$

⑦ 某点导数等于切线斜率

$$f(x)=x^2,\quad f'(1)=2$$



填空：①-2　②内层导数　③$0$　④$y=0$　⑤$x=0$　⑥绝对值

点石成金　题目出现切线或法线与两坐标轴相交，求其与原点围成的三角形面积时，先求直线方程，再求两轴截距。

例 1　[2024 · October/November 0606/21 Q7]

A curve has equation $y=2x\cos x$. The normal to the curve at $(\pi,-2\pi)$ meets the x-axis and y-axis at points P and Q. Find the exact area of triangle POQ.

曲线的方程为 $y=2x\cos x$。该曲线在点 $(\pi,-2\pi)$ 处的法线与 x 轴、y 轴分别交于点 P、Q。求三角形 POQ 面积的精确值。

解答　由乘积求导法则得

$y'=2\cos x-2x\sin x$。在 $(\pi,-2\pi)$ 处，切线斜率为

$m_t=2\cos\pi-2\pi\sin\pi=-2$。∵ 法线与切线垂直，∴ 法线斜率为

$m_n=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$。法线方程为

$y+2\pi=\frac{1}{2}(x-\pi)$，

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{2}$。令 $y=0$，得

$x=5\pi$，

$P(5\pi,0)$。令 $x=0$，得

$y=-\frac{5\pi}{2}$，

$Q(0,-\frac{5\pi}{2})$。∵ 两坐标轴垂直，∴

$S_{POQ}=\frac{1}{2}\times|5\pi|\times\left|-\frac{5\pi}{2}\right|=\frac{25\pi^2}{4}$。答：三角形 POQ 的面积为 $\frac{25\pi^2}{4}$。

方法：先看法线经过的曲线点，求该点导数，再求法线方程与截距。

辨析：截距是带符号的坐标，轴上距离是截距的绝对值。

针对练习

1. [2023 · February/March 0606/22 Q11]

提示：先看横坐标区间，比较角的范围与正弦零点的位置。

The normal to the curve $y = \sin(4x - \pi)$ at the point $A(a, 0)$, where $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, meets the y-axis at the point B. Find the exact area of triangle OAB, where O is the origin.

曲线 $y = \sin(4x - \pi)$ 在点 $A(a, 0)$ 处的法线与 y 轴交于点 B，其中 $\frac{\pi}{2} < a < \pi$。求三角形 OAB 面积的精确值，其中 O 为原点。

✓ **答案**

$$\frac{9\pi^2}{128}$$

解析 ∵ 点 $A(a, 0)$ 在曲线上，∴

$\sin(4a - \pi) = 0$。由题设区间得

$\frac{\pi}{2} < a < \pi$，

$\pi < 4a - \pi < 3\pi$。此区间内，正弦为零的角为 2π，故

$4a - \pi = 2\pi$，

$a = \frac{3\pi}{4}$。对曲线方程求导，得

$y' = 4\cos(4x - \pi)$。在点 A 处，切线斜率为

$m_t = 4\cos(2\pi) = 4$。法线斜率为

$m_n = -\frac{1}{4}$。法线方程为

$y = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$，

$y = -\frac{x}{4} + \frac{3\pi}{16}$。令 $x = 0$，得

$y = \frac{3\pi}{16}$，

$B\left(0, \frac{3\pi}{16}\right)$。∵ OA 与 OB 垂直，∴

$S_{OAB} = \frac{1}{2} \times \frac{3\pi}{4} \times \frac{3\pi}{16} = \frac{9\pi^2}{128}$。答：三角形 OAB 的面积为 $\frac{9\pi^2}{128}$。

2. [2026 · May/June 0606/21 Q10]

提示：求导时看清内外层，求截距后比较坐标符号与长度。

A curve has equation $y = x^2 \ln(3x^2 + 5)$.

The normal to the curve at the point where $x = -1$ meets the x-axis at the point P and the y-axis at the point Q.

Find the area of the triangle OPQ, where O is the origin.
Give your answer correct to 3 significant figures.

曲线的方程为 $y = x^2 \ln(3x^2 + 5)$。该曲线在 $x = -1$ 处的法线与 x 轴交于点 P，与 y 轴交于点 Q。求三角形 OPQ 的面积，其中 O 为原点。答案保留 3 位有效数字。

✓ **答案** 12.8（3 位有效数字）

解析 当 $x = -1$ 时，

$y = (-1)^2 \ln(3(-1)^2 + 5) = \ln 8$。由乘积求导及复合函数求导得

$y' = 2x\ln(3x^2 + 5) + x^2 \times \frac{6x}{3x^2+5} = 2x\ln(3x^2 + 5) + \frac{6x^3}{3x^2+5}$。在 $x = -1$ 处，切线斜率为

$m_t = -2\ln 8 - \frac{6}{8} = -2\ln 8 - \frac{3}{4}$。法线斜率为

$m_n = -\frac{1}{-2\ln 8 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2\ln 8 + \frac{3}{4}}$。法线方程为

$y - \ln 8 = \frac{x+1}{2\ln 8 + \frac{3}{4}}$。令 $y = 0$，得

$x + 1 = -\left(2\ln 8 + \frac{3}{4}\right)\ln 8$，

$x = -\left(2\ln 8 + \frac{3}{4}\right)\ln 8 - 1$。令 $x = 0$，得

$y = \ln 8 + \frac{1}{2\ln 8 + \frac{3}{4}}$。∵ 横截距为负，纵截距为正，∴

$OP = \left(2\ln 8 + \frac{3}{4}\right)\ln 8 + 1$，

$OQ = \ln 8 + \frac{1}{2\ln 8 + \frac{3}{4}}$。三角形的面积为

$S_{OPQ}=\frac{1}{2}\left(\left(2\ln 8+\frac{3}{4}\right)\ln 8+1\right)\left(\ln 8+\frac{1}{2\ln 8+\frac{3}{4}}\right)\approx 12.8$。答：三角形 OPQ 的面积为 12.8，结果保留 3 位有效数字。

题型 11　用切线或法线条件反求曲线参数

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **过点条件代入：**曲线上 $x=2$ 的点，也在所给法线上。将横坐标代入曲线，再将所得坐标代入法线。

$$y=\frac{4}{2^2}+2a+7=8+2a$$

$$b=2+4(8+2a)$$

② **切线斜率求导：**曲线含 $\frac{4}{x^2}$，先写成 $4x^{-2}$。幂函数按下式求导，n 为常数，参数也视为常数。

$$\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$$

$$\frac{d(ax+7)}{dx}=a$$

$$\frac{dy}{dx}=4(-2)x^{-3}+a=-\frac{8}{x^3}+a$$

导数在 $x=2$ 的值为_____，即该点的切线斜率。

③ **法线斜率读取：**直线写成下式时，m 是斜率，c 是纵截距。

$$y=mx+c$$

本例将 y 的系数化为 1。

$$x+4y=b$$

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{b}{4}$$

故法线斜率为_____。

④ **垂直条件列式：**切线与法线垂直，斜率分别记为 m_t、m_n。两斜率均存在时，斜率之积为_____。

$$m_tm_n=-1$$

将本例的两个斜率代入。

$$(a-1)\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$$

$$a-1=4$$

⑤ **指数复合求导：**如 $y=e^{\frac{3}{x}}$，其中 e 为自然常数。指数含 x，先记 $u=\frac{3}{x}$。对 e^u 求导后，乘指数 u 的导数。

$$u=3x^{-1}$$

$$\frac{du}{dx}=-3x^{-2}=-\frac{3}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^u\frac{du}{dx}=e^{\frac{3}{x}}\left(-\frac{3}{x^2}\right)=-\frac{3}{x^2}e^{\frac{3}{x}}$$

⑥ **过原点求斜率：**过 $(0,0)$ 与 $(2,6)$ 的直线，其斜率为

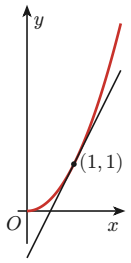
$$m=\frac{6-0}{2-0}=3$$

法线过原点与曲线点 (x_0,y_0) 时同理。其中 $x_0\neq 0$。

$$m_n = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0}$$

⑦ 某点导数等于切线斜率

$$f(x) = x^2, \quad f'(1) = 2$$



填空：①$a-1$　②$-\frac{1}{4}$　③-1

点石成金　题目出现曲线上一点的法线方程或法线经过某点时，先求导，并由法线条件求切线斜率。

例 1 [2025 · May/June 0606/13 Q12]

The normal to the curve $y = \frac{4}{x^2} + ax + 7$ at the point where $x = 2$ has equation $x + 4y = b$.

Find the values of a and b.

曲线

$$y = \frac{4}{x^2} + ax + 7$$

在 $x = 2$ 处的法线方程为 $x + 4y = b$。
求 a 和 b 的值。

解答 由法线方程得

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{b}{4}$$

∴ 法线斜率为 $-\frac{1}{4}$，切线斜率为 4。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{x^3} + a$$

当 $x = 2$ 时，

$$a - \frac{8}{2^3} = 4$$

$$a = 5$$

将 $x = 2$、$a = 5$ 代入曲线方程，得

$$y = \frac{4}{2^2} + 5 \times 2 + 7 = 18$$

∵ 点 $(2, 18)$ 在法线上，

$$b = 2 + 4 \times 18 = 74$$

答：$a = 5$，$b = 74$。

方法：看法线方程，先化成斜截式，再由垂直关系求切线斜率。

辨析：切线斜率是该点的导数值，法线斜率是非零切线斜率的负倒数。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/13 Q12(b)]

提示：比较过原点与垂直关系所得的法线斜率，再看参数符号。

A curve has equation $y = \mathrm{e}^{\frac{2a}{x}}$ where a is a positive constant.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in terms of a.

The normal to the curve at the point where $x = a$ passes through the origin.

(b) Find the value of a.

一条曲线的方程为 $y = e^{2\frac{a}{x}}$，其中 a 为正常数。

(a) 用 a 表示 $\frac{dy}{dx}$。

曲线上 $x = a$ 处的法线经过原点。

(b) 求 a 的值。

✓ **答案**　(a) $\frac{dy}{dx} = -2\frac{a}{x^2}e^{2\frac{a}{x}}$；(b) $a = \sqrt{2}e^2$。

解析　(a) 令 $u = 2\frac{a}{x}$，由于 a 为常数，

$$\frac{du}{dx} = -2\frac{a}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^u\frac{du}{dx} = -2\frac{a}{x^2}e^{2\frac{a}{x}}$$

(b) 当 $x = a$ 时，

$$y = e^{2\frac{a}{a}} = e^2$$

$$m_t = -2\frac{a}{a^2}e^{2\frac{a}{a}} = -2\frac{e^2}{a}$$

由切线与法线垂直，得

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{a}{2e^2}$$

∵ 法线经过 $(0,0)$ 与 (a,e^2)，且 $a > 0$，

$$m_n = \frac{e^2 - 0}{a - 0} = \frac{e^2}{a}$$

∴

$$\frac{a}{2e^2} = \frac{e^2}{a}$$

$$a^2 = 2e^4$$

由 $a > 0$，取正根，得

$$a = \sqrt{2}e^2$$

答：(a) $\frac{dy}{dx} = -2\frac{a}{x^2}e^{2\frac{a}{x}}$；(b) $a = \sqrt{2}e^2$。

2. [2022 · October/November 0606/22 Q3]

提示：法线斜率已知，先由垂直关系求切线斜率。

In this question a and b are constants.

The normal to the curve $y=\frac{a}{x}+3x-2$ at the point where $x=1$ has equation $y=-\frac{1}{4}x+b$. Find the values of a and b. [6]

本题中，a和b为常数。曲线

$$y=\frac{a}{x}+3x-2$$

在$x=1$处的法线方程为$y=-\frac{1}{4}x+b$。求a和b的值。

✓ **答案** $a=-1$，$b=\frac{1}{4}$。

解析 由法线方程知，法线斜率为$-\frac{1}{4}$。∵ 切线与法线垂直，∴ 切线斜率为4。

$$\frac{dy}{dx}=-ax^{-2}+3=-\frac{a}{x^2}+3$$

当$x=1$时，

$$-\frac{a}{1^2}+3=4$$

$$a=-1$$

将$x=1$、$a=-1$代入曲线方程，得

$$y=\frac{-1}{1}+3\times 1-2=0$$

∵ 点$(1,0)$在法线上，

$$0=-\frac{1}{4}\times 1+b$$

$$b=\frac{1}{4}$$

答：$a=-1$，$b=\frac{1}{4}$。

3. [2022 · October/November 0606/23 Q2]

提示：切点处的导数值等于所给切线的斜率。

The tangent to the curve $y=ax^2-5x+2$ at the point where $x=2$ has equation $y=7x+b$. Find the values of the constants a and b.

曲线

$$y=ax^2-5x+2$$

在$x=2$处的切线方程为$y=7x+b$。求常数a和b的值。

✓ **答案** $a=3$，$b=-10$。

解析 由切线方程知，切线斜率为7。

$$\frac{dy}{dx}=2ax-5$$

当$x=2$时，

$$2a\times 2-5=7$$

$$4a=12$$

$$a = 3$$

将$x = 2$、$a = 3$代入曲线方程，得

$$y = 3 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 4$$

∵ 点$(2, 4)$在切线上，

$$4 = 7 \times 2 + b$$

$$b = -10$$

答：$a = 3$，$b = -10$。

4. [2023 · October/November 0606/21 Q5]

提示：看法线斜率与指定点导数值的关系，再把曲线点代回法线。

In this question p and q are constants.

The normal to the curve $y = \frac{p}{x^2} + 5x - 2$, at the point where $x = 1$, has equation $y = -x + q$.

Find the values of p and q.

本题中，p 和 q 为常数。
曲线

$$y = \frac{p}{x^2} + 5x - 2$$

在 $x = 1$ 处的法线方程为 $y = -x + q$。
求 p 和 q 的值。

✓ **答案** $p = 2$，$q = 6$。

解析 由法线方程 $y = -x + q$，得法线斜率为 -1。∵ 切线与法线垂直，∴ 切线斜率为 1。

$$\frac{dy}{dx} = -2\frac{p}{x^3} + 5$$

当 $x = 1$ 时，

$$-2p + 5 = 1$$

$$p = 2$$

将 $x = 1$、$p = 2$ 代入曲线方程，得

$$y = \frac{2}{1^2} + 5 \times 1 - 2 = 5$$

∵ 点 $(1, 5)$ 在法线上，

$$5 = -1 + q$$

$$q = 6$$

答：$p = 2$，$q = 6$。

题型 12 先求切线或法线再求围成面积

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **求导求出斜率：**曲线写成 $y=f(x)$，$f'(x)$ 在某点的值是该点的_____斜率。根式和负幂求导时，还须乘括号内的导数。

$$f(x)=x^2-9x+18$$

$$f'(x)=2x-9$$

$$f'(5)=2\times5-9=1$$

根式求导

$\left(\sqrt{2x+1}\right)'=\left(\frac{1}{2}\right)(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\times2=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

负幂求导

$\left((2x+1)^{-1}\right)'=-(2x+1)^{-2}\times2=-\frac{2}{(2x+1)^2}$

② **写出直线方程：**过点 (x_0,y_0)、斜率为 m 的直线满足下式。切线与法线互相_____。

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

切线斜率

$m_t=f'(x_0)$

法线斜率

$m_n=-\frac{1}{f'}(x_0)\quad(f'(x_0)\neq0)$

本例在 $x=5$ 处求法线，代入切点和法线斜率。

$$y_0=5^2-9\times5+18=-2$$

$$m_n=-\frac{1}{1}=-1$$

$$y+2=-(x-5)$$

$$y=-x+3$$

③ **求出边界横坐标：**曲线与直线相交时，联立方程求交点横坐标。边界含 x 轴时，令 $y=0$ 求各自的交点。

$$x^2-9x+18=-x+3$$

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)=0$$

$$x=3\quad\text{或}\quad x=5$$

直线与横轴相交

$$-x+3=0$$

$x=3$

曲线与横轴相交

$$x^2-9x+18=(x-3)(x-6)=0$$

$x=3\quad$ 或 $\quad x=6$

④ **求出积分表达式：**本例各项分别积分，幂指数加一后再除以新指数，C 为积分常数。括号内是一次式时，积分还须除以 x 的系数。下式中 ln 表示自然对数，对数积分的区间不得跨过分母的零点。

$$\int(x^2-9x+18)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-9\frac{x^2}{2}+18x+C$$

根式积分

$$\int\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\times\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$

$=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C$

倒数积分

$\int\frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

⑤ **两线之间面积：**本例在 $3<x<5$ 时，直线位于曲线上方。两线之间的面积按_____积分。若 $F'(x)$ 等于被积函数，定积分等于上限处的 F 值减下限处的 F 值。

$$S=\int_3^5[(-x+3)-(x^2-9x+18)]\,\mathrm{d}x=\int_3^5(-x^2+8x-15)\,\mathrm{d}x$$

$$F(x)=-\frac{x^3}{3}+4x^2-15x$$

$$S = F(5) - F(3) = -\frac{50}{3} - (-18) = \frac{4}{3}$$

⑥ **含横轴的面积：**阴影还以 x 轴为边界时，可用完整图形面积减去未涂色部分。以下两例的切点均为 $(1,1)$，三角形面积均按底乘高的一半计算。

曲线在切线上方

曲线为 $y = x^2$，切线为 $y = 2x - 1$。

两者与 x 轴的交点横坐标分别为 0、$\frac{1}{2}$。

$$S = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 1$$

$$= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}$$

切线在曲线上方

曲线为 $y = \sqrt{x}$，切线为 $y = \frac{x+1}{2}$。

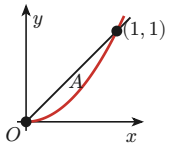
两者与 x 轴的交点横坐标分别为 0、-1。

$$S = \frac{1}{2} \times (1 - (-1)) \times 1 - \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 1 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}$$

⑦ 同区间内，上方减下方

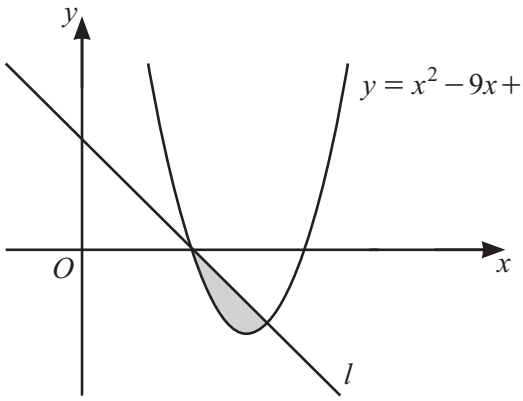
$$y = x,\quad y = x^2,\quad 0 \le x \le 1$$



填空：①切线　②垂直　③上方减下方

点石成金　题目出现曲线、切线或法线及阴影面积时，先求直线方程，再确定阴影边界和积分区间。

例 1　[2025 · October/November 0606/11 Q10]



The diagram shows the curve $y = x^2 - 9x + 18$ and the line l, which is the normal to this curve at the point where $x = 5$.

Find the area of the shaded region.

图中画出了曲线 $y = x^2 - 9x + 18$ 及直线 l。直线 l 是这条曲线在横坐标为 5 的点处的法线。
图中 O 为坐标原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。阴影部分由曲线与直线 l 在两个交点之间的部分围成。
求阴影部分的面积。

解答　由曲线方程得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 9$。

当 $x = 5$ 时，

$y = 5^2 - 9 \times 5 + 18 = -2$，

$m_t = 2 \times 5 - 9 = 1$。

∵ 法线与切线垂直，∴ 法线斜率为

方法：先看切点横坐标，从求导并换算法线斜率起手。

$m_n = -\frac{1}{1} = -1$。
法线 l 的方程为
$y + 2 = -(x - 5)$,
$y = -x + 3$。
联立曲线与法线方程，得
$x^2 - 9x + 18 = -x + 3$,
$(x - 3)(x - 5) = 0$,
$x = 3$ 或 $x = 5$。
在 $3 < x < 5$ 时，法线位于曲线上方，故阴影面积为

$$S = \int_3^5 [(-x + 3) - (x^2 - 9x + 18)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_3^5 (-x^2 + 8x - 15)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 15x\right]_3^5$$

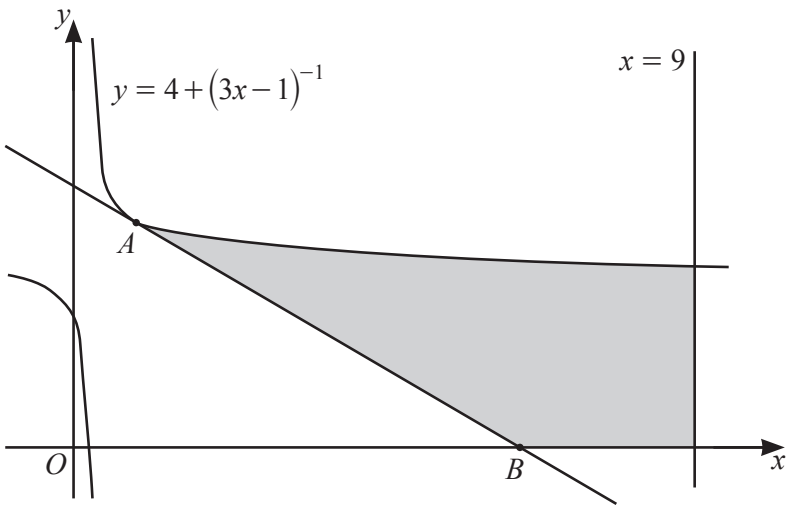
$$= -\frac{50}{3} - (-18)$$

$= \frac{4}{3}$。
答：阴影部分的面积为 $\frac{4}{3}$ 平方单位。

! 辨析：定积分是带符号的累积，面积是上下边界之差的积分。

针对练习

1. [2024 · May/June 0606/23 Q9]
提示：看切线横轴截点，比较三角形底边与积分区间。



The diagram shows a sketch of part of the curve $y = 4 + (3x-1)^{-1}$ and the line $x = 9$.
The point A has x-coordinate 1. The tangent to the curve at A meets the x-axis at the point B.
Find the area of the shaded region.

图中画出了曲线 $y = 4 + (3x - 1)^{-1}$ 的一部分及直线 $x = 9$ 的示意图。点 A 的横坐标为 1。曲线在 A 点处的切线与 x 轴交于点 B。图中 O 为坐标原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。阴影区域以曲线上的点 A 为左端，由曲线、线段 AB、x 轴及直线 $x = 9$ 围成。求阴影部分的面积。

✓ **答案** $\frac{37}{2}+\frac{1}{3}\ln 13 \approx 19.4$ 平方单位

解析 当 $x=1$ 时，

$y=4+(3\times 1-1)^{-1}=\frac{9}{2}$，

故 $A\left(1,\frac{9}{2}\right)$。

由曲线方程得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-3(3x-1)^{-2}$。

在 A 点处，切线斜率为

$m=-3(3\times 1-1)^{-2}=-\frac{3}{4}$。

切线方程为

$y-\frac{9}{2}=-\frac{3}{4}(x-1)$，

$y=-\frac{3}{4}x+\frac{21}{4}$。

令 $y=0$，得

$-\frac{3}{4}x+\frac{21}{4}=0$，

$x=7$，

故 $B(7,0)$。

图中阴影面积等于曲线下方的面积减去三角形面积。

在 $1\le x\le 9$ 上，$3x-1>0$，故

$$S=\int_1^9\left[4+(3x-1)^{-1}\right]\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\times(7-1)\times\frac{9}{2}$$

$$=\left[4x+\frac{1}{3}\ln(3x-1)\right]_1^9-\frac{27}{2}$$

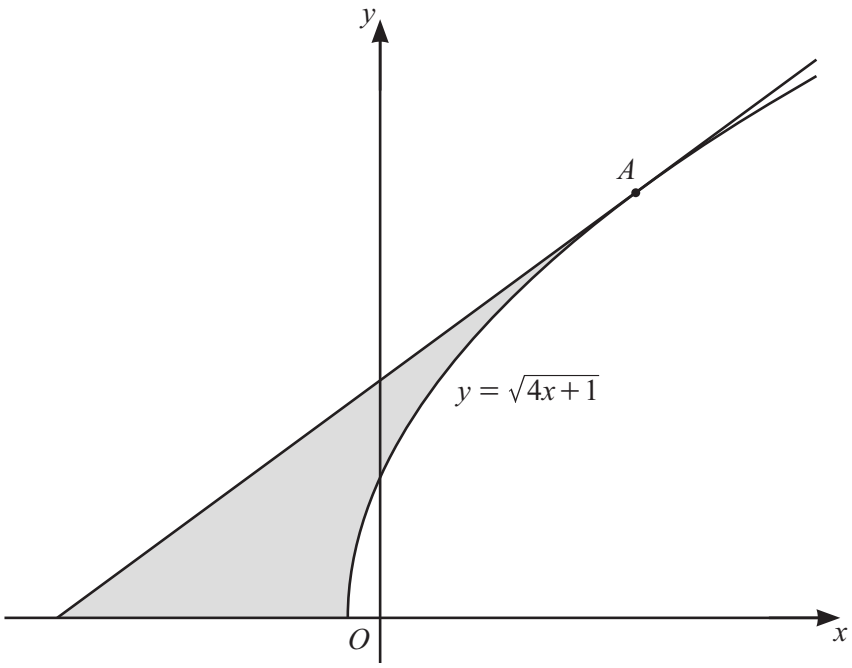
$$=36+\frac{1}{3}\ln 26-4-\frac{1}{3}\ln 2-\frac{27}{2}$$

$$=\frac{37}{2}+\frac{1}{3}\ln 13$$

≈ 19.4。

答：阴影部分的面积为 $\frac{37}{2}+\frac{1}{3}\ln 13$ 平方单位，约为 19.4 平方单位。

2. [2025 · May/June 0606/11 Q9]
提示：看两条边界的横轴截点，再比较切线与曲线的上下位置。



The point A with x-coordinate 2 lies on the curve $y = \sqrt{4x+1}$.
The diagram shows part of this curve and the tangent to the curve at A.

Find the area of the shaded region enclosed by the curve, the tangent and the x-axis.

横坐标为 2 的点 A 位于曲线 $y = \sqrt{4x+1}$ 上。
图中画出了这条曲线的一部分及曲线在 A 点处的切线。图中 O 为坐标原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。
求由曲线、切线及 x 轴围成的阴影部分的面积。

✓ **答案** $\frac{9}{4}$ 平方单位

解析 当 $x = 2$ 时，
$y = \sqrt{4 \times 2 + 1} = 3$，
故 $A(2, 3)$。
由曲线方程得
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}} \times 4 = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$。
在 A 点处，切线斜率为
$m = \frac{2}{\sqrt{4\times 2+1}} = \frac{2}{3}$。
切线方程为
$y - 3 = \frac{2}{3}(x-2)$，
$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$。
令切线方程中的 $y = 0$，得
$\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0$，
$x = -\frac{5}{2}$。
令曲线方程中的 $y = 0$，得
$\sqrt{4x+1} = 0$，
$x = -\frac{1}{4}$。
在 $-\frac{1}{4} \le x \le 2$ 上，切线位于曲线上方，阴影面积等于三角形面积减去曲线下方的面积。

$$S = \frac{1}{2} \times \left(2 - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) \times 3 - \int_{-\frac{1}{4}}^{2} \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{27}{4} - \left[\frac{1}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{4}}^{2}$$

$$= \frac{27}{4} - \frac{1}{6} \times 9^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{27}{4} - \frac{9}{2}$$

$= \frac{9}{4}$。

答：阴影部分的面积为 $\frac{9}{4}$ 平方单位。

题型 13　令一阶导数为零求驻点

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **驻点的含义：**本例研究的曲线为

$$y = \frac{(3x-4)^{\frac{1}{3}}}{2x+1}$$

曲线上切线平行于 x 轴的点称为驻点。导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 表示切线斜率，驻点处导数为 _____。

② **基本函数求导：**撇号表示对 x 求导，u, v 表示 x 的函数。c, d, r 为常数，复合函数求导须乘内层函数的 _____。

以下公式用于函数与导数均有定义处。

幂函数求导

$$\left((3x-4)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(3x-4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 = (3x-4)^{-\frac{2}{3}}$$

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

$$(u^r)' = ru^{r-1}u'$$

$$(\sqrt{u})' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\frac{1}{u^2}\right)' = (u^{-2})' = -2\frac{u'}{u^3}$$

指数函数求导

$$\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1}$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$c' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(cu+dv)' = cu' + dv'$$

$$(2x+1)' = 2$$

③ **乘积与商求导：**母例的分子、分母都是 x 的函数，须按商求导。两个函数相乘时，分别对一个因子求导，另一个因子保持不变。

乘积求导

$$\left((x+2)^2(x-1)\right)' = 2(x+2)(x-1) + (x+2)^2$$

商的求导

母例中取

$$2(x+2)(x-1)+(x+2)^2=(x+2)(2x-2+x+2)=3x(x+2)$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$u=(3x-4)^{\frac{1}{3}}$$

$$v=2x+1$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

其中 $v\neq 0$。

④ **令导数为零：**求出导数后，令它等于零。乘积为零，至少一个因子为零；分式为零，分子为零且分母不为零。

导数为乘积

$$3x(x+2)=0$$

$x=0$ 或 $x=-2$

导数为分式

$$\frac{9-4x}{(2x+1)^2(3x-4)^{\frac{2}{3}}}=0$$

$$9-4x=0$$

须有 $x\neq -\frac{1}{2}$ 且 $x\neq \frac{4}{3}$。

⑤ **驻点方程求根：**二次方程可配成完全平方，等式两边须加同一个数。四次幂方程先求非负的 x^2，再求 x。

配方求根

$$x^2-6x-2=0$$

$$x^2-6x=2$$

$$x^2-6x+9=11$$

$$(x-3)^2=11$$

$x=3\pm\sqrt{11}$

四次幂求根

$$x^4=16$$

$$(x^2)^2=16$$

由 $x^2\geq 0$，得

$$x^2=4$$

$x=\pm 2$

⑥ **回代求取坐标：**候选值须满足题设范围，并使原式与导数均有定义。将原式记为 $y=f(x)$，x_0 表示求得的横坐标，y_0 表示对应的纵坐标。

所求为横坐标

写出各个合法的 x_0。

所求为坐标

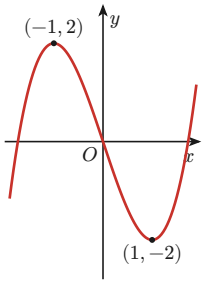
将 x_0 代回 $y=f(x)$。

$$y_0=f(x_0)$$

写出各点的坐标 (x_0,y_0)。

⑦ 驻点与局部增减

$$f(x)=x^3-3x,\quad f'(x)=3x^2-3$$



填空：①零　②导数　③原曲线方程

点石成金　题目出现求曲线上驻点的横坐标或坐标时，先求一阶导数，再令导数等于零。

例 1　[2023 · May/June 0606/11 Q8(b)]

A curve has the equation $y=\dfrac{(3x-4)^{\frac{1}{3}}}{2x+1}$.

(a) Show that $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{Ax+B}{(2x+1)^2(3x-4)^{\frac{2}{3}}}$, where A and B are integers to be found.

(b) Find the coordinates of the stationary point on the curve.

一条曲线的方程为 $y=\frac{(3x-4)^{\frac{1}{3}}}{2x+1}$。

(a) 证明 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Ax+B}{(2x+1)^2(3x-4)^{\frac{2}{3}}}$，其中 A, B 是待求的整数。

(b) 求这条曲线上驻点的坐标。

解答　由商的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(2x+1)(3x-4)^{-\frac{2}{3}}-2(3x-4)^{\frac{1}{3}}}{(2x+1)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(2x+1)-2(3x-4)}{(2x+1)^2(3x-4)^{\frac{2}{3}}}=\frac{-4x+9}{(2x+1)^2(3x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

与所给形式比较，得

$$A=-4$$

$$B=9$$

驻点处导数为零，且导数的分母不为零，故

$$-4x+9=0$$

$$x=\frac{9}{4}$$

此时原式与导数均有定义，代入原式得

$$y=\frac{\left(3\cdot\frac{9}{4}-4\right)^{\frac{1}{3}}}{2\cdot\frac{9}{4}+1}=\frac{\left(\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{11}{2}}=\left(\frac{2}{121}\right)^{\frac{1}{3}}\approx 0.255$$

答：$A=-4$，$B=9$；驻点坐标为 $\left(\frac{9}{4},\left(\frac{2}{121}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$，约为 $(2.25, 0.255)$。

方法：先看分子分母的函数结构，用商法则求导，再列驻点方程。

辨析：分子为零是求根条件，分母非零是候选值的保留条件。

拓展：驻点不一定是极值点，还须考察该点两侧的变化。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/22 Q2(c)]

提示：看导数分子的零点，再与根式分母允许的范围比较。

Variables x and y are related by the equation $y=x\sqrt{1+2x}$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(c) Find the x-coordinate of the stationary point on the curve $y=x\sqrt{1+2x}$.

变量 x 与 y 满足关系式
$y = x\sqrt{1+2x}$。
(a) 求 $\frac{dy}{dx}$。
(c) 求曲线 $y = x\sqrt{1+2x}$ 上驻点的横坐标。

✓ **答案** (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+3x}{\sqrt{1+2x}}$；(c) $x = -\frac{1}{3}$。

解析 由乘积的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+2x} + x \cdot \frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+2x} + \frac{x}{\sqrt{1+2x}} = \frac{1+3x}{\sqrt{1+2x}}$$

导数有定义时，须有

$$x > -\frac{1}{2}$$

令导数等于零，得

$$1+3x = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

因 $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$，该值符合条件。
答：(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+3x}{\sqrt{1+2x}}$；(c) 驻点的横坐标为 $-\frac{1}{3}$。

2. [2023 · February/March 0606/12 Q2(a)]
提示：看求导后两项共有的因子，提取后分别考察各因子。

A curve has equation $y = (5-x)(x+2)^2$.

(a) Find the x-coordinates of the stationary points on the curve.

一条曲线的方程为
$y = (5-x)(x+2)^2$。
(a) 求这条曲线上各驻点的横坐标。

✓ **答案** $x = -2$ 或 $x = \frac{8}{3}$。

解析 由乘积的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = -(x+2)^2 + 2(5-x)(x+2)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x+2)(-x-2+10-2x) = (x+2)(8-3x)$$

令导数等于零，得

$$(x+2)(8-3x) = 0$$

$$x+2 = 0 \text{ 或 } 8-3x = 0$$

$$x = -2 \text{ 或 } x = \frac{8}{3}$$

答：驻点的横坐标为 -2 和 $\frac{8}{3}$。

3. [2023 · October/November 0606/13 Q6(a)]
提示：看导数各因子，区分非零常数与可能为零的一次式。

The polynomial $\mathrm{q}(x)$ is given by $\mathrm{q}(x) = -\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)^2$.

(a) Find the x-coordinates of the stationary points on the curve $y = \mathrm{q}(x)$.

多项式 $q(x)$ 定义为
$q(x) = -\frac{1}{3}(2x-1)(x+3)^2$。
(a) 求曲线 $y = q(x)$ 上各驻点的横坐标。

✓ **答案** $x = -3$ 或 $x = -\frac{2}{3}$。

解析 由乘积的求导法则得

$$q'(x) = -\frac{1}{3}(2(x+3)^2 + 2(2x-1)(x+3))$$

$$q'(x) = -\frac{2}{3}(x+3)(x+3+2x-1) = -\frac{2}{3}(x+3)(3x+2)$$

令导数等于零，得

$$(x+3)(3x+2) = 0$$

$$x+3 = 0 \text{ 或 } 3x+2 = 0$$

$$x = -3 \text{ 或 } x = -\frac{2}{3}$$

答：驻点的横坐标为 -3 和 $-\frac{2}{3}$。

4. [2024 · October/November 0606/12 Q2(a)]
提示：看所求是否为坐标，横坐标求出后还须回到原函数。

It is given that $y = \mathrm{f}(x)$, where $\mathrm{f}(x) = (2x-5)(x-1)^2$.

(a) Find the coordinates of the stationary points on the curve $y = \mathrm{f}(x)$.

已知 $y = f(x)$，其中
$f(x) = (2x-5)(x-1)^2$。
(a) 求曲线 $y = f(x)$ 上各驻点的坐标。

✓ **答案** $(1, 0)$，$(2, -1)$。

解析 由乘积的求导法则得

$$f'(x) = 2(x-1)^2 + 2(2x-5)(x-1)$$

$$f'(x) = 2(x-1)(x-1+2x-5) = 6(x-1)(x-2)$$

令导数等于零，得

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x = 1 \text{ 或 } x = 2$$

分别代入原式，得

$$f(1) = (2\cdot 1 - 5)(1-1)^2 = 0$$

$$f(2)=(2\cdot 2-5)(2-1)^2=-1$$

答：驻点坐标为 $(1,0)$ 和 $(2,-1)$。

5. [2024 · May/June 0606/12 Q8(b)]

提示：看导数分子的二次式，配方求根后逐项检查分母。

A curve has equation $y=\dfrac{(3x^2-5)^{\frac{1}{3}}}{x+4}$.

(a) Show that $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ can be written in the form $\dfrac{Ax^2+Bx+C}{(3x^2-5)^{\frac{2}{3}}(x+4)^2}$, where A, B and C are integers.

(b) Hence find the x-coordinates of the stationary points on the curve. Give your answers in their simplest exact form.

一条曲线的方程为 $y=\frac{(3x^2-5)^{\frac{1}{3}}}{x+4}$。

(a) 证明 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可以写成

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{(3x^2-5)^{\frac{2}{3}}(x+4)^2}$$

的形式，其中 A,B,C 为整数。

(b) 由此求这条曲线上各驻点的横坐标，答案须用最简精确形式表示。

✓ **答案**　(a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-x^2+8x+5}{(3x^2-5)^{\frac{2}{3}}(x+4)^2}$，$A=-1$，$B=8$，$C=5$；(b) $x=4\pm\sqrt{21}$。

解析　分子求导得

$$\left((3x^2-5)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}(3x^2-5)^{-\frac{2}{3}}\cdot 6x=2x(3x^2-5)^{-\frac{2}{3}}$$

由商的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x(x+4)(3x^2-5)^{-\frac{2}{3}}-(3x^2-5)^{\frac{1}{3}}}{(x+4)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x(x+4)-(3x^2-5)}{(3x^2-5)^{\frac{2}{3}}(x+4)^2}=\frac{-x^2+8x+5}{(3x^2-5)^{\frac{2}{3}}(x+4)^2}$$

与所给形式比较，得

$$A=-1$$

$$B=8$$

$$C=5$$

令导数等于零，得

$$-x^2+8x+5=0$$

$$x^2-8x=5$$

$$x^2-8x+16=21$$

$$(x-4)^2=21$$

$$x = 4 \pm \sqrt{21}$$

两根均使 $x+4$ 与 $3x^2-5$ 不为零，故均符合条件。

答：（a）$A=-1$，$B=8$，$C=5$；（b）驻点的横坐标为 $4-\sqrt{21}$ 和 $4+\sqrt{21}$。

6. [2025 · February/March 0606/22 Q2(a)]

提示：看乘积求导后共有的因子，合并括号时核对负号。

(a) Find the x-coordinates of the stationary points on the curve $y = \frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2$.

（a）求曲线

$y = \frac{1}{2}(3-2x)(x+2)^2$

上各驻点的横坐标。

✓ **答案** $x=-2$ 或 $x=\frac{1}{3}$。

解析 由乘积的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}(-2(x+2)^2 + 2(3-2x)(x+2))$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x+2)(-(x+2)+3-2x) = (x+2)(1-3x)$$

令导数等于零，得

$$(x+2)(1-3x) = 0$$

$$x+2=0 \text{ 或 } 1-3x=0$$

$$x=-2 \text{ 或 } x=\frac{1}{3}$$

答：驻点的横坐标为 -2 和 $\frac{1}{3}$。

7. [2024 · May/June 0606/13 Q3(a)]

提示：看平方项求导产生的内层系数，回代时核对括号。

(a) Find the coordinates of the stationary points on the curve $y = (2x+1)^2(x-3)$.

（a）求曲线

$y = (2x+1)^2(x-3)$

上各驻点的坐标。

✓ **答案** $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$，$\left(\frac{11}{6}, -\frac{686}{27}\right)$。

解析 由乘积的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4(2x+1)(x-3) + (2x+1)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (2x+1)(4x-12+2x+1) = (2x+1)(6x-11)$$

令导数等于零，得

$$(2x+1)(6x-11) = 0$$

$$x=-\frac{1}{2}\text{ 或 }x=\frac{11}{6}$$

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，

$$y=\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)^2\left(-\frac{1}{2}-3\right)=0$$

当 $x=\frac{11}{6}$ 时，

$$y=\left(2\cdot\frac{11}{6}+1\right)^2\left(\frac{11}{6}-3\right)=\left(\frac{14}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)=-\frac{686}{27}$$

答：驻点坐标为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 和 $\left(\frac{11}{6},-\frac{686}{27}\right)$。

8. [2024 · October/November 0606/11 Q9(b)]

提示：看指数因子能否为零，再将候选值与题设区间比较。

The equation of a curve is $y=\dfrac{\mathrm{e}^{-3x+2}}{x+1}$ where $x<-1$.

(a) Show that $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^{-3x+2}}{(x+1)^2}(Ax+B)$ where A and B are integers to be found.

(b) Hence show that there is only one stationary point on the curve and find its exact coordinates.

一条曲线的方程为
$y=\frac{e^{-3x+2}}{x+1}$，其中 $x\leftarrow 1$。
(a) 证明
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^{-3x+2}}{(x+1)^2}(Ax+B)$，
其中 A, B 是待求的整数。
(b) 由此证明这条曲线上仅有一个驻点，并求出它的精确坐标。

✓ **答案**　(a) $A=-3$，$B=-4$；(b) 仅有一个驻点，精确坐标为 $\left(-\frac{4}{3},-3e^6\right)$。

解析　由商的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-3e^{-3x+2}(x+1)-e^{-3x+2}}{(x+1)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^{-3x+2}}{(x+1)^2}(-3(x+1)-1)=\frac{e^{-3x+2}}{(x+1)^2}(-3x-4)$$

与所给形式比较，得

$$A=-3$$

$$B=-4$$

在 $x\leftarrow 1$ 内，

$$\frac{e^{-3x+2}}{(x+1)^2}>0$$

故导数为零当且仅当

$$-3x-4=0$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

这个一次方程仅有一个解，且 $-\frac{4}{3} \leftarrow 1$，故曲线上仅有一个驻点。代入原式得

$$y = \frac{e^{-3\cdot(-\frac{4}{3})+2}}{-\frac{4}{3}+1} = \frac{e^{6}}{-\frac{1}{3}} = -3e^{6}$$

答：(a) $A=-3$，$B=-4$；(b) 曲线上仅有一个驻点，其精确坐标为 $\left(-\frac{4}{3}, -3e^{6}\right)$。

9. [2023 · October/November 0606/11 Q7(b)]

提示：看导数中两个一次因子，分别求根后代回原函数。

A curve has equation $y = \mathrm{f}(x)$, where $\mathrm{f}(x) = (2x+1)(3x-2)^2$.

(a) Show that $\mathrm{f}'(x)$ can be written in the form $2(3x-2)(px+q)$, where p and q are integers.

(b) Hence find the coordinates of the stationary points on the curve.

一条曲线的方程为 $y = f(x)$，其中 $f(x) = (2x+1)(3x-2)^2$。

(a) 证明 $f'(x)$ 可以写成

$$2(3x-2)(px+q)$$

的形式，其中 p, q 为整数。

(b) 由此求这条曲线上各驻点的坐标。

✓ **答案**　(a) $f'(x) = 2(3x-2)(9x+1)$，$p=9$，$q=1$；(b) $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$，$\left(-\frac{1}{9}, \frac{343}{81}\right)$。

解析　由乘积的求导法则得

$$f'(x) = 2(3x-2)^2 + 6(2x+1)(3x-2)$$

$$f'(x) = 2(3x-2)(3x-2+3(2x+1)) = 2(3x-2)(9x+1)$$

与所给形式比较，得

$$p = 9$$

$$q = 1$$

令导数等于零，得

$$2(3x-2)(9x+1) = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ 或 } x = -\frac{1}{9}$$

分别代入原式，得

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(2\cdot\frac{2}{3}+1\right)\left(3\cdot\frac{2}{3}-2\right)^2 = 0$$

$$f\left(-\frac{1}{9}\right) = \left(2\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)+1\right)\left(3\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)-2\right)^2 = \frac{7}{9}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{343}{81}$$

答：(a) $f'(x) = 2(3x-2)(9x+1)$；(b) 驻点坐标为 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{9}, \frac{343}{81}\right)$。

10. [2023 · May/June 0606/22 Q2(a)]
提示：看原式对零的限制，消去负幂后分两步处理四次幂。

A curve has equation $y = 32x^2 + \dfrac{1}{8x^2}$ where $x \neq 0$.

(a) Find the coordinates of the stationary points of the curve.

一条曲线的方程为
$y = 32x^2 + \frac{1}{8x^2}$，其中 $x \neq 0$。
(a) 求这条曲线上各驻点的坐标。

✓ **答案** $\left(-\frac{1}{4}, 4\right)$，$\left(\frac{1}{4}, 4\right)$。

解析 将原式写成幂的形式，得

$$y = 32x^2 + \frac{1}{8}x^{-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 64x - \frac{1}{4}x^{-3} = 64x - \frac{1}{4x^3}$$

令导数等于零，得

$$64x - \frac{1}{4x^3} = 0$$

由 $x \neq 0$，方程两边同乘 $4x^3$，得

$$256x^4 - 1 = 0$$

$$x^4 = \frac{1}{256}$$

由 $x^2 \geq 0$，得

$$x^2 = \frac{1}{16}$$

$$x = \pm\frac{1}{4}$$

两根均不为零，代入原式得

$$y = 32 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{16}} = 2 + 2 = 4$$

答：驻点坐标为 $\left(-\frac{1}{4}, 4\right)$ 和 $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$。

题型 14 令导数为零并化为指数的代数方程

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **指数函数求导：**曲线的分子、分母都含指数函数。撇号表示对式中的自变量求导，指数中的系数保留在前。

$$\left(4 + e^{2x}\right)' = 2e^{2x}, \quad \left(2 + e^{x}\right)' = e^{x}$$

$$\left(e^{-2t}\right)' = -2e^{-2t}, \quad (t)' = 1$$

② **分式函数求导：**记曲线的分子为 u，分母为 w。分母不为零时，按下式求导。

$$u = 4 + e^{2x}, \quad w = 2 + e^{x}$$

$$y=\frac{u}{w},\quad y'=\frac{u'w-uw'}{w^2}$$

③ **曲线驻点条件：**曲线的驻点满足导数为_____。本题分母恒正，令导数的分子为零。

$$w=2+e^x>0$$

$$y'=0\xrightarrow{\text{分母不为零}}u'w-uw'=0$$

④ **指数换元求解：**同一式中出现指数的平方，设指数式为新未知数。指数函数值恒为_____，舍去不合条件的根。求出指数式后，两边取自然对数。

$$e^{2x}=(e^x)^2,\quad z=e^x>0$$

$$e^{2x}+4e^x-4=0\xrightarrow{\text{换元}}z^2+4z-4=0\xrightarrow{\text{配方}}(z+2)^2=8$$

$$e^x=z\xrightarrow{\text{取自然对数}}x=\ln z$$

$$e^{2t}=3\xrightarrow{\text{取自然对数}}2t=\ln 3\xrightarrow{\text{两边除以二}}t=\frac{1}{2}\ln 3$$

⑤ **负指数化整：**方程含负指数时，先改写成倒数。两边乘正的指数式，消去分母。

$$e^{-x}=\frac{1}{e^x}$$

$$e^x+4-\frac{4}{e^x}=0\xrightarrow{\text{两边乘以指数式}}e^{2x}+4e^x-4=0$$

⑥ **运动量的导数：**位移 s 对时间 t 求导得速度 v，再求导得加速度 a。位移单位为 m，时间单位为 s。位移中的指数项连续求导如下。

$$\left(e^{2t}\right)'=2e^{2t},\quad \left(2e^{2t}\right)'=4e^{2t}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

粒子静止：

$v=0$

速度单位为 $\mathrm{m\ s^{-1}}$

速度有驻值：

$a=0$

加速度单位为 $\mathrm{m\ s^{-2}}$

填空：①0　②正数

点石成金　题目出现指数式，并求曲线驻点、速度的驻值或粒子静止时刻时，先确定应令哪个量为零，再用指数换元。

例 1　[2026 · May/June 0606/11 Q7(b)]

A curve has equation $y=\dfrac{4+\mathrm{e}^{2x}}{2+\mathrm{e}^{x}}$.

(a) Show that, when $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$, $\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^{x}-4=0$.

(b) Hence find the x-coordinate of the stationary point on the curve.
Give your answer in the form $\ln\left(a\sqrt{b}+c\right)$, where a, b and c are integers.

一条曲线的方程为

$$y=\frac{4+e^{2x}}{2+e^{x}}$$

(a) 证明：当

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

时，有

$$e^{2x}+4e^{x}-4=0$$

(b) 由此求曲线上驻点的横坐标。答案须写成 $\ln\left(a\sqrt{b}+c\right)$ 的形式，其中 a、b、c 均为整数。

解答　(a) 由分式函数的求导公式，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2e^{2x}(2+e^{x})-(4+e^{2x})e^{x}}{(2+e^{x})^{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^{3x}+4e^{2x}-4e^{x}}{(2+e^{x})^{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^{x}(e^{2x}+4e^{x}-4)}{(2+e^{x})^{2}}$$

方法：先看导数分子的指数幂次，提取公因式后作指数换元。

辨析：代数根是换元后的候选值，指数值是必须为正的量。

∵ 指数函数值恒正，

$$e^{x}>0,\quad (2+e^{x})^{2}>0$$

∴ 当导数为零时，

$$e^{2x}+4e^{x}-4=0$$

(b) 由(a)，设

$$z=e^{x}>0$$

则

$$z^{2}+4z-4=0$$

$$(z+2)^{2}=8$$

解得两根

$$z_1 = -2 + 2\sqrt{2}, \quad z_2 = -2 - 2\sqrt{2}$$

$\because$

$$z_2 < 0$$

$\therefore$ 舍去此根，得

$$e^x = 2\sqrt{2} - 2$$

两边取自然对数，得

$$x = \ln\left(2\sqrt{2} - 2\right)$$

答：驻点的横坐标为 $\ln\left(2\sqrt{2} - 2\right)$。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/22 Q9(a)]

提示：看所求是否为速度的驻值，再判断位移需求导几次。

A particle P moves in a straight line such that t seconds after passing through a fixed point O, its displacement from O, s metres, is given by $s = \mathrm{e}^{4t} - 10\mathrm{e}^{2t} + 9$.

(a) The velocity of P is $v\,\mathrm{ms}^{-1}$.

Find the value of t for which v has a stationary value.

粒子 P 沿直线运动。在经过定点 O 后的 t s 时，它相对于 O 的位移为 s m，其中

$$s = e^{4t} - 10e^{2t} + 9$$

(a) 粒子 P 的速度为 $v\,\mathrm{m\ s^{-1}}$。求速度 v 有驻值时的 t 值。

✓ **答案**

$$t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

解析 对位移关于时间求导，得速度

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4e^{4t} - 20e^{2t}$$

速度有驻值时，其导数为零，故

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 16e^{4t} - 40e^{2t} = 0$$

$$8e^{2t}\left(2e^{2t} - 5\right) = 0$$

$\because$

$$e^{2t} > 0$$

$\therefore$

$$2e^{2t} - 5 = 0$$

$$e^{2t} = \frac{5}{2}$$

两边取自然对数，得

$$2t = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

此值大于零，符合时间条件。
答：$t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$。

2. [2023 · October/November 0606/22 Q7(b)]
提示：看静止条件对应哪个量为零，再将负指数改写成倒数。

A particle is travelling in a straight line. Its displacement, s metres, from the origin at time t seconds is given by $s = 1.5e^{2t} + 2e^{-2t} - t$.

(a) Find expressions for the velocity, $v\,\text{ms}^{-1}$, and acceleration, $a\,\text{ms}^{-2}$, of the particle.

(b) Find the time, T seconds, when the particle is at rest.

一粒子沿直线运动。在时间为 t s 时，它相对于原点的位移为 s m，其中

$$s = 1.5e^{2t} + 2e^{-2t} - t$$

(a) 求粒子的速度 v 和加速度 a 的表达式，单位分别为 m s^{-1} 和 m s^{-2}。
(b) 求粒子静止时的时间 T s。

✓ **答案** (a) $v = 3e^{2t} - 4e^{-2t} - 1$，$a = 6e^{2t} + 8e^{-2t}$；(b) $T = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$。

解析 (a) 对位移关于时间求导，得

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3e^{2t} - 4e^{-2t} - 1$$

再对速度关于时间求导，得

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6e^{2t} + 8e^{-2t}$$

(b) 粒子静止时速度为零，故

$$3e^{2T} - 4e^{-2T} - 1 = 0$$

两边乘以正数 e^{2T}，得

$$3e^{4T} - e^{2T} - 4 = 0$$

设

$$z = e^{2T} > 0$$

则

$$3z^2 - z - 4 = 0$$

$$(3z - 4)(z + 1) = 0$$

解得两根

$$z_1 = \frac{4}{3},\quad z_2 = -1$$

$\because$

$$z > 0$$

$\therefore$ 舍去负根，得

$$e^{2T} = \frac{4}{3}$$

两边取自然对数，得

$$2T = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

此值大于零，符合时间条件。

答：(a) 速度为 $(3e^{2t} - 4e^{-2t} - 1)\text{m s}^{-1}$，加速度为 $(6e^{2t} + 8e^{-2t})\text{m s}^{-2}$；(b) $T = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$。

题型 15 用导数乘自变量小增量估计函数变化

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **自变量的增量：**例题中的函数记为 $f(x)$。记 Δx、Δy 分别为 x、y 的变化量。当 x 从 4 增加到 $4+h$ 时，有

$$y = f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\Delta x = (4+h) - 4 =$ _____

$$\Delta y = f(4+h) - f(4)$$

② **函数变化的估计：**记 $f'(x)$ 或 y' 为函数对 x 的导数。当 h 很小时，用起点处的导数乘 h。一般地，若函数在起点 a 可导，则有

$$\Delta y \approx f'(4)h$$

$\Delta y \approx$ _____

③ **基本函数的求导：**例题中的根式先写成幂，再按幂函数求导法则求导。下表中 n 为常数，$\ln x$ 要求 $x > 0$。三角函数的自变量均用弧度。

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

函数	导数
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

④ **复合函数的求导：** $\ln(3x+1)$ 的内层为 $3x+1$，其导数为 3。外层求导后，须乘内层导数。记 $u=u(x)$ 为内层函数，g 为外层函数。

函数	求导运算
$\ln(3x+1)$	$(\ln(3x+1))'=\frac{1}{3x+1}\cdot 3=\frac{3}{3x+1}$
e^{2x+1}	$\left(e^{2x+1}\right)'=e^{2x+1}\cdot 2=2e^{2x+1}$
$\sin^2 x$	$\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\cdot\cos x$
$\tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)'=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$(g(u(x)))'=g'(u(x))u'(x)$$

⑤ **乘积与商的求导：** 乘积 $x\ln x$ 中，两因子都随 x 变化。记 $u=u(x)$、$v=v(x)$，按下式求导。商的分母须满足 $v\neq 0$，下列演示取 $x>0$。

乘积求导

$(x\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

$(uv)'=u'v+uv'$

商的求导

$\left(\ln\frac{x}{x}\right)'=\frac{x\cdot\frac{1}{x}-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$

⑥ **求导结果的化简：** 分子含分式时，先通分，再展开合并。结果要求写成对数时，把系数移到真数的指数上。对数恒等式要求真数大于 0。

分式整理，取 $x>-1$

$\frac{x-1}{2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=\frac{(x-1)-2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}=\frac{-x-3}{2\sqrt{x+1}}$

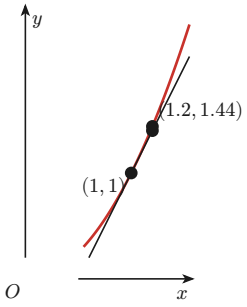
对数改写

$-\frac{1}{2}\ln 9=\ln\left(9^{-\frac{1}{2}}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$k\ln a=\ln\left(a^k\right)\quad(a>0)$

⑦ 曲线改变量与切线近似

$$f(x)=x^2,\quad x=1,\quad \Delta x=0.2$$



填空：①h　②$f'(a)h$

点石成金　题目出现自变量从某值增加到该值加小量，要求函数的近似变化量时，先求起点处的导数，再乘小量。

例 1 [2026 · February/March 0606/12 Q7]

The variables x and y are related by $y=3\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Use calculus to find the approximate change in y when x increases from 4 to $4+h$, where h is small.

变量 x 和 y 满足关系 $y=3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$。

当 x 从 4 增加到 $4+h$ 时，利用微积分求 y 的近似变化量，其中 h 很小。

解答　将根式写成幂，得

$$y=3x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$$

方法：先看自变量变化的起点 4，将根式改写成幂后求导。

$$y' = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

! 辨析：导数是起点处的变化率，函数增量是终点值与起点值之差。

当 $x = 4$ 时，

$$y'(4) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

由 x 从 4 增加到 $4 + h$，得

$$\Delta x = (4 + h) - 4 = h$$

$\because h$ 很小，$\therefore$

$$\Delta y \approx y'(4)\Delta x = \frac{11}{16}h$$

答：y 的近似变化量为 $\frac{11h}{16}$。

针对练习

1. [2025 · February/March 0606/22 Q6(b)]

提示：看自变量变化的起点之，用该处导数估计变化量。

It is given that $y = \dfrac{\ln(2x^2+1)}{x+2}$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Given that x increases from 2 to $2+h$, where h is small, find the approximate change in y.

已知 $y = \frac{\ln(2x^2+1)}{x+2}$。

(a) 求 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$。

(b) 已知 x 从 2 增加到 $2+h$，其中 h 很小，求 y 的近似变化量。

✓ **答案**　(a) $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{4\frac{x(x+2)}{2x^2+1} - \ln(2x^2+1)}{(x+2)^2}$；(b) $\Delta y \approx \left(\frac{\frac{32}{9} - \ln 9}{16}\right)h \approx 0.0849h$。

解析　由复合函数求导法则，得

$$\left(\ln(2x^2+1)\right)' = \frac{1}{2x^2+1}\cdot 4x = 4\frac{x}{2x^2+1}$$

由商的求导法则，得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{(x+2)\cdot 4\frac{x}{2x^2+1} - \ln(2x^2+1)\cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{4\frac{x(x+2)}{2x^2+1} - \ln(2x^2+1)}{(x+2)^2}$$

当 $x = 2$ 时，

$$y'(2) = \frac{4\cdot 2\cdot\frac{4}{9} - \ln 9}{4^2} = \frac{\frac{32}{9} - \ln 9}{16} \approx 0.0848957$$

由 x 从 2 增加到 $2 + h$，得

$$\Delta x = h$$

$\because h$ 很小，$\therefore$

$$\Delta y \approx y'(2)h = \left(\frac{\frac{32}{9} - \ln 9}{16}\right)h \approx 0.0849h$$

答：y 的近似变化量为 $0.0849h$。

2. [2024 · May/June 0606/13 Q6(b)]
提示：看增量从何处算起，求导后代入起点 1 。

It is given that $y = \dfrac{\ln(2x^2+1)}{x+2}$, $x \neq -2$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Given that x increases from 1 to $1+h$, where h is small, find the approximate corresponding change in y.

已知
$y = \frac{\ln(2x^2+1)}{x+2}$，$x \neq -2$。
(a) 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。
(b) 已知 x 从 1 增加到 $1+h$，其中 h 很小，求 y 相应的近似变化量。

✓ **答案** (a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4\frac{x(x+2)}{2x^2+1} - \ln(2x^2+1)}{(x+2)^2}$；(b) $\Delta y \approx \left(\frac{4-\ln 3}{9}\right)h \approx 0.322h$。

解析 由复合函数求导法则，得

$$\left(\ln(2x^2+1)\right)' = 4\frac{x}{2x^2+1}$$

由商的求导法则，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+2)\cdot 4\frac{x}{2x^2+1} - \ln(2x^2+1)}{(x+2)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4\frac{x(x+2)}{2x^2+1} - \ln(2x^2+1)}{(x+2)^2}$$

当 $x = 1$ 时，

$$y'(1) = \frac{4\cdot 1\cdot \frac{3}{3} - \ln 3}{3^2} = \frac{4-\ln 3}{9}$$

由 x 从 1 增加到 $1+h$，得

$$\Delta x = h$$

$\because h$ 很小，$\therefore$

$$\Delta y \approx y'(1)h = \left(\frac{4-\ln 3}{9}\right)h \approx 0.322h$$

答：y 的近似变化量为 $\left(\frac{4-\ln 3}{9}\right)h$，约为 $0.322h$。

3. [2025 · May/June 0606/12 Q8(b)]
提示：看起点 0 处的导数符号，判断函数变化的方向。

It is given that $y = \dfrac{\ln(3x^2+16)}{x+2}$.

$\mathrm{d}y$

(a) Find $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ when $x = 0$.

Give your answer in the form $\ln p$, where p is a constant.

(b) Given that x increases from 0 to h, where h is small, write down the approximate change in y.

已知 $y = \frac{\ln(3x^2+16)}{x+2}$。

(a) 求 $x = 0$ 时 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的值。答案写成 $\ln p$ 的形式，其中 p 为常数。

(b) 已知 x 从 0 增加到 h，其中 h 很小，写出 y 的近似变化量。

✓ **答案** (a) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$；(b) $\Delta y \approx h\ln\left(\frac{1}{2}\right)$。

解析 由复合函数求导法则，得

$$\left(\ln(3x^2+16)\right)' = 6\frac{x}{3x^2+16}$$

由商的求导法则，得

$$y' = \frac{(x+2)\cdot 6\frac{x}{3x^2+16} - \ln(3x^2+16)}{(x+2)^2}$$

当 $x = 0$ 时，

$$y'(0) = \frac{2\cdot\frac{0}{16} - \ln 16}{2^2} = -\frac{\ln 16}{4}$$

$$y'(0) = -\frac{1}{4}\cdot 4\ln 2 = -\ln 2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

故 $p = \frac{1}{2}$。

由 x 从 0 增加到 h，得

$$\Delta x = h - 0 = h$$

$\because h$ 很小，$\therefore$

$$\Delta y \approx y'(0)h = h\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

答：当 $x = 0$ 时，导数为 $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$；$y$ 的近似变化量为 $h\ln\left(\frac{1}{2}\right)$。

4. [2024 · February/March 0606/22 Q5]

提示：看对数内层的3与内层导数如何约去，再代入起点1。

Variables x and y are related by the equation $y = \frac{x}{\ln 3x}$. Use differentiation to find the approximate change in y when x increases from 1 to $1+h$, where h is small.

变量 x 和 y 满足方程 $y = \frac{x}{\ln(3x)}$。

当 x 从 1 增加到 $1+h$ 时，利用微分求 y 的近似变化量，其中 h 很小。

✓ **答案** $\Delta y \approx \left(\frac{\ln 3 - 1}{(\ln 3)^2}\right)h \approx 0.0817h$。

解析 由复合函数求导法则，得

$$(\ln(3x))' = \frac{1}{3x}\cdot 3 = \frac{1}{x}$$

由商的求导法则，得

$$y' = \frac{\ln(3x)\cdot 1 - x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(3x))^2} = \frac{\ln(3x)-1}{(\ln(3x))^2}$$

当 $x = 1$ 时，

$$y'(1) = \frac{\ln 3 - 1}{(\ln 3)^2} \approx 0.0817038$$

由 x 从 1 增加到 $1+h$，得

$$\Delta x = h$$

∵ h 很小，∴

$$\Delta y \approx y'(1)h = \left(\frac{\ln 3 - 1}{(\ln 3)^2}\right)h \approx 0.0817h$$

答：y 的近似变化量为 $\left(\frac{\ln 3-1}{(\ln 3)^2}\right)h$，约为 $0.0817h$。

5. [2024 · May/June 0606/21 Q6]

提示：看乘积两因子各自的导数，代入 3 时采用弧度。

Variables x and y are such that $y = \cos x \sin^2 x$. Use differentiation to find the approximate change in y as x increases from 3 to $3+h$, where h is small.

变量 x 和 y 满足
$y = \cos x \sin^2 x$。
当 x 从 3 增加到 $3+h$ 时，利用微分求 y 的近似变化量，其中 h 很小。

✓ **答案** $\Delta y \approx 0.274h$。

解析 由复合函数求导法则，得

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$$

由乘积的求导法则，得

$$y' = (-\sin x)\sin^2 x + \cos x\cdot 2\sin x\cos x$$

$$y' = -\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x$$

按弧度计算，当 $x = 3$ 时，

$$y'(3) = -\sin^3 3 + 2\sin 3\cos^2 3 \approx 0.2738089$$

由 x 从 3 增加到 $3+h$，得

$$\Delta x = h$$

∵ h 很小，∴

$$\Delta y \approx y'(3)h \approx 0.274h$$

答：y 的近似变化量为 $0.274h$。

6. [2025 · May/June 0606/21 Q5]

提示：看正切函数的内层，比较起点角度与内层角度。

Given that $y = x^2\tan\frac{x}{2}$, use calculus to find the approximate change in y as x increases from $\frac{\pi}{3}$ to $\frac{\pi}{3}+h$, where h is small.

已知
$y = x^2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)$，
当 x 从 $\frac{\pi}{3}$ 增加到 $\frac{\pi}{3} + h$ 时，利用微积分求 y 的近似变化量，其中 h 很小。

✓ **答案** $\Delta y \approx \left(2\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2\pi^2}{27}\right)h \approx 1.94h$。

解析 由复合函数求导法则，得

$$\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

由乘积的求导法则，得

$$y' = 2x\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时，

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\frac{\pi^2}{9}}{2\cdot\frac{3}{4}}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2\pi^2}{27} \approx 1.9402814$$

由 x 从 $\frac{\pi}{3}$ 增加到 $\frac{\pi}{3} + h$，得

$$\Delta x = h$$

$\because h$ 很小，$\therefore$

$$\Delta y \approx y'\left(\frac{\pi}{3}\right)h \approx 1.94h$$

答：y 的近似变化量为 $1.94h$。

7. [2025 · May/June 0606/23 Q8(a)]
提示：看指数内层的导数，检查乘积求导是否包含两项。

(a) It is given that $y = \mathrm{e}^{3x+2}\tan x$.

Use calculus to find the approximate change in y as x increases from 0.1 to $0.1 + h$, where h is small.

(a) 已知
$y = e^{3x+2}\tan x$。
当 x 从 0.1 增加到 $0.1 + h$ 时，利用微积分求 y 的近似变化量，其中 h 很小。

✓ **答案** $\Delta y \approx 13.1h$。

解析 由复合函数求导法则，得

$$\left(e^{3x+2}\right)' = 3e^{3x+2}$$

由乘积的求导法则，得

$$y' = 3e^{3x+2}\tan x + \frac{e^{3x+2}}{\cos^2}x$$

$$y' = e^{3x+2}\left(3\tan x + \frac{1}{\cos^2 x}x\right)$$

按弧度计算，当 $x = 0.1$ 时，

$$y'(0.1) = e^{2.3}\left(3\tan(0.1) + \frac{1}{\cos^2}(0.1)\right) \approx 13.076862$$

由 x 从 0.1 增加到 $0.1 + h$，得

$$\Delta x = h$$

$\because h$ 很小，$\therefore$

$$\Delta y \approx y'(0.1)h \approx 13.1h$$

答：y 的近似变化量为 $13.1h$。

8. [2023 · October/November 0606/11 Q10(b)]

提示：看通分后的分子，合并同类项后再代入起点 3。

(a) Given that $y = \dfrac{\sqrt{3x^2-2}}{x-4}$, show that $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ can be written in the form $\dfrac{Ax+B}{(x-4)^2\sqrt{3x^2-2}}$, where A and B are integers to be found.

(b) Hence find, in terms of h, the approximate change in y when x increases from 3 to $3 + h$, where h is small.

（a）已知 $y = \frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-4}$，证明 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可写成

$$\frac{Ax + B}{(x-4)^2\sqrt{3x^2-2}}$$

的形式，其中 A 和 B 为待求的整数，并求出它们的值。

（b）由此求出当 x 从 3 增加到 $3 + h$ 时，y 的近似变化量，用 h 表示，其中 h 很小。

✓ **答案**　（a）$A = -12$，$B = 2$；（b）$\Delta y \approx -6.8h$。

解析　由复合函数求导法则，得

$$\left(\sqrt{3x^2-2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2-2}} \cdot 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}}$$

由商的求导法则，得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{(x-4)\cdot\frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}} - \sqrt{3x^2-2}}{(x-4)^2}$$

分子通分并展开，得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{3x(x-4) - (3x^2-2)}{(x-4)^2\sqrt{3x^2-2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{3x^2 - 12x - 3x^2 + 2}{(x-4)^2\sqrt{3x^2-2}} = \frac{-12x + 2}{(x-4)^2\sqrt{3x^2-2}}$$

比较分子的系数，得

$$A = -12, \quad B = 2$$

当 $x=3$ 时，

$$y'(3)=\frac{-12\cdot 3+2}{(3-4)^2\sqrt{3\cdot 3^2-2}}=-\frac{34}{5}=-6.8$$

由 x 从 3 增加到 $3+h$，得

$$\Delta x=h$$

$\because h$ 很小，$\therefore$

$$\Delta y\approx y'(3)h=-6.8h$$

答：$A=-12$，$B=2$；y 的近似变化量为 $-6.8h$。

9. [2023 · February/March 0606/22 Q7(a)]

提示：看余弦平方求导的符号，再代入起点角度。

(a) Variables x and y are such that $y=\dfrac{1+\cos^2 x}{\tan x}$. Use differentiation to find the approximate change in y as x increases from $\dfrac{\pi}{4}$ to $\dfrac{\pi}{4}+h$, where h is small.

(a) 变量 x 和 y 满足
$y=\frac{1+\cos^2 x}{\tan x}$。
当 x 从 $\frac{\pi}{4}$ 增加到 $\frac{\pi}{4}+h$ 时，利用微分求 y 的近似变化量，其中 h 很小。

✓ **答案** $\Delta y\approx -4h$。

解析 由复合函数求导法则，得

$$(1+\cos^2 x)'=2\cos x\cdot(-\sin x)=-2\sin x\cos x$$

由商的求导法则，得

$$y'=\frac{(-2\sin x\cos x)\tan x-\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2}x}{\tan^2}$$

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(-1)\cdot 1-\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}}{1^2}=-1-3=-4$$

由 x 从 $\frac{\pi}{4}$ 增加到 $\frac{\pi}{4}+h$，得

$$\Delta x=h$$

$\because h$ 很小，$\therefore$

$$\Delta y\approx y'\left(\frac{\pi}{4}\right)h=-4h$$

答：y 的近似变化量为 $-4h$。

10. [2023 · May/June 0606/23 Q7]
提示：看分母导数的负号，核对商法则分子中的减号。

Variables x and y are such that $y=\dfrac{4x^3+2\sin 8x}{1-x}$. Use differentiation to find the approximate change in y as x increases from 0.1 to $0.1+h$, where h is small.

变量 x 和 y 满足 $y=\frac{4x^3+2\sin(8x)}{1-x}$。
当 x 从 0.1 增加到 $0.1+h$ 时，利用微分求 y 的近似变化量，其中 h 很小。

✓ **答案** $\Delta y \approx 14.3h$。

解析 由复合函数求导法则，得

$$(4x^3+2\sin(8x))' = 12x^2+2\cdot 8\cos(8x) = 12x^2+16\cos(8x)$$

$$(1-x)' = -1$$

由商的求导法则，得

$$y' = \frac{(1-x)(12x^2+16\cos(8x))-(4x^3+2\sin(8x))\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$

$$y' = \frac{(1-x)(12x^2+16\cos(8x))+4x^3+2\sin(8x)}{(1-x)^2}$$

按弧度计算，当 $x=0.1$ 时，

$$y'(0.1) = \frac{0.9(0.12+16\cos(0.8))+0.004+2\sin(0.8)}{0.9^2} \approx 14.295418$$

由 x 从 0.1 增加到 $0.1+h$，得

$$\Delta x = h$$

$\because h$ 很小，$\therefore$

$$\Delta y \approx y'(0.1)h \approx 14.3h$$

答：y 的近似变化量为 $14.3h$。

题型 16 把面积、体积写成同一长度的函数并连接变化率

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **球的面积体积：** 本例中，球的体积与表面积共用半径。半径记为 r，体积记为 V，表面积记为 S。半径以厘米计时，体积、面积的单位分别为 cm^3、cm^2。

体积	表面积
$V=$ _____	$S=$ _____

② **长度连接速率：** 时间记为 t，对时间的导数表示相应量的变化率。把体积、面积对半径求导，再乘半径的变化率。时间以秒计时，长度变化率的单位为 cm s^{-1}。

体积变化率	面积变化率
$\frac{dV}{dr}=\frac{4\pi}{3}(3r^2)=4\pi r^2$	$\frac{dS}{dr}=4\pi(2r)=8\pi r$
$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$	$\frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dr}\frac{dr}{dt}=8\pi r\frac{dr}{dt}$

③ **等式反求半径：** 两边含相同的变化率，且该变化率非零时，可约去相同因子。例如，球的两种变化率满足下式。由半径为正求出半径，再代回所求量的公式。

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=16\pi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\neq 0$$

$$4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=16\pi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$4\pi r^2=16\pi$$

$$r^2=4$$

$$r=_____$$

④ **圆柱侧面展开：**圆柱的高记为 h，曲面展开成矩形。矩形的长为底面周长，宽为圆柱的高。例如，高为半径的三倍时，先把面积写成半径的函数。

$$S=2\pi rh=2\pi r(3r)=_____$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=12\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

⑤ **圆锥统一水深：**水深为 h、水面半径为 r，先写出二者的比例关系。轴线与母线的夹角记为 θ，整锥半径、高分别记为 R、H。例如，所得关系为 $r=\frac{h}{2}$ 时，代入体积公式后求导。

已知轴线夹角

$\frac{r}{h}=\tan\theta$

已知整锥尺寸

$\frac{r}{h}=\frac{R}{H}$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2h=_____$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi h^2}{4}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

⑥ **扇形围成圆锥：**扇形半径记为 l，圆心角记为 α，角度用弧度表示。围成圆锥后，扇形半径成为母线，弧长成为底面周长。母线、底面半径与高组成直角三角形。

$$2\pi R=l\alpha$$

$$R=_____$$

$$H=\sqrt{l^2-R^2}$$

填空：①$\frac{4\pi r^3}{3}$　②$4\pi r^2$　③2　④$6\pi r^2$　⑤$\frac{\pi h^3}{12}$　⑥$\frac{l\alpha}{2\pi}$

点石成金　题目出现面积、体积与长度的变化率时，先把面积、体积写成同一长度的函数，再对时间求导。

例 1　[2025 · May/June 0606/22 Q6]

The volume, V, of a sphere is increasing at the constant rate of $2\pi\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1}$.
Find the rate of change of the surface area, S, of this sphere when the volume of the sphere is $36\pi\,\mathrm{cm}^3$.

球的体积 V 正以 $2\pi\mathrm{cm}^3\mathrm{s}^{-1}$ 的恒定速率增加。
当球的体积为 $36\pi\mathrm{cm}^3$ 时，求这个球的表面积 S 的变化率。

解答　设球的半径为 r cm，时间为 t s，则

$$V=\frac{4\pi r^3}{3}$$

方法：先看给定体积求当时半径，再用半径变化率连接面积变化率。

! 辨析：对半径求导是比较面积与半径的变化，对时间求导是求面积变化率。

当体积为 $36\pi\text{cm}^3$ 时，

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 36\pi$$

$$r^3 = 27$$

由 $r > 0$，得

$$r = 3$$

对时间求导，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

代入体积增加的速率及半径，得

$$2\pi = 4\pi(3^2)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{18}$$

球的表面积为

$$S = 4\pi r^2$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 8\pi r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 8\pi(3)\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

答：表面积的变化率为 $\frac{4\pi}{3}\text{cm}^2\text{s}^{-1}$，约为 $4.19\text{cm}^2\text{s}^{-1}$。

针对练习

1. [2023 · May/June 0606/21 Q5]

提示：看给定半径处的体积导数，用它连接两种变化率。

The volume, V, of a sphere of radius r is given by $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

The volume of a sphere is increasing at a constant rate of $24\,\text{cm}^3\,\text{s}^{-1}$. Find the rate of increase of the radius when the radius is 6 cm.

半径为 r 的球，其体积 V 由下式给出。

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

球的体积正以 $24\text{cm}^3\text{s}^{-1}$ 的恒定速率增加。求半径为 6 cm 时，半径增加的速率。

✓ **答案**

$$\frac{1}{6\pi}\text{cm s}^{-1} \approx 0.0531\text{cm s}^{-1}$$

解析 设时间为 t s。由

$$V=\frac{4\pi r^3}{3}$$

对时间求导，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

代入体积增加的速率及半径，得

$$24=4\pi(6^2)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{24}{144\pi}=\frac{1}{6\pi}$$

答：半径增加的速率为 $\frac{1}{6\pi}\text{cm s}^{-1}$，约为 0.0531cm s^{-1}。

2. [2024・February/March 0606/22 Q11]

提示：看开口条件与高半径之比，把曲面面积化成半径的函数。

A cylinder, open at both ends, has base radius r cm and height $4r$ cm. Its curved surface area is $S\,\text{cm}^2$.

Given that r varies with time t, find S at the instant when $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=6\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.

一个两端开口的圆柱，底面半径为 r cm，高为 $4r$ cm。它的曲面面积为 $S\text{cm}^2$。
已知 r 随时间 t 变化，求满足下式的时刻的 S。

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=6\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

✓ **答案**

$$\frac{9}{8\pi}\text{cm}^2$$

解析　圆柱两端开口，其曲面面积为

$$S=2\pi r(4r)=8\pi r^2$$

对时间求导，得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=16\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

由题设，得

$$16\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=6\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

约去半径的变化率，得

$$16\pi r=6$$

$$r=\frac{6}{16\pi}=\frac{3}{8\pi}$$

代回曲面面积公式，得

$$S=8\pi\left(\frac{3}{8\pi}\right)^2=\frac{9}{8\pi}$$

答：此时 $S=\frac{9}{8\pi}\text{cm}^2$。

3. [2026 · May/June 0606/22 Q12]

提示：比较两式中半径变化率的系数，并核实约去的因子非零。

A sphere has volume $V\text{cm}^3$ and radius r cm.

Given that r varies with time t, find V at the instant when $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=9\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.

一个球的体积为 $V\text{cm}^3$，半径为 r cm。

已知 r 随时间 t 变化，求满足下式的时刻的 V。

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=9\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

✓ **答案**

$$\frac{9}{2\sqrt{\pi}}\text{cm}^3\approx 2.54\text{cm}^3$$

解析 球的体积为

$$V=\frac{4\pi r^3}{3}$$

对时间求导，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

由题设，得

$$4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=9\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

约去半径的变化率，得

$$4\pi r^2=9$$

$$r^2=\frac{9}{4\pi}$$

由 $r>0$，得

$$r=\frac{3}{2\sqrt{\pi}}$$

代回体积公式，得

$$V=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\right)^3=\frac{9}{2\sqrt{\pi}}$$

答：此时 $V=\frac{9}{2\sqrt{\pi}}\text{cm}^3$，约为 2.54cm^3。

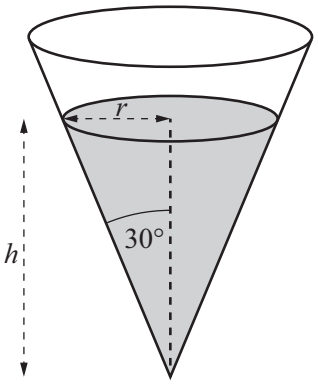
4. [2026 · May/June 0606/13 Q6(b)]

提示：看轴线夹角所对的边，用半径与水深之比消去半径。

In this question time is in seconds and lengths are in centimetres.

You are given that $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$ and $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

A water tank is shaped as a cone with its axis vertical.
The angle between the vertical axis and the sloping edge of the cone is 30°.



At time t the depth of the water is h, the volume of water in the tank is V, and the radius of the circle formed by the surface of the water is r.

(a) Show that $V = \frac{1}{9}\pi h^3$.

Water is flowing into the tank at a constant rate of $50\,\text{cm}^3\,\text{s}^{-1}$.

(b) Find the rate at which h is increasing at the instant when $h = 60$.
Give your answer in terms of π.

本题中，时间以秒为单位，长度以厘米为单位。
已知

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin 30° = \frac{1}{2},\quad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

一个水箱呈圆锥形，轴线竖直。圆锥的竖直轴线与母线之间的夹角为 30°。
在时刻 t，水深为 h，箱中水的体积为 V，水面所形成的圆的半径为 r。图中标出了水深 h、水面半径 r 及 30° 的夹角。
(a) 证明

$$V = \frac{1}{9}\pi h^3$$

水正以 $50\text{cm}^3\text{s}^{-1}$ 的恒定速率流入水箱。
(b) 求 $h = 60$ 的时刻，h 增加的速率。答案用含 π 的式子表示。

✓ **答案** (a) $V = \frac{\pi h^3}{9}$；(b) $\frac{1}{24\pi}\text{cm s}^{-1}$。

解析 由圆锥的轴截面，得

$$\frac{r}{h} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

代入圆锥体积公式，得

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 h=\frac{\pi h^3}{9}$$

故（a）得证。
对时间求导，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi h^2}{3}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

水流入的速率为 $50\mathrm{cm}^3\mathrm{s}^{-1}$。当 $h=60$ 时，

$$50=\frac{\pi(60^2)}{3}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

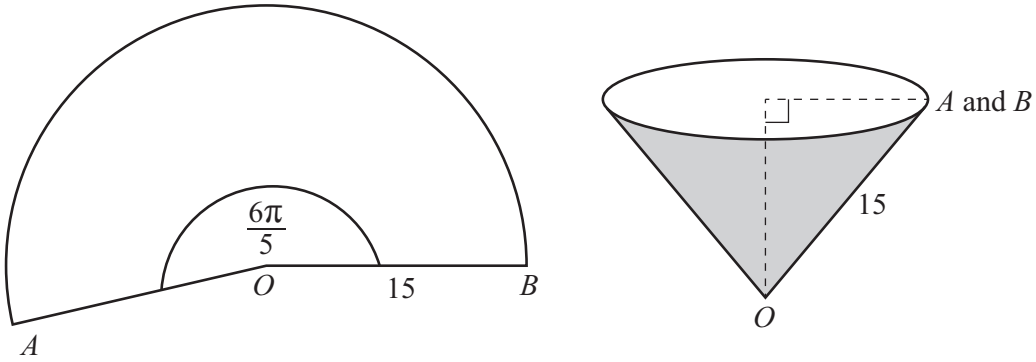
$$50=1200\pi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{50}{1200\pi}=\frac{1}{24\pi}$$

答：（a）$V=\frac{\pi h^3}{9}$；（b）水深增加的速率为 $\frac{1}{24\pi}\mathrm{cm\ s}^{-1}$。

5. [2025 · May/June 0606/21 Q9(d)]
提示：看扇形弧长对应的圆周，再用相似比把体积写成水深的函数。

In this question, all lengths are in centimetres and all angles are in radians.



The diagram shows a sector AOB of a circle, centre O, radius 15.
Angle $AOB=\frac{6\pi}{5}$.
The sector is made into a cone with points A and B touching, as shown.

The top of the cone is a horizontal circle.

(b) Find the circumference of the circular top.

(c) Hence find the radius of the circular top and the perpendicular height of the cone.

(d) Water is poured into the cone.
When the depth of the water in the cone is h, the radius of the circular top of the water is r.

(i) Find an expression for r in terms of h.

(ii) The water is poured into the cone at a constant rate of $27\,\mathrm{cm}^3$ per second.

Find the rate at which the depth of the water is rising when the depth of the water is 4.

本题中，所有长度均以厘米为单位，所有角均以弧度为单位。
图示为圆心是 O、半径为 15 的扇形 AOB，其中

$$\angle AOB = \frac{6\pi}{5}$$

将此扇形围成圆锥，使点 A 与点 B 重合，如图所示。圆锥的顶点为 O，母线长为 15。
圆锥的顶面是一个水平圆。
(b) 求顶面圆的周长。
(c) 由此求顶面圆的半径及圆锥的垂直高度。
(d) 向圆锥中倒水。当水深为 h 时，水面圆的半径为 r。
(i) 用 h 表示 r。
(ii) 水正以每秒 27cm^3 的恒定速率倒入圆锥。求水深为 4 时，水深上升的速率。

✓ **答案**　(b) 18π cm；(c) 半径 9 cm，垂直高度 12 cm；(d) (i) $r = \frac{3h}{4}$；(ii) $\frac{3}{\pi}\text{cm s}^{-1} \approx 0.955\text{cm s}^{-1}$。

解析　扇形的弧长等于圆锥顶面圆的周长，故

$$C = 15\left(\frac{6\pi}{5}\right) = 18\pi$$

设圆锥顶面圆的半径为 R cm，垂直高度为 H cm，则

$$2\pi R = 18\pi$$

$$R = 9$$

圆锥母线长为 15 cm，由勾股定理，得

$$H = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$$

水所形成的圆锥与整个圆锥相似，故

$$\frac{r}{h} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$r = \frac{3h}{4}$$

水的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3h}{4}\right)^2 h = \frac{3\pi h^3}{16}$$

设时间为 t s，对时间求导，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{9\pi h^2}{16}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

代入注水速率及水深，得

$$27 = \frac{9\pi(4^2)}{16}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$27 = 9\pi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{\pi} \approx 0.955$$

答：(b) 周长为 18π cm；(c) 半径为 9 cm，垂直高度为 12 cm；(d) (i) $r=\frac{3h}{4}$；(ii) 水深上升的速率约为 0.955cm s^{-1}。

题型 17 用链式变化率连接两个随时间变化的量

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **变化率的记号：**本例研究曲线上两个坐标随时间的变化。设时间为 t，单位为 s。在 $x=0$ 时，y 以 0.5 单位/s 的速率增加，记为下式。

$$\frac{dy}{dt}=0.5 \text{ 单位/s}$$

增加对应正变化率 | 减少对应_____变化率

② **复合函数求导：**指数或对数内含 x 时，先求内层导数。再用外层导数乘内层导数。

$$\frac{d(x^2)}{dx}=2x \qquad \frac{d(2x^2+1)}{dx}=4x$$

$$\frac{d\left(e^{x^2}\right)}{dx}=e^{x^2}\cdot 2x=2xe^{x^2} \qquad \frac{d(\ln(2x^2+1))}{dx}=\frac{1}{2x^2+1}\cdot 4x=\frac{4x}{2x^2+1}$$

③ **商式函数求导：**分子、分母都含 x 时，用商的求导法则。分子记为 u，分母记为 v，且 $v\neq 0$。

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-2)\cdot 2xe^{x^2}-e^{x^2}\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{e^{x^2}(2x(x-2)-1)}{(x-2)^2}$$

当 $x=0$ 时，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1\cdot(-1)}{(-2)^2}=-\frac{1}{4}$$

④ **连接两种速率：**已知 y 的变化率，求 x 的变化率，用_____。本例在 $x=0$ 时，两种速率满足下式。

$$0.5=-\frac{1}{4}\cdot\frac{dx}{dt}$$

一般地，当 $\frac{dy}{dx}\neq 0$ 时，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dx}}$$

⑤ **估计微小变化：**用 Δx、Δy 分别表示 x、y 的改变量。本例中，x 从 0 增至 h，且 h 很小时，

$$\Delta x=h,\quad \Delta y\approx -\frac{1}{4}\cdot h=-\frac{h}{4}$$

一般地，用变化前的导数乘 x 的改变量。

$$\Delta y\approx\frac{dy}{dx}\Delta x$$

⑥ **由函数值求导：**给出 y 的值时，先由函数关系求正切值。用 sec 表示余弦的倒数，角以弧度计。以下例用平方关系改写导数。

$$\sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$$

$$y = 1 + \tan(2 - x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(2-x)\cdot(-1) = -(1 + \tan^2(2-x))$$

$$y = 3 \xrightarrow{\text{代入函数关系}} \tan(2-x) = 3 - 1 = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = -(1 + 2^2) = -5$$

填空：①负　②链式法则

点石成金　题目出现两个量的函数关系及其中一个量随时间的变化率时，先求导并代入对应位置的值。

例 1　[2025 · October/November 0606/12 Q12(b)]

A curve has equation $y = \dfrac{e^{(x^2)}}{x-2}$ for $x < 2$.

(a) Find the value of $\dfrac{dy}{dx}$ when $x = 0$.

When $x = 0$, y is increasing at the rate of 0.5 units per second.

(b) Find the corresponding rate of change of x.

一条曲线的方程为 $y = \frac{e^{x^2}}{x-2}$，$x < 2$。

(a) 求 $x = 0$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值。

当 $x = 0$ 时，y 以 0.5 单位/s 的速率增加。

(b) 求 x 的相应变化率。

解答　由商的求导法则，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)\cdot 2xe^{x^2} - e^{x^2}}{(x-2)^2}$$

当 $x = 0$ 时，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 - 1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$$

设时间为 t，单位为 s。由 y 正在增加，得

$$\frac{dy}{dt} = 0.5$$

由链式法则，

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

方法：先看所求量和已知速率，对函数求导后代入横坐标，再连接时间变化率。

辨析：曲线斜率是纵坐标对横坐标的变化率，时间变化率是坐标对时间的变化率。

拓展：曲线斜率为负时，两个坐标的非零时间变化率异号。

$$0.5 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0.5}{-\frac{1}{4}} = -2$$

答：(a) $-\frac{1}{4}$；(b) x 的变化率为 -2 单位/s。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/12 Q7]

提示：先看对数内层和商式分母，再分清已知与所求的时间变化率。

It is given that $y = \dfrac{\ln(3x^2-1)}{x+2}$, for $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. When $x = 1$, y is increasing at the rate of h units per second. Find, in terms of h, the corresponding rate of change in x, giving your answer in exact form.

已知 $y = \frac{\ln(3x^2-1)}{x+2}$，$x > \frac{1}{\sqrt{3}}$。当 $x = 1$ 时，y 以 h 单位/s 的速率增加。求此时 x 的变化率，用含 h 的式子表示，并以精确形式作答。

✓ **答案**

$$\frac{9h}{9-\ln 2} \text{ 单位/s}$$

解析 由复合函数及商的求导法则，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)\cdot\frac{6x}{3x^2-1} - \ln(3x^2-1)}{(x+2)^2}$$

当 $x = 1$ 时，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cdot\frac{6}{2} - \ln 2}{3^2} = \frac{9-\ln 2}{9}$$

设时间为 t，单位为 s。由题意，

$$\frac{dy}{dt} = h$$

由链式法则，

$$h = \frac{9-\ln 2}{9} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{9h}{9-\ln 2}$$

答：x 的变化率为 $\frac{9h}{9-\ln 2}$ 单位/s。

2. [2025 · February/March 0606/22 Q6(c)]

提示：先看纵坐标减少所对应的符号，再与该点导数的符号比较。

It is given that $y = \dfrac{\ln\left(2x^2+1\right)}{x+2}$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Given that x increases from 2 to $2+h$, where h is small, find the approximate change in y.

(c) Given that y is decreasing by 0.4 units per second, find the corresponding rate of change in x when $x=2$.

已知 $y=\frac{\ln(2x^2+1)}{x+2}$。
(a) 求 $\frac{dy}{dx}$。
(b) 已知 x 从 2 增至 $2+h$，其中 h 很小，求 y 的近似改变量。
(c) 已知 y 以 0.4 单位/s 的速率减少，求 $x=2$ 时 x 的相应变化率。

✓ **答案** (a) $\frac{\frac{4x(x+2)}{2x^2+1}-\ln(2x^2+1)}{(x+2)^2}$；(b) $0.0849h$；(c) -4.71 单位/s。

解析 由复合函数及商的求导法则，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+2)\cdot\frac{4x}{2x^2+1}-\ln(2x^2+1)}{(x+2)^2}$$

当 $x=2$ 时，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4\cdot\frac{8}{9}-\ln 9}{4^2}=\frac{32-9\ln 9}{144}\approx 0.0848957$$

由 x 从 2 增至 $2+h$，得

$$\Delta x=(2+h)-2=h$$

因 h 很小，

$$\Delta y\approx\frac{dy}{dx}\Delta x=\frac{32-9\ln 9}{144}h\approx 0.0849h$$

设时间为 t，单位为 s。由 y 正在减少，得

$$\frac{dy}{dt}=-0.4$$

由链式法则，

$$-0.4=\frac{32-9\ln 9}{144}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-0.4\cdot 144}{32-9\ln 9}\approx -4.71$$

答：y 的近似改变量为 $0.0849h$；x 的变化率约为 -4.71 单位/s。

3. [2024 · May/June 0606/13 Q6(c)]
提示：看前问所得的该点导数，分清微小改变量与时间变化率。

It is given that $y=\dfrac{\ln(2x^2+1)}{x+2}$, $x\neq -2$.

(a) Find $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Given that x increases from 1 to $1+h$, where h is small, find the approximate corresponding change in y.

(c) When $x=1$, the rate of change in y is 3 units per second. Find the corresponding rate of change in x.

已知
$y=\frac{\ln(2x^2+1)}{x+2}$，$x\neq -2$。
(a) 求 $\frac{dy}{dx}$。
(b) 已知 x 从 1 增至 $1+h$，其中 h 很小，求 y 的相应近似改变量。
(c) 当 $x=1$ 时，y 的变化率为 3 单位/s。求 x 的相应变化率。

✓ **答案** (a) $\frac{\frac{4x(x+2)}{2x^2+1}-\ln(2x^2+1)}{(x+2)^2}$；(b) $\frac{4-\ln 3}{9}h\approx 0.322h$；(c) 9.31 单位/s。

解析 由复合函数及商的求导法则，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+2)\cdot\frac{4x}{2x^2+1}-\ln(2x^2+1)}{(x+2)^2}$$

当 $x=1$ 时，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\cdot\frac{4}{3}-\ln 3}{3^2}=\frac{4-\ln 3}{9}$$

由 x 从 1 增至 $1+h$，得

$$\Delta x=(1+h)-1=h$$

因 h 很小，

$$\Delta y\approx\frac{dy}{dx}\Delta x=\frac{4-\ln 3}{9}h\approx 0.322h$$

设时间为 t，单位为 s。由题意及链式法则，

$$\frac{dy}{dt}=3$$

$$3=\frac{4-\ln 3}{9}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{27}{4-\ln 3}\approx 9.31$$

答：y 的近似改变量为 $\frac{4-\ln 3}{9}h$；x 的变化率约为 9.31 单位/s。

4. [2023 · May/June 0606/22 Q4]
提示：从纵坐标求正切值，用平方关系改写导数，再看内层导数符号。

Variables x and y are related by the equation $y=2+\tan(1-x)$ where $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. Given that x is increasing at a constant rate of 0.04 radians per second, find the corresponding rate of change of y when $y=3$.

变量 x 与 y 满足关系式
$y=2+\tan(1-x)$，$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$。
已知 x 以 0.04 rad/s 的恒定速率增加，求 $y=3$ 时 y 的相应变化率。

✓ **答案**

$$-0.08\text{s}^{-1}$$

解析 由复合函数求导法则，

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2(1-x)\cdot(-1)=-\sec^2(1-x)$$

当 $y=3$ 时，由函数关系得

$$\tan(1-x)=3-2=1$$

由平方关系，

$$\sec^2(1-x)=1+\tan^2(1-x)=1+1^2=2$$

$$\frac{dy}{dx}=-2$$

设时间为 t，单位为 s。由题意，

$$\frac{dx}{dt}=0.04$$

由链式法则，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=-2\cdot 0.04=-0.08$$

答：y 的变化率为 -0.08s^{-1}。

5. [2022 · February/March 0606/12 Q5(c)]

提示：先求指定位置的导数，再用链式法则连接两种变化率。

Variables x and y are such that $y=\dfrac{\ln(2x^2-3)}{3x}$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(c) At the instant when $x=2$, y is increasing at the rate of 4 units per second. Find the corresponding rate of increase in x.

变量x与y满足

$$y=\frac{\ln(2x^2-3)}{3x}$$

(a) 求$\frac{dy}{dx}$。

(c) 当$x=2$时，y以每秒4个单位的速率增加。求此时x的相应增加速率。

✓ **答案** 30.2 单位/s。

解析 由复合函数求导，得

$$\frac{d(\ln(2x^2-3))}{dx}=\frac{4x}{2x^2-3}$$

由商的求导法则，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x\cdot\frac{4x}{2x^2-3}-3\ln(2x^2-3)}{9x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{3(2x^2-3)}-\frac{\ln(2x^2-3)}{3x^2}$$

当$x=2$时，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{15}-\frac{\ln 5}{12}=\frac{16-5\ln 5}{60}$$

设时间为t，单位为s。由y的增加速率，得

$$\frac{dy}{dt}=4$$

由链式法则，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$4=\frac{16-5\ln 5}{60}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{240}{16-5\ln 5}\approx 30.2$$

答：x的增加速率为30.2 单位/s。

题型 18　用函数小变化除以导数估计自变量变化

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **起点对应数值：**本例中，y 从 4 开始增加。先代入关系式，求出对应的 x。

$$4=\frac{5x+1}{x-2}$$

$$4(x-2)=5x+1$$

$$x=_____$$

② **分式函数求导：**记 $\frac{dy}{dx}$ 为 y 对 x 的导数。本例中 $x\neq 2$，按分式求导法则计算。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5(x-2)-(5x+1)}{(x-2)^2}=-\frac{11}{(x-2)^2}$$

$$x=-9 \xrightarrow{\text{代入}} \frac{dy}{dx}=_____$$

③ **小变化的估计：**记 Δx、Δy 分别为 x、y 的变化量。起点处导数非零且变化很小时，用 y 的小变化_____起点处的导数。

$$\Delta y\approx\frac{dy}{dx}\Delta x \xrightarrow{\text{移项}} \Delta x\approx\frac{\Delta y}{\frac{dy}{dx}}$$

$\Delta x>0$	$\Delta x<0$
x 增加	x 减少

④ **根式乘积求导：**遇到变量与根式相乘，分别求导后相加。根式内部含 x，还需乘内部式子的导数。

$$y=x\sqrt{1+4x}$$

$$\frac{dy}{dx}=1\cdot\sqrt{1+4x}+x\cdot\frac{4}{2\sqrt{1+4x}}=\frac{1+6x}{\sqrt{1+4x}}$$

⑤ **三角起点求法：**例如 $y=\sin(2x)$，且 $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$。当 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，先确定角的范围，再求起点。

$$0\leq 2x\leq\frac{\pi}{2}$$

$$\sin(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{结合范围}} 2x=\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{两边除以二}} x=\frac{\pi}{6}$$

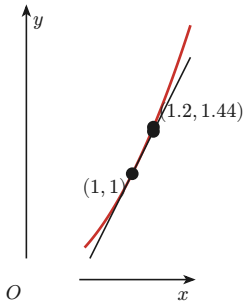
⑥ **三角函数求导：**三角函数求导时，角用弧度表示。续用上式，正弦求导后，还需乘内部角的导数。

$$\frac{dy}{dx}=\cos(2x)\cdot 2=2\cos(2x)$$

$$x=\frac{\pi}{6} \xrightarrow{\text{代入}} \frac{dy}{dx}=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$$

⑦ 曲线改变量与切线近似

$$f(x)=x^2,\quad x=1,\quad \Delta x=0.2$$



← 填空：①−9　②$-\frac{1}{11}$　③除以

点石成金　题目出现函数关系式，并求函数值小幅增加时自变量的近似变化量时，先求起点处的导数。

例 1　[2026 · May/June 0606/12 Q8]

Variables x and y are related by the equation $y=\dfrac{5x+1}{x-2}$.

Using calculus, find the approximate change in x when y increases from 4 by the small amount h.

变量 x 与 y 满足方程 $y=\frac{5x+1}{x-2}$。
用微积分求：当 y 从 4 增加一个小量 h 时，x 的近似变化量。

解答　当 $y=4$ 时，

$$4=\frac{5x+1}{x-2}$$

$$4x-8=5x+1$$

$$x=-9$$

方法：先看函数值的起点，反求对应自变量，再算该处导数。

辨析：导数是起点处的瞬时变化率，变化量之比是平均变化率。

拓展：小变化估计用曲线上起点处的切线近似曲线。

由分式求导法则，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5(x-2)-(5x+1)}{(x-2)^2}=-\frac{11}{(x-2)^2}$$

当 $x=-9$ 时，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{11}{(-9-2)^2}=-\frac{1}{11}$$

由小变化的近似关系，

$$\Delta x \approx \frac{\Delta y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{h}{-\frac{1}{11}} = -11h$$

答：x 的近似变化量为 $-11h$。

针对练习

1. [2024 · October/November 0606/22 Q2(b)]

提示：看给定自变量起点，比较函数增量与该处导数的符号。

Variables x and y are related by the equation $y = x\sqrt{1+2x}$.

(a) Find $\frac{dy}{dx}$.

(b) It is given that when $y = 12$, $x = 4$. Find the approximate change in x when y increases from 12 by the small amount 0.06.

变量 x 与 y 满足方程
$y = x\sqrt{1+2x}$。
(a) 求 $\frac{dy}{dx}$。
(b) 已知当 $y = 12$ 时，$x = 4$。当 y 从 12 增加一个小量 0.06 时，求 x 的近似变化量。

✓ **答案** (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+3x}{\sqrt{1+2x}}$；(b) $\Delta x \approx \frac{9}{650} \approx 0.0138$。

解析 (a) 由乘积求导法则，

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \sqrt{1+2x} + x \cdot \frac{2}{2\sqrt{1+2x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+2x} + \frac{x}{\sqrt{1+2x}} = \frac{1+3x}{\sqrt{1+2x}}$$

(b) 当 $x = 4$ 时，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+3\cdot 4}{\sqrt{1+2\cdot 4}} = \frac{13}{3}$$

由小变化的近似关系，

$$\Delta x \approx \frac{\Delta y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{0.06}{\frac{13}{3}} = \frac{9}{650} \approx 0.0138$$

答：(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+3x}{\sqrt{1+2x}}$；(b) x 约增加 0.0138。

2. [2025 · October/November 0606/13 Q3]

提示：先看五倍角的范围，再用起点导数衡量函数增量。

In this question you may use the values in the table below.

θ radians	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Variables x and y are related by the equation $y = \sin 5x$ where $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{10}$.

Use calculus to find the approximate change in x when y increases from $\frac{\sqrt{3}}{2}$ by the small amount 0.01.

本题可使用下表中的数值。

θ（弧度）	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

变量 x 与 y 满足方程

$y = \sin(5x)$，其中 $0 \le x \le \frac{\pi}{10}$。

用微积分求：当 y 从 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 增加一个小量 0.01 时，x 的近似变化量。

✓ **答案** $\Delta x \approx 0.004 = \frac{1}{250}$。

解析 当 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，

$$\sin(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\because 0 \le x \le \frac{\pi}{10}$，

$\therefore 0 \le 5x \le \frac{\pi}{2}$。

结合角的范围，得

$$5x = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{15}$$

对 $y = \sin(5x)$ 求导，得

$$\frac{dy}{dx} = 5\cos(5x)$$

当 $x = \frac{\pi}{15}$ 时，

$$\frac{dy}{dx} = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}$$

由小变化的近似关系，

$$\Delta x \approx \frac{\Delta y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{0.01}{\frac{5}{2}} = 0.004$$

答：x 约增加 0.004。

3. [2022 · May/June 0606/22 Q4]
提示：先按给定纵坐标和正值限制确定起点，再求导数。

Variables x and y are related by the equation $y = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ where $x > 0$. Use differentiation to find the approximate change in x when y increases from 4 by the small amount 0.01.

变量 x 与 y 满足方程

$$y = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2},\quad x > 0$$

用求导的方法，求当 y 从 4 增加一个小量 0.01 时，x 的近似变化量。

✓ **答案** $\Delta x \approx -\frac{1}{400}$，即 x 约减少 0.0025。

解析 当 $y = 4$ 时，

$$4 = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

由 $x > 0$，两边乘 x^2，得

$$4x^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(3x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad 或 \quad x = 1$$

由 $x > 0$，取起点 $x = 1$。将函数写成幂的形式，得

$$y = 1 + 2x^{-1} + x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} - 2x^{-3}$$

当 $x = 1$ 时，

$$\frac{dy}{dx} = -2 - 2 = -4$$

设 Δx、Δy 分别为 x、y 的变化量，由小变化的近似关系，

$$\Delta x \approx \frac{\Delta y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{0.01}{-4} = -\frac{1}{400}$$

答：x 的近似变化量为 $-\frac{1}{400}$，即约减少 0.0025。

4. [2023 · May/June 0606/22 Q7(b)]
提示：从函数初值反求起点，再比较函数增量与该处导数。

(b) Variables x and y are related by the equation $y = \frac{5x}{3x+2}$. Using differentiation, find the approximate change in x when y increases from 10 by the small amount 0.01.

(b) 变量 x 与 y 满足方程

$y = \frac{5x}{3x+2}$。

用微分法求：当 y 从 10 增加一个小量 0.01 时，x 的近似变化量。

✓ **答案**　$\Delta x \approx 0.00016$。

解析　当 $y=10$ 时，

$$10=\frac{5x}{3x+2}$$

$$30x+20=5x$$

$$x=-\frac{4}{5}$$

由分式求导法则，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5(3x+2)-3\cdot 5x}{(3x+2)^2}=\frac{10}{(3x+2)^2}$$

当 $x=-\frac{4}{5}$ 时，

$$3x+2=-\frac{2}{5}\neq 0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{10}{\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{125}{2}$$

由小变化的近似关系，

$$\Delta x\approx\frac{\Delta y}{\frac{dy}{dx}}=\frac{0.01}{\frac{125}{2}}=0.00016$$

答：x 约增加 0.00016。

题型 19　令目标函数导数为零并用二阶导数确认最小值

考频 ★★★☆☆

知识梳理

① **扇形面积列式：**图中半径为 r cm，圆心角为 α 弧度。扇形面积等于半径平方与圆心角乘积的_____。拼接图形的面积由各块扇形面积相加。

本例面积为 9cm^2

$$\frac{1}{2}r^2\alpha=9$$

$\alpha=\frac{18}{r^2},\quad r>0$

两块扇形的半径分别为 2 cm、3 cm，圆心角均为 1 弧度

总面积记为 $S\text{cm}^2$

$S=\frac{1}{2}\times 2^2\times 1+\frac{1}{2}\times 3^2\times 1=\frac{13}{2}$

② **沿外边界计长：**本例弧长记为 l，周长由两条半径与_____组成。拼接图形沿外边界计长，共用边不计。挖角时减去原线段，再加上替代它的圆弧。

$$l=r\alpha$$

$$P=2r+l=2r+\frac{18}{r}$$

同心扇形的半径为 3 cm、5 cm

外露径向线段长为

$5-3=2$ cm

挖去的四分之一圆半径为 t

周长改变量为

$-2t+\frac{1}{4}\times 2\pi t=-2t+\frac{\pi t}{2}$

③ **用体积消元：**圆柱或无盖方底水箱给出体积时，用体积表示高。以下长度用厘米，面积用平方厘米，体积用立方厘米。高记为 h，圆柱半径记为 r，水箱底边记为 a。

闭合圆柱体积为 12π，总表面积记为 S

$$\pi r^2 h = 12\pi$$

$$h = \frac{12\pi}{\pi r^2} = \frac{12}{r^2}$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{24\pi}{r}$$

无盖方底水箱体积为 12，金属面积记为 M

$$a^2 h = 12$$

$$h = \frac{12}{a^2}$$

$$M = a^2 + 4ah = a^2 + \frac{48}{a}$$

④ **逐项求导运算：**把周长看作半径的函数，记为 $P(r)$。$P'(r)$ 表示其一阶导数，即周长随半径的变化率。设 k, n 为常数，先将分式写成幂，再逐项求导。

$$(k)' = 0, \quad (kr^n)' = knr^{n-1}$$

$$\frac{18}{r} = 18r^{-1}$$

$$(r^2)' = 2r, \quad (r^{-1})' = -r^{-2}$$

$$P'(r) = \left(2r + 18r^{-1}\right)' = 2 - 18r^{-2} = 2 - \frac{18}{r^2}$$

⑤ **求出函数驻值：**在允许范围内，一阶导数为_____的点称为驻点。令一阶导数等于零，求出变量后代回原函数，得到驻值。长度、速度均取正值，平方或立方用相应的根还原。

本例中 $r > 0$

$$2 - \frac{18}{r^2} = 0$$

$$2r^2 = 18$$

$$r^2 = 9$$

$$r = 3$$

$$P(3) = 2 \times 3 + \frac{18}{3} = 12$$

立方方程中，设 $t > 0$

$$4t - \frac{12}{t^2} = 0$$

$$4t^3 = 12$$

$$t^3 = 3$$

$$t = \sqrt[3]{3}$$

⑥ **判定驻值性质：**对 $P'(r)$ 再求导，所得 $P''(r)$ 称为二阶导数。允许范围内二阶导数恒大于零时，驻值是_____。

$$P''(r) = \left(-18r^{-2}\right)' = 36r^{-3} = \frac{36}{r^3}$$

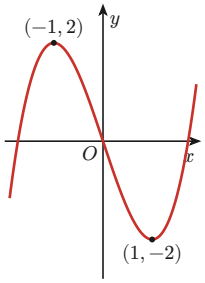
$$r > 0, \quad P''(r) > 0$$

$$P''(3) = \frac{36}{3^3} = \frac{4}{3} > 0$$

⑦

驻点与局部增减

$$f(x)=x^3-3x,\quad f'(x)=3x^2-3$$

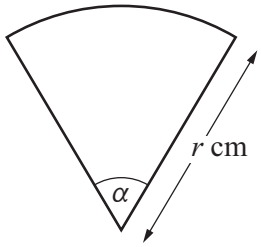


填空：①一半　②弧长　③零　④最小值

点石成金　题目出现长度或速度可变，并要求驻值或最小值时，先把所求的量表示成一个变量的函数。

例 1　[2024 · October/November 0606/23 Q4(b)]

The diagram shows a design for a logo. The logo is a sector of a circle, radius r cm, with angle α radians.



The area of the logo is $9\,\text{cm}^2$.

(a) Show that the perimeter, P cm, of the logo is given by

$$P=2r+\frac{18}{r}.$$

(b) Given that r can vary, find the stationary value of P and determine its nature.

图示为一个标志的设计。这个标志是半径为 r cm、圆心角为 α 弧度的扇形。图中半径标为 r cm，圆心角标为 α。标志的面积为 9cm^2。

(a) 证明标志的周长 P cm 满足

$$P=2r+\frac{18}{r}$$

(b) 已知 r 可以变化，求 P 的驻值，并判断这个驻值的性质。

解答　由扇形面积为 9cm^2，得

$$\frac{1}{2}r^2\alpha=9$$

$$\alpha=\frac{18}{r^2}$$

周长为两条半径与弧长之和，故

$$P=2r+r\alpha=2r+r\times\frac{18}{r^2}=2r+\frac{18}{r}$$

方法：先看面积约束，消去圆心角，再把周长写成半径的函数求导。

辨析：驻点是一阶导数为零的点，极小值是函数在附近取到的最小值。

拓展：驻点处二阶导数为零时，还需用其他方法判断驻值性质。

对 r 求导，得

$$P'(r) = 2 - \frac{18}{r^2}$$

令

$$P'(r) = 0$$

则

$$2 - \frac{18}{r^2} = 0$$

$$2r^2 = 18$$

$$r^2 = 9$$

$\because r > 0$，$\therefore$

$$r = 3$$

又

$$P''(r) = \frac{36}{r^3} > 0 \quad (r > 0)$$

$\therefore$此时 P 取得最小值。代入得

$$P = 2 \times 3 + \frac{18}{3} = 12$$

此时

$$\alpha = \frac{18}{3^2} = 2$$

圆心角符合扇形条件。

答：P 的驻值为 12 cm，是最小值，此时 $r = 3$ cm。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/21 Q11(b)]

提示：先用体积关系消去高，再看表面积各项求导后的符号。

A cylinder has radius r cm and height h cm.
The total surface area, including the two ends, is A cm^2.
The volume of the cylinder is 330 cm^3.

(a) Show that $A = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$.

(b) Given that r can vary, find the value of r that gives a stationary value for A and show that this value is a minimum.

一个圆柱的半径为 r cm，高为 h cm。
包括两个底面在内的总表面积为 Acm^2。
圆柱的体积为 330cm^3。
(a) 证明

$$A = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$$

(b) 已知 r 可以变化，求使 A 取得驻值的 r，并证明该驻值是最小值。

✓ **答案** (a) $A = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$。 (b) $r = \sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}} \approx 3.74$ cm，此时 A 取得最小值。

解析 由圆柱的体积为 330cm^3，得

$$\pi r^2 h = 330$$

$$h = \frac{330}{\pi r^2}$$

总表面积包括两个底面与侧面，故

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{330}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$$

对 r 求导，得

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{660}{r^2}$$

令

$$A'(r) = 0$$

则

$$4\pi r - \frac{660}{r^2} = 0$$

$$4\pi r^3 = 660$$

$\because r > 0$，$\therefore$

$$r = \sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}} \approx 3.74$$

又

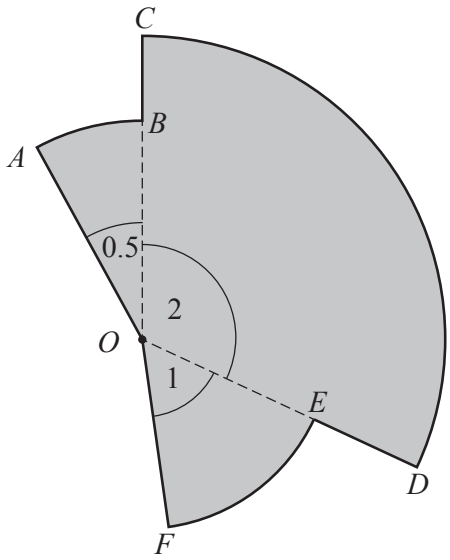
$$A''(r) = 4\pi + \frac{1320}{r^3} > 0 \quad (r > 0)$$

$\therefore$ 此时 A 的驻值为最小值。

答：使 A 取得驻值的半径为 $\sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}}$ cm ≈ 3.74 cm，该驻值是最小值。

2. [2024 · February/March 0606/22 Q9(b)]
提示：沿外边界列周长消元，再核对驻点处各半径的大小关系。

In this question all lengths are in centimetres and all angles are in radians.



The diagram shows a company logo. Each part of the logo is a sector of a circle with centre O.

Sector AOB has radius x.
Sector COD has radius $x+2$.
Sector EOF has radius y.
The shaded region has area $A\,\text{cm}^2$ and perimeter 24.

It is given that x and y can vary.

(a) Show that $A = \frac{91}{8}x^2 - 68x + 132$.

(b) Use differentiation to find the minimum possible area of the logo.

本题中，所有长度的单位均为厘米，所有角均以弧度为单位。
图示为一个公司标志。标志的每一部分都是以 O 为圆心的扇形。
扇形 AOB 的半径为 x。
扇形 COD 的半径为 $x+2$。
扇形 EOF 的半径为 y。
图中，O, B, C 在同一直线上，O, E, D 在同一直线上，且

$$\angle AOB = 0.5,\quad \angle COD = 2,\quad \angle EOF = 1$$

阴影区域的面积为 $A\text{cm}^2$，周长为 24。
已知 x 和 y 可以变化。
(a) 证明

$$A = \frac{91}{8}x^2 - 68x + 132$$

(b) 用微分法求这个标志可能取得的最小面积。

✓ **答案** (a) $A = \frac{91}{8}x^2 - 68x + 132$。 (b) 最小面积为 $\frac{2764}{91}\text{cm}^2 \approx 30.4\text{cm}^2$。

解析 图中三段圆弧的长度分别为

$$0.5x,\quad 2(x+2),\quad y$$

两段外露径向线段为

$$BC = (x+2) - x = 2$$

$$DE = x + 2 - y$$

由周长为 24，得

$$24 = 0.5x + 2 + 2(x+2) + (x+2-y) + y + y + x = \frac{9}{2}x + y + 8$$

$$y = 16 - \frac{9}{2}x$$

阴影面积为三个扇形面积之和，故

$$A = \frac{1}{2}x^2 \times 0.5 + \frac{1}{2}(x+2)^2 \times 2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}x^2 + (x+2)^2 + \frac{1}{2}\left(16 - \frac{9}{2}x\right)^2 = \frac{91}{8}x^2 - 68x + 132$$

对 x 求导，得

$$A'(x) = \frac{91}{4}x - 68$$

令

$$A'(x) = 0$$

则

$$\frac{91}{4}x - 68 = 0$$

$$x = \frac{272}{91}$$

此时

$$y = 16 - \frac{9}{2} \times \frac{272}{91} = \frac{232}{91}$$

$$x > 0, \quad 0 < y < x + 2$$

符合图中各半径的条件。又

$$A''(x) = \frac{91}{4} > 0$$

∴此时 A 取得最小值。代入得

$$A = \frac{91}{8}\left(\frac{272}{91}\right)^2 - 68 \times \frac{272}{91} + 132 = \frac{2764}{91} \approx 30.4$$

答：标志的最小面积为 $\frac{2764}{91}\text{cm}^2 \approx 30.4\text{cm}^2$。

3. [2026 · February/March 0606/22 Q7(a)]

提示：先看费用式中的倒数项与常数项，再判断二阶导数的正负。

A ship is sailing with speed v km h^{-1}.
The sailing cost per hour, \$$C$, is given by $C = v^2 + \dfrac{3000}{v} + 100$.

(a) Find the speed that makes C a minimum.
Justify that this value of C is a minimum.

一艘船以 $v$km h^{-1} 的速度航行。
每小时的航行费用为 C 美元，其中

$$C = v^2 + \frac{3000}{v} + 100$$

(a) 求使 C 最小的航行速度，并说明此时的 C 为最小值。

✓ **答案** $v = \sqrt[3]{1500} \approx 11.4$km h^{-1}，此时 C 取得最小值。

解析 由

$$C = v^2 + \frac{3000}{v} + 100$$

对 v 求导，得

$$C'(v) = 2v - \frac{3000}{v^2}$$

令

$$C'(v) = 0$$

则

$$2v - \frac{3000}{v^2} = 0$$

$$2v^3 = 3000$$

$$v^3 = 1500$$

$\because v > 0$，$\therefore$

$$v = \sqrt[3]{1500} \approx 11.4$$

又

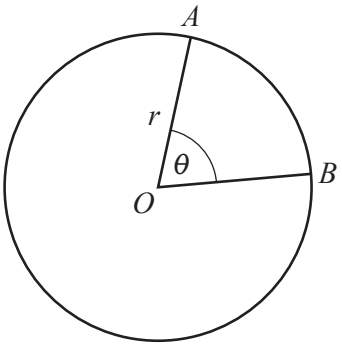
$$C''(v) = 2 + \frac{6000}{v^3} > 0 \quad (v > 0)$$

$\therefore$此时 C 取得最小值。
答：使每小时航行费用最小的速度为 $\sqrt[3]{1500}$km h^{-1} ≈ 11.4km h^{-1}。

4. [2023 · May/June 0606/13 Q6(b)]

提示：从面积关系消去圆心角，求驻点后比较圆心角与半周角。

In this question lengths are in centimetres and angles are in radians.



The diagram shows a circle with centre O and radius r. The points A and B lie on the circumference of the circle. The area of the minor sector OAB is $25\,\text{cm}^2$. The angle AOB is θ.

(a) Find an expression for the perimeter, P, of the minor sector AOB, in terms of r.

(b) Given that r can vary, show that P has a minimum value and find this minimum value.

本题中，长度的单位为厘米，角以弧度为单位。
图示为一个圆心为 O、半径为 r 的圆。点 A 和点 B 在圆周上。
劣扇形 OAB 的面积为 25cm^2，圆心角 AOB 为 θ。
(a) 求劣扇形 OAB 的周长 P 关于 r 的表达式。
(b) 已知 r 可以变化，证明 P 有最小值，并求出这个最小值。

✓ **答案** (a) $P = 2r + \frac{50}{r}$。 (b) P 的最小值为 20 cm，此时 $r = 5$ cm。

解析 由劣扇形 OAB 的面积为 25cm^2，得

$$\frac{1}{2}r^2\theta = 25$$

$$\theta = \frac{50}{r^2}$$

周长为两条半径与弧长之和，故

$$P = 2r + r\theta = 2r + r \times \frac{50}{r^2} = 2r + \frac{50}{r}$$

对 r 求导，得

$$P'(r) = 2 - \frac{50}{r^2}$$

令

$$P'(r) = 0$$

则

$$2 - \frac{50}{r^2} = 0$$

$$2r^2 = 50$$

$$r^2 = 25$$

$\because r > 0$，$\therefore$

$$r = 5$$

此时

$$\theta = \frac{50}{5^2} = 2 < \pi$$

符合劣扇形条件。又

$$P''(r) = \frac{100}{r^3} > 0 \quad (r > 0)$$

$\therefore$此时 P 取得最小值。代入得

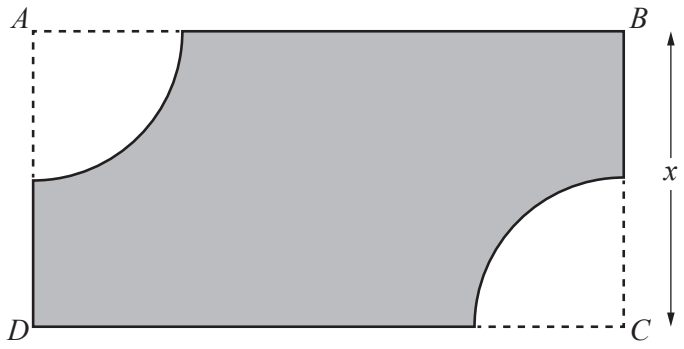
$$P = 2 \times 5 + \frac{50}{5} = 20$$

答：P 的最小值为 20 cm，此时 $r = 5$ cm。

5. [2024 · May/June 0606/21 Q11]

提示：对照挖角前后的边界，分开计算删去的线段与补入的圆弧。

In this question all lengths are in centimetres.



The diagram shows a rectangle $ABCD$ with $BC = x$.
The area of the rectangle is 400 cm^2.

Two identical quarter-circles of radius $\frac{x}{2}$, with centres A and C, are removed from the rectangle to make the shaded shape.

Given that x can vary, find the value of x that gives the minimum value of the perimeter of the shaded shape and hence find this minimum value.

本题中，所有长度的单位均为厘米。
图示为一个矩形 $ABCD$，其中 $BC = x$。矩形的面积为 400cm^2。
从矩形中去掉两个相同的四分之一圆，得到图中的阴影图形。这两个四分之一圆的半径均为 $\frac{x}{2}$，圆心分别为 A 和 C。
已知 x 可以变化，求使阴影图形周长最小的 x，并由此求出这个最小周长。

✓ **答案** $x = \frac{40}{\sqrt{\pi}}$ cm ≈ 22.6 cm；最小周长为 $40\sqrt{\pi}$ cm ≈ 70.9 cm。

解析 由矩形面积为 400cm^2，且 $BC = x$，得

$$AB = \frac{400}{x}$$

两个角共去掉四条长为 $\frac{x}{2}$ 的线段，余下直线段总长为

$$2\left(\frac{400}{x}+x\right)-4\times\frac{x}{2}=\frac{800}{x}$$

两段四分之一圆弧的总长为

$$2\times\frac{1}{4}\times2\pi\times\frac{x}{2}=\frac{\pi x}{2}$$

设阴影图形的周长为 P cm，则

$$P=\frac{800}{x}+\frac{\pi x}{2}$$

对 x 求导，得

$$P'(x)=-\frac{800}{x^2}+\frac{\pi}{2}$$

令

$$P'(x)=0$$

则

$$-\frac{800}{x^2}+\frac{\pi}{2}=0$$

$$\pi x^2=1600$$

$\because x>0$，$\therefore$

$$x=\frac{40}{\sqrt{\pi}}\approx22.6$$

此时

$$AB=\frac{400}{\frac{40}{\sqrt{\pi}}}=10\sqrt{\pi}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{20}{\sqrt{\pi}}<10\sqrt{\pi}$$

圆弧两端均在矩形边上。又

$$P''(x)=\frac{1600}{x^3}>0\quad(x>0)$$

$\therefore$此时 P 取得最小值。代入得

$$P=\frac{800}{\frac{40}{\sqrt{\pi}}}+\frac{\pi}{2}\times\frac{40}{\sqrt{\pi}}=40\sqrt{\pi}\approx70.9$$

答：$x=\frac{40}{\sqrt{\pi}}$ cm ≈22.6 cm，最小周长为 $40\sqrt{\pi}$ cm ≈70.9 cm。

6. [2023 · October/November 0606/23 Q5(b)]

提示：先核对两个底面与侧面是否计全，再用体积关系消去高。

The curved surface area of a cylinder with radius r and height h is $2\pi rh$.

A closed cylinder has radius r cm and volume $1000\,\text{cm}^3$.

(a) Show that the total surface area of the cylinder is $2\pi r^2 + \frac{2000}{r}\text{cm}^2$.

(b) Find the value of r which makes this area a minimum. You should show that your value of r gives a minimum for this area.

半径为 r、高为 h 的圆柱，其侧面积为 $2\pi rh$。

一个闭合圆柱的半径为 r cm，体积为 1000cm^3。

(a) 证明圆柱的总表面积为

$$\left(2\pi r^2 + \frac{2000}{r}\right)\text{cm}^2$$

(b) 求使这个总表面积最小的 r。须证明所求出的 r 确实使总表面积取得最小值。

✓ **答案** (a) 总表面积为 $\left(2\pi r^2 + \frac{2000}{r}\right)\text{cm}^2$。 (b) $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ cm ≈ 5.42 cm，此时总表面积最小。

解析 设圆柱的高为 h cm，总表面积为 $A\text{cm}^2$。由体积为 1000cm^3，得

$$\pi r^2 h = 1000$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

闭合圆柱的总表面积包括两个底面与侧面，故

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

对 r 求导，得

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

令

$$A'(r) = 0$$

则

$$4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$4\pi r^3 = 2000$$

$$r^3 = \frac{500}{\pi}$$

$\because r > 0$，$\therefore$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42$$

又

$$A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \quad (r > 0)$$

∴此时总表面积取得最小值。

答：使总表面积最小的半径为 $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ cm ≈ 5.42 cm。

7. [2024 · October/November 0606/22 Q12]

提示：先按无盖条件数清用料面，再用体积关系把高换成底边长。

A metal tank is in the shape of a cuboid with a square base of side x m and an open top. The tank has a volume of $5\,\text{m}^3$. Given that x can vary, and that the area of the metal used to make the tank is a minimum, find the dimensions of the tank.

一个金属水箱呈长方体形，底面为边长 x m 的正方形，顶部无盖。水箱的容积为 5m^3。已知 x 可以变化，且制作水箱所用金属的面积最小，求水箱的尺寸。

✓ **答案** 底面边长为 $\sqrt[3]{10}$ m ≈ 2.15 m，高为 $\frac{\sqrt[3]{10}}{2}$ m ≈ 1.08 m。

解析 设水箱的高为 h m，所用金属的面积为 $A\text{m}^2$。由体积为 5m^3，得

$$x^2 h = 5$$

$$h = \frac{5}{x^2}$$

水箱无盖，金属面积为一个底面与四个侧面的面积之和，故

$$A = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \times \frac{5}{x^2} = x^2 + \frac{20}{x}$$

对 x 求导，得

$$A'(x) = 2x - \frac{20}{x^2}$$

令

$$A'(x) = 0$$

则

$$2x - \frac{20}{x^2} = 0$$

$$2x^3 = 20$$

$$x^3 = 10$$

$\because x > 0$，$\therefore$

$$x = \sqrt[3]{10} \approx 2.15$$

又

$$A''(x) = 2 + \frac{40}{x^3} > 0 \quad (x > 0)$$

∴此时金属面积取得最小值。由 $x^3 = 10$，得

$$h = \frac{5}{x^2} = \frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt[3]{10}}{2} \approx 1.08$$

答：水箱的底面为边长 $\sqrt[3]{10}\ \mathrm{m}\approx 2.15\ \mathrm{m}$ 的正方形，高为 $\frac{\sqrt[3]{10}}{2}\ \mathrm{m}\approx 1.08\ \mathrm{m}$。

题型 20　改写成标准项后逐项积分

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **平方先行展开：**例题积分号后的式子称为被积函数。出现和或差的平方，先展开括号。同底数幂相乘，指数相加。

$(1+e^{2x})^2=1+2e^{2x}+(e^{2x})^2=1+2e^{2x}+$_____

$(x-2)^2=x^2-4x+4$

② **分式化为幂项：**分母含幂或根式，先改写成各项的幂。逐项相除时，每一项都要除以整个分母。

$\dfrac{(x+1)^2}{2x^3}=\dfrac{x^2+2x+1}{2x^3}=\dfrac{1}{2}x^{-1}+x^{-2}+\dfrac{1}{2}x^{-3}$

$x\neq 0$

$\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}=(2x+1)^{-\frac{1}{2}},\quad x>-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x}}=x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}},\quad x>0$

③ **积分还原函数：**由导数还原函数，得到不定积分，撇号表示对x求导。表中a,b,n是常数，$a\neq 0$，C是积分常数。各式在被积函数有定义的区间内使用。

求导对应	积分公式
$\left(\frac{(2x+1)^3}{6}\right)'=\frac{1}{6}\cdot 3(2x+1)^2\cdot 2=(2x+1)^2$	$\int(ax+b)^n\,\mathrm{d}x=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$ $n\neq -1$
$\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot 2e^{2x}=e^{2x}$	$\int e^{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{ax+b}}{a}+C$
$\left(3\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right)'=3\cos\left(\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}=\cos\left(\frac{x}{3}\right)$	$\int\cos(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{\sin(ax+b)}{a}+C$
$\left(\ln\frac{\lvert 2x+1\rvert}{2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}=\frac{1}{2x+1}$	$\int\frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x=\ln\frac{\lvert ax+b\rvert}{a}+C$ $ax+b\neq 0$

④ **对数绝对值：**以u表示对数内的式子，且$u\neq 0$。按u的正负去掉绝对值。如$x<2$时，$2-x>0$。

$u>0$时，$\ln|u|=\ln u$

$u<0$时，$\ln|u|=\ln(-u)$

$$\int\frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x=\ln\frac{|2-x|}{-1}+C=-\ln(2-x)+C$$

⑤ **逐项分别积分：**出现各项的和或差，分别积分后相加减。常数倍保留在积分号外，末尾的任意常数写作_____。

$$\int(1+2e^{2x})\,\mathrm{d}x=\int 1\,\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\,\mathrm{d}x=x+e^{2x}+C$$

⑥ **上下限分别代入：**被积函数在上下限之间连续，用上限值减下限值。原函数$F(x)$满足$F'(x)=f(x)$，p,q分别是下限、上限。正数的对数相减，可合并成商的对数。

$$[x+e^{2x}]_0^1=(1+e^2)-(0+1)=e^2$$

$$\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_p^q=F(q)-\text{_____}$$

$$\ln 6-\ln 2=\ln\left(\frac{6}{2}\right)=\ln 3$$

$$\ln A-\ln B=\ln\left(\frac{A}{B}\right),\quad A>0,\quad B>0$$

⟵ 填空：①e^{4x}　②C　③$F(p)$

点石成金　题目出现括号的平方、分式或根式，并要求积分时，先展开或改写成标准项，再逐项积分；有上下限时作差。

例 1　[2024 · May/June 0606/13 Q4]

Find $\int_0^2 \left(1+e^{2x}\right)^2 \mathrm{d}x$, giving your answer in exact form.

求 $\int_0^2 (1+e^{2x})^2\,\mathrm{d}x$，答案用精确形式表示。

解答　展开被积函数，得

$$(1+e^{2x})^2 = 1+2e^{2x}+e^{4x}$$

方法：先看括号内的和，展开平方后按指数分项积分。

辨析：不定积分是一族原函数，定积分是按上下限求出的数值。

逐项积分并代入上下限，得

$$\int_0^2 (1+e^{2x})^2\,\mathrm{d}x = \left[x+e^{2x}+\frac{e^{4x}}{4}\right]_0^2$$

$$= \left(2+e^4+\frac{e^8}{4}\right)-\left(0+1+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4}+e^4+\frac{e^8}{4}$$

答：$\frac{3}{4}+e^4+\frac{e^8}{4}$。

针对练习

1.　[2024 · May/June 0606/11 Q6]

提示：先比较两项分母的指数，再核对各自内层的系数。

Find $\int_2^4 \left(\frac{2}{2x-3}-\frac{3}{(3x-5)^2}\right)\mathrm{d}x$, giving your answer in exact form.

求 $\int_2^4 \left(\frac{2}{2x-3}-\frac{3}{(3x-5)^2}\right)\mathrm{d}x$，答案用精确形式表示。

✓ **答案**

$$\ln 5-\frac{6}{7}$$

解析　在积分区间内，$2x-3>0$，$3x-5>0$。将分母中的平方改写为负指数，得

$$\int_2^4 \left(\frac{2}{2x-3}-\frac{3}{(3x-5)^2}\right)\mathrm{d}x = \int_2^4 \left(2(2x-3)^{-1}-3(3x-5)^{-2}\right)\mathrm{d}x$$

逐项积分，得

$$= \left[\ln(2x-3)+(3x-5)^{-1}\right]_2^4$$

$$= \left(\ln 5+\frac{1}{7}\right)-(\ln 1+1)$$

$$= \ln 5-\frac{6}{7}$$

答：$\ln 5 - \frac{6}{7}$。

2. [2024 · May/June 0606/22 Q2(a)]

提示：看余弦内自变量的系数，代限时连同自变量一起替换。

(a) Evaluate $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{4}\mathrm{d}x$. You must show all your working.

(a) 计算$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x$。必须写出全部计算过程。

✓ **答案**

$$4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0.495$$

解析 余弦的自变量为$\frac{x}{4}$，积分时乘以4，得

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x = \left[4\sin\left(\frac{x}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{4}\right) - 4\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{4}\right)$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\approx 0.495$$

答：$4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0.495$。

3. [2024 · October/November 0606/23 Q6(a)]

提示：先把分母根式写成幂，再核对新指数与内层系数。

(a) Find $\int \frac{1}{\sqrt{3x+2}}\mathrm{d}x$.

(a) 求$\int \frac{1}{\sqrt{3x+2}}\mathrm{d}x$。

✓ **答案**

$$\frac{2}{3}\sqrt{3x+2} + C$$

解析 原式有定义时，$3x+2>0$，即$x > -\frac{2}{3}$。将根式改写为幂，得

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x+2}}\mathrm{d}x = \int (3x+2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(3x+2)^{\frac{1}{2}}}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3x+2} + C$$

答：$\frac{2}{3}\sqrt{3x+2} + C$。

4. [2025 · October/November 0606/23 Q4(a)]
提示：分别看两小题的内层系数，再用范围判断对数内式的符号。

(a) Integrate the following with respect to x.

(i) e^{5x-2}

(ii) $\dfrac{1}{4-3x}$ where $x < \dfrac{4}{3}$

(a) 将下列各式对x积分。
(i) e^{5x-2}。
(ii) $\frac{1}{4-3x}$，其中$x < \frac{4}{3}$。

✓ **答案** (i) $\frac{e^{5x-2}}{5} + C$；(ii) $-\frac{1}{3}\ln(4-3x) + C$

解析 (i) 指数中x的系数为5，故

$$\int e^{5x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{5x-2}}{5} + C$$

(ii) 由$x < \frac{4}{3}$，得$4-3x > 0$，故

$$\int \frac{1}{4-3x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{|4-3x|}{-3} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(4-3x) + C$$

答：(i) $\frac{e^{5x-2}}{5} + C$；(ii) $-\frac{1}{3}\ln(4-3x) + C$。

5. [2024 · February/March 0606/12 Q7(a)]
提示：看幂指数加一后的值，再核对分母是否含内层系数。

(a) Find $\displaystyle\int_2^4 (5x-2)^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x$, giving your answer in exact form.

(a) 求$\int_2^4 (5x-2)^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x$，答案用精确形式表示。

✓ **答案**

$$\frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{18} - 2\right)$$

解析 在积分区间内，$5x-2 > 0$。指数加1，再除以内层系数与新指数的乘积，得

$$\int_2^4 (5x-2)^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(5x-2)^{\frac{1}{3}}}{5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)}\right]_2^4$$

$$= \left[\frac{3}{5}(5x-2)^{\frac{1}{3}}\right]_2^4$$

$$= \frac{3}{5}\left(18^{\frac{1}{3}} - 8^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{18} - 2\right)$$

答：$\frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{18} - 2\right)$。

6. [2023 · May/June 0606/21 Q7(b)]

提示：第一小题看分母幂次，第二小题看展开后各项相除的指数。

(b) (i) Find $\int\left(\frac{1}{(2x-6)^3}+\cos x\right)\mathrm{d}x$.

(ii) Find $\int\frac{(x^4+1)^2}{2x}\mathrm{d}x$.

(b) (i) 求$\int\left(\frac{1}{(2x-6)^3}+\cos x\right)\mathrm{d}x$。

(ii) 求$\int\frac{(x^4+1)^2}{2x}\mathrm{d}x$。

✓ **答案** (i) $-\frac{1}{4(2x-6)^2}+\sin x+C$；(ii) $\frac{x^8}{16}+\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\ln|x|+C$

解析 (i) 原式中$x\neq 3$。将分母中的幂改写为负指数，得

$$\int\left(\frac{1}{(2x-6)^3}+\cos x\right)\mathrm{d}x=\int\left((2x-6)^{-3}+\cos x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(2x-6)^{-2}}{2\cdot(-2)}+\sin x+C$$

$$=-\frac{1}{4(2x-6)^2}+\sin x+C$$

(ii) 原式中$x\neq 0$。展开分子并逐项除以$2x$，得

$$\frac{(x^4+1)^2}{2x}=\frac{x^8+2x^4+1}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}x^7+x^3+\frac{1}{2}x^{-1}$$

逐项积分，得

$$\int\frac{(x^4+1)^2}{2x}\mathrm{d}x=\frac{x^8}{16}+\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\ln|x|+C$$

答：(i) $-\frac{1}{4(2x-6)^2}+\sin x+C$；(ii) $\frac{x^8}{16}+\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\ln|x|+C$。

7. [2023 · May/June 0606/23 Q9(a)]

提示：看分子两项各自除以立方根后，幂指数怎样变化。

(a) Show that $\int_1^8\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=36.6$.

(a) 证明$\int_1^8\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=36.6$。

✓ **答案**

36.6

解析 在积分区间内，$x>0$。将分母改写为分数指数并逐项相除，得

$$\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}=x^{\frac{2}{3}}+4x^{-\frac{1}{3}}$$

故

$$\int_1^8\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+6x^{\frac{2}{3}}\right]_1^8$$

$$= \left(\frac{3}{5} \cdot 32 + 6 \cdot 4\right) - \left(\frac{3}{5} + 6\right)$$

$$= \frac{183}{5}$$

$$= 36.6$$

答：积分值为36.6，原等式成立。

8. [2023 · October/November 0606/21 Q3(a)]

提示：把前两项与分式项分开看，核对分式前的负号和内层系数。

(a) Find $\int\left(4x+5-\frac{1}{2x+3}\right)\mathrm{d}x$.

(a) 求$\int\left(4x+5-\frac{1}{2x+3}\right)\mathrm{d}x$。

✓ **答案**

$$2x^2 + 5x - \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$$

解析 原式中$x \neq -\frac{3}{2}$。逐项积分，得

$$\int\left(4x + 5 - \frac{1}{2x+3}\right)\mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$$

$$= 2x^2 + 5x - \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$$

答：$2x^2 + 5x - \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$。

9. [2023 · October/November 0606/22 Q6]

提示：先看平方展开的三项，逐项除后找出指数为负一的项。

Find the exact value of $\int_2^3 \frac{(x+2)^2}{x}\mathrm{d}x$.

求$\int_2^3 \frac{(x+2)^2}{x}\mathrm{d}x$的精确值。

✓ **答案**

$$\frac{13}{2} + 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

解析 在积分区间内，$x > 0$。展开分子并逐项除以x，得

$$\frac{(x+2)^2}{x} = \frac{x^2 + 4x + 4}{x}$$

$$= x + 4 + \frac{4}{x}$$

故

$$\int_2^3 \frac{(x+2)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 4x + 4\ln x\right]_2^3$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 12 + 4\ln 3\right) - (2 + 8 + 4\ln 2)$$

$$= \frac{13}{2} + 4(\ln 3 - \ln 2)$$

$$= \frac{13}{2} + 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

答：$\frac{13}{2} + 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$。

10. [2023 · October/November 0606/23 Q4]

提示：展开后逐项比较分子分母的次数，区分对数项与幂项。

Find the exact value of $\int_3^5 \frac{(x-1)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

求$\int_3^5 \frac{(x-1)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$的精确值。

✓ **答案**

$$\ln\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{52}{225}$$

解析 在积分区间内，$x > 0$。展开分子并逐项除以x^3，得

$$\frac{(x-1)^2}{x^3} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3}$$

$$= x^{-1} - 2x^{-2} + x^{-3}$$

逐项积分，得

$$\int_3^5 \frac{(x-1)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}\right]_3^5$$

$$= \left(\ln 5 + \frac{2}{5} - \frac{1}{50}\right) - \left(\ln 3 + \frac{2}{3} - \frac{1}{18}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{19}{50} - \frac{11}{18}$$

$$= \ln\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{52}{225}$$

答：$\ln\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{52}{225}$。

题型 21 整理已知导式反推所求积分

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **乘积函数求导：**函数 $y = x^2 \ln x$ 是两个因子相乘。记 $y' = \frac{dy}{dx}$，按乘积法则求导。每项只对一个因子求导，另一个因子_____。

$$(x^2)' = 2x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$y' = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x$$

② **复合函数求导：**设 $u = u(x)$，u' 表示内层函数的导数。复合函数求导，还须乘内层的_____。下表中 n 为整数，各式须在有定义且分母非零处使用。

$$(e^{2x+1})' = e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1}$$

函数	对 x 求导
u^n	$nu^{n-1}u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$，$u > 0$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$，$u > 0$
e^u	$e^u u'$
$\sin u$	$(\cos u)u'$
$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2} u = u'(1 + \tan^2 u)$

$$1 + \tan^2 u = \frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2} u = \frac{1}{\cos^2} u$$

③ **整理被积函数：**已有 $y' = 2x\ln x + x$，将所求项移项并配系数。所求式多出一项时，先展开，再配入已有导式。

$$x\ln x = \frac{y' - x}{2} = \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}x$$

$$\frac{x}{4}(3 + 2\ln x) = \frac{1}{4}(2x\ln x + x) + \frac{x}{2} = \frac{1}{4}y' + \frac{x}{2}$$

④ **还原原函数：**积分将导数还原为原函数，各项分别积分。不定积分末尾加_____。下表中 k, b 为常数，$k \neq 0$，且 $n \neq -1$。

$$\int y'\,\mathrm{d}x = y + C$$

被积函数	不定积分
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
e^{kx+b}	$\frac{1}{k}e^{kx+b} + C$
$\sin(kx+b)$	$-\frac{1}{k}\cos(kx+b) + C$

$$\int \left(\frac{1}{4}y' + \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{4}y + \frac{x^2}{4} + C$$

⑤ **代入积分上下限：**若 $F'(x) = g(x)$，且 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则用原函数求定积分。定积分用_____减去_____，不保留积分常数。

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}$$

⑥ **按指定形式整理：**结果含平方项或整数倍对数时，按要求展开或合并。对数合并时，真数须为正。

平方项展开：

$(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

整数倍对数合并：

$3\ln 2 = \ln(2^3) = \ln 8$

⟵ 填空：①保持不变　②导数　③积分常数 C　④上限对应的原函数值　⑤下限对应的原函数值

点石成金　题目出现先求导、再由此求积分时，先将被积函数整理成已知导式与可积分项的组合。

例 1　[2024 · May/June 0606/12 Q11(b)]

(a) Given that $y = x^2 \ln x$, find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Hence find $\int x \ln x \,\mathrm{d}x$.

（a）已知 $y = x^2 \ln x$，求 $\frac{dy}{dx}$。　（b）由此求 $\int x \ln x \,\mathrm{d}x$。

解答　（a）由乘积法则，得

$\frac{dy}{dx} = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$。

（b）由（a），得

$2x \ln x = y' - x$，

$x \ln x = \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}x$。

两边积分，得

$\int x \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$，

$\int x \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$。

答：（a）$\frac{dy}{dx} = x + 2x \ln x$；（b）$\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$。

方法：先对照前问导式与被积函数，移去多余项再配系数。

辨析：乘积求导是两项相加，复合求导是外层导数乘内层导数。

针对练习

1.　[2024 · October/November 0606/21 Q2(b)]

提示：对照前问导式与被积函数，再核对积分上下限。

(a) Given that $y = \tan x - x$, find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Write your answer in terms of $\tan x$.

(b) Hence find $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \mathrm{d}x$. Give your answer in exact form.

（a）已知 $y = \tan x - x$，求 $\frac{dy}{dx}$。用含 $\tan x$ 的式子表示答案。　（b）由此求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \,\mathrm{d}x$，答案用精确值表示。

答案　（a）$\tan^2 x$；（b）$1 - \frac{\pi}{4}$。

解析　（a）

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$。

（b）由（a），$\tan x - x$ 是 $\tan^2 x$ 的一个原函数，故

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \,\mathrm{d}x = [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}}$，

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \,\mathrm{d}x = (1 - \frac{\pi}{4}) - (0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4}$。

答：（a）$\tan^2 x$；（b）$1 - \frac{\pi}{4}$。

2. [2025 · February/March 0606/12 Q12(b)]
提示：比较前问导式与被积函数中指数项的系数。

It is given that $y = xe^{3x+2}$.

(a) Find $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Hence find $\displaystyle\int xe^{3x+2}dx$.

已知 $y = xe^{3x+2}$。（a）求 $\frac{dy}{dx}$。（b）由此求 $\int xe^{3x+2}\,dx$。

✓ **答案**　（a）$(1+3x)e^{3x+2}$；（b）$\frac{xe^{3x+2}}{3} - \frac{e^{3x+2}}{9} + C$。

解析　（a）由乘积法则及复合函数求导，得
$\frac{dy}{dx} = e^{3x+2} + x \cdot 3e^{3x+2} = (1+3x)e^{3x+2}$。
（b）由（a），得
$3xe^{3x+2} = y' - e^{3x+2}$，
$xe^{3x+2} = \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3}e^{3x+2}$。
两边积分，得
$\int xe^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\cdot\frac{e^{3x+2}}{3} + C$，
$\int xe^{3x+2}\,dx = \frac{xe^{3x+2}}{3} - \frac{e^{3x+2}}{9} + C$。
答：（a）$(1+3x)e^{3x+2}$；（b）$\frac{xe^{3x+2}}{3} - \frac{e^{3x+2}}{9} + C$。

3. [2024 · February/March 0606/22 Q4(b)]
提示：将分子各项分别除以根号项，再与前问导式比系数。

(b) (i) Differentiate $y = \tan\left(x - \sqrt{x}\right)$ with respect to x.

(ii) Hence find $\displaystyle\int \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\cos^2\left(x-\sqrt{x}\right)}dx$.

（b）（i）将 $y = \tan(x - \sqrt{x})$ 对 x 求导。（ii）由此求 $\int \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\cos^2(x-\sqrt{x})}\,dx$。

✓ **答案**　（b）（i）$\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos^2}(x-\sqrt{x})$；（ii）$2\tan(x-\sqrt{x}) + C$。

解析　（b）（i）由复合函数求导，得
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2}(x-\sqrt{x})\cdot\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$，
$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos^2}(x-\sqrt{x})$。
（ii）将被积函数整理，得
$\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\cos^2(x-\sqrt{x})} = 2\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos^2}(x-\sqrt{x}) = 2y'$。
因此
$\int \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\cos^2(x-\sqrt{x})}\,dx = 2y + C = 2\tan(x-\sqrt{x}) + C$。
答：（i）$\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos^2}(x-\sqrt{x})$；（ii）$2\tan(x-\sqrt{x}) + C$。

4. [2023 · May/June 0606/23 Q3(b)]
提示：比较两个分式的系数，并沿用前问对数的定义域。

(a) Differentiate $\ln(x^3+3x^2)$ with respect to x, simplifying your answer.

(b) Hence find $\int \dfrac{x+2}{x(x+3)}\mathrm{d}x$.

（a）将 $\ln(x^3+3x^2)$ 对 x 求导，并化简答案。（b）由此求 $\int \frac{x+2}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x$。

✓ **答案** （a）$\frac{3(x+2)}{x(x+3)}$；（b）$\frac{1}{3}\ln(x^3+3x^2)+C$，沿用（a）的对数定义域。

解析 （a）由复合函数求导，得
$\frac{d}{dx}\ln(x^3+3x^2)=\frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2}=\frac{3x(x+2)}{x^2(x+3)}=\frac{3(x+2)}{x(x+3)}$。
（b）由（a），得
$\frac{x+2}{x(x+3)}=\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\ln(x^3+3x^2)$。
因此
$\int \frac{x+2}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln(x^3+3x^2)+C$。
沿用（a）的定义域，须满足
$x^3+3x^2=x^2(x+3)>0$，
故 $x>-3$ 且 $x\neq 0$。
答：（a）$\frac{3(x+2)}{x(x+3)}$；（b）在上述定义域内为 $\frac{1}{3}\ln(x^3+3x^2)+C$。

5. [2024 · October/November 0606/13 Q7(b)]
提示：对照前问导式中的对数项，核对上下限处的各项。

(a) Given that $y=x^3\ln x$, find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Hence find $\int_1^2 3x^2\ln x\,\mathrm{d}x$, giving your answer in the form $\ln a+b$, where a is an integer and b is a rational number.

（a）已知 $y=x^3\ln x$，求 $\frac{dy}{dx}$。（b）由此求 $\int_1^2 3x^2\ln x\,\mathrm{d}x$，答案写成 $\ln a+b$ 的形式，其中 a 为整数，b 为有理数。

✓ **答案** （a）$x^2+3x^2\ln x$；（b）$\ln 256-\frac{7}{3}$。

解析 （a）由乘积法则，得
$\frac{dy}{dx}=3x^2\ln x+x^3\cdot\frac{1}{x}=3x^2\ln x+x^2$。
（b）由（a），得
$3x^2\ln x=y'-x^2$。
因此
$\int_1^2 3x^2\ln x\,\mathrm{d}x=\left[x^3\ln x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2$，
$\int_1^2 3x^2\ln x\,\mathrm{d}x=\left(8\ln 2-\frac{8}{3}\right)-\left(0-\frac{1}{3}\right)=8\ln 2-\frac{7}{3}$。
按所给形式整理，得
$8\ln 2-\frac{7}{3}=\ln(2^8)-\frac{7}{3}=\ln 256-\frac{7}{3}$。
答：（a）$x^2+3x^2\ln x$；（b）$\ln 256-\frac{7}{3}$。

6. [2024 · May/June 0606/11 Q12(b)]
提示：先把前问导式拆成两项，比较对数项的系数与符号。

(a) It is given that $y=\dfrac{\ln 3x}{x^2}$ for $x>0$.

Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Give your answer in the form $\dfrac{A+B\ln 3x}{x^3}$, where A and B are integers.

(b) Hence find $\int \dfrac{\ln 3x}{x^3}\mathrm{d}x$.

（a）已知 $y=\frac{\ln(3x)}{x^2}$，其中 $x>0$。求 $\frac{dy}{dx}$，答案写成 $\frac{A+B\ln(3x)}{x^3}$ 的形式，其中 A 和 B 为整数。（b）由此求 $\int \frac{\ln(3x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$。

✓ **答案**　(a) $\frac{1-2\ln(3x)}{x^3}$，$A=1$，$B=-2$；(b) $-\frac{1}{4x^2}-\frac{\ln(3x)}{2x^2}+C$。

解析　(a) 将函数写成

$y=x^{-2}\ln(3x)$。

由乘积法则及复合函数求导，得

$\frac{dy}{dx}=-2x^{-3}\ln(3x)+x^{-2}\cdot\frac{3}{3x}$，

$\frac{dy}{dx}=\frac{1-2\ln(3x)}{x^3}$。

与所给形式比较，得 $A=1$，$B=-2$。

(b) 由 (a)，得

$y'=\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln(3x)}{x^3}$，

$\frac{\ln(3x)}{x^3}=\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{2}y'$。

两边积分，得

$\int\frac{\ln(3x)}{x^3}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{1}{2}y+C$，

$\int\frac{\ln(3x)}{x^3}\,dx=-\frac{1}{4x^2}-\frac{\ln(3x)}{2x^2}+C$。

答：(a) $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2\ln(3x)}{x^3}$，$A=1$，$B=-2$；(b) $-\frac{1}{4x^2}-\frac{\ln(3x)}{2x^2}+C$。

7. [2023 · May/June 0606/11 Q10(b)]

提示：比较前问两项的系数，保留内层一次式的整体结构。

It is given that $y=(3x+1)^2\ln(3x+1)$.

(a) Find $\frac{dy}{dx}$.

(b) Hence find $\int(3x+1)\ln(3x+1)\,dx$.

已知 $y=(3x+1)^2\ln(3x+1)$。(a) 求 $\frac{dy}{dx}$。(b) 由此求 $\int(3x+1)\ln(3x+1)\,dx$。

✓ **答案**　(a) $3(3x+1)[1+2\ln(3x+1)]$；(b) $\frac{(3x+1)^2\ln(3x+1)}{6}-3\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+C$。

解析　(a) 由乘积法则及复合函数求导，得

$\frac{dy}{dx}=6(3x+1)\ln(3x+1)+(3x+1)^2\cdot\frac{3}{3x+1}$，

$\frac{dy}{dx}=6(3x+1)\ln(3x+1)+3(3x+1)=3(3x+1)[1+2\ln(3x+1)]$。

(b) 由 (a)，得

$6(3x+1)\ln(3x+1)=y'-3(3x+1)$，

$(3x+1)\ln(3x+1)=\frac{1}{6}y'-\frac{1}{2}(3x+1)$。

两边积分，得

$\int(3x+1)\ln(3x+1)\,dx=\frac{1}{6}y-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C$，

$\int(3x+1)\ln(3x+1)\,dx=\frac{(3x+1)^2\ln(3x+1)}{6}-3\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+C$。

答：(a) $3(3x+1)[1+2\ln(3x+1)]$；(b) $\frac{(3x+1)^2\ln(3x+1)}{6}-3\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+C$。

8. [2023 · May/June 0606/22 Q7(c)]
提示：先展开被积函数，再比较前问导式中两项的系数。

(c) **(i)** Differentiate $y = x^3 \ln x$ with respect to x.

(ii) Hence find $\int\left(\frac{x^2}{6}(2+3\ln x)\right)\mathrm{d}x$.

(c)（i）将 $y = x^3 \ln x$ 对 x 求导。（ii）由此求 $\int \frac{x^2}{6}(2+3\ln x)\,\mathrm{d}x$。

✓ **答案** (c)（i）$3x^2 \ln x + x^2$；（ii）$\frac{x^3 \ln x}{6} + \frac{x^3}{18} + C$。

解析 (c)（i）由乘积法则，得
$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2$。
（ii）展开被积函数，并配入（i）的导式，得
$\frac{x^2}{6}(2+3\ln x) = \frac{1}{6}(2x^2 + 3x^2 \ln x) = \frac{1}{6}(y' + x^2)$。
因此
$\int \frac{x^2}{6}(2+3\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}\cdot\frac{x^3}{3} + C$，
$\int \frac{x^2}{6}(2+3\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln x}{6} + \frac{x^3}{18} + C$。
答：（i）$3x^2 \ln x + x^2$；（ii）$\frac{x^3 \ln x}{6} + \frac{x^3}{18} + C$。

9. [2023 · October/November 0606/23 Q9(c)]
提示：对照前问导式的两项，并核对下限处指数项的取值。

A curve has equation $y = x\mathrm{e}^{2x}$.

(a) Find $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(c) Use your answer to **part (a)** to find the exact value of $\int_0^2 2x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

一条曲线的方程为 $y = xe^{2x}$。（a）求 $\frac{dy}{dx}$。（c）利用（a）的答案，求 $\int_0^2 2xe^{2x}\,\mathrm{d}x$ 的精确值。

✓ **答案** (a) $e^{2x}(1+2x)$；(c) $\frac{3e^4+1}{2}$。

解析 (a)由乘积法则及复合函数求导，得
$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1+2x)$。
(c) 由 (a)，得
$2xe^{2x} = y' - e^{2x}$。
因此
$\int_0^2 2xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2$，
$\int_0^2 2xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left(2e^4 - \frac{1}{2}e^4\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\right)$，
$\int_0^2 2xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}e^4 + \frac{1}{2} = \frac{3e^4+1}{2}$。
答：(a) $e^{2x}(1+2x)$；(c) $\frac{3e^4+1}{2}$。

10. [2023 · October/November 0606/22 Q8(c)]
提示：对照前问导式中余弦项的系数，再核对正弦项积分符号。

A curve has equation $y = x\sin 2x$.

(a) Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(c) Use your answer to **part (a)** to find the exact value of $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

一条曲线的方程为 $y = x\sin(2x)$。（a）求 $\frac{dy}{dx}$。（c）利用（a）的答案，求 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ 的精确值。

✓ **答案**　（a）$\sin(2x) + 2x\cos(2x)$；（c）$\frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}$。

解析　（a）由乘积法则及复合函数求导，得
$\frac{dy}{dx} = \sin(2x) + x\cdot 2\cos(2x) = \sin(2x) + 2x\cos(2x)$。
（c）由（a），得
$2x\cos(2x) = y' - \sin(2x)$。
因此
$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left[x\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$，
$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\right)$，
$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}$。
答：（a）$\sin(2x) + 2x\cos(2x)$；（c）$\frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}$。

题型 22　积分一次并用过点或初始位移定常数

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **由梯度求曲线：**例题给出曲线的梯度，即曲线的导数。将导数积分，得到含常数的曲线方程。式中的 C 称为_____。

$$\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$y = \int (5x-2)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}(5x-2)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{20}(5x-2)^{\frac{4}{3}} + C$$

② **过点确定常数：**曲线经过已知点，将该点的横、纵坐标代入曲线方程。例题经过点 $\left(2, \frac{32}{5}\right)$，求得 $C =$ _____。

$$\frac{32}{5} = \frac{3}{20}(5\cdot 2 - 2)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{12}{5} + C$$

③ **求驻点坐标：**题目要求驻点，先令导数等于_____。解出横坐标，再代入曲线方程求纵坐标。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

④ **三角函数积分：**被积式含正弦或余弦时，积分后还需除以内层一次式的_____。如内层为 $2x$，积分结果需乘 $\frac{1}{2}$。下式中 a, b 为常数，$a \neq 0$，角以弧度计。

$\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$　　$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$

$\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$　　$\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

⑤ **由速度求位移：**设时间为 t 秒，速度为 v 米每秒，位移为 s 米。速度是位移对时间的导数，积分得到位移。在初始时刻位于固定点 O，初始位移为_____。

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\quad s = \int v\,\mathrm{d}t$$

如 $v = \sin t$，且 $t = 0$ 时位于 O：

$$s = -\cos t + C$$

$$0 = -\cos 0 + C = -1 + C, \quad C = 1$$

$$s = 1 - \cos t$$

⑥ **首次改变方向：**速度为零，且该时刻前后的速度_____，粒子改变方向。取最早的正时间，再代入位移式。

以 $v = \cos t - \sqrt{3}\sin t$ 为例：

$$\cos t - \sqrt{3}\sin t = 0, \quad \tan t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$t = \frac{\pi}{6} \quad （最早的正时间）$$

$0 < t < \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} < t < \frac{\pi}{2}$
$v > 0$	$v < 0$

← 填空：①积分常数　②4　③0　④一次项系数　⑤0　⑥异号

点石成金　题目给出曲线梯度和过点，或速度和初始位移时，先积分一次，再代入已知条件确定常数。

例 1　[2025 · May/June 0606/12 Q12]

A curve is such that its gradient at the point (x, y) is given by $(5x-2)^{\frac{1}{3}}$.

The curve passes through the point $\left(2, \frac{32}{5}\right)$.

Find the coordinates of the stationary point on the curve.

一条曲线在点 (x, y) 处的梯度为 $(5x-2)^{\frac{1}{3}}$。
曲线经过点 $(2, \frac{32}{5})$。
求曲线上驻点的坐标。

解答　由题意得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (5x-2)^{\frac{1}{3}}$$

方法：先看梯度式，积分后将已知点的坐标代入求常数。

辨析：驻点条件是导数为零，过点条件是坐标满足曲线方程。

积分得

$$y = \frac{3}{20}(5x-2)^{\frac{4}{3}} + C$$

将点 $\left(2, \frac{32}{5}\right)$ 代入，得

$$\frac{32}{5} = \frac{3}{20}\cdot 8^{\frac{4}{3}} + C = \frac{12}{5} + C$$

$$C = 4$$

∴ 曲线方程为

$$y = \frac{3}{20}(5x-2)^{\frac{4}{3}} + 4$$

驻点处导数为零，故

$$(5x-2)^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$5x-2=0$$

$$x=\frac{2}{5}$$

代入曲线方程，得

$$y=\frac{3}{20}\cdot 0^{\frac{4}{3}}+4=4$$

答：驻点坐标为 $\left(\frac{2}{5},4\right)$。

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/23 Q8(b)]

提示：看正弦内层的系数，积分后用已知点确定常数。

(b) A curve is such that $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(3x+\pi)$.

The curve passes through the point $\left(\frac{\pi}{9},\frac{4}{3}\right)$.

Find the exact y-coordinate of the point on the curve where $x=\frac{5\pi}{12}$.

(b) 一条曲线满足
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(3x+\pi)$。
曲线经过点 $\left(\frac{\pi}{9},\frac{4}{3}\right)$。
求曲线上横坐标为 $x=5\frac{\pi}{12}$ 的点的纵坐标的精确值。

✓ **答案**

$$\frac{7-\sqrt{2}}{6}$$

解析 由

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(3x+\pi)$$

积分得

$$y=-\frac{1}{3}\cos(3x+\pi)+C$$

将点 $\left(\frac{\pi}{9},\frac{4}{3}\right)$ 代入，得

$$\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}\cos\left(4\frac{\pi}{3}\right)+C$$

$\because$

$$\cos\left(4\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$

$$\frac{4}{3}=\frac{1}{6}+C$$

$$C = \frac{7}{6}$$

故

$$y = -\frac{1}{3}\cos(3x + \pi) + \frac{7}{6}$$

当 $x = 5\frac{\pi}{12}$ 时，

$$3x + \pi = 3 \cdot \left(5\frac{\pi}{12}\right) + \pi = 9\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(9\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{6} = \frac{7 - \sqrt{2}}{6}$$

答：所求纵坐标的精确值为 $\frac{7-\sqrt{2}}{6}$。

2. [2024 · May/June 0606/11 Q10(b)]

提示：看初始位移条件，将初始时刻代入积分式求常数。

In this question, all distances are in metres and time, t, is in seconds.

A particle P is at a fixed point O at time $t = 0$.
The velocity, v, of P is given by $v = 3\sin 2t$ for $t \geqslant 0$.

(b) Find an expression, in terms of t, for the displacement of P from O at time t.

本题中，所有距离均以米为单位，时间 t 以秒为单位。
粒子 P 在 $t = 0$ 时位于固定点 O。当 $t \geq 0$ 时，P 的速度 v 为 $v = 3\sin(2t)$。
(b) 求 t 秒时 P 相对于 O 的位移，用含 t 的式子表示。

✓ **答案** $s = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos(2t)$（米），$t \geq 0$。

解析 设 t 秒时 P 相对于 O 的位移为 s 米。由速度是位移对时间的导数，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3\sin(2t)$$

积分得

$$s = -\frac{3}{2}\cos(2t) + C$$

$\because$ $t = 0$ 时，P 位于 O，故 $s = 0$，

$$0 = -\frac{3}{2}\cos 0 + C = -\frac{3}{2} + C$$

$$C = \frac{3}{2}$$

$\therefore$

$$s = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos(2t)$$

答：位移为 $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos(2t)\right)$ 米，其中 $t \geq 0$。

3. [2024・October/November 0606/23 Q12(b)]

提示：看速度首次为零的正时间，比较前后速度符号。

A particle moves in a straight line. Its velocity, v ms^{-1}, at time t seconds is given by

$$v = \cos t - \sin t.$$

The displacement of the particle from a fixed point O at time t is s metres. The particle passes through O when $t = 0$.

(b) Find the displacement at the time when the particle first changes direction after passing through O.

一个粒子沿直线运动。在 t 秒时，其速度为 vm s^{-1}，且
$v = \cos t - \sin t$。
在时刻 t，粒子相对于固定点 O 的位移为 s 米。粒子在 $t = 0$ 时经过 O。
(b) 求粒子经过 O 后首次改变方向时的位移。

✓ **答案**

$$\left(\sqrt{2}-1\right) \text{ m}$$

解析 由

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \cos t - \sin t$$

积分得

$$s = \sin t + \cos t + C$$

∵ 粒子在 $t = 0$ 时经过 O，故 $s = 0$，

$$0 = \sin 0 + \cos 0 + C = 1 + C$$

$$C = -1$$

∴

$$s = \sin t + \cos t - 1$$

粒子改变方向时，速度为零，故

$$\cos t - \sin t = 0$$

$$\cos t = \sin t$$

此时 $\cos t \neq 0$，两边除以 $\cos t$，得

$$\tan t = 1$$

最早的正时间为

$$t = \frac{\pi}{4}$$

当 $0 < t < \frac{\pi}{4}$ 时，$\cos t > \sin t$，故 $v > 0$；当 $\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}$ 时，$\cos t < \sin t$，故 $v < 0$。速度在 $t = \frac{\pi}{4}$ 前后异号，粒子在此时首次改变方向。

$$s=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\sqrt{2}-1$$

答：所求位移为 $\left(\sqrt{2}-1\right)$ 米。

4. [2022 · May/June 0606/13 Q5(b)]

提示：速度积分得到位移，用经过固定点时的位移定常数。

The velocity, $v\,\text{ms}^{-1}$, of a particle moving in a straight line, t seconds after passing through a fixed point O, is given by $v=6\sin 3t$.

(b) Find the displacement of the particle from O when $t=5.6$.

粒子沿直线运动，从经过固定点O的时刻开始计时。时间t的单位为s，速度v的单位为m s^{-1}，速度满足

$$v=6\sin(3t)$$

（b）求$t=5.6$时粒子相对于O的位移。

✓ **答案** 2.92 m

解析 设粒子相对于O的位移为s，单位为m。由速度积分得

$$s=\int 6\sin(3t)\,\mathrm{d}t=-2\cos(3t)+C$$

其中C为积分常数。经过O时，时间与位移均为零，故

$$0=-2\cos 0+C=-2+C$$

$$C=2$$

∴ 位移为

$$s=2-2\cos(3t)$$

将$t=5.6$代入，角以弧度计，得

$$s=2-2\cos(3\times 5.6)=2-2\cos(16.8)\approx 2.92$$

答：粒子相对于O的位移为2.92 m。

5. [2022 · October/November 0606/21 Q10(a)]

提示：加速度是速度的导数，积分后代入初速度条件。

The acceleration, $a\,\text{ms}^{-2}$, of a particle at time t seconds is given by $a=-\dfrac{45}{(t+1)^2}$. When $t=0$ the velocity of the particle is $50\,\text{ms}^{-1}$.

(a) Find an expression for the velocity of the particle in terms of t.

粒子在时刻t的加速度为a。时间t的单位为s，加速度a的单位为m s^{-2}，且

$$a=-\frac{45}{(t+1)^2}$$

当$t=0$时，粒子的速度为$50\ \text{m s}^{-1}$。

（a）求粒子速度关于t的表达式。

✓ **答案** $v=\frac{45}{t+1}+5$，速度单位为m s^{-1}。

解析 加速度为速度对时间的导数，故

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{45}{(t+1)^2}=-45(t+1)^{-2}$$

积分时，幂指数加一，再除以所得指数，得

$$v=\int -45(t+1)^{-2}\,\mathrm{d}t=45(t+1)^{-1}+C=\frac{45}{t+1}+C$$

其中C为积分常数。将$t=0$、$v=50$代入，得

$$50=\frac{45}{0+1}+C=45+C$$

$$C=5$$

答：速度表达式为

$$v=\frac{45}{t+1}+5$$

其中速度单位为$\mathrm{m\ s^{-1}}$。

题型 23 用三角恒等式化简被积式后积分

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **三角比的改写：**原式含 $\cot\theta$，先改写为正弦、余弦之比。各式在原式有意义时使用，角均用弧度。

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\qquad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

② **平方关系化简：**正弦、余弦的平方和为_____。分子、分母同除以余弦的平方，得到平方恒等式。

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$

$$\frac{1+\cot^2\theta}{\cot^2\theta}=1+\frac{1}{\cot^2\theta}=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta \qquad \sec^2\theta-\tan^2\theta=1$$

③ **平方和的展开：**出现和的平方与差的平方相加，先分别展开。设 u、v 为两个式子，交叉项相消后，平方项的系数均为_____。

$$(u+v)^2+(u-v)^2=u^2+2uv+v^2+u^2-2uv+v^2=2(u^2+v^2)$$

④ **基本积分对应：**本例化简后出现 $\sec^2\theta-\sin\theta$，分别寻找导数与各项相同的函数。不定积分末尾加_____，其中 C 为任意常数。

$$\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{\mathrm{d}\theta}=\sec^2\theta \qquad \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta$$

$$\int\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\tan\theta+C \qquad \int(-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\cos\theta+C$$

⑤ **倍角系数处理：**三角函数中的角为 $2x$，求导时会多乘一个 2。反过来积分，系数应除以_____。

$$\frac{\mathrm{d}\tan(2x)}{\mathrm{d}x}=2\sec^2(2x) \qquad \frac{\mathrm{d}\cos(2x)}{\mathrm{d}x}=-2\sin(2x)$$

$$\int\sec^2(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan(2x)+C \qquad \int\sin(2x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos(2x)+C$$

⑥ **上下限的代入：**定积分先求原函数，再用上限代入值_____下限代入值。若 $F'(x)=f(x)$，记 $[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$，其中 a、b 分别为下限、上限。

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}\cos\pi+\frac{1}{2}\cos 0=1$$

填空：①1　②2　③$+C$　④2　⑤减去

点石成金　题目出现三角函数的平方、分式或平方和的积分时，先用三角恒等式化简被积式。

例 1　[2024 · October/November 0606/12 Q5(c)]

(a) Show that $\dfrac{1+\cot^2\theta}{\cot^2\theta}=\sec^2\theta$.

(b) Write down the derivative of $\tan\theta$ with respect to θ.

(c) Using **part (a)** and **part (b)**, find the exact value of $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1+\cot^2\theta}{\cot^2\theta}-\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta$.

（a）证明 $\frac{1+\cot^2\theta}{\cot^2\theta}=\sec^2\theta$。

（b）写出 $\tan\theta$ 对 θ 的导数。

（c）利用（a）和（b）的结果，求

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1+\cot^2\theta}{\cot^2\theta}-\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

的精确值。

解答　由三角比的关系得

$\frac{1+\cot^2\theta}{\cot^2\theta}=1+\frac{1}{\cot^2\theta}=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$。

故（a）中的等式成立。

$\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{\mathrm{d}\theta}=\sec^2\theta$。

由（a）和（b），并用 $\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta$，得

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1+\cot^2\theta}{\cot^2\theta}-\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$。

化简后的被积式在下限处连续，代入上下限得

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=[\tan\theta+\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$[\tan\theta+\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}=\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)-(0+1)=\sqrt{3}-\frac{1}{2}$。

答：积分的精确值为 $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$。

方法：先看余切平方分母，将分式拆成两项，再套平方恒等式。

辨析：定积分是上下限代入值之差，不定积分是原函数族。

针对练习

1. [2023 · February/March 0606/22 Q4]

提示：看分子平方项之差与分母倒数关系，再核对角的倍数。

$$y=\frac{\sec^2 5x-\tan^2 5x}{\operatorname{cosec}5x}$$

Show that $y=a\sin bx$, where a and b are integers, and hence find the value of $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{5}}y\,\mathrm{d}x$.

已知
$y=\frac{\sec^2(5x)-\tan^2(5x)}{\operatorname{cosec}(5x)}$。
证明 $y=a\sin(bx)$，其中 a、b 为整数，并由此求 $\int_0^{\frac{\pi}{5}} y\,\mathrm{d}x$ 的值。

✓ **答案**　$a=1$，$b=5$；$\frac{2}{5}$。

解析　由平方恒等式得
$\sec^2(5x)-\tan^2(5x)=1$。
由倒数关系得
$y=\frac{\sec^2(5x)-\tan^2(5x)}{\operatorname{cosec}(5x)}=\frac{1}{\operatorname{cosec}(5x)}=\sin(5x)$。
因此可取 $a=1$，$b=5$，均为整数。
原式在积分区间内部有定义，化简后的函数在两端连续。

$$\int_0^{\frac{\pi}{5}} y\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{5}}\sin(5x)\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{5}\cos(5x)\right]_0^{\frac{\pi}{5}}$$

$\left[-\frac{1}{5}\cos(5x)\right]_0^{\frac{\pi}{5}}=-\frac{1}{5}\cos\pi+\frac{1}{5}\cos 0=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$。
答：$y=\sin(5x)$，所求积分为 $\frac{2}{5}$。

2. [2025 · October/November 0606/12 Q10]
提示：看两次展开的交叉项符号，再算积分区间长度。

Show that $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left((\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2\right)\mathrm{d}\theta=k\pi$, where k is an integer to be found.

证明
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left((\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2\right)\mathrm{d}\theta=k\pi$，
其中 k 为整数，并求出 k 的值。

✓ **答案**　2π，$k=2$。

解析　展开并合并同类项，得

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$。
因此

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left((\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2\right)\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}2\,\mathrm{d}\theta$$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}2\,\mathrm{d}\theta=[2\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=3\pi-\pi=2\pi$。
与 $k\pi$ 比较，得 $k=2$，为整数。
答：所求积分为 2π，$k=2$。

3. [2025 · October/November 0606/11 Q7(b)]
提示：看常数项与正切平方的组合，再核对内角求导的系数。

(b) Find $\int\left(1+\tan^2 3x\right)\mathrm{d}x$.

(b) 求 $\int(1+\tan^2(3x))\,\mathrm{d}x$。

✓ **答案**　$\frac{1}{3}\tan(3x)+C$，其中 C 为任意常数。

解析　由平方恒等式得
$1+\tan^2(3x)=\sec^2(3x)$。
又
$\frac{\mathrm{d}\tan(3x)}{\mathrm{d}x}=3\sec^2(3x)$，
所以
$\int(1+\tan^2(3x))\,\mathrm{d}x=\int\sec^2(3x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\tan(3x)+C$。
答：$\frac{1}{3}\tan(3x)+C$，其中 C 为任意常数。

题型 24　确定横向边界后积分上方函数减下方函数

考频 ★★★★☆

知识梳理

① **竖向长度：**例题中，曲线在上，直线在下。同一横坐标处的竖向长度取_____。记上方函数为 $f(x)$，下方函数为 $g(x)$。

$$f(x)=\frac{5}{x+1}+2,\quad g(x)=2x+1$$

$$f(0)-g(0)=7-1=6$$

$$f(x)-g(x)=\frac{5}{x+1}+1-2x$$

② **横向边界：**阴影两端的横坐标是积分上下限。例题左端在 y 轴上，左端横坐标为_____。右端是交点 A，联立两个函数求其横坐标。

竖直边界

y 轴的方程为 $x=0$

交点边界

$\frac{5}{x+1}+2=2x+1$

$(2x-3)(x+2)=0$

$x=\frac{3}{2}$　或　$x=-2$

图中 A 在 y 轴右侧，取 $x=\frac{3}{2}$。

③ **反向求导：**例题中的分式项和整式项分别积分，再相加。若 $F'(x)=h(x)$，称 $F(x)$ 为 $h(x)$ 的原函数。表中 k,m,n 为常数，$k\neq 0$，C 为任意常数。

函数形式	反向求导的演算	积分公式与条件
幂函数	$\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$	$\int x^n\,\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ $n\neq -1$，在函数有定义的区间内使用。
一次式的倒数	$\left(\frac{1}{2}\ln\lvert 2x+1\rvert\right)'=\frac{1}{2x+1}$	$\int \frac{1}{kx+m}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k}\ln\lvert kx+m\rvert+C$ $kx+m\neq 0$。ln 为自然对数，$\lvert u\rvert$ 为 u 的绝对值。
指数函数	$\left(\frac{1}{3}e^{3x+1}\right)'=e^{3x+1}$	$\int e^{kx+m}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k}e^{kx+m}+C$ e 是自然对数的底。
正弦函数	$\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)'=\sin(2x)$	$\int \sin(kx+m)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}\cos(kx+m)+C$ 角以弧度计。

④ **端点代入：**面积记为 S，左右端横坐标记为 a,b，且 $a<b$。原函数代入端点，取_____。横纵坐标均以单位长度计时，面积单位为平方单位。

$$F'(x)=f(x)-g(x)$$

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

$$\int_0^2 x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}=2$$

所得对数可用下列关系合并。

$$\ln 6-\ln 2=\ln\left(\frac{6}{2}\right)=\ln 3$$

$$2\ln 3=\ln(3^2)=\ln 9$$

⑤ **补全边界：**给出直线上两点或曲线最高点时，先写出相应边界。下列演算分别求直线方程和最高点所在的竖直线。

直线经过 $(0,2)$、$(2,0)$

记斜率为 k。

竖直线经过曲线最高点

$y=6x-x^2=9-(x-3)^2$

$k=\frac{0-2}{2-0}=-1$

$y=2-x$

当 $x=3$ 时，y 取得最大值 9。

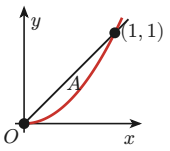
竖直线的方程为 $x=3$。

⑥ **交点方程：**方程含平方、指数或正弦时，按式子的形式换元。换元所得的解须满足新变量的取值条件。

方程形式	演算
含 x^2、x^4	$x^4+x^2-2=0$ 令 $t=x^2$，则 $t\geq 0$。 $t^2+t-2=(t+2)(t-1)=0$ 舍去 $t=-2$，得 $t=1$。 $x^2=1$ $x=\pm 1$
含 e^x、e^{2x}	$2e^{2x}+e^x-1=0$ 令 $t=e^x$，则 $t>0$，且 $e^{2x}=t^2$。 $2t^2+t-1=(2t-1)(t+1)=0$ 舍去 $t=-1$，得 $t=\frac{1}{2}$。 $x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$
含正弦及给定范围	$\sin(2x)=\frac{1}{2},\quad 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ 令 $\theta=2x$，则 $0\leq\theta\leq\pi$。 $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(5\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ $\theta=\frac{\pi}{6}$　或　$\theta=5\frac{\pi}{6}$ $x=\frac{\pi}{12}$　或　$x=5\frac{\pi}{12}$

⑦ 同区间内，上方减下方

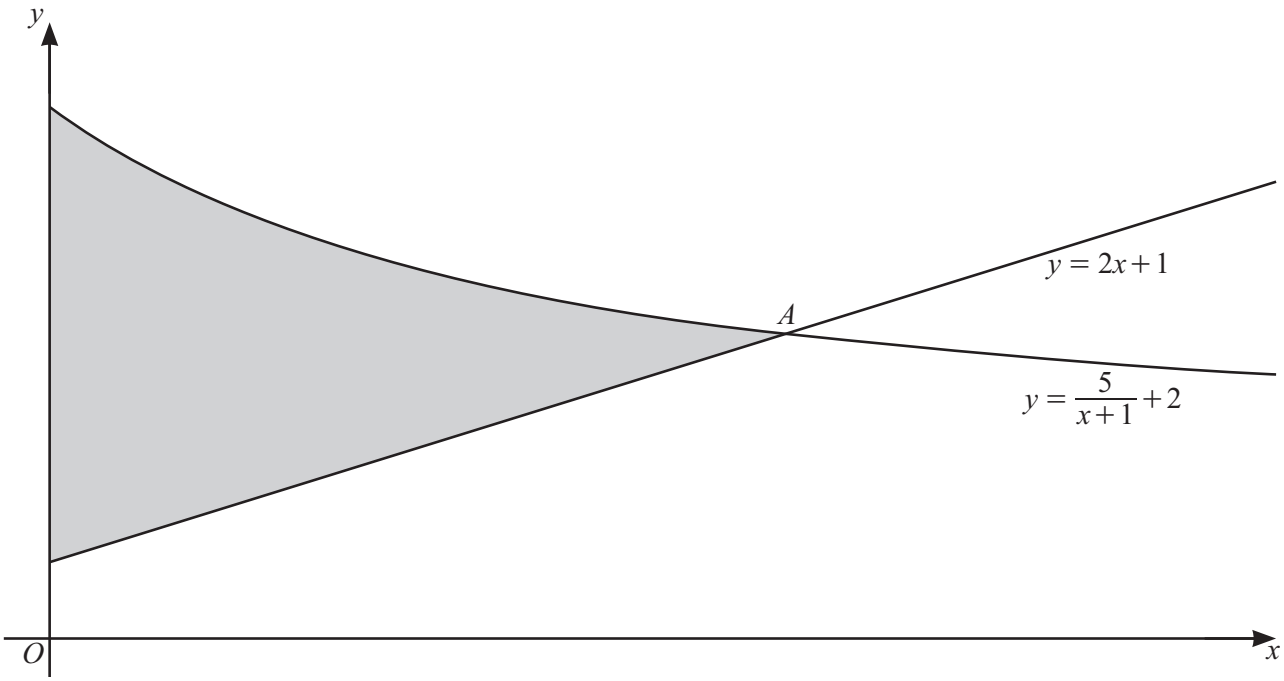
$y=x,\quad y=x^2,\quad 0\leq x\leq 1$



⟵ 填空：①上方函数减下方函数　②0　③上限值减下限值

点石成金　题目出现曲线、直线或坐标轴围成的阴影面积时，先确定左右端横坐标，再积分上方函数减下方函数。

例 1　[2025 · February/March 0606/12 Q7(b)]



The diagram shows part of the curve $y=\frac{5}{x+1}+2$ and part of the line $y=2x+1$ intersecting at the point A.

(a) Find the coordinates of A.

(b) Find the exact area of the shaded region.

图示为曲线 $y=\frac{5}{x+1}+2$ 和直线 $y=2x+1$ 各自的一部分，两者相交于点 A。图中 O 为原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴；阴影由曲线、直线和 y 轴围成。

(a) 求 A 的坐标。

(b) 求阴影区域的精确面积。

解答　由交点处纵坐标相等，得

$$\frac{5}{x+1}+2=2x+1,\quad x\neq -1$$

$$5=(2x-1)(x+1)$$

$$2x^2+x-6=0$$

$$(2x-3)(x+2)=0$$

$$x=\frac{3}{2}\quad 或\quad x=-2$$

由图，A 在 y 轴右侧，故取 $x=\frac{3}{2}$。代入直线方程，得

$$y=2\times\frac{3}{2}+1=4$$

方法：先看阴影左右端，再联立方程解出右侧交点。

辨析：横坐标是积分边界，纵坐标是边界处的高度。

拓展：定积分可正可负，几何面积总是非负。

故 $A\left(\frac{3}{2},4\right)$。
阴影左端为 $x=0$，右端为 $x=\frac{3}{2}$。在此区间内，曲线在直线上方，且 $x+1>0$。记阴影面积为 S，则

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{5}{x+1}+2-(2x+1)\right)\mathrm{d}x$$

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{5}{x+1}+1-2x\right)\mathrm{d}x$$

$$S=\left[5\ln(x+1)+x-x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$S=\left(5\ln\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{2}-\frac{9}{4}\right)-0$$

$$S=5\ln\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{3}{4}$$

答：（a）$A\left(\frac{3}{2},4\right)$；（b）阴影面积为 $5\ln\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{3}{4}$。

针对练习

1. [2024 · February/March 0606/22 Q6]
提示：先看曲线与横轴的位置，再核对指数中横坐标的系数。

Find the exact area of the region enclosed by the curve $y=\mathrm{e}^{2-4x}$, the x-axis, the line $x=-0.25$ and the line $x=0.5$.

求由曲线 $y=e^{2-4x}$、x 轴、直线 $x=-0.25$ 和直线 $x=0.5$ 所围成区域的精确面积。

✓ **答案**

$$\frac{e^3-1}{4}$$

解析 在 $-0.25\le x\le 0.5$ 内，$e^{2-4x}>0$，曲线在 x 轴上方。记所求面积为 S，则

$$S=\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}e^{2-4x}\,\mathrm{d}x$$

$$S=\left[-\frac{1}{4}e^{2-4x}\right]_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$$

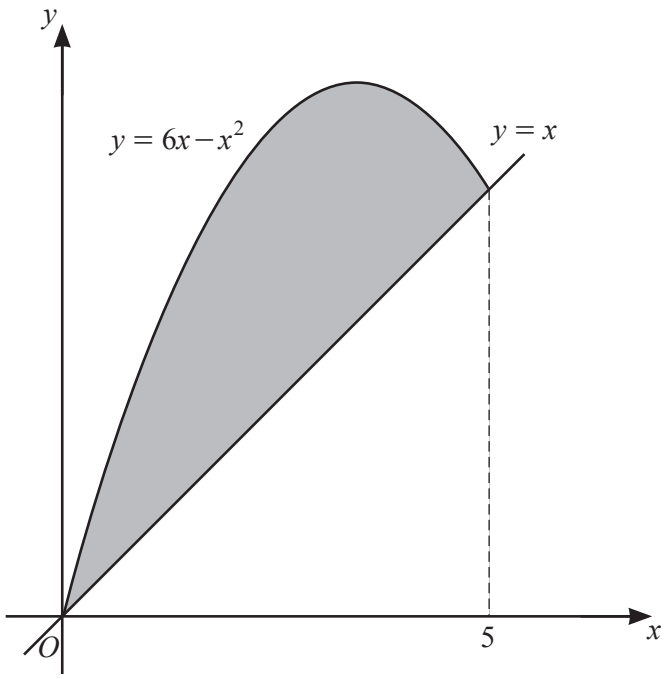
$$S=-\frac{1}{4}e^0-\left(-\frac{1}{4}e^3\right)$$

$$S=\frac{e^3-1}{4}$$

答：所求面积为 $\frac{e^3-1}{4}$。

2. [2023 · May/June 0606/21 Q7(a)]
提示：看阴影两端，比较区间内曲线与直线的高度。

(a)



The diagram shows the curve $y = 6x - x^2$ for $0 \leqslant x \leqslant 5$ and the line $y = x$. Find the area of the shaded region.

（a）图示为曲线 $y = 6x - x^2$ 在 $0 \leq x \leq 5$ 内的部分，以及直线 $y = x$。图中 O 为原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴；两图象在原点和横坐标为 5 的点相交，虚线标出 $x = 5$。求阴影区域的面积。

✓ **答案**

$$\frac{125}{6}$$

解析 由题设及图示，阴影的左右端横坐标分别为 0、5。在 $0 \leq x \leq 5$ 内，

$$(6x - x^2) - x = x(5 - x) \geq 0$$

故曲线在直线上方。记阴影面积为 S，则

$$S = \int_0^5 ((6x - x^2) - x)\,\mathrm{d}x$$

$$S = \int_0^5 (5x - x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$S = \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^5$$

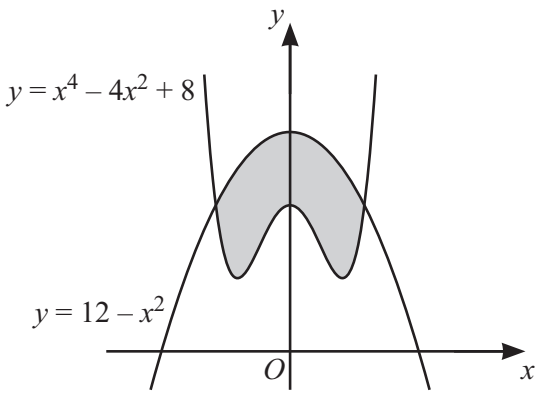
$$S = \frac{125}{2} - \frac{125}{3}$$

$$S = \frac{125}{6}$$

答：阴影面积为 $\frac{125}{6}$。

3. [2025・October/November 0606/13 Q8]

提示：交点方程按横坐标的平方换元，再比较两曲线高度。



The diagram shows part of each of the curves $y = 12 - x^2$ and $y = x^4 - 4x^2 + 8$.

Find the area of the shaded region enclosed by the two curves.

图示为曲线 $y = 12 - x^2$ 和曲线 $y = x^4 - 4x^2 + 8$ 各自的一部分。图中 O 为原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。求两条曲线所围成的阴影区域的面积。

✓ **答案**

$$\frac{96}{5}$$

解析 联立两条曲线的方程，得

$$12 - x^2 = x^4 - 4x^2 + 8$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

因实数 x 满足 $x^2 + 1 > 0$，故

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \quad 或 \quad x = 2$$

在 $-2 \le x \le 2$ 内，

$$(12 - x^2) - (x^4 - 4x^2 + 8) = (4 - x^2)(x^2 + 1) \ge 0$$

故曲线 $y = 12 - x^2$ 在上方。记阴影面积为 S，则

$$S = \int_{-2}^{2} (4 + 3x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x$$

$$S = \left[4x + x^3 - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2}$$

$$S=\left(8+8-\frac{32}{5}\right)-\left(-8-8+\frac{32}{5}\right)$$

$$S=\frac{96}{5}$$

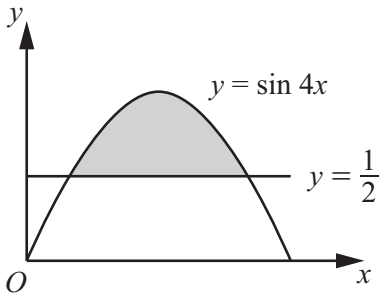
答：阴影面积为 $\frac{96}{5}$。

4. [2024 · October/November 0606/23 Q8(b)]

提示：先将横坐标范围换成角的范围，再找两个交点。

(a) Solve the equation $\sin 4x=\frac{1}{2}$ for $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$, giving your answers in terms of π.

(b)



The diagram shows parts of the graphs of $y=\sin 4x$ and $y=\frac{1}{2}$.

Find the exact area of the shaded region enclosed by the curve and the line.

(a) 解方程 $\sin(4x)=\frac{1}{2}$，其中 $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$，答案用含 π 的式子表示。

(b) 图示为曲线 $y=\sin(4x)$ 和直线 $y=\frac{1}{2}$ 的部分图象。图中 O 为原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。求曲线与直线所围成的阴影区域的精确面积。

✓ **答案** (a) $x=\frac{\pi}{24}$ 或 $x=5\frac{\pi}{24}$；(b) $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}$

解析 由 $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$，得

$$0\leq 4x\leq\pi$$

在此范围内，由 $\sin(4x)=\frac{1}{2}$，得

$$4x=\frac{\pi}{6}\quad\text{或}\quad 4x=5\frac{\pi}{6}$$

$$x=\frac{\pi}{24}\quad\text{或}\quad x=5\frac{\pi}{24}$$

这两个解是阴影左右端的横坐标。在两端之间，曲线 $y=\sin(4x)$ 在直线 $y=\frac{1}{2}$ 上方。记阴影面积为 S，则

$$S=\int_{\frac{\pi}{24}}^{5\frac{\pi}{24}}\left(\sin(4x)-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$S=\left[-\frac{1}{4}\cos(4x)-\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{24}}^{5\frac{\pi}{24}}$$

$$S=\left(-\frac{1}{4}\cos\left(5\frac{\pi}{6}\right)-5\frac{\pi}{48}\right)-\left(-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{48}\right)$$

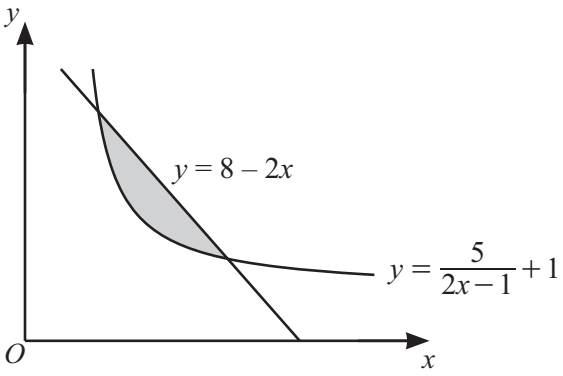
$$S = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - 5\frac{\pi}{48}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{48}\right)$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}$$

答：（a）$x = \frac{\pi}{24}$ 或 $x = 5\frac{\pi}{24}$；（b）阴影面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}$。

5. [2026 · May/June 0606/13 Q11]

提示：比较两交点之间的高度，再核对分母中横坐标的系数。



The diagram shows part of the curve $y = \frac{5}{2x-1} + 1$ and part of the line $y = 8 - 2x$.

Find the exact area of the shaded region enclosed by the curve and the line.

图示为曲线 $y = \frac{5}{2x-1} + 1$ 和直线 $y = 8 - 2x$ 各自的一部分。图中 O 为原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。求曲线与直线所围成的阴影区域的精确面积。

✓ **答案**

$$6 - \frac{5}{2}\ln 5$$

解析 联立曲线与直线的方程，得

$$\frac{5}{2x-1} + 1 = 8 - 2x, \quad x \neq \frac{1}{2}$$

$$5 = (7 - 2x)(2x - 1)$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1 \quad 或 \quad x = 3$$

由图，在 $1 \le x \le 3$ 内，直线在曲线上方，且 $2x - 1 > 0$。记阴影面积为 S，则

$$S = \int_1^3 \left((8 - 2x) - \left(\frac{5}{2x-1} + 1\right)\right) \mathrm{d}x$$

$$S = \int_1^3 \left(7 - 2x - \frac{5}{2x-1}\right) \mathrm{d}x$$

$$S=\left[7x-x^2-\frac{5}{2}\ln(2x-1)\right]_1^3$$

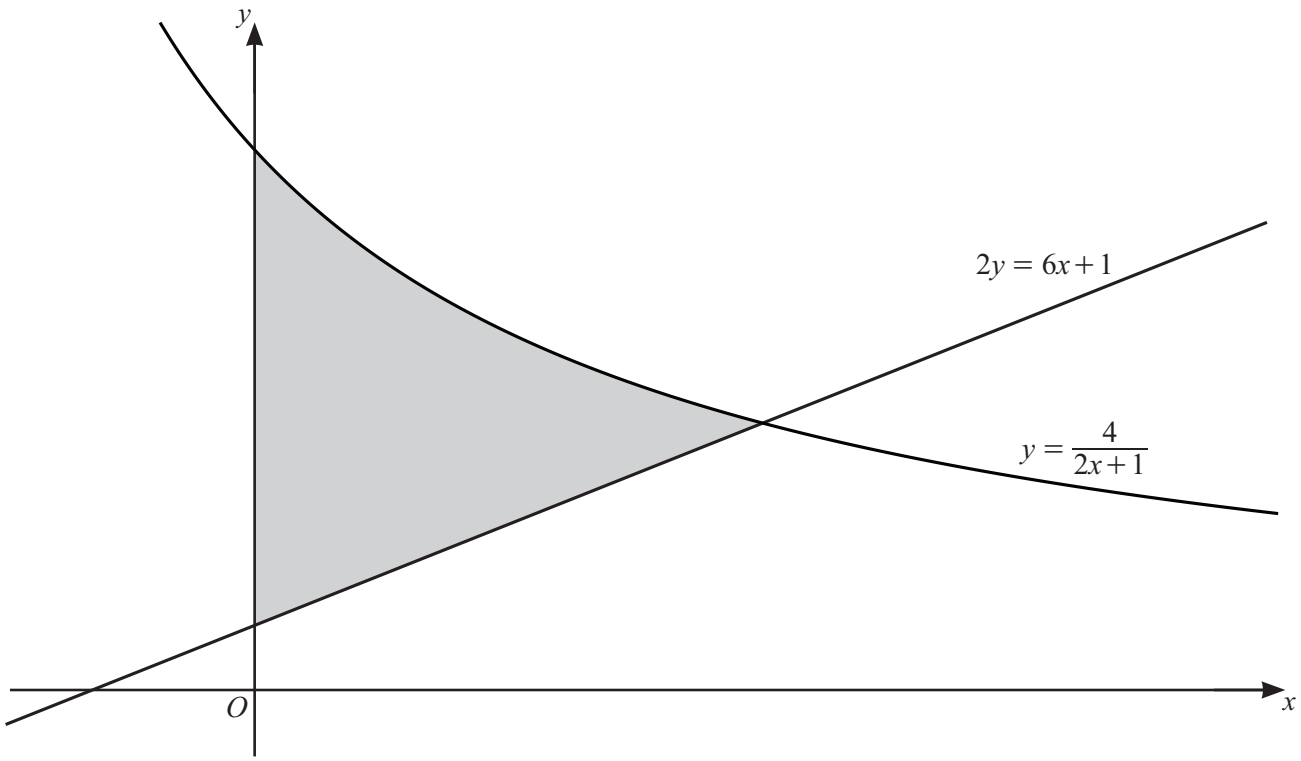
$$S=\left(21-9-\frac{5}{2}\ln 5\right)-\left(7-1-\frac{5}{2}\ln 1\right)$$

$$S=6-\frac{5}{2}\ln 5$$

答：阴影面积为 $6-\frac{5}{2}\ln 5$。

6. [2024・October/November 0606/12 Q9]

提示：看交点位于纵轴哪侧，再比较曲线与直线的高度。



The diagram shows part of the curve $y=\dfrac{4}{2x+1}$ and the straight line $2y=6x+1$. Find the area of the shaded region, giving your answer in the form $\ln a+b$, where a is an integer and b is a rational number.

图示为曲线 $y=\frac{4}{2x+1}$ 和直线 $2y=6x+1$ 各自的一部分。图中 O 为原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴；阴影由曲线、直线和 y 轴围成。求阴影区域的面积，答案写成 $\ln a+b$ 的形式，其中 a 为整数，b 为有理数。

✓ **答案**

$$\ln 4-\frac{5}{8}$$

解析 由直线方程，得

$$y=3x+\frac{1}{2}$$

联立曲线与直线的方程，得

$$\frac{4}{2x+1} = 3x + \frac{1}{2}, \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

$$8 = (6x+1)(2x+1)$$

$$12x^2 + 8x - 7 = 0$$

$$(2x-1)(6x+7) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad 或 \quad x = -\frac{7}{6}$$

图中交点在 y 轴右侧，故取 $x = \frac{1}{2}$。阴影左端为 $x = 0$。在 $0 \le x \le \frac{1}{2}$ 内，曲线在直线上方，且 $2x+1 > 0$。记阴影面积为 S，则

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{2x+1} - 3x - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}x$$

$$S = \left[2\ln(2x+1) - \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

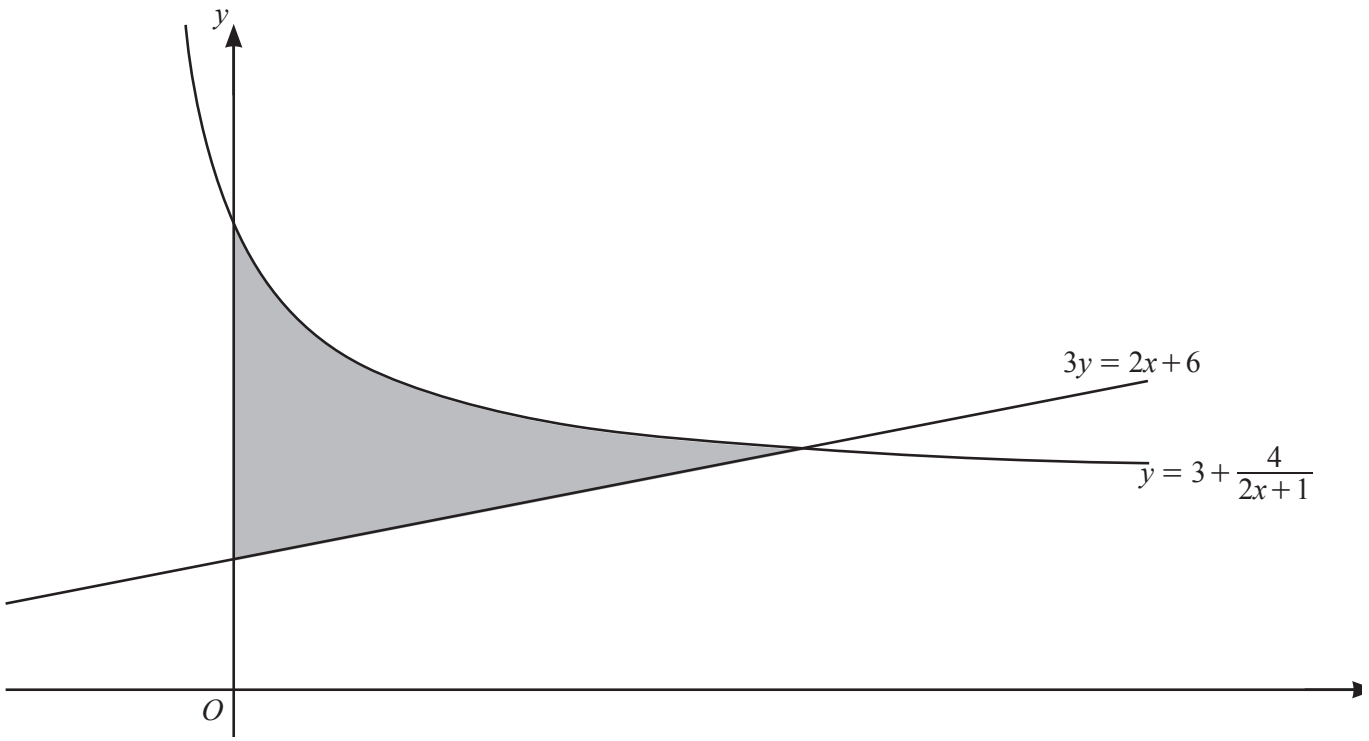
$$S = 2\ln 2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{4}$$

$$S = \ln 4 - \frac{5}{8}$$

答：阴影面积为 $\ln 4 - \frac{5}{8}$。

7. [2023 · May/June 0606/12 Q9]

提示：先核对直线的斜率与截距，再按图筛选交点。



The diagram shows part of the curve $y=3+\dfrac{4}{2x+1}$ and the straight line $3y=2x+6$. Find the area of the shaded region, giving your answer in exact form.

图示为曲线 $y=3+\frac{4}{2x+1}$ 和直线 $3y=2x+6$ 各自的一部分。图中 O 为原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴；阴影由曲线、直线和 y 轴围成。求阴影区域的面积，答案用精确形式表示。

✓ **答案**

$$\frac{5}{12}+2\ln 6$$

解析 由直线方程，得

$$y=\frac{2}{3}x+2$$

联立曲线与直线的方程，得

$$3+\frac{4}{2x+1}=\frac{2}{3}x+2,\quad x\neq -\frac{1}{2}$$

$$3(2x+1)+12=2x(2x+1)$$

$$4x^2-4x-15=0$$

$$(2x-5)(2x+3)=0$$

$$x=\frac{5}{2}\quad 或\quad x=-\frac{3}{2}$$

图中交点在 y 轴右侧，故取 $x=\frac{5}{2}$。阴影左端为 $x=0$。在 $0\le x\le\frac{5}{2}$ 内，曲线在直线上方，且 $2x+1>0$。记阴影面积为 S，则

$$S=\int_0^{\frac{5}{2}}\left(3+\frac{4}{2x+1}-\left(\frac{2}{3}x+2\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$S=\int_0^{\frac{5}{2}}\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{4}{2x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$S=\left[x-\frac{x^2}{3}+2\ln(2x+1)\right]_0^{\frac{5}{2}}$$

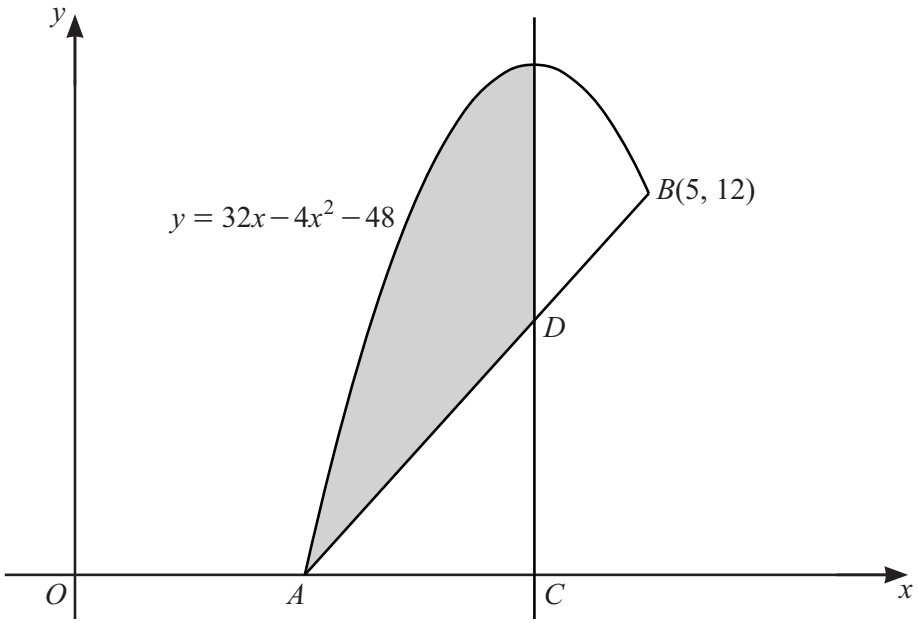
$$S=\frac{5}{2}-\frac{25}{12}+2\ln 6$$

$$S=\frac{5}{12}+2\ln 6$$

答：阴影面积为 $\frac{5}{12}+2\ln 6$。

8. [2024 · May/June 0606/22 Q9]

提示：看两点确定斜线，再用最高点的横坐标确定竖直边界。



The diagram shows part of the curve $y = 32x - 4x^2 - 48$ and the line AB.
The curve and the line AB meet the x-axis at A and meet again at the point $B(5, 12)$.
The line CD extended is parallel to the y-axis and passes through the maximum point of the curve.
Find the area of the shaded region.

图示为曲线 $y = 32x - 4x^2 - 48$ 的一部分和直线 AB。曲线与直线 AB 在 A 点与 x 轴相交，并在 $B(5, 12)$ 处再次相交。直线 CD 延长后经过曲线的最高点，且与 y 轴平行。图中 O 为原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴；C 在 x 轴上，D 在直线 AB 上，阴影由曲线、线段 AD 和经过 D 的竖直边界围成。求阴影区域的面积。

✓ **答案**

$$\frac{40}{3}$$

解析 令曲线上的 $y = 0$，得

$$32x - 4x^2 - 48 = 0$$

$$(x - 2)(x - 6) = 0$$

$$x = 2 \quad 或 \quad x = 6$$

由图，A 位于 $B(5, 12)$ 左侧，故 $A(2, 0)$。直线 AB 的斜率为

$$k = \frac{12 - 0}{5 - 2} = 4$$

故直线 AB 的方程为

$$y = 4(x - 2) = 4x - 8$$

将曲线方程配方，得

$$y = 32x - 4x^2 - 48 = 16 - 4(x - 4)^2$$

故曲线最高点的横坐标为 4，直线 CD 的方程为 $x=4$。阴影的左右端横坐标分别为 2、4。在此区间内，曲线在直线 AB 上方。记阴影面积为 S，则

$$S=\int_2^4\left((32x-4x^2-48)-(4x-8)\right)\mathrm{d}x$$

$$S=\int_2^4(28x-4x^2-40)\,\mathrm{d}x$$

$$S=\left[14x^2-\frac{4}{3}x^3-40x\right]_2^4$$

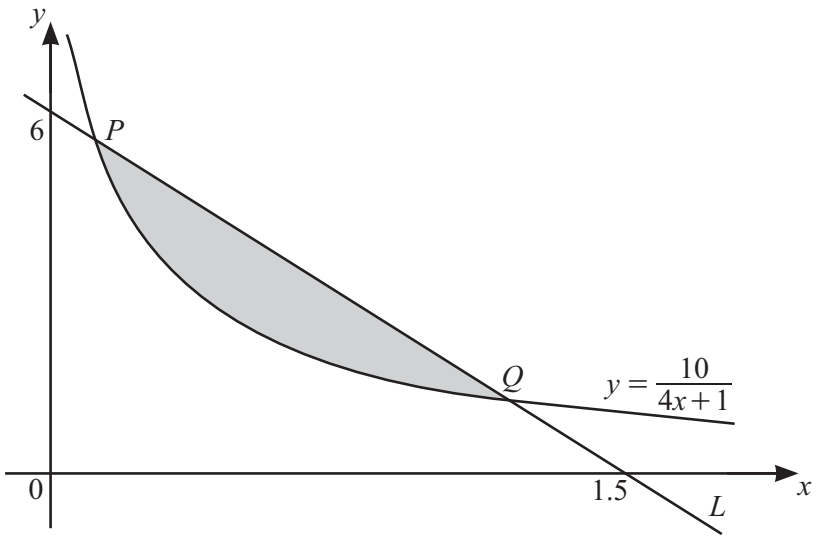
$$S=\left(-\frac{64}{3}\right)-\left(-\frac{104}{3}\right)$$

$$S=\frac{40}{3}$$

答：阴影面积为 $\frac{40}{3}$。

9. [2026 · May/June 0606/12 Q12]

← 提示：先看直线的两个截距，再比较两交点之间的高度。



The diagram shows part of the curve $y=\dfrac{10}{4x+1}$ and the line L.

L passes through the points (0, 6) and (1.5, 0).
The curve and L intersect at the points P and Q.

Find the exact area of the shaded region.

图示为曲线 $y=\frac{10}{4x+1}$ 的一部分和直线 L。直线 L 经过点 $(0,6)$ 和 $(1.5,0)$。曲线与直线 L 相交于 P、Q 两点。图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，原点标为 0；直线在两坐标轴上的截距分别标为 6 和 1.5。求阴影区域的精确面积。

✓ **答案**

$$\frac{21}{8}-\frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

解析 直线 L 经过 $(0,6)$ 和 $(1.5,0)$，其斜率为

$$k=\frac{0-6}{1.5-0}=-4$$

故直线 L 的方程为

$$y=6-4x$$

联立曲线与直线的方程，得

$$\frac{10}{4x+1}=6-4x,\quad x\neq-\frac{1}{4}$$

$$10=(6-4x)(4x+1)$$

$$16x^2-20x+4=0$$

$$(4x-1)(x-1)=0$$

$$x=\frac{1}{4}\quad 或\quad x=1$$

在 $\frac{1}{4}\le x\le 1$ 内，直线在曲线上方，且 $4x+1>0$。记阴影面积为 S，则

$$S=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(6-4x-\frac{10}{4x+1}\right)\mathrm{d}x$$

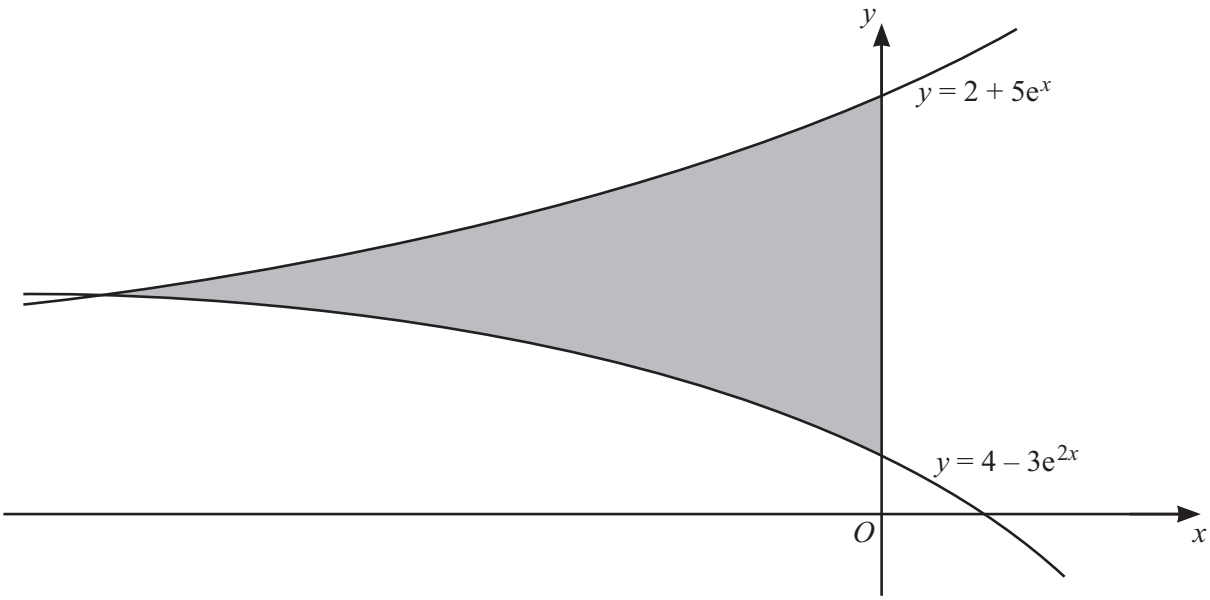
$$S=\left[6x-2x^2-\frac{5}{2}\ln(4x+1)\right]_{\frac{1}{4}}^{1}$$

$$S=\left(4-\frac{5}{2}\ln 5\right)-\left(\frac{11}{8}-\frac{5}{2}\ln 2\right)$$

$$S=\frac{21}{8}-\frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

答：阴影面积为 $\frac{21}{8}-\frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$。

10. [2025 · October/November 0606/22 Q10]
提示：比较两种指数的倍数关系，换元后核对新变量的正负。



The diagram shows parts of the graphs of $y = 2 + 5e^x$ and $y = 4 - 3e^{2x}$.

Find the area of the shaded region.
Give your answer in the form $a + b\ln 3$, where a and b are exact constants.

图示为曲线 $y = 2 + 5e^x$ 和曲线 $y = 4 - 3e^{2x}$ 的部分图象。图中 O 为原点，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴；阴影由两条曲线及 y 轴围成。求阴影区域的面积，答案写成 $a + b\ln 3$ 的形式，其中 a、b 均为精确常数。

✓ **答案**

$$\frac{14}{3} - 2\ln 3$$

解析 联立两条曲线的方程，得

$$2 + 5e^x = 4 - 3e^{2x}$$

$$3e^{2x} + 5e^x - 2 = 0$$

令 $t = e^x$，则 $t > 0$，且 $e^{2x} = t^2$。于是

$$3t^2 + 5t - 2 = 0$$

$$(3t - 1)(t + 2) = 0$$

$$t = \frac{1}{3} \quad 或 \quad t = -2$$

由 $t > 0$，舍去 $t = -2$，得

$$e^x = \frac{1}{3}$$

$$x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$$

阴影右端为 y 轴，即 $x=0$。在 $-\ln 3 \le x \le 0$ 内，由图可知，曲线 $y=2+5e^x$ 在上方。记阴影面积为 S，则

$$S=\int_{-\ln 3}^{0}\left((2+5e^x)-(4-3e^{2x})\right)\mathrm{d}x$$

$$S=\int_{-\ln 3}^{0}\left(-2+5e^x+3e^{2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$S=\left[-2x+5e^x+\frac{3}{2}e^{2x}\right]_{-\ln 3}^{0}$$

$$S=\left(5+\frac{3}{2}\right)-\left(2\ln 3+\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)$$

$$S=\frac{14}{3}-2\ln 3$$

答：阴影面积为 $\frac{14}{3}-2\ln 3$。

题型 25 用三角形或梯形面积与曲线积分作差

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **求端点纵坐标：**本例两端横坐标为 $x_A=1$、$x_B=2$。代入曲线，求两点纵坐标 y_A、y_B。

$$y_A=\frac{3}{1+1}-\frac{1-2}{1}=\frac{5}{2}$$

$$y_B=\frac{3}{2+1}-\frac{2-2}{2}=1$$

② **补齐端点位置：**横坐标未给出时，利用端点所在位置列式。以曲线 $y=2x-x^2$ 为例，横轴交点按图示位置取舍。极大值点的导数等于 _____。

横轴交点

$$y=0$$

$$2x-x^2=x(2-x)=0$$

$x=0$ 或 $x=2$

极大值点

$$y'=2-2x=0$$

$$x=1$$

$$y=1$$

$$y''=-2<0$$

③ **求直边下方面积：**用 S 表示面积，本例直线下方是梯形。若一端落在横轴上，直线下方是三角形。

本例的梯形

$$S=(y_A+y_B)\frac{x_B-x_A}{2}$$

$$S=\left(\frac{5}{2}+1\right)\frac{2-1}{2}$$

梯形面积为 _____。

上例中连接两点 $(0,0)$、$(1,1)$

$S=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$

④ **求分式的积分：**本例取 $x>0$，记号 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示求原函数。ln 表示自然对数，C 为任意常数。一次分母中 x 的系数为 2，积分后需乘 $\frac{1}{2}$。

$$\frac{3}{x+1}-\frac{x-2}{x}=\frac{3}{x+1}-1+\frac{2}{x}$$

$$\int\left(\frac{3}{x+1}-1+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=3\ln(x+1)-x+2\ln x+C$$

一次分母

$$(\ln(2x+1))'=\frac{2}{2x+1}$$

$\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C$

分母含平方

$$(x^{-1})'=-x^{-2}$$

$\int x^{-2}\,\mathrm{d}x=-x^{-1}+C$

⑤ **求三角函数积分：**对 $\cos(2x)$ 求导会产生系数 2。求原函数时，需配上相应系数。三角函数的自变量用弧度。

$$(\cos(2x))'=-2\sin(2x)$$

$$\int\sin(2x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos(2x)+C$$

$$\int(1+2\sin(2x))\,\mathrm{d}x=x-\cos(2x)+C$$

⑥ **将两块面积作差：**本组图形的两条边界均在横轴上方。设 F 是 f 的原函数，p,q 为左右端点横坐标。阴影面积用上方面积 _____ 下方面积。

$$\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_p^q=F(q)-F(p)$$

直线在曲线上方

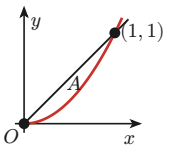
$S_{\text{阴影}}=S_{\text{梯形或三角形}}-\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x$

曲线在直线上方

$S_{\text{阴影}}=\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x-S_{\text{梯形或三角形}}$

⑦ 同区间内，上方减下方

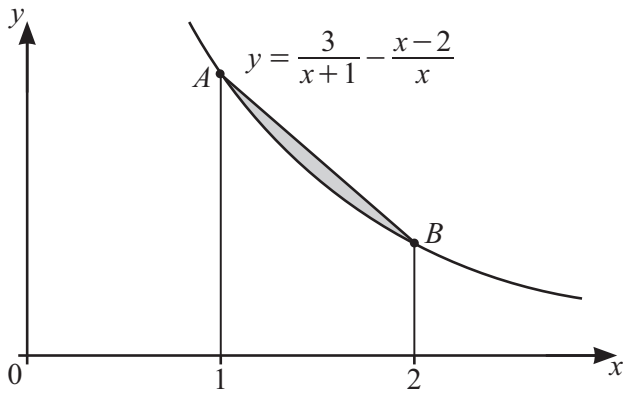
$$y=x,\quad y=x^2,\quad 0\le x\le 1$$



填空：①0　②$\frac{7}{4}$　③减

点石成金　直线与曲线围成阴影区域时，先求两端坐标，再用三角形或梯形面积与曲线积分作差。

例 1　[2025 · May/June 0606/13 Q8(b)]



The diagram shows part of the curve $y = \frac{3}{x+1} - \frac{x-2}{x}$.

The points A and B lie on the curve such that the x-coordinate of A is 1 and the x-coordinate of B is 2.

(a) Find the y-coordinates of A and B.

(b) Show that the area of the shaded region enclosed by the line AB and the curve is $\frac{a}{4} - \ln\frac{b}{2}$, where a and b are integers to be found.

图示曲线 $y = \frac{3}{x+1} - \frac{x-2}{x}$ 的一部分。横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，原点标为 0。点 A 和点 B 均在曲线上，点 A 的横坐标为 1，点 B 的横坐标为 2。（a）求点 A 和点 B 的纵坐标。（b）证明直线 AB 与曲线围成的阴影区域的面积可写成 $\frac{a}{4} - \ln\left(\frac{b}{2}\right)$，其中 a 和 b 为待求的整数，并求出这两个整数。

解答　将两点的横坐标分别代入曲线，得

$$y_A = \frac{3}{1+1} - \frac{1-2}{1} = \frac{5}{2}$$

$y_B = \frac{3}{2+1} - \frac{2-2}{2} = 1$。故 $A\left(1, \frac{5}{2}\right)$，$B(2,1)$。由图，直线 AB 在曲线上方。直线下方的梯形面积为 $S_{\text{梯形}} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)(2-1) = \frac{7}{4}$。将曲线表达式拆项，得 $y = \frac{3}{x+1} - 1 + \frac{2}{x}$。曲线下方的面积为

$$S_{\text{曲线下}} = \int_1^2 \left(\frac{3}{x+1} - 1 + \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x$$

$$S_{\text{曲线下}} = [3\ln(x+1) - x + 2\ln x]_1^2$$

$$S_{\text{曲线下}} = (3\ln 3 - 2 + 2\ln 2) - (3\ln 2 - 1)$$

$$S_{\text{曲线下}} = 3\ln 3 - \ln 2 - 1$$

$S_{\text{曲线下}} = \ln\left(\frac{27}{2}\right) - 1$。因此阴影面积为

$$S_{\text{阴影}} = \frac{7}{4} - \left(\ln\left(\frac{27}{2}\right) - 1\right)$$

方法：先看两端横坐标，代入曲线求高度，再比较直线与曲线的位置。

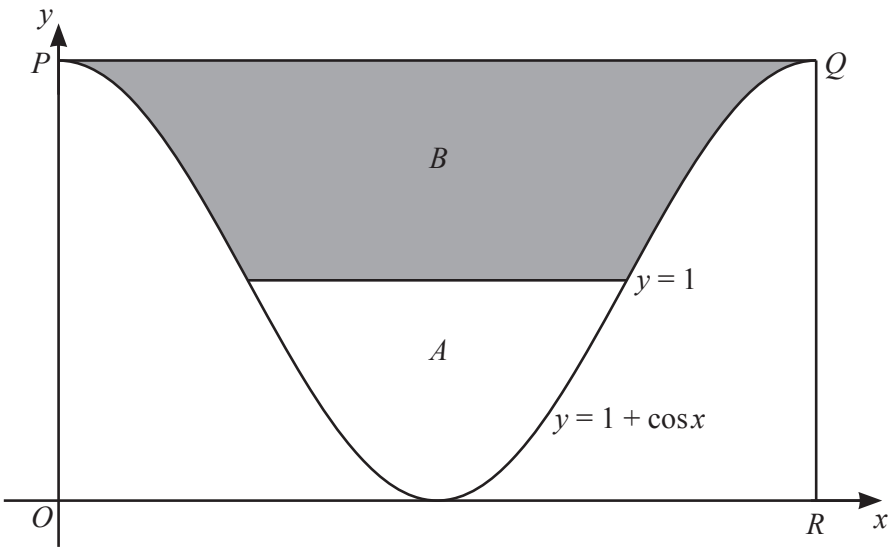
辨析：端点纵坐标是梯形两条平行边的长度，横坐标差是这两边的间距。

拓展：二阶导数在区间内为正时，曲线位于连接两端点的弦下方。

$S_{阴影}=\frac{11}{4}-\ln\left(\frac{27}{2}\right)$。与题给形式比较，得
$a=11$，$b=27$。答：(a) 两点的纵坐标分别为 $\frac{5}{2}$、1；(b) 阴影面积为 $\frac{11}{4}-\ln\left(\frac{27}{2}\right)$，
其中 $a=11$、$b=27$。

针对练习

1. [2022 · May/June 0606/22 Q11]
提示：先求水平直线与曲线的交点，再分别求所需区域面积。



The diagram shows part of the line $y=1$ and one complete period of the curve $y=1+\cos x$, where x is in radians. The line PQ is a tangent to the curve at P and at Q. The line QR is parallel to the y-axis. Area A is enclosed by the line $y=1$ and the curve. Area B is enclosed by the line $y=1$, the line PQ and the curve.

Given that area A : area B is $1:k$ find the exact value of k.

图中显示了直线 $y=1$ 的一部分，以及曲线 $y=1+\cos x$ 的一个完整周期，其中 x 以弧度为单位。
图中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，原点为 O。点 P 位于 y 轴上，点 Q 位于所示周期的右端，点 R 位于 x 轴上。直线 PQ 在 P、Q 两点处均与曲线相切。直线 QR 平行于 y 轴。
区域 A 由直线 $y=1$ 和曲线围成。阴影区域 B 由直线 $y=1$、直线 PQ 和曲线围成。
已知区域 A 的面积与区域 B 的面积之比为 $1:k$，求 k 的精确值。

✓ **答案** $k=\pi-1$。

解析 由图，曲线所示的一个完整周期为 $0\le x\le 2\pi$，故

$$P(0,2),\quad Q(2\pi,2),\quad R(2\pi,0)$$

直线 $y=1$ 与曲线相交时，

$$1+\cos x=1$$

$$\cos x=0$$

在所示周期内，交点的横坐标为

$$x=\frac{\pi}{2}\quad 或\quad x=\frac{3\pi}{2}$$

在这两个交点之间，直线 $y=1$ 位于曲线上方。
设区域 A、B 的面积分别为 S_A、S_B。
由 $\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$，得

$$\int (1+\cos x)\,\mathrm{d}x = x+\sin x+C$$

用直线下方的矩形面积减去曲线下方的面积，得

$$S_A = 1\times\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$S_A = \pi-[x+\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$S_A = \pi-\left(\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\right)=2$$

区域 A、B 合在一起，由直线 PQ 与曲线围成。
用矩形 $OPQR$ 的面积减去整个周期内曲线下方的面积，得

$$S_A+S_B = 2\times 2\pi-\int_0^{2\pi}(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$S_A+S_B = 4\pi-[x+\sin x]_0^{2\pi}=4\pi-2\pi=2\pi$$

$$S_B = 2\pi-2$$

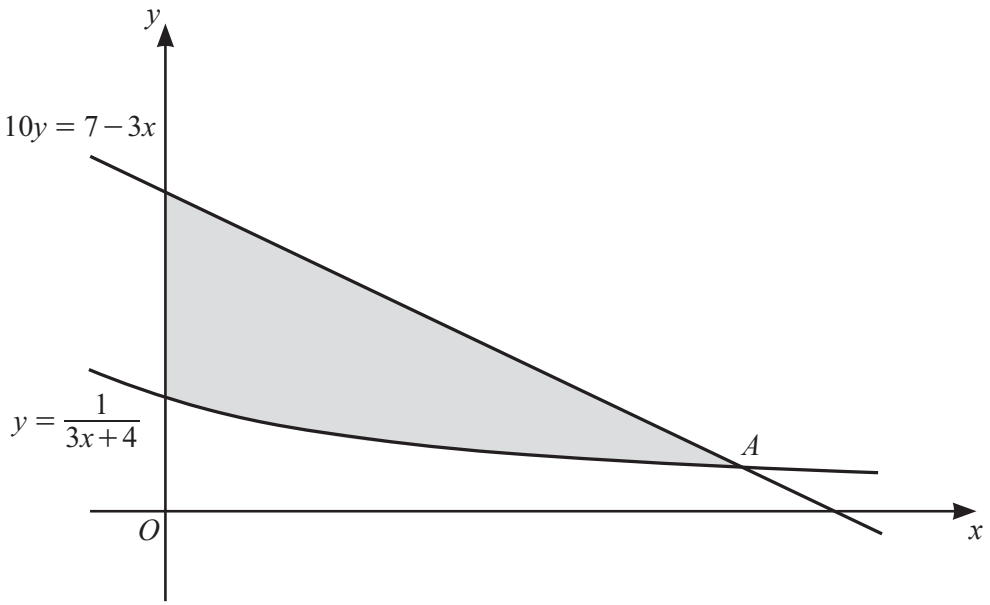
由题给面积比，

$$k=\frac{S_B}{S_A}=\frac{2\pi-2}{2}=\pi-1$$

答：$k=\pi-1$。

2. [2023 · May/June 0606/23 Q9(b)]
提示：看给定纵坐标与直线方程，求出横坐标后比较两条边界。

(b)



The diagram shows part of the line $10y = 7 - 3x$ and part of the curve $y = \dfrac{1}{3x+4}$.
The line and curve intersect at the point A. Verify that the y-coordinate of A is 0.1 and calculate the area of the shaded region.

(b) 图示直线 $10y = 7 - 3x$ 和曲线 $y = \frac{1}{3x+4}$ 的一部分。横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，原点为 O。直线与曲线相交于点 A。验证点 A 的纵坐标为 0.1，并计算图中阴影区域的面积。阴影区域由纵轴、直线及曲线围成。

✓ **答案** $A(2, 0.1)$，阴影面积为 $\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0.495$。

解析 将 $y = 0.1$ 代入直线方程，得

$$10 \times 0.1 = 7 - 3x$$

$x = 2$。将 $x = 2$ 代入曲线，得
$y = \frac{1}{3\times 2+4} = \frac{1}{10} = 0.1$。故点 $(2, 0.1)$ 同时在直线与曲线上，且位于图示位置，所求纵坐标得证。直线与纵轴相交时，
$y = \frac{7}{10}$。由图，直线在曲线上方。直线下方的梯形面积为
$S_{梯形} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{10} + \frac{1}{10}\right) \times 2 = \frac{4}{5}$。曲线下方的面积为

$$S_{曲线下} = \int_0^2 \frac{1}{3x+4}\,\mathrm{d}x$$

$$S_{曲线下} = \left[\frac{1}{3}\ln(3x+4)\right]_0^2$$

$$S_{曲线下} = \frac{1}{3}\ln 10 - \frac{1}{3}\ln 4$$

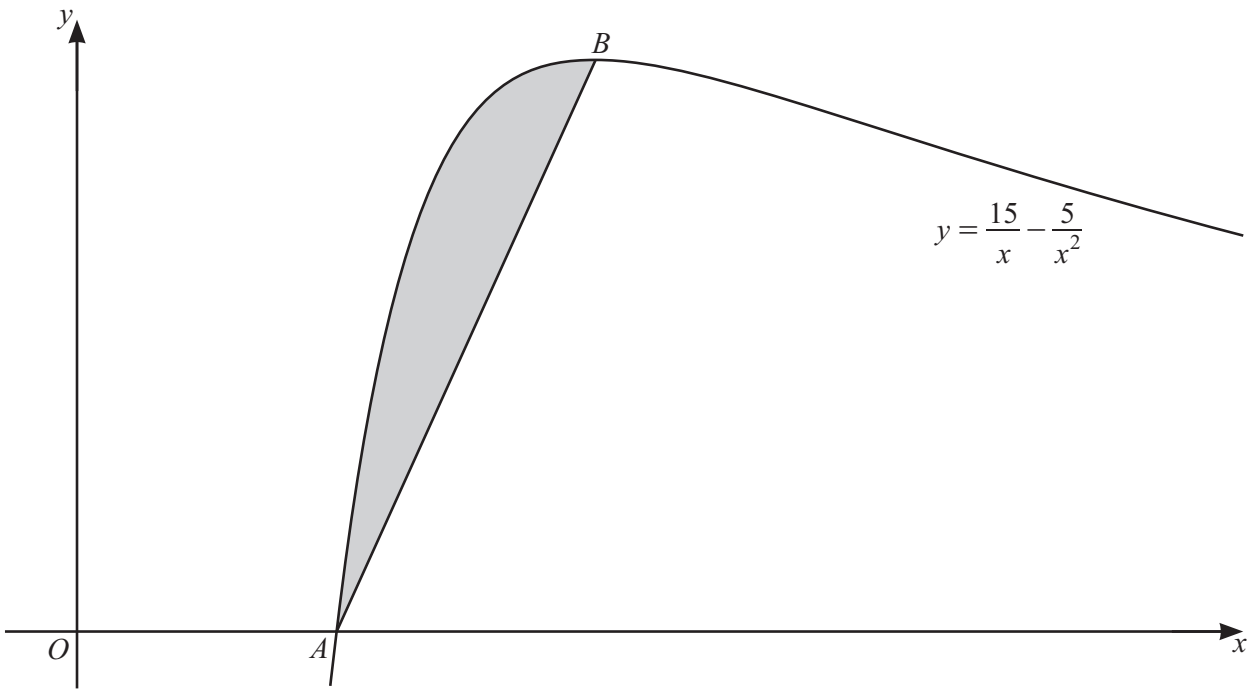
$S_{曲线下} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$。因此阴影面积为

$$S_{阴影} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$S_{\text{阴影}} \approx 0.495$。答：点 A 的纵坐标为 0.1，阴影面积约为 0.495。

3. [2025 · May/June 0606/22 Q8]

提示：看横轴交点与极大值点，分别用函数值和导数定位端点。



The diagram shows part of the curve $y = \dfrac{15}{x} - \dfrac{5}{x^2}$.

The curve meets the x-axis at the point A.
The curve has a maximum at the point B.

Find the area of the shaded region enclosed by the line AB and the curve.

Give your answer in exact form.

图示曲线 $y = \frac{15}{x} - \frac{5}{x^2}$ 的一部分。横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，原点为 O。曲线与 x 轴相交于点 A，并在点 B 处取得极大值。求直线 AB 与曲线围成的阴影区域的面积，答案用精确形式表示。

✓ **答案**

$$15\ln 2 - \frac{75}{8}$$

解析　点 A 在横轴上，故 $\frac{15}{x} - \frac{5}{x^2} = 0$。由于 $x \neq 0$，两边乘以 x^2，得

$$15x - 5 = 0$$

$x = \frac{1}{3}$。故 $A\left(\frac{1}{3}, 0\right)$。对曲线求导，得 $y' = -\frac{15}{x^2} + \frac{10}{x^3}$。点 B 为极大值点，由 $y' = 0$ 得

$$\frac{10 - 15x}{x^3} = 0$$

$x = \frac{2}{3}$。代入曲线，得

$y_B = \frac{15}{\frac{2}{3}} - \frac{5}{(\frac{2}{3})^2} = \frac{45}{4}$。故 $B(\frac{2}{3}, \frac{45}{4})$。直线 AB 下方的三角形面积为 $S_{三角形} = \frac{1}{2}(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) \times \frac{45}{4} = \frac{15}{8}$。曲线下方的面积为

$$S_{曲线下} = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{15}{x} - \frac{5}{x^2}\right) \mathrm{d}x$$

$$S_{曲线下} = \left[15\ln x + \frac{5}{x}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}$$

$$S_{曲线下} = \left(15\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{15}{2}\right) - \left(15\ln\left(\frac{1}{3}\right) + 15\right)$$

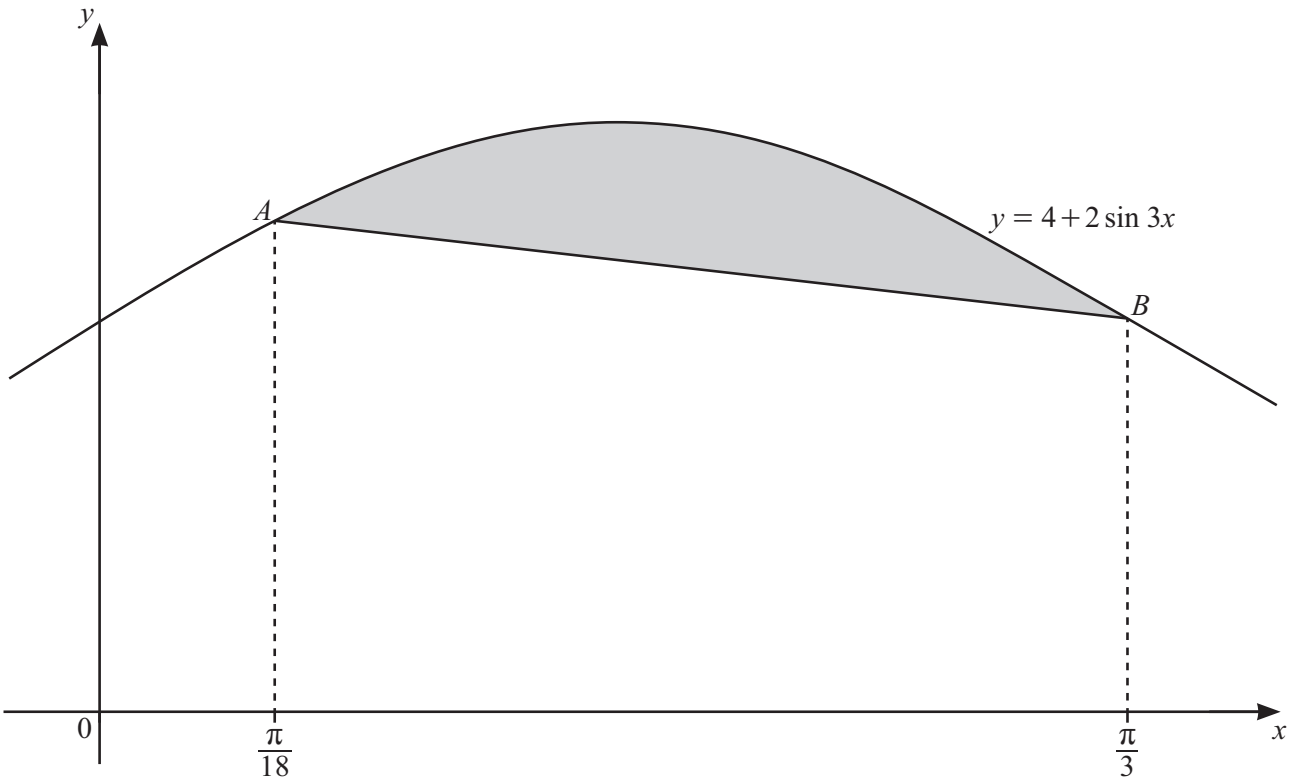
$S_{曲线下} = 15\ln 2 - \frac{15}{2}$。由图，曲线在直线 AB 上方，故

$$S_{阴影} = \left(15\ln 2 - \frac{15}{2}\right) - \frac{15}{8}$$

$S_{阴影} = 15\ln 2 - \frac{75}{8}$。答：阴影面积为 $15\ln 2 - \frac{75}{8}$。

4. [2024 · October/November 0606/11 Q11]

提示：比较曲线与弦的位置，积分时核对三倍角带来的系数。



The diagram shows part of the curve $y = 4 + 2\sin 3x$ and the straight line AB. The points A and B lie on the curve. The x-coordinate of A is $\frac{\pi}{18}$ and the x-coordinate of B is $\frac{\pi}{3}$. Find the area of the shaded region, giving your answer in exact form.

图示曲线 $y = 4 + 2\sin(3x)$ 和直线 AB。横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，原点标为 0。点 A 和点 B 均在曲线上。点 A 的横坐标为 $\frac{\pi}{18}$，点 B 的横坐标为 $\frac{\pi}{3}$。求图中阴影区域的面积，答案用精确形式表示。阴影区域位于曲线与线段 AB 之间。

✓ **答案**

$$\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{5\pi}{36}$$

解析　将两点的横坐标分别代入曲线，得

$$y_A=4+2\sin\left(3\times\frac{\pi}{18}\right)=5$$

$y_B=4+2\sin\left(3\times\frac{\pi}{3}\right)=4$。直线 AB 下方的梯形面积为 $S_{梯形}=\frac{1}{2}(5+4)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{18}\right)=\frac{5\pi}{4}$。曲线下方的面积为

$$S_{曲线下}=\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{3}}(4+2\sin(3x))\,\mathrm{d}x$$

$$S_{曲线下}=\left[4x-\frac{2}{3}\cos(3x)\right]_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$S_{曲线下}=\left(4\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\cos\pi\right)-\left(2\frac{\pi}{9}-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$S_{曲线下}=\frac{10\pi}{9}+\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$。由图，曲线在直线 AB 上方，故

$$S_{阴影}=\frac{10\pi}{9}+\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{5\pi}{4}$$

$S_{阴影}=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{5\pi}{36}$。答：阴影面积为 $\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{5\pi}{36}$。

题型 26　将给定面积或积分值化为参数方程

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **对数函数积分：**例题的分母为 $4x+3$，先配出对数的导数。

$$(2\ln(4x+3))'=2\cdot\frac{4}{4x+3}=\frac{8}{4x+3}$$

一次式分母可用下式积分。

$$\int\frac{k}{mx+n}\,\mathrm{d}x=\frac{k}{m}\ln|mx+n|+C$$

式中 k,m,n 为常数，$m\neq0$，C 为_____。

② **上下限的代入：**例题的积分区间不能经过分母为零处。

$$4x+3=0\xrightarrow{\text{解方程}}x=-\frac{3}{4}$$

$$2a+1>-\frac{3}{4}$$

求定积分时，将原函数代入上限，再_____代入下限的值。

$$\int_0^{2a+1}\frac{8}{4x+3}\,\mathrm{d}x=2\ln(8a+7)-2\ln3$$

③ **对数方程求解：**设 u,v 为正数，对数作差可合并。

$$\ln u - \ln v = \ln\left(\frac{u}{v}\right)$$

对数前有分数系数时，先同乘分母。

$$\frac{1}{3}\ln u = \ln 2 \xrightarrow{\text{同乘 3}} \ln u = 3\ln 2 = \ln 8$$

同底对数相等时，比较_____。

$$\ln u = \ln 8 \xrightarrow{\text{比较真数}} u = 8$$

④ **曲线交点求法：**曲线与 x 轴相交时，令 $y = 0$。

$$-x^2 + 3ax - 2a^2 = -(x-a)(x-2a) = 0$$

由 $a > 0$，两交点依次为 $(a, 0)$、$(2a, 0)$。

$$a < x < 2a \xrightarrow{\text{判断乘积符号}} -(x-a)(x-2a) > 0$$

两交点之间的曲线位于 x 轴上方。

⑤ **多项式的积分：**对 x 积分时，参数 a 视为_____。各项分别积分，幂次加一，再除以新幂次。

$$\int (-x^2 + 3ax - 2a^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^3}{3} + \frac{3ax^2}{2} - 2a^2x + C$$

⑥ **面积方程求解：**以 S 表示面积，轴上方的面积按两交点间积分。

$$S = \int_a^{2a} (-x^2 + 3ax - 2a^2)\,\mathrm{d}x$$

将给定面积代入，得到关于 a 的方程。遇到立方方程，可按下例取立方根。

$$t^3 = 8 \xrightarrow{\text{取立方根}} t = 2$$

填空：①积分常数　②减去　③真数　④常数

点石成金　题目出现给定定积分值或曲线围成的面积，并要求参数时，先求积分，再将给定值代入列方程。

例 1　[2024 · October/November 0606/11 Q4]

Given that $\displaystyle\int_0^{2a+1} \frac{8}{4x+3}\,\mathrm{d}x = \ln 16$, find the exact value of the constant a.

已知 $\int_0^{2a+1} \frac{8}{4x+3}\,\mathrm{d}x = \ln 16$，求常数 a 的精确值。

解答　积分区间内分母不能为零，故

$$2a + 1 > -\frac{3}{4}$$

$$8a + 7 > 0$$

由题意，得

$$\int_0^{2a+1} \frac{8}{4x+3}\,\mathrm{d}x = [2\ln(4x+3)]_0^{2a+1} = \ln 16$$

$$2\ln(8a+7) - 2\ln 3 = \ln 16$$

方法：先看分母与积分上下限，配出对数导数，再用给定值列方程。

辨析：定积分是上下限确定的数值，不定积分是一族原函数。

拓展：交换定积分的上下限，积分值变号。

$$\ln\left(\frac{8a+7}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln 16=\ln 4$$

比较真数，得

$$\frac{8a+7}{3}=4$$

$$8a+7=12$$

$$a=\frac{5}{8}$$

此时积分区间为 $\left[0,\frac{9}{4}\right]$，分母恒正。
答：$a=\frac{5}{8}$。

针对练习

1. [2026 · May/June 0606/11 Q4]
提示：看对数前的系数，消去系数并合并后比较真数。

Given that $\int_0^a \frac{1}{3x+2}\,\mathrm{d}x=\ln 4$, find the value of the constant a.

已知 $\int_0^a \frac{1}{3x+2}\,\mathrm{d}x=\ln 4$，求常数 a 的值。

✓ **答案**

$$a=42$$

解析 积分区间内分母不能为零，故

$$a>-\frac{2}{3}$$

$$3a+2>0$$

由题意，得

$$\int_0^a \frac{1}{3x+2}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}\ln(3x+2)\right]_0^a=\ln 4$$

$$\frac{1}{3}\ln(3a+2)-\frac{1}{3}\ln 2=\ln 4$$

$$\ln\left(\frac{3a+2}{2}\right)=3\ln 4=\ln 64$$

比较真数，得

$$\frac{3a+2}{2}=64$$

$$3a+2=128$$

$$a=42$$

所得 $a = 42$ 满足 $a > -\frac{2}{3}$。
答：$a = 42$。

2. [2026 · February/March 0606/12 Q11]
提示：先求横轴交点，再比较两交点间曲线与横轴的位置。

A curve has equation $y = -x^2 + 3ax - 2a^2$ where a is a positive constant.
The area of the region enclosed by the curve and the x-axis is $\frac{9}{16}$.

Find the value of a.

一条曲线的方程为 $y = -x^2 + 3ax - 2a^2$，其中 a 为正常数。曲线与 x 轴围成的区域的面积为 $\frac{9}{16}$。
求 a 的值。
第 12 题在背面。

✓ **答案**

$$a = \frac{3}{2}$$

解析 令 $y = 0$，得

$$-x^2 + 3ax - 2a^2 = 0$$

$$-(x - a)(x - 2a) = 0$$

$$x = a \quad 或 \quad x = 2a$$

由 $a > 0$，得 $a < 2a$，且曲线在两交点之间位于 x 轴上方。
由所围区域的面积，得

$$\int_a^{2a} (-x^2 + 3ax - 2a^2)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{16}$$

$$\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3ax^2}{2} - 2a^2x\right]_a^{2a} = \frac{9}{16}$$

$$\left(-8\frac{a^3}{3} + 6a^3 - 4a^3\right) - \left(-\frac{a^3}{3} + \frac{3a^3}{2} - 2a^3\right) = \frac{9}{16}$$

$$-\frac{2a^3}{3} - \left(-\frac{5a^3}{6}\right) = \frac{9}{16}$$

$$\frac{a^3}{6} = \frac{9}{16}$$

$$a^3 = \frac{27}{8}$$

$$a = \frac{3}{2}$$

所得 $a=\frac{3}{2}$ 满足 $a>0$。
答：$a=\frac{3}{2}$。

3. [2022 · October/November 0606/13 Q11]
提示：各项的分子均与分母的导数对应，先逐项积分，再代入上下限。

It is given that $\int_1^a\left(\frac{3}{3x+2}-\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\ln\frac{1}{5}$, where $a>1$. Find the exact value of a.

已知
$\int_1^a\left(\frac{3}{3x+2}-\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\ln\left(\frac{1}{5}\right)$

其中$a>1$。求a的精确值。

✓ **答案** $a=2+\sqrt{7}$。

解析 由$a>1$，积分区间内$x\geq 1$，各分母及对数真数均为正。逐项积分，得

$$\int_1^a\left(\frac{3}{3x+2}-\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=[\ln(3x+2)-\ln(2x+1)-\ln x]_1^a$$

代入上下限及给定积分值，得

$$\ln(3a+2)-\ln(2a+1)-\ln a-\ln 5+\ln 3=\ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

合并对数，得

$$\ln\left(\frac{3(3a+2)}{5a(2a+1)}\right)=\ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

比较真数，得

$$\frac{3(3a+2)}{5a(2a+1)}=\frac{1}{5}$$

由$a>1$，分母非零，两边同乘$5a(2a+1)$，得

$$3(3a+2)=a(2a+1)$$

$$9a+6=2a^2+a$$

$$a^2-4a-3=0$$

配成完全平方，得

$$(a-2)^2=7$$

$$a=2+\sqrt{7}\quad\text{或}\quad a=2-\sqrt{7}$$

因$2-\sqrt{7}<1$，不满足题设条件，舍去。$2+\sqrt{7}>1$，且相应积分区间内各分母均不为零。
答：$a=2+\sqrt{7}$。

题型 27　将已得时刻代入加速度式求值

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **由速度求加速度：**例题中，时间 t（s）与速度 v（m s^{-1}）满足

$$v=10\sin(2t)-6\cos(2t)$$

加速度 a（m s^{-2}）是速度对时间的 _____。撇号表示对时间求导，三角函数采用弧度。

$$(\sin(2t))'=2\cos(2t)$$

$$(\cos(2t))'=-2\sin(2t)$$

$$a=v'=20\cos(2t)+12\sin(2t)$$

② **由位移求加速度：**位移 s 的单位为 m，连续求导两次得加速度。对数内的函数记为 u，须满足 $u>0$；分子、分母记为 f、g，须满足 $g\neq 0$。

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

例如，对下面的位移式求导：

$$s=\ln(t^2+1)-t$$

$$v=s'=\frac{2t}{t^2+1}-1$$

$$a=v'=\frac{2(t^2+1)-2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$$

③ **指数函数求导：**位移含指数项时，每求导一次，乘一次指数中时间的系数。例如：

$$s=e^{2t}+e^{-t}$$

$$v=s'=2e^{2t}-e^{-t}$$

$$a=v'=4e^{2t}+e^{-t}$$

一般地，k 为常数时，

$$\left(e^{kt}\right)'=ke^{kt}$$

④ **按条件求时刻：**粒子静止与速度取得驻值，所列方程不同。

粒子瞬时静止	速度取得驻值
$v=0$	$a=v'=0$

如静止条件含正、负指数，令 $x=e^{2t}>0$：

$$e^{2t}-2e^{-2t}-1=0$$

$$x-\frac{2}{x}-1=0$$

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2 \quad 或 \quad x = -1$$

舍去不满足 $x > 0$ 的根，所得时刻还须符合题设范围。

$$e^{2t} = 2$$

$$2t = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{2}$$

⑤ **对数时刻换算：**时刻含对数时，先把指数项化为数值。

$$e^{2\ln 3} = \left(e^{\ln 3}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$e^{-2\ln 3} = \frac{1}{e^{2\ln 3}} = \frac{1}{9}$$

一般地，$b > 0$、k 为实数时，

$$e^{k\ln b} = b^k$$

若已求得时刻 T，负指数项还可用倒数换算。

$$e^{-2T} = \frac{1}{e^{2T}}$$

⑥ **代入加速度式：**已知时刻后，将加速度式中的 t 全部换成该时刻。例题中，

$$t = \frac{\pi}{4}$$

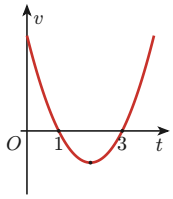
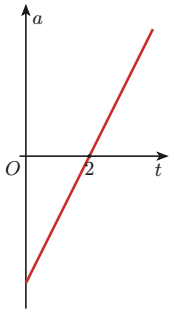
$$2t = \frac{\pi}{2}$$

$$a = 20\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 12\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 20 \times 0 + 12 \times 1$$

故该时刻的加速度为 _____ $\mathrm{m\ s^{-2}}$。

← 填空：①导数　②12

同一运动的速度与加速度

	$v(t)=t^2-4t+3$	$a(t)=2t-4$
图像		
联系	$a(t)=v'(t)$	
零点	$t=1,3$	$t=2$
符号变化	速度变号时换向	加速度变号时速度取极值

点石成金　题目出现给定时刻或已得时刻，并要求该时刻的加速度时，先求加速度式，再代入该时刻。

例 1　[2023 · October/November 0606/21 Q7(b)]

A particle moves in a straight line. At time t seconds after passing through a fixed point O, its velocity, $v\,\text{ms}^{-1}$, is given by $v=10\sin 2t-6\cos 2t$.

(a) Find an expression for the acceleration of the particle.

(b) Find the acceleration when $t=\dfrac{\pi}{4}$.

一粒子沿直线运动。通过定点 O 后 t s 时，它的速度为 $v\,\text{m s}^{-1}$，且

$$v=10\sin(2t)-6\cos(2t)$$

(a) 求粒子的加速度表达式。(b) 求 $t=\frac{\pi}{4}$ 时的加速度。

解答　加速度是速度对时间的导数，故

$$a=v'=20\cos(2t)+12\sin(2t)$$

当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，

$$a=20\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+12\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a=20\times 0+12\times 1=12$$

方法：先看速度式，求导得加速度，再算给定时刻对应的角。

辨析：瞬时静止是速度为零，速度驻值是加速度为零。

拓展：复合函数求导时，还须乘内层函数的导数。

答：加速度式为 $a=20\cos(2t)+12\sin(2t)$，单位为 m s^{-2}；当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，加速度为 12m s^{-2}。

针对练习

1. [2025 · February/March 0606/22 Q9(d)]

提示：看加速度式的分母，代入时刻后先算括号再平方。

In this question, all lengths are in metres and time is in seconds.

A particle, P, moves in a straight line such that t seconds after passing through a fixed point O its displacement, s, is given by $s=5\ln(2t+1)-5t$.

(a) Find the value of t for which P is instantaneously at rest.

(c) Find an expression for the acceleration of P in terms of t.

(d) Find the acceleration when $t = 4.5$.

本题中，所有长度均以 m 为单位，时间均以 s 为单位。粒子 P 沿直线运动。通过定点 O 后 t s 时，其位移 s 为

$$s = 5\ln(2t+1) - 5t$$

(a) 求 P 瞬时静止时 t 的值。(c) 求 P 的加速度关于 t 的表达式。(d) 求 $t = 4.5$ 时的加速度。

✓ **答案** (a) $t = 0.5$ s；(c) $a = -\frac{20}{(2t+1)^2}$，单位为 m s^{-2}；(d) -0.2m s^{-2}。

解析 由位移对时间求导得

$$v = s' = \frac{10}{2t+1} - 5$$

粒子瞬时静止时，$v = 0$，故

$$\frac{10}{2t+1} - 5 = 0$$

$$10 = 5(2t+1)$$

$$2t + 1 = 2$$

$$t = \frac{1}{2} = 0.5$$

此时 $t \geq 0$，符合题意。由速度对时间求导得

$$a = v' = -\frac{20}{(2t+1)^2}$$

当 $t = 4.5$ 时，

$$a = -\frac{20}{(2\times 4.5+1)^2}$$

$$a = -\frac{20}{100} = -0.2$$

答：粒子瞬时静止的时刻为 0.5 s；加速度式为 $a = -\frac{20}{(2t+1)^2}$，单位为 m s^{-2}；当 $t = 4.5$ 时，加速度为 -0.2m s^{-2}。

2. [2026 · May/June 0606/22 Q9(b)]

提示：看两项指数与对数的对应关系，先化成数值再相减。

A particle P moves in a straight line such that t seconds after passing through a fixed point O, its displacement from O, s metres, is given by $s = e^{4t} - 10e^{2t} + 9$.

(a) The velocity of P is $v$ms^{-1}.

Find the value of t for which v has a stationary value.

(b) Find the acceleration of P when $t = \ln 2$.

粒子 P 沿直线运动。通过定点 O 后 t s 时，它相对于 O 的位移为 s m，且

$$s = e^{4t} - 10e^{2t} + 9$$

(a) P 的速度为 vm s^{-1}。求 v 取得驻值时 t 的值。(b) 求 $t = \ln 2$ 时 P 的加速度。

✓ **答案** (a) $t=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ s；(b) 96m s^{-2}。

解析 由位移对时间求导得

$$v=s'=4e^{4t}-20e^{2t}$$

$$a=v'=16e^{4t}-40e^{2t}$$

速度取得驻值时，$v'=0$，故

$$16e^{4t}-40e^{2t}=0$$

$$8e^{2t}(2e^{2t}-5)=0$$

$\because e^{2t}>0$，$\therefore$

$$2e^{2t}-5=0$$

$$e^{2t}=\frac{5}{2}$$

$$2t=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$t=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

当 $t=\ln 2$ 时，

$$e^{2t}=e^{2\ln 2}=4$$

$$e^{4t}=e^{4\ln 2}=16$$

$$a=16\times 16-40\times 4=96$$

答：速度取得驻值的时刻为 $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ s；当 $t=\ln 2$ 时，加速度为 96m s^{-2}。

3. [2023 · October/November 0606/23 Q6(c)]

提示：看静止时刻，分别代入加速度式的分子、分母。

A particle travels in a straight line. Its displacement, s metres, from the origin, at time t seconds, where $t>2$, is given by $s=\ln(4t^2-5)-t$.

(a) Find expressions for the velocity, v ms^{-1}, and acceleration, a ms^{-2}, of the particle.

(b) Find the time when the particle is at rest.

(c) Find the acceleration at this time.

一粒子沿直线运动。在 t s 时，它相对于原点的位移为 s m，其中 $t>2$，且

$$s=\ln(4t^2-5)-t$$

(a) 求粒子的速度 vm s^{-1} 和加速度 am s^{-2} 的表达式。(b) 求粒子静止的时刻。(c) 求粒子在该时刻的加速度。

✓ **答案** (a) $v=\frac{8t}{4t^2-5}-1$，单位为 m s^{-1}；$a=-\frac{32t^2+40}{(4t^2-5)^2}$，单位为 m s^{-2}；(b) 2.5 s；(c) $-\frac{3}{5}$m s^{-2}。

解析 由位移对时间求导得

$$v = s' = \frac{8t}{4t^2 - 5} - 1$$

再对速度求导得

$$a = v' = \frac{8(4t^2 - 5) - 8t \cdot 8t}{(4t^2 - 5)^2}$$

$$a = -\frac{32t^2 + 40}{(4t^2 - 5)^2}$$

粒子静止时，$v = 0$，故

$$\frac{8t}{4t^2 - 5} - 1 = 0$$

$\because t > 2$，$\therefore 4t^2 - 5 > 0$，方程两边乘以 $4t^2 - 5$ 得

$$8t = 4t^2 - 5$$

$$4t^2 - 8t - 5 = 0$$

$$(2t - 5)(2t + 1) = 0$$

$$t = \frac{5}{2} \quad 或 \quad t = -\frac{1}{2}$$

由 $t > 2$，得

$$t = \frac{5}{2} = 2.5$$

代入加速度式得

$$a = -\frac{32 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 40}{\left(4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\right)^2}$$

$$a = -\frac{240}{400} = -\frac{3}{5}$$

答：速度为 $\left(\frac{8t}{4t^2-5} - 1\right)\text{m s}^{-1}$，加速度为 $-\frac{32t^2+40}{(4t^2-5)^2}\text{m s}^{-2}$；粒子在 2.5 s 时静止，此时加速度为 $-\frac{3}{5}\text{m s}^{-2}$。

4. [2023 · October/November 0606/22 Q7(c)]

提示：看已得的正指数值，用倒数求负指数项再代入。

A particle is travelling in a straight line. Its displacement, s metres, from the origin at time t seconds is given by $s = 1.5\text{e}^{2t} + 2\text{e}^{-2t} - t$.

(a) Find expressions for the velocity, $v\,\text{ms}^{-1}$, and acceleration, $a\,\text{ms}^{-2}$, of the particle.

(b) Find the time, T seconds, when the particle is at rest.

(c) Find the acceleration of the particle at time T seconds.

一粒子沿直线运动。在 t s 时，它相对于原点的位移为 s m，且

$$s = 1.5e^{2t} + 2e^{-2t} - t$$

(a) 求粒子的速度 $v\,\mathrm{m\ s^{-1}}$ 和加速度 $a\,\mathrm{m\ s^{-2}}$ 的表达式。(b) 粒子在 T s 时静止，求 T。(c) 求粒子在 T s 时的加速度。

✓ **答案** (a) $v=3e^{2t}-4e^{-2t}-1$，单位为 $\mathrm{m\ s^{-1}}$；$a=6e^{2t}+8e^{-2t}$，单位为 $\mathrm{m\ s^{-2}}$；(b) $T=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$；(c) $14\mathrm{m\ s^{-2}}$。

解析 由位移对时间求导得

$$v=s'=3e^{2t}-4e^{-2t}-1$$

$$a=v'=6e^{2t}+8e^{-2t}$$

粒子在 $t=T$ 时静止，故

$$3e^{2T}-4e^{-2T}-1=0$$

令 $x=e^{2T}>0$，则

$$e^{-2T}=\frac{1}{x}$$

$$3x-\frac{4}{x}-1=0$$

方程两边乘以 x 得

$$3x^2-x-4=0$$

$$(3x-4)(x+1)=0$$

$$x=\frac{4}{3}\quad 或\quad x=-1$$

$\because x>0$，$\therefore x=\frac{4}{3}$，从而

$$e^{2T}=\frac{4}{3}$$

$$2T=\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$T=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

此时 $T>0$，符合题意，且

$$e^{-2T}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

代入加速度式得

$$a=6\times\frac{4}{3}+8\times\frac{3}{4}$$

$$a=8+6=14$$

答：速度为 $(3e^{2t}-4e^{-2t}-1)\mathrm{m\ s^{-1}}$，加速度为 $(6e^{2t}+8e^{-2t})\mathrm{m\ s^{-2}}$；$T=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$，此时加速度为 $14\mathrm{m\ s^{-2}}$。

题型 28　求出速度式并判断静止或换向时刻

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **位移求导：**位移 x 随时间 t 变化，求导得速度 v。幂函数求导时，指数乘到前面，指数减 1；常数项的导数为 _____。

$$x = t^3 + t^2 - t + 8$$

$$v = x'(t) = 3t^2 + 2t - 1$$

位移以 m 计、时间以 s 计，速度的单位为 $\mathrm{m\ s^{-1}}$。

② **静止与换向：**题目要求静止或换向时刻，先解 _____。所得时间须满足题目给定的范围，换向还须判断速度两侧的符号。

瞬时静止：
该时刻速度为 0。

改变方向：
该时刻前后的速度异号。

③ **乘积式位移：**位移写成几个因式的乘积时，先展开，再逐项求导。例如：

$$s = (t+1)(t-2)^2 = (t+1)(t^2 - 4t + 4) = t^3 - 3t^2 + 4$$

$$v = s'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$$

④ **对数式位移：**自然对数 $\ln u$ 中，u 称为真数，须满足 $u > 0$。求导时，真数的导数除以真数；令速度为零后，可乘以非零分母。

$$s = \ln(3t+1) - t$$

$$v = \frac{3}{3t+1} - 1$$

$$\frac{3}{3t+1} - 1 = 0$$

$$3 = 3t + 1$$

$$t = \frac{2}{3}$$

相应的求导公式为：

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$$

⑤ **速度再求导：**题目还要求加速度 a 时，对速度再求导。速度含分式时，用分子、分母各自的导数计算，例如：

$$v = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$a = v'(t) = \frac{2(t^2+1) - 2t \cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$$

位移以 m 计、时间以 s 计，加速度的单位为 $\mathrm{m\ s^{-2}}$。

⑥ **加速度积分：**已知加速度，求速度时作 _____。幂函数积分时，指数加 1，除以新指数，并加积分常数 C。给出某时刻的速度，代入求 C，例如：

$$a = 2t - 4$$

$$v = t^2 - 4t + C$$

当 $t = 1$ 时，$v = 2$，有：

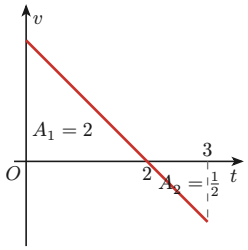
$$2 = 1^2 - 4 \cdot 1 + C$$

$$C = 5$$

$$v = t^2 - 4t + 5$$

⑦ 位移保留符号，路程累计绝对值

$$v(t) = 2 - t, \quad 0 \le t \le 3$$



填空：①0　②$v = 0$　③积分

点石成金　题目出现位移与时间的关系，要求静止或换向时刻时，先对位移求导，写出速度。

例 1　[2024 · October/November 0606/21 Q8(a)]

A particle moves in a straight line so that its displacement from a fixed point O at time t seconds is x metres, where $x = t^3 + t^2 - t + 8$ and $t \geqslant 0$.

(a) Find the time when the particle changes direction.

一质点沿直线运动。在时刻 t s，它相对于固定点 O 的位移为 x m，其中 $x = t^3 + t^2 - t + 8$ 且 $t \geq 0$。

(a) 求质点改变运动方向的时刻。

解答　由位移对时间求导，得

$$v = x'(t) = 3t^2 + 2t - 1 = (3t - 1)(t + 1)$$

方法：先看位移式和时间范围，从求导并分解速度式起手。

辨析：静止是某刻速度为零，换向是速度由正变负或由负变正。

令速度为零，得

$$(3t - 1)(t + 1) = 0$$

$$t = \frac{1}{3} \quad 或 \quad t = -1$$

由 $t \geq 0$，舍去 $t = -1$。

当 $0 \le t < \frac{1}{3}$ 时，$v < 0$；当 $t > \frac{1}{3}$ 时，$v > 0$。

速度在 $t = \frac{1}{3}$ 两侧异号，质点改变方向。

答：质点在 $t = \frac{1}{3}$ s 时改变方向。

针对练习

1. [2026 · February/March 0606/22 Q10(a)]

提示：看给定时刻的速度，积分后用这组条件确定常数。

In this question time t is in seconds and displacement s is in metres.

For $t \geqslant 0$, a particle moves on the positive x-axis.
At time t the acceleration of the particle is $2t-9$.
At time $t=7$ the velocity of the particle is 4.

(a) Find the times when the velocity of the particle is 0.

本题中，时间 t 的单位为 s，位移 s 的单位为 m。
当 $t \geq 0$ 时，一质点在 x 轴的正半轴上运动。
在时刻 t，质点的加速度为 $2t-9$。
当 $t=7$ 时，质点的速度为 4。
(a) 求质点速度为 0 的各个时刻。

✓ **答案** $t=3$ s 或 $t=6$ s。

解析 由加速度对时间积分，得

$$v = t^2 - 9t + C$$

当 $t=7$ 时，$v=4$，代入得

$$4 = 7^2 - 9\cdot 7 + C$$

$$C = 18$$

所以

$$v = t^2 - 9t + 18 = (t-3)(t-6)$$

令速度为零，得

$$(t-3)(t-6) = 0$$

$$t = 3 \quad 或 \quad t = 6$$

两值均满足 $t \geq 0$。
答：速度为零的时刻为 $t=3$ s 和 $t=6$ s。

2. [2025 · February/March 0606/22 Q9(a)]

提示：看对数内的式子，求导时带上内层导数，并核查真数范围。

In this question, all lengths are in metres and time is in seconds.

A particle, P, moves in a straight line such that t seconds after passing through a fixed point O its displacement, s, is given by $s = 5\ln(2t+1) - 5t$.

(a) Find the value of t for which P is instantaneously at rest.

本题中，所有长度的单位均为 m，时间的单位为 s。
质点 P 沿直线运动。经过固定点 O 后 t s，其位移 s 满足 $s = 5\ln(2t+1) - 5t$。
(a) 求 P 瞬时静止时的 t 值。

✓ **答案** $t=0.5$ s。

解析 由位移对时间求导，得

$$v = s'(t) = \frac{5\cdot 2}{2t+1} - 5 = \frac{10}{2t+1} - 5$$

质点瞬时静止时，速度为零，故

$$\frac{10}{2t+1}-5=0$$

由真数 $2t+1>0$，两边乘以 $2t+1$，得

$$10=5(2t+1)$$

$$2t+1=2$$

$$t=\frac{1}{2}=0.5$$

此时 $t\geq 0$，且 $2t+1=2>0$。
答：P 在 $t=0.5$ s 时瞬时静止。

3. [2023 · May/June 0606/13 Q9(a)]
提示：看位移的乘积结构，先展开再求导，所得根与时间区间比较。

In this question lengths are in centimetres and time is in seconds.

A particle P moves in a straight line such that its displacement s, from a fixed point at a time t, is given by $s=3(t+2)(t-4)^2$ for $0\leqslant t\leqslant 5$.

(a) Find the values of t for which the velocity, v, of P is zero.

本题中，长度的单位为 cm，时间的单位为 s。
质点 P 沿直线运动。在时刻 t，它相对于一个固定点的位移 s 满足 $s=3(t+2)(t-4)^2$ $(0\leq t\leq 5)$。
(a) 求 P 的速度 v 为零时的各个 t 值。

✓ **答案** $t=0$ s 或 $t=4$ s。

解析 将位移展开，得

$$s=3(t+2)(t-4)^2=3(t+2)(t^2-8t+16)=3t^3-18t^2+96$$

由位移对时间求导，得

$$v=s'(t)=9t^2-36t=9t(t-4)$$

令速度为零，得

$$9t(t-4)=0$$

$$t=0 \quad 或 \quad t=4$$

两值均在 $0\leq t\leq 5$ 内。
答：P 的速度为零时，$t=0$ s 或 $t=4$ s。

4. [2022 · May/June 0606/12 Q11(a)]
提示：位移是乘积式，先展开，再对时间求导并令速度为零。

In this question all lengths are in kilometres and time is in hours.

A particle P moves in a straight line such that its displacement, s, from a fixed point at time t is given by $s=(t+2)(t-5)^2$, for $t\geqslant 0$.

(a) Find the values of t for which the velocity of P is zero.

本题中，所有长度均以千米为单位，时间以小时为单位。
质点P沿直线运动。在时刻t，它相对于某固定点的位移s满足

$$s=(t+2)(t-5)^2,\quad t\geq 0$$

(a) 求质点P的速度为零时t的值。

✓ **答案** $t=\frac{1}{3}$ h或$t=5$ h。

解析 展开位移式，得

$$s=(t+2)(t-5)^2=(t+2)(t^2-10t+25)=t^3-8t^2+5t+50$$

位移对时间求导，得速度

$$v=\frac{ds}{dt}=3t^2-16t+5=(3t-1)(t-5)$$

令速度为零，得

$$(3t-1)(t-5)=0$$

$$t=\frac{1}{3}\quad 或\quad t=5$$

两者均满足$t\geq 0$。
答：质点P的速度为零时，$t=\frac{1}{3}$ h或$t=5$ h。

5. [2023 · October/November 0606/23 Q6(b)]
提示：看时间下限，先判断速度分母能否为零，再筛选方程的根。

A particle travels in a straight line. Its displacement, s metres, from the origin, at time t seconds, where $t>2$, is given by $s=\ln(4t^2-5)-t$.

(a) Find expressions for the velocity, $v\,\text{ms}^{-1}$, and acceleration, $a\,\text{ms}^{-2}$, of the particle.

(b) Find the time when the particle is at rest.

一质点沿直线运动。在时刻 t s，其中 $t>2$，它相对于原点的位移为 s m，且 $s=\ln(4t^2-5)-t$。
(a) 求质点的速度 v 和加速度 a 的表达式，单位分别为 m s^{-1} 和 m s^{-2}。
(b) 求质点静止的时刻。

✓ **答案** (a) $v=\frac{8t}{4t^2-5}-1$，$a=-\frac{32t^2+40}{(4t^2-5)^2}$；(b) $t=2.5$ s。

解析 由位移对时间求导，得

$$v=s'(t)=\frac{8t}{4t^2-5}-1$$

再对速度求导，得

$$a=v'(t)=\frac{8(4t^2-5)-8t\cdot 8t}{(4t^2-5)^2}=-\frac{32t^2+40}{(4t^2-5)^2}$$

质点静止时，速度为零，故

$$\frac{8t}{4t^2-5}-1=0$$

由 $t>2$，有 $4t^2-5>0$，两边乘以 $4t^2-5$，得

$$8t=4t^2-5$$

$$4t^2-8t-5=0$$

$$(2t-5)(2t+1)=0$$

$$t=\frac{5}{2}\quad 或\quad t=-\frac{1}{2}$$

由 $t>2$，舍去 $t=-\frac{1}{2}$。

答：(a) 速度为 $\left(\frac{8t}{4t^2-5}-1\right)\mathrm{m\ s^{-1}}$，加速度为 $-\frac{32t^2+40}{(4t^2-5)^2}\mathrm{m\ s^{-2}}$；(b) 质点在 $t=2.5\ \mathrm{s}$ 时静止。

题型 29　在速度变号时分段累计路程

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **位移求出速度：**例题给出粒子随时间变化的位移。速度等于位移对时间的_____，用 v 表示。位移单位为 m，速度单位为 $\mathrm{m\ s^{-1}}$。

$$x=t^3+t^2-t+8$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3t^2+2t-1$$

对数式求导时，须乘括号内式子的导数。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(3t+1)=\frac{1}{3t+1}\cdot 3=\frac{3}{3t+1}$$

② **零点判断转向：**令速度为零，解出符合时间范围的根。发生转向时，零点两侧的速度必须_____。三角式中的角以弧度计，用 u 表示角。

$$3t^2+2t-1=(3t-1)(t+1)=0$$

$$t=-1\ 或\ t=\frac{1}{3}$$

$$t\geq 0\xrightarrow{舍去负根}t=\frac{1}{3}$$

$0\leq t<\frac{1}{3}$	$t>\frac{1}{3}$
$v<0$	$v>0$

$$0\leq t\leq\frac{2\pi}{3},\quad \sin(3t)=0$$

$$3t=0,\pi,2\pi$$

$$t=0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$$

$0<u<\pi$	$\pi<u<2\pi$
$\sin u>0$	$\sin u<0$

③ **分段累计路程：**每段运动方向不变，路程取位移变化量的_____。用 D 表示总路程，$x(u)$ 表示时刻 u 的位移。在区间 $[0,t_2]$ 内仅于 t_1 转向，便在该处拆成两段。

$$D=|x(t_1)-x(0)|+|x(t_2)-x(t_1)|$$

$x(t_2)=x(0)\xrightarrow{\text{合并两段}}D=2|x(t_1)-x(0)|$

④ **积分还原位移：**已知加速度 a，逐次积分求速度和位移。加速度单位为 $\mathrm{m\ s^{-2}}$。每次积分均须保留_____，再由已知时刻的条件定值。

$$a=2t-4$$

$$v(0)=3$$

$$s(0)=2$$

$$v=\int(2t-4)\,\mathrm{d}t=t^2-4t+C_1$$

$$v(0)=C_1=3$$

$$s=\int(t^2-4t+3)\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}-2t^2+3t+C_2$$

$$s(0)=C_2=2$$

$$s=\frac{t^3}{3}-2t^2+3t+2$$

$$v=2\sin(2t)$$

$$s(0)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\cos(2t))=2\sin(2t)$$

$$s=\int 2\sin(2t)\,\mathrm{d}t=-\cos(2t)+C$$

$$0=-1+C$$

$$s=1-\cos(2t)$$

⑤ **求最大位移值：**位移式含根号时，可写成分数指数后求导。两个因式相乘，分别求导后相加。速度由正变负，位移取得最大值。

$$s=\frac{t+4}{\sqrt{t^2+4}}=(t+4)(t^2+4)^{-\frac{1}{2}},\quad t\geq 0$$

$$v=(t^2+4)^{-\frac{1}{2}}+(t+4)\left(-\frac{1}{2}\right)(t^2+4)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2t=\frac{4-4t}{(t^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$v=0\xrightarrow{\text{解方程}}t=1$$

$0 \le t < 1$	$t > 1$
$v > 0$，位移递增	$v < 0$，位移递减

$$s(1) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

⑥ **求再次返回时刻：**沿用上式，用 T 表示再次回到起点的时刻。起点对应初始位移，故令两时刻的位移相等。因 $T > 0$ 且两边非负，可平方求解并舍去零解。

$$s(0) = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2$$

$$s(T) = s(0)$$

$$\frac{T+4}{\sqrt{T^2+4}} = 2$$

$$T + 4 = 2\sqrt{T^2+4}$$

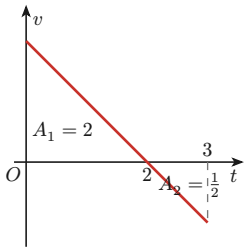
$$T^2 + 8T + 16 = 4T^2 + 16$$

$$T(3T - 8) = 0$$

$$T = \frac{8}{3}$$

⑦ 位移保留符号，路程累计绝对值

$$v(t) = 2 - t, \quad 0 \le t \le 3$$



填空：①导数　②变号　③绝对值　④积分常数

点石成金　题目出现位移、速度或加速度，并求一段时间内的路程时，先求速度为零的时刻，按速度符号分段。

例 1　[2024 · October/November 0606/21 Q8(c)]

A particle moves in a straight line so that its displacement from a fixed point O at time t seconds is x metres, where $x = t^3 + t^2 - t + 8$ and $t \geqslant 0$.

(a) Find the time when the particle changes direction.

(c) Find the total distance travelled by the particle during the first 2 seconds of its motion.

一个粒子沿直线运动，时刻 t 相对于定点 O 的位移为 x。其中，t 的单位为 s，x 的单位为 m，且

$$x = t^3 + t^2 - t + 8, \quad t \ge 0$$

（a）求粒子改变运动方向的时刻。（c）求粒子在开始运动后的前 2 s 内运动的总路程。

解答　由位移对时间求导，得

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3t^2+2t-1=(3t-1)(t+1)$$

令速度为零，得

$$(3t-1)(t+1)=0$$

$$t=\frac{1}{3}\text{ 或 }t=-1$$

因 $t\geq 0$，舍去负根。当 $0\leq t<\frac{1}{3}$ 时，$v<0$；当 $t>\frac{1}{3}$ 时，$v>0$。故粒子在 $t=\frac{1}{3}$ 时改变方向。将各段端点时刻代入位移式，得

$$x(0)=8$$

$$x\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+8=\frac{211}{27}$$

$$x(2)=2^3+2^2-2+8=18$$

设总路程为 D，则

$$D=\left(8-\frac{211}{27}\right)+\left(18-\frac{211}{27}\right)=\frac{280}{27}\approx 10.4\text{ m}$$

答：粒子在 $t=\frac{1}{3}$ s 时改变方向，前 2 s 内的总路程为 $\frac{280}{27}$ m，约为 10.4 m。

方法：先看位移式和时间范围，求导找速度零点，再查两侧符号。

辨析：位移是终点与起点的位置差，路程是沿途各段长度之和。

拓展：速度为零未必转向，零点两侧同号时运动方向不变。

针对练习

1. [2025 · February/March 0606/22 Q9(b)]

提示：看速度分式的分子符号，比较各段端点的位移。

In this question, all lengths are in metres and time is in seconds.

A particle, P, moves in a straight line such that t seconds after passing through a fixed point O its displacement, s, is given by $s=5\ln(2t+1)-5t$.

(a) Find the value of t for which P is instantaneously at rest.

(b) Find the distance P travels between $t=0$ and $t=2$.

本题中，所有长度的单位均为 m，时间的单位为 s。粒子 P 沿直线运动，经过定点 O 后，时刻 t 的位移 s 为

$$s=5\ln(2t+1)-5t$$

（a）求 P 瞬时静止时 t 的值。（b）求 P 在 $t=0$ 至 $t=2$ 之间运动的路程。

✓ **答案**　（a）$t=0.5$ s；（b）3.88 m。

解析　由位移对时间求导，得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=5\cdot\frac{2}{2t+1}-5=\frac{10}{2t+1}-5$$

瞬时静止时，速度为零，故

$$\frac{10}{2t+1}-5=0$$

$$10=5(2t+1)$$

$$t = \frac{1}{2}$$

将速度写成

$$v = \frac{5 - 10t}{2t + 1}$$

在 $t \geq 0$ 时，分母为正。当 $0 \leq t < \frac{1}{2}$ 时，$v > 0$；当 $t > \frac{1}{2}$ 时，$v < 0$。故在 $t = \frac{1}{2}$ 处分段。

$$s(0) = 5\ln 1 = 0$$

$$s\left(\frac{1}{2}\right) = 5\ln 2 - \frac{5}{2}$$

$$s(2) = 5\ln 5 - 10$$

设总路程为 D，则

$$D = \left(5\ln 2 - \frac{5}{2} - 0\right) + \left(5\ln 2 - \frac{5}{2} - (5\ln 5 - 10)\right)$$

$$D = 10\ln 2 - 5\ln 5 + 5 \approx 3.88 \text{ m}$$

答：瞬时静止时 $t = 0.5$ s；在 $t = 0$ 至 $t = 2$ 之间，粒子运动的路程约为 3.88 m。

2. [2026 · February/March 0606/22 Q10(b)]

提示：先用已知条件定积分常数，再查区间内部的变号点。

In this question time t is in seconds and displacement s is in metres.

For $t \geqslant 0$, a particle moves on the positive x-axis.
At time t the acceleration of the particle is $2t - 9$.
At time $t = 7$ the velocity of the particle is 4.

(a) Find the times when the velocity of the particle is 0.

(b) At time $t = 12$, the displacement of the particle from the origin O is 150.

(i) Find an expression for the displacement of the particle at time t.

(ii) Find the distance travelled by the particle in the first 6 seconds.

本题中，时间 t 的单位为 s，位移 s 的单位为 m。当 $t \geq 0$ 时，一个粒子在 x 轴的正半轴上运动。时刻 t 的加速度为 $2t - 9$。当 $t = 7$ 时，粒子的速度为 4。（a）求粒子速度为 0 的各个时刻。（b）当 $t = 12$ 时，粒子相对于原点 O 的位移为 150。（i）求粒子在时刻 t 的位移表达式。（ii）求粒子在前 6 s 内运动的路程。

✓ **答案**　（a）$t = 3$ s 或 $t = 6$ s；（b）（i）$s = \frac{t^3}{3} - \frac{9t^2}{2} + 18t + 6$；（ii）27.0 m。

解析　由加速度对时间积分，得

$$v = \int (2t - 9)\,\mathrm{d}t = t^2 - 9t + C_1$$

将 $t = 7$ 时 $v = 4$ 代入，得

$$4 = 7^2 - 9 \cdot 7 + C_1$$

$$C_1 = 18$$

$$v = t^2 - 9t + 18 = (t-3)(t-6)$$

令速度为零，得

$$(t-3)(t-6) = 0$$

$$t = 3 \text{ 或 } t = 6$$

两根均符合 $t \geq 0$。由速度对时间积分，得

$$s = \int (t^2 - 9t + 18)\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{9t^2}{2} + 18t + C_2$$

将 $t = 12$ 时 $s = 150$ 代入，得

$$150 = \frac{12^3}{3} - \frac{9 \cdot 12^2}{2} + 18 \cdot 12 + C_2$$

$$150 = 144 + C_2$$

$$C_2 = 6$$

$$s = \frac{t^3}{3} - \frac{9t^2}{2} + 18t + 6$$

在 $0 < t < 3$ 时，$v > 0$；在 $3 < t < 6$ 时，$v < 0$。故前 6 s 内的路程在 $t = 3$ 处分段。

$$s(0) = 6$$

$$s(3) = \frac{3^3}{3} - \frac{9 \cdot 3^2}{2} + 18 \cdot 3 + 6 = \frac{57}{2}$$

$$s(6) = \frac{6^3}{3} - \frac{9 \cdot 6^2}{2} + 18 \cdot 6 + 6 = 24$$

设总路程为 D，则

$$D = \left(\frac{57}{2} - 6\right) + \left(\frac{57}{2} - 24\right) = 27.0 \text{ m}$$

答：速度为零的时刻为 $t = 3$ s 和 $t = 6$ s；位移为 $s = \frac{t^3}{3} - \frac{9t^2}{2} + 18t + 6$；前 6 s 内的路程为 27.0 m。

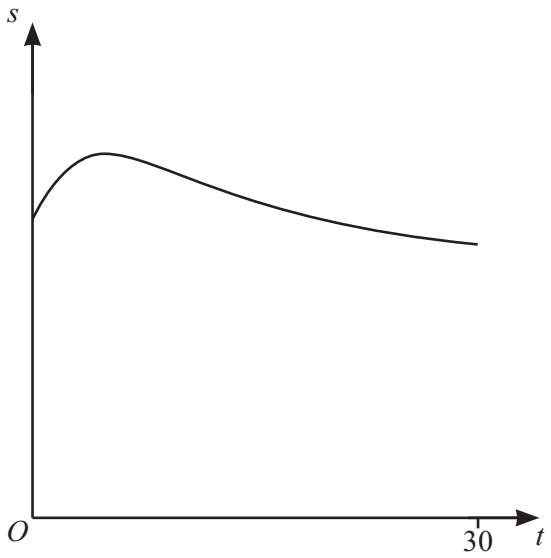
3. [2025 · October/November 0606/23 Q10(b)]
提示：比较返回时与初始时的位移，再看往返两段长度。

In this question the units are metres and seconds.

A particle moves along a straight line through a point A.

Its displacement, s, from A at time t is given by $s = \dfrac{10t+100}{\sqrt{2t^2+100}}$.

The diagram shows the displacement–time graph for the first 30 seconds of the motion.



(a) Find the value of t when s is a maximum.

(b) The particle passes through its starting point again at time $t = T$.

(i) Find the total distance travelled by the particle during the first T seconds of its motion.

(ii) Use algebra to find T.

本题中，长度和时间的单位分别为 m 和 s。一个粒子沿一条经过点 A 的直线运动。时刻 t，它相对于 A 的位移 s 为

$$s = \frac{10t+100}{\sqrt{2t^2+100}}$$

图示为粒子运动前 30 s 内的位移与时间图象。纵轴标为 s，横轴标为 t，坐标原点标为 O，横轴上标有 30。（a）求 s 最大时 t 的值。（b）粒子在时刻 $t = T$ 再次经过其起点。（i）求粒子从开始运动至时刻 T 的总路程。（ii）用代数方法求 T。

✓ **答案** （a）$t = 5$ s；（b）（i）$2\left(\sqrt{150}-10\right)$ m；（ii）$T = 20$ s。

解析 将位移式写成

$$s = (10t+100)(2t^2+100)^{-\frac{1}{2}}$$

求导得

$$v = 10(2t^2+100)^{-\frac{1}{2}} + (10t+100)\left(-\frac{1}{2}\right)(2t^2+100)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4t$$

$$v = \frac{10(2t^2+100) - 2t(10t+100)}{(2t^2+100)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1000-200t}{(2t^2+100)^{\frac{3}{2}}}$$

令速度为零。因分母为正，得

$$1000 - 200t = 0$$

$$t = 5$$

当 $0 \le t < 5$ 时，$v > 0$；当 $t > 5$ 时，$v < 0$。故 s 在 $t = 5$ 时取得最大值。

$$s(0) = \frac{100}{\sqrt{100}} = 10$$

$$s(5) = \frac{150}{\sqrt{150}} = \sqrt{150}$$

粒子先运动到最大位移处，再返回起点，两段路程相等。设总路程为 D，则

$$D = 2\left(\sqrt{150} - 10\right)\ \text{m}$$

再次返回起点时，位移等于初始位移，故

$$\frac{10T + 100}{\sqrt{2T^2 + 100}} = 10$$

$$T + 10 = \sqrt{2T^2 + 100}$$

因 $T > 0$，两边均为正，平方得

$$T^2 + 20T + 100 = 2T^2 + 100$$

$$T(T - 20) = 0$$

舍去表示初始时刻的零解，得

$$T = 20$$

代回原位移式，得

$$s(20) = \frac{300}{\sqrt{900}} = 10$$

答：位移最大时 $t = 5\ \text{s}$；前 T 个时间单位内的总路程为 $2\left(\sqrt{150} - 10\right)\ \text{m}$；$T = 20\ \text{s}$。

4. [2024 · May/June 0606/11 Q10(c)]

提示：看倍角跨过哪些正弦零点，再比较各段端点位移。

In this question, all distances are in metres and time, t, is in seconds.

A particle P is at a fixed point O at time $t = 0$.
The velocity, v, of P is given by $v = 3\sin 2t$ for $t \geqslant 0$.

(a) Find the exact value of t for which the velocity is zero for the first time after P leaves O.

(b) Find an expression, in terms of t, for the displacement of P from O at time t.

(c) Find the distance travelled by P for $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

本题中，所有距离的单位均为 m，时间 t 的单位为 s。当 $t = 0$ 时，粒子 P 位于定点 O。当 $t \geq 0$ 时，P 的速度 v 为

$$v = 3\sin(2t)$$

（a）求 P 离开 O 后速度首次为零时 t 的精确值。（b）求 P 在时刻 t 相对于 O 的位移，用含 t 的式子表示。（c）求 P 在 $0 \le t \le \pi$ 内运动的路程。

✓ **答案**　（a）$t = \frac{\pi}{2}$ s；（b）$s = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos(2t)$；（c）6 m。

解析　令速度为零，得

$$3\sin(2t) = 0$$

$$\sin(2t) = 0$$

离开 O 后首次速度为零，对应最小的正角，故

$$2t = \pi$$

$$t = \frac{\pi}{2}$$

设粒子相对于 O 的位移为 s。由速度对时间积分，得

$$s = \int 3\sin(2t)\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}\cos(2t) + C$$

当 $t = 0$ 时，粒子位于 O，故

$$0 = -\frac{3}{2} + C$$

$$C = \frac{3}{2}$$

$$s = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos(2t)$$

在 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时，$0 < 2t < \pi$，故 $v > 0$；在 $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 时，$\pi < 2t < 2\pi$，故 $v < 0$。在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处分段，得

$$s(0) = 0$$

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos\pi = 3$$

$$s(\pi) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos(2\pi) = 0$$

设总路程为 D，则

$$D = (3-0) + (3-0) = 6 \text{ m}$$

答：首次速度为零的时刻为 $t = \frac{\pi}{2}$ s；位移为 $s = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos(2t)$；在 $0 \le t \le \pi$ 内的路程为 6 m。

5. [2022 · February/March 0606/22 Q9(b)(iii)]

⟵ 提示：先由两因式的符号确定转向时刻，再分段累计路程。

(b) A particle moves in a straight line. The velocity, $v\,\mathrm{ms}^{-1}$, of the particle at time t seconds, where $t \geqslant 0$, is given by $v = (t-4)(t-5)$.

(ii) Find the set of values of t for which the velocity of the particle is negative.

(iii) Find the distance travelled by the particle in the first 5 seconds of its motion.

(b) 一个粒子沿直线运动。在时刻t，粒子的速度为v，其中$t \geq 0$，t的单位为s，v的单位为m s^{-1}，且

$$v = (t-4)(t-5)$$

(ii) 求粒子速度为负时t的取值集合。
(iii) 求粒子在开始运动后的前5 s内运动的路程。

✓ **答案** 29.5 m

解析 由速度为负，得

$$(t-4)(t-5) < 0$$

两因式异号，故

$$4 < t < 5$$

在$0 \leq t < 4$时，两因式均为负，速度为正。故在$t = 4$处分段。
以初始位置为位移零点，设位移为s。由速度积分，得

$$v = t^2 - 9t + 20$$

$$s = \int (t^2 - 9t + 20)\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - 9\frac{t^2}{2} + 20t + C$$

由$s(0) = 0$，得

$$C = 0$$

代入各段端点时刻，得

$$s(4) = \frac{4^3}{3} - \frac{9 \times 4^2}{2} + 20 \times 4 = \frac{88}{3}$$

$$s(5) = \frac{5^3}{3} - \frac{9 \times 5^2}{2} + 20 \times 5 = \frac{175}{6}$$

设总路程为D，各段位移变化量取绝对值后相加，得

$$D = \left|\frac{88}{3} - 0\right| + \left|\frac{175}{6} - \frac{88}{3}\right| = \frac{88}{3} + \frac{1}{6} = \frac{59}{2} = 29.5 \text{ m}$$

答：前5 s内运动的路程为29.5 m。

题型 30 用速度图面积列方程确定未知速度或时刻

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **图下面积求路程：** 图中 t 表示时间，v 表示速度。本例速度均非负，路程等于图线与时间轴之间的_____。

前 10 s 的路程记为 S，由三角形面积得

$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50 \text{ m}$$

② **分段计算面积：** 分段时长等于右端时刻减左端时刻。本例中间两段分别为矩形和梯形。

矩形面积：

$10 \times (20 - 10) = 100$ m

梯形面积：

$\frac{1}{2}(10 + V)(30 - 20) = 5(10 + V)$ m

各段路程相加，等于题给的总路程。

③ **斜率求加速度：**本例末段速度从 V 降至 0。加速度记为 a，等于图线的_____。

$$a=\frac{0-V}{45-30}=-\frac{V}{15}\text{m s}^{-2}$$

负号表示速度随时间减小。

④ **用时刻表示速度：**初速为 0，加速度为 3m s^{-2}。经过 T s 的速度记为 u，由斜率得

$$\frac{u}{T}=3$$

$$u=3T$$

把高度换成 $3T$，便可用面积列出关于 T 的方程。

⑤ **按图形范围取根：**未知时刻须符合图中先后顺序。例如方程给出两个根时，分别与范围比较。

$$x(10-x)=16$$

$$x^2-10x+16=0$$

$$(x-2)(x-8)=0$$

$$x=2 \quad \text{或} \quad x=8$$

若题给 $0<x<5$，则取 $x=2$。

⑥ **确定端点作图：**从静止开始且加速度恒定，图线为过原点的_____。本例前 10 s 的路程为 50 m，末速度记为 u。

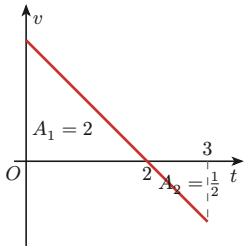
$$\frac{1}{2}\times 10\times u=50$$

$$u=10$$

连接 $(0,0)$ 与 $(10,10)$，得到这一段图线。

⑦ 位移保留符号，路程累计绝对值

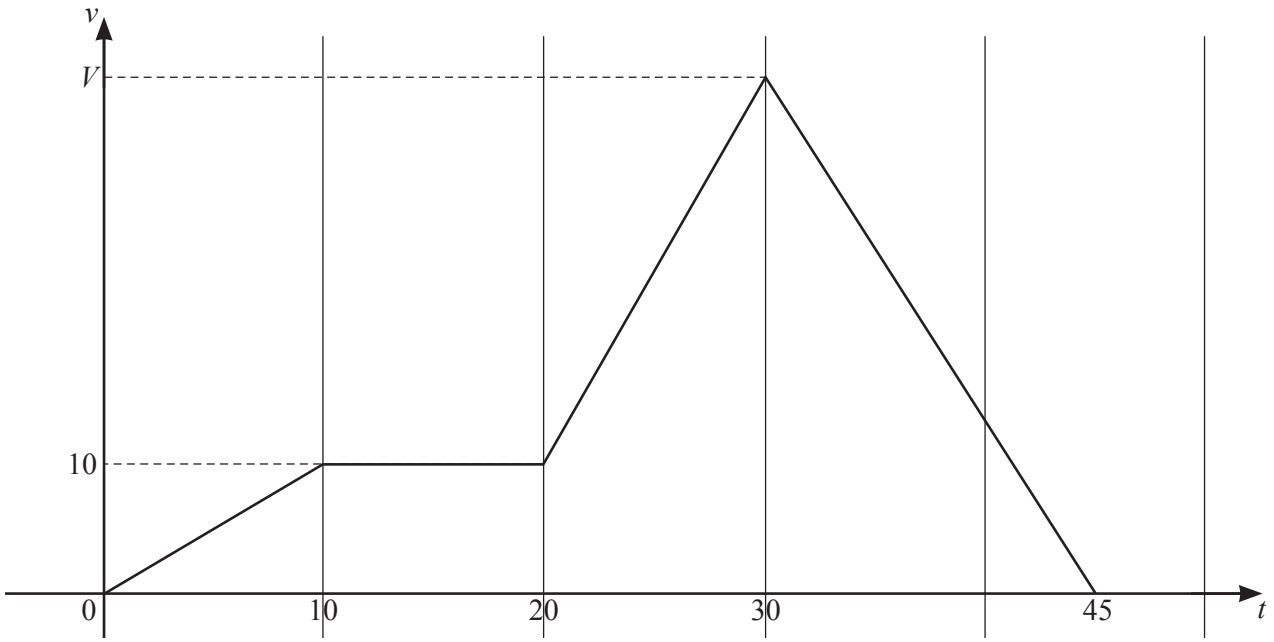
$$v(t)=2-t,\quad 0\le t\le 3$$



← 填空：①面积　②斜率　③线段

点石成金　题目出现速度与时间图象及总路程，要求未知速度或时刻时，先分块计算图下面积，列出路程方程。

例 1　[2023 · May/June 0606/11 Q4(a)]



The diagram shows the velocity–time graph for a particle travelling in a straight line with velocity, $v\,\text{ms}^{-1}$, at time t seconds. When $t = 30$ the velocity of the particle is $V\,\text{ms}^{-1}$. The particle travels 800 metres in 45 seconds.

(a) Find the value of V.

图示为一质点沿直线运动的速度与时间图象。时间 t 的单位为 s，速度 v 的单位为 m s^{-1}。图线依次连接 $(0,0)$、$(10,10)$、$(20,10)$、$(30,V)$ 和 $(45,0)$；横轴标有 0、10、20、30、45，纵轴标有 10 和 V。当 $t = 30$ 时，质点的速度为 $V\,\text{m s}^{-1}$。质点在 45 s 内运动的路程为 800 m。(a) 求 V 的值。

解答　图中速度非负，由图下面积等于路程得

$$\frac{1}{2}\times 10\times 10 + 10\times(20-10) + \frac{1}{2}(10+V)(30-20) + \frac{1}{2}\times(45-30)\times V = 800$$

$$50 + 100 + 5(10+V) + 7.5V = 800$$

$$200 + 12.5V = 800$$

$$V = 48$$

答：$V = 48$。

方法：先看各段交界时刻，按三角形、矩形和梯形分块列路程方程。

辨析：图下面积是对应时段的路程，图线斜率是对应时段的加速度。

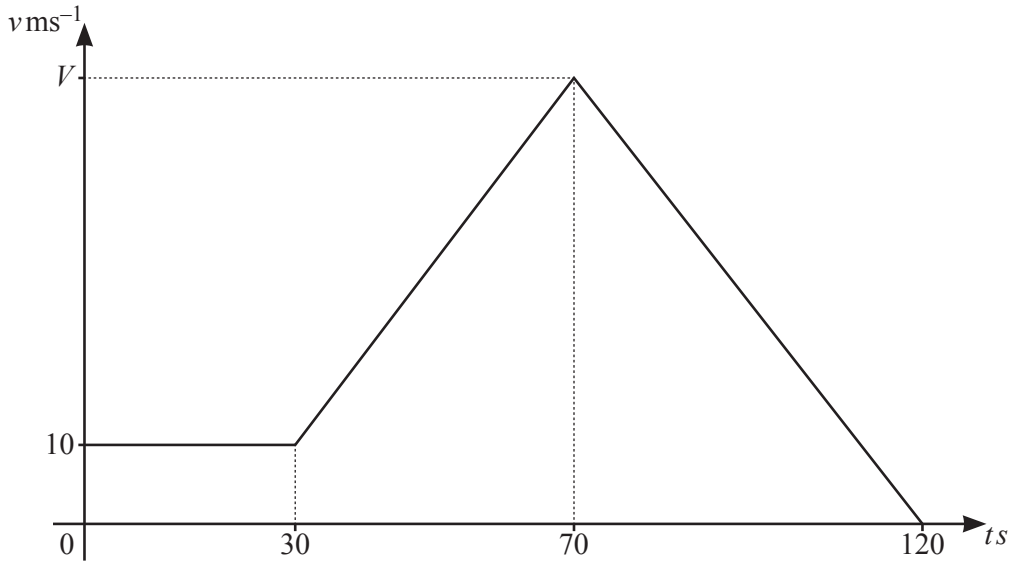
针对练习

1.　[2024 · February/March 0606/12 Q6(a)]

提示：看各段面积如何凑成总路程，再比末段速度变化与时长。

In this question all distances are in metres and all times are in seconds.

(a)



(i) The diagram shows the velocity–time (v–t) graph of a particle travelling in a straight line. The particle travels a distance of 2750 m in 120 s. Find the velocity, V, of the particle when $t = 70$.

(ii) Find the acceleration of the particle for $70 < t < 120$.

本题中，所有距离的单位均为 m，所有时间的单位均为 s。(a) (i) 图示为一质点沿直线运动的速度与时间（$v-t$）图象。横轴为时间 t，单位为 s；纵轴为速度 v，单位为 m s^{-1}。图线依次连接 $(0,10)$、$(30,10)$、$(70,V)$ 和 $(120,0)$。质点在 120 s 内运动的路程为 2750 m。求质点在 $t=70$ 时的速度 V。(ii) 求质点在 $70<t<120$ 内的加速度。

✓ **答案** (i) $V=50$；(ii) -1m s^{-2}。

解析 图中速度非负，由图下面积等于路程得

$$30\times 10+\frac{1}{2}(10+V)(70-30)+\frac{1}{2}\times(120-70)\times V=2750$$

$$300+20(10+V)+25V=2750$$

$$500+45V=2750$$

$$V=50$$

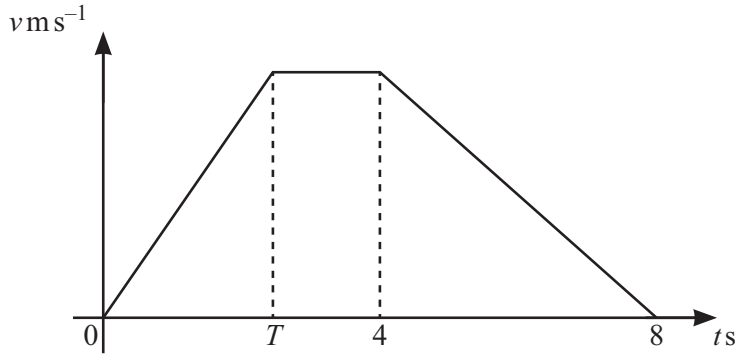
在 $70<t<120$ 内，由图线斜率得加速度

$$a=\frac{0-50}{120-70}=-1\text{m s}^{-2}$$

答：(i) $V=50$；(ii) 加速度为 -1m s^{-2}。

2. [2025 · October/November 0606/13 Q4(a)]

提示：看初段斜率如何关联高度与时长，再比各根是否符合时序。



The velocity–time graph represents the motion of a particle moving in a straight line.
The acceleration during the first T seconds of the motion is $2\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.
The total distance travelled is 27 m.

(a) Calculate T.

图中的速度与时间图象表示一质点沿直线运动的情况。横轴为时间 t，单位为 s，标有 0、T、4、8；纵轴为速度 v，单位为 $\text{m}\,\text{s}^{-1}$。质点从静止开始，速度在最初 T s 内均匀增加；从 $t=T$ 至 $t=4$ 保持不变；随后均匀减小，在 $t=8$ 时降至 0。运动最初 T s 内的加速度为 $2\text{m}\,\text{s}^{-2}$。运动的总路程为 27 m。(a) 计算 T。

✓ **答案** $T=3$ s。

解析 设水平段的速度为 $u\text{m}\,\text{s}^{-1}$。由最初 T s 内的加速度得

$$\frac{u}{T}=2$$

$$u=2T$$

图中速度非负，由各段面积之和得

$$\frac{1}{2}\times T\times 2T+(4-T)\times 2T+\frac{1}{2}\times(8-4)\times 2T=27$$

$$T^2+8T-2T^2+4T=27$$

$$T^2-12T+27=0$$

$$(T-3)(T-9)=0$$

$$T=3 \quad \text{或} \quad T=9$$

由图得 $0<T<4$，故舍去 $T=9$。答：$T=3$ s。

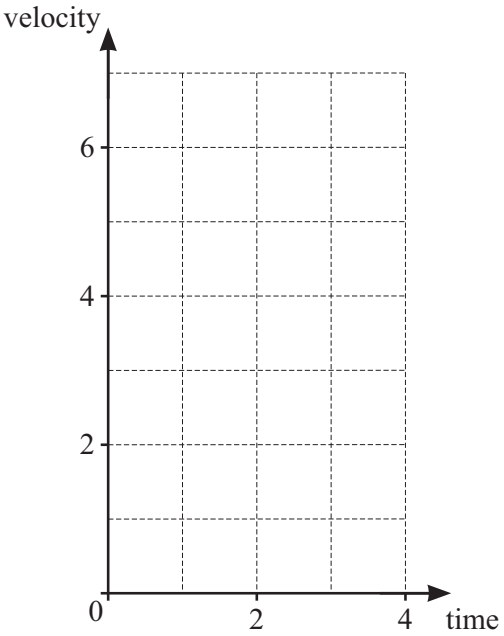
3. [2026 · February/March 0606/12 Q3(a)]

提示：看静止条件确定起点，再比三角形面积与给定位移。

In this question, time t is in seconds and displacement s is in metres.

A particle starts from rest at the origin O and moves in a straight line with constant positive acceleration.
When $t=4$, $s=6$.

(a) Draw the velocity–time graph for $0 \leqslant t \leqslant 4$.



本题中，时间 t 的单位为 s，位移 s 的单位为 m。一质点从原点 O 由静止开始沿直线运动，加速度为正常量。当 $t=4$ 时，$s=6$。(a) 在所给坐标系中画出 $0 \leq t \leq 4$ 内的速度与时间图象。横轴标为时间，标有 0、2、4；纵轴标为速度，标有 2、4、6。

✓ **答案** 连接 $(0,0)$ 与 $(4,3)$ 的线段，即 $v=\frac{3}{4}t$，$0 \leq t \leq 4$。

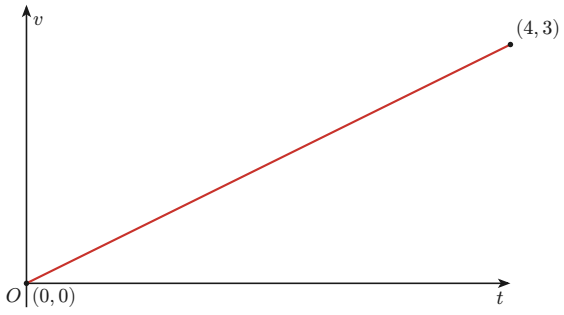
解析 质点从静止开始且加速度恒定，速度与时间图象为过原点的线段。设 $t=4$ 时的速度为 $u\,\mathrm{m\ s^{-1}}$。速度非负，由图下面积等于位移得

$$\frac{1}{2} \times 4 \times u = 6$$

$$u = 3$$

答：在所给坐标系中连接 $(0,0)$ 与 $(4,3)$，所得线段为 $0 \leq t \leq 4$ 内的速度与时间图象。

实线 $v=3\frac{t}{4}$



$(0,0)$；$(4,3)$

题型 31 由位移差或速度积分求位移与终止时刻

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **位移确定路程：**本例用 $s(t)$ 表示时刻 t 的位移。

$$s(3) = 3 + 6 \times 3^2 - 3^3 = 30$$

该时刻路程等于位移，此后速度为正。总路程 D 等于终点的 _____。

$$D = 30 + s(k) - s(3) = s(k)$$

② **速度积分位移：**本例后一段的速度 $v(t)$ 由位移求导得到。

$$v(t)=s'(t)=12-\frac{2}{3}t$$

从 $t=a$ 到 $t=b$ 的位移增量记为 Δs。

$$\Delta s=s(b)-s(a)=\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$$

其中 $F'(t)=v(t)$，位移的单位为 m。

③ **分段积分求和：**速度在 $t=4$ 处换表达式，积分也在此处分开。

$$\Delta s=\int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t+\int_4^k v(t)\,\mathrm{d}t$$

各段速度均为正时，总路程等于各段积分的 _____。

④ **指数函数积分：**指数为 $\frac{t}{2}$ 时，积分后系数乘 2。

$$\int e^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=2e^{\frac{t}{2}}+C$$

一般指数为 at 时，积分后除以 _____。

$$\int e^{at}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}e^{at}+C\quad(a\neq 0)$$

其中 C 为积分常数。

⑤ **负幂函数积分：**速度含 $\frac{1}{t^2}$ 时，改写为 t^{-2} 后积分。

$$\int\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int t^{-2}\,\mathrm{d}t=-t^{-1}+C=-\frac{1}{t}+C\quad(t>0)$$

幂次加 1，系数再除以所得幂次。若所得方程含 $\frac{1}{k}$，先移项再求 k，例如

$$6-\frac{12}{k}=4$$

$$\frac{12}{k}=2$$

$$k=6$$

⑥ **三角函数积分：**速度含 $\sin 2t$ 或 $\cos 2t$，积分后均须除以 2。

正弦项积分：

$\int\sin 2t\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\cos 2t+C$

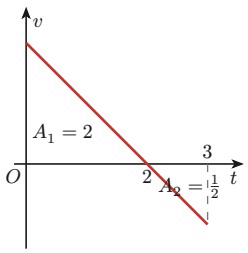
余弦项积分：

$\int\cos 2t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sin 2t+C$

角度采用弧度制。

⑦ 位移保留符号，路程累计绝对值

$$v(t)=2-t,\quad 0\le t\le 3$$



填空：①位移　②和　③a

点石成金　题目出现分段的位移或速度，并给出总路程求终止时刻时，先判断运动方向，再按各段表达式列路程方程。

例 1　[2025 · May/June 0606/13 Q11(b)]

A particle P moves in a straight line and passes through a fixed point O.
At time t seconds, its displacement from O, s metres, is given by

$$s = t + 6t^2 - t^3 \qquad \text{for } 0 \leqslant t \leqslant 3$$

$$s = 12t - \frac{1}{3}t^2 - 3 \qquad \text{for } 3 \leqslant t \leqslant k \qquad \text{where } k \text{ is a constant.}$$

It is given that, for $3 \leqslant t \leqslant k$, the velocity of P is positive and its acceleration is negative.

(b) The total distance travelled by P for $0 \leqslant t \leqslant k$ is 57 metres.

Given that when $t = 3$ the distance and displacement of P from O are equal, find the value of k.

粒子 P 沿直线运动，并经过定点 O。时间为 t s 时，它相对于 O 的位移为 s m，且

$$s = t + 6t^2 - t^3 \quad (0 \le t \le 3)$$

$$s = 12t - \frac{1}{3}t^2 - 3 \quad (3 \le t \le k)$$

其中 k 为常数。已知在 $3 \le t \le k$ 内，P 的速度为正，加速度为负。
(b) P 在 $0 \le t \le k$ 内行驶的总路程为 57 m。
已知当 $t = 3$ 时，P 行驶的路程与它相对于 O 的位移相等，求 k 的值。

解答　当 $t = 3$ 时，

$$s(3) = 3 + 6 \times 3^2 - 3^3 = 30$$

由题意，此时已行路程为 30 m。此后速度为正，路程增量等于位移增量，故

$$30 + \left(12k - \frac{1}{3}k^2 - 3 - 30\right) = 57$$

$$k^2 - 36k + 180 = 0$$

$$(k - 6)(k - 30) = 0$$

$$k = 6 \quad \text{或} \quad k = 30$$

在 $3 \le t \le k$ 内，

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 12 - \frac{2}{3}t$$

由终点速度为正，得

$$12 - \frac{2}{3}k > 0$$

$$k < 18$$

方法：先看分界时刻与速度符号，从已行路程列终点方程。

辨析：方程根是代数候选值，终止时刻是满足运动条件的根。

拓展：速度变号时，求路程须按变号时刻分段取积分绝对值。

故舍去 $k=30$。答：$k=6$。

针对练习

1. [2023 · October/November 0606/21 Q7(d)]

提示：看积分上下限与二倍角，核对原函数系数及代入顺序。

A particle moves in a straight line. At time t seconds after passing through a fixed point O, its velocity, $v\,\text{ms}^{-1}$, is given by $v=10\sin 2t-6\cos 2t$.

(d) Find the displacement of the particle between $t=\dfrac{\pi}{4}$ and $t=\dfrac{\pi}{2}$.

一个粒子沿直线运动。经过定点 O 后，时间为 t s 时，其速度为 $v\,\text{m s}^{-1}$，且

$$v=10\sin 2t-6\cos 2t$$

(d) 求粒子从 $t=\frac{\pi}{4}$ 到 $t=\frac{\pi}{2}$ 这段时间内的位移。

✓ **答案** 8 m

解析 所求位移为

$$\Delta s=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(10\sin 2t-6\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta s=(-5\cos\pi-3\sin\pi)-\left(-5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Delta s=5-(-3)=8\ \text{m}$$

答：粒子的位移为 8 m。

2. [2023 · May/June 0606/22 Q9]

提示：看速度在何时换式，分段积分后比较终止时刻与分界时刻。

A particle travels in a straight line so that, t seconds after passing a fixed point, its velocity, $v\,\text{ms}^{-1}$, is given by

$$v=\mathrm{e}^{\frac{t}{4}}\quad\text{for}\ \ 0\leqslant t\leqslant 4,$$

$$v=\frac{16\mathrm{e}}{t^2}\quad\text{for}\ \ 4\leqslant t\leqslant k.$$

The total distance travelled by the particle between $t=0$ and $t=k$ is 13.4 metres. Find the value of k.

一个粒子沿直线运动。经过一个定点后，时间为 t s 时，其速度为 $v\,\text{m s}^{-1}$，且

$$v=e^{\frac{t}{4}}\quad(0\leq t\leq 4)$$

$$v=\frac{16e}{t^2}\quad(4\leq t\leq k)$$

粒子从 $t=0$ 到 $t=k$ 这段时间内行驶的总路程为 13.4 m。求 k 的值。

✓ **答案** $k\approx 10.0$

解析 两段速度均为正，故总路程为两段速度积分之和。

$$\int_0^4 e^{\frac{t}{4}}\,\mathrm{d}t+\int_4^k\frac{16e}{t^2}\,\mathrm{d}t=13.4$$

$$(4e-4)+\left(-\frac{16e}{k}+\frac{16e}{4}\right)=13.4$$

$$8e-4-\frac{16e}{k}=13.4$$

$$\frac{16e}{k}=8e-17.4$$

$$k=\frac{16e}{8e-17.4}\approx 10.0$$

所得值满足 $k>4$。答：$k\approx 10.0$。

题型 32　求出各段速度式并画速度时间图

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **位移求速度：**题中粒子 P 的位移 s、时间 t 分别以 m、s 计。幂项求导时，指数乘到系数上，原指数减 1；常数项求导得 0。位移对时间的导数称为速度 v，单位为_____。

$$s=(t-4)^2(t-1)=t^3-9t^2+24t-16$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^3)=3t^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-9t^2)=-18t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(24t)=24$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-16)=0$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=3t^2-18t+24$$

② **因式分解求截距：**图上各点按 (t,v) 记。令 $t=0$ 求纵轴交点，令 $v=0$ 求横轴交点。求横轴交点前，先将速度式因式分解。

$$v=3(t^2-6t+8)=3(t-2)(t-4)$$

纵轴交点：

$$t=0$$

$$v=24$$

交点为 $(0,24)$。

横轴交点：

$$3(t-2)(t-4)=0$$

$$t=2 \quad 或 \quad t=4$$

交点为 $(2,0)$、$(4,0)$。

速度为零的两个时刻为_____、_____。

③ **配方确定顶点：**速度式为二次式，图象为抛物线。将二次式配方，读出顶点，再由二次项系数确定开口方向。

$$v=3(t^2-6t+8)=3((t-3)^2-1)=3(t-3)^2-3$$

顶点为 $(3,-3)$。

二次项系数为正：
开口向上，顶点最低。

二次项系数为负：
开口向下，顶点最高。

④ **限定绘图区间：**题中 $t \geq 0$，图象从 $(0,24)$ 起向右绘制。若时间有上限，代入右端时间求终点。例如，同一速度式若限于 $0 \leq t \leq 5$，则有

$$v(5) = 3(5-2)(5-4) = 9$$

终点为 $(5,9)$，曲线画到该点为止。

⑤ **分段分别求导：**位移分段给出时，各段分别求导。用 v_1、v_2 表示前、后两段速度，在分界时刻比较其值。如下演示中，两段图象在同一点连接。

$$s = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ -t^2 + 4t - 21 \leq t \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ 4 - 2t1 \leq t \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$v_1(1) = 2$$

$$v_2(1) = 4 - 2 = 2$$

连接点为 $(1,2)$。

⑥ **运动条件落图：**速度为正，图象位于时间轴上方。加速度 a 是速度对时间的导数；加速度为负，速度图象随时间下降。上述演示的后一段满足

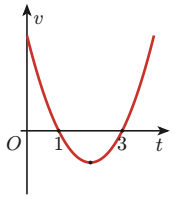
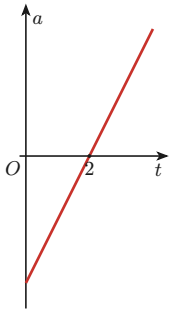
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2 < 0$$

$$v\left(\frac{3}{2}\right) = 4 - 2 \times \frac{3}{2} = 1 > 0$$

故后一段是下降的线段，终点仍在时间轴上方。

⟵ 填空：①$\mathrm{m\ s^{-1}}$　②2 s　③4 s

同一运动的速度与加速度

	$v(t) = t^2 - 4t + 3$	$a(t) = 2t - 4$
图像		
联系	$a(t) = v'(t)$	
零点	$t = 1, 3$	$t = 2$
符号变化	速度变号时换向	加速度变号时速度取极值

点石成金　题目给出位移式并要求画速度时间图时，先求导得速度，再求截距、顶点，并按时间范围画图。

例 1　[2025 · May/June 0606/22 Q2(c)]

In this question, all lengths are in metres and time is in seconds.

A particle P moves in a straight line such that its displacement s from a fixed point O at time t is given by $s = (t-4)^2(t-1)$ for $t \geqslant 0$.

(b) Find an expression for the velocity, v, of P.
Give your answer in a factorised form.

(c) On the axes, sketch the velocity–time graph of P, stating the intercepts with the axes.



本题中，所有长度的单位为 m，时间的单位为 s。
粒子 P 沿一直线运动。在时刻 t，它相对于固定点 O 的位移 s 为

$$s = (t-4)^2(t-1),\quad t \geq 0$$

(b) 求粒子 P 的速度 v 的表达式，答案须写成因式分解的形式。
(c) 在给出的坐标轴上，画出粒子 P 的速度时间图草图，并标明图象与坐标轴的交点。
图中纵轴标为 v，横轴标为 t，原点标为 O。

解答　由位移式得

$$s = (t-4)^2(t-1) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3t^2 - 18t + 24$$

$$v = 3(t^2 - 6t + 8) = 3(t-4)(t-2)$$

方法：先看位移式与时间范围，求导后找截距和顶点。

辨析：速度是图线的纵坐标，加速度是图线的切线斜率。

令 $t = 0$，得

$$v = 24$$

故纵轴交点为 $(0, 24)$。
令 $v = 0$，得

$$3(t-4)(t-2) = 0$$

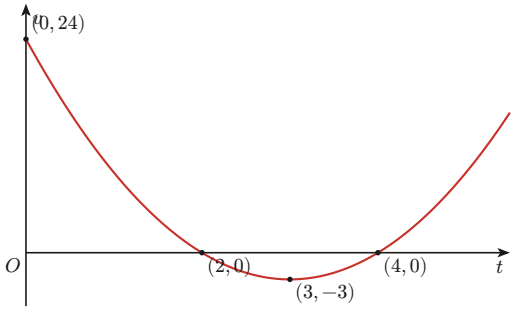
$$t = 2 \quad 或 \quad t = 4$$

故横轴交点为 $(2,0)$、$(4,0)$。
又

$$v = 3(t-3)^2 - 3$$

故抛物线开口向上，顶点为 $(3,-3)$。
答：(b) $v = 3(t-4)(t-2)$，单位为 $\mathrm{m\ s^{-1}}$。
(c) 在 $t \geq 0$ 的范围内，曲线从 $(0,24)$ 起下降，穿过 $(2,0)$，到达顶点 $(3,-3)$ 后上升，穿过 $(4,0)$ 后继续上升；标出三处坐标轴交点。

实线 $v = 3(t-4)(t-2)$



$(0,24)$；$(2,0)$；$(4,0)$；$(3,-3)$

针对练习

1. [2023 · May/June 0606/13 Q9(c)]

提示：看速度式的零点与顶点，再核对时间区间两端。

In this question lengths are in centimetres and time is in seconds.

A particle P moves in a straight line such that its displacement s, from a fixed point at a time t, is given by $s = 3(t+2)(t-4)^2$ for $0 \leqslant t \leqslant 5$.

(a) Find the values of t for which the velocity, v, of P is zero.

(c) On the axes below, sketch the velocity–time graph of P, stating the intercepts with the axes.



本题中，长度单位为 cm，时间单位为 s。
粒子 P 沿一直线运动。在时刻 t，它相对于一个固定点的位移 s 为

$$s = 3(t+2)(t-4)^2, \quad 0 \leq t \leq 5$$

(a) 求粒子 P 的速度 v 为零时的 t 值。
(c) 在下方给出的坐标轴上，画出粒子 P 的速度时间图草图，并标明图象与坐标轴的交点。
图中纵轴标为 v，横轴标为 t；原点标为 0，横轴上标有 5。

✓ **答案**　(a) $t=0$ 或 $t=4$，单位为 s。

(c) 图象为 $v=9(t-2)^2-36$ 在 $0\le t\le 5$ 上的一段抛物线，开口向上，经过 $(0,0)$、顶点 $(2,-36)$、$(4,0)$，终点为 $(5,45)$；与坐标轴的交点为 $(0,0)$、$(4,0)$。

解析　由位移式得

$$s=3(t+2)(t-4)^2=3t^3-18t^2+96$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=9t^2-36t=9t(t-4)$$

令 $v=0$，得

$$9t(t-4)=0$$

$$t=0 \quad 或 \quad t=4$$

两值均在 $0\le t\le 5$ 内。

当 $t=0$ 时，$v=0$，故纵轴交点为 $(0,0)$。

横轴交点为 $(0,0)$、$(4,0)$。

将速度式配方，得

$$v=9(t^2-4t)=9((t-2)^2-4)=9(t-2)^2-36$$

故抛物线开口向上，顶点为 $(2,-36)$。

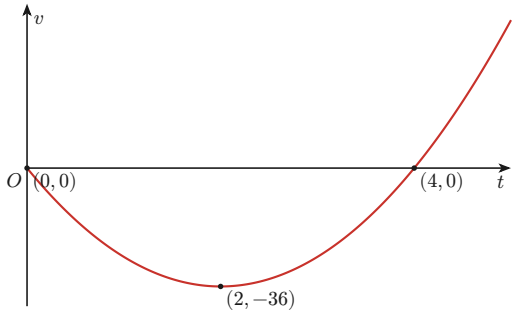
时间区间的右端为 $t=5$，代入得

$$v(5)=9\times 5\times(5-4)=45$$

答：(a) 速度为零的时刻为 0 s、4 s。

(c) 曲线从原点起下降，到达 $(2,-36)$ 后上升，穿过 $(4,0)$，到 $(5,45)$ 处结束；标出坐标轴交点 $(0,0)$、$(4,0)$。

实线 $v=9t(t-4)$



$(0,0)$；$(4,0)$；$(2,-36)$

2. [2025 · May/June 0606/13 Q11(a)]

提示：比较分界时刻两段速度，再看后段斜率与速度正负。

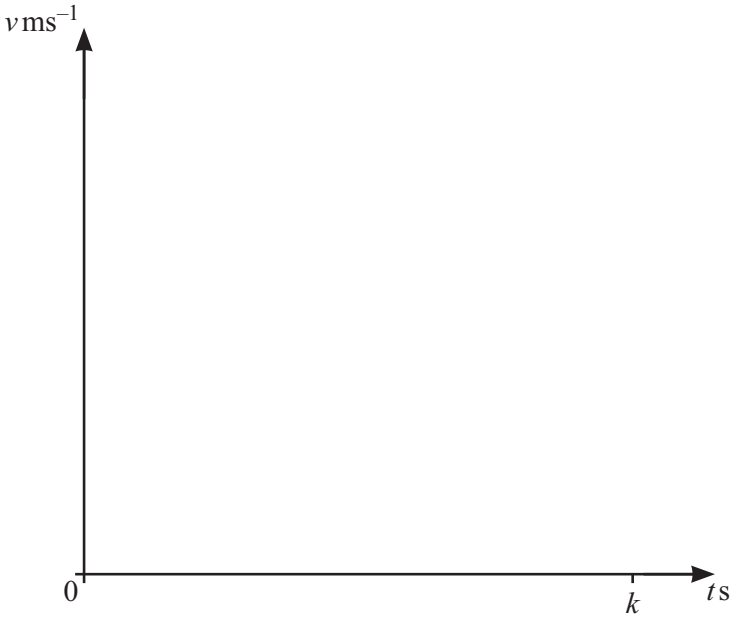
A particle P moves in a straight line and passes through a fixed point O.
At time t seconds, its displacement from O, s metres, is given by

$$s=t+6t^2-t^3 \qquad \text{for } 0\leqslant t\leqslant 3$$

$$s=12t-\frac{1}{3}t^2-3 \qquad \text{for } 3\leqslant t\leqslant k \qquad \text{where } k \text{ is a constant.}$$

It is given that, for $3\leqslant t\leqslant k$, the velocity of P is positive and its acceleration is negative.

(a) The maximum velocity of P occurs when $t = 2$.
On the axes below, sketch a velocity–time graph for the first k seconds of the motion of P.



粒子 P 沿一直线运动，并经过固定点 O。在时刻 t s，它相对于 O 的位移为 s m，其中

$$s = t + 6t^2 - t^3, \quad 0 \le t \le 3$$

$$s = 12t - \frac{1}{3}t^2 - 3, \quad 3 \le t \le k$$

k 为常数。
已知在 $3 \le t \le k$ 时，粒子 P 的速度为正，加速度为负。
(a) 粒子 P 在 $t = 2$ 时达到最大速度。
在下方给出的坐标轴上，画出粒子 P 在运动开始后 k s 内的速度时间图草图。
图中纵轴为速度 v，单位为 m s^{-1}；横轴为时间 t，单位为 s；原点标为 0，横轴上标有 k。

✓ **答案** $v = \begin{cases} 13-3(t-2)^2 & 0 \le t \le 3 \\ 12-\frac{2}{3}t & 3 \le t \le k \end{cases}$。前段为开口向下的抛物线，从 $(0,1)$ 上升至最高点 $(2,13)$，再下降至 $(3,10)$；后段为从 $(3,10)$ 下降至 $\left(k, 12-\frac{2}{3}k\right)$ 的线段，终点在时间轴上方。

解析 在 $0 \le t \le 3$ 时，

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 1 + 12t - 3t^2$$

$$v = 13 - 3(t-2)^2$$

故此段图象为开口向下的抛物线，最高点为 $(2,13)$。
代入两端时刻，得

$$v(0) = 1$$

$$v(3) = 1 + 12 \times 3 - 3 \times 3^2 = 10$$

在 $3 \le t \le k$ 时，

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 12 - \frac{2}{3}t$$

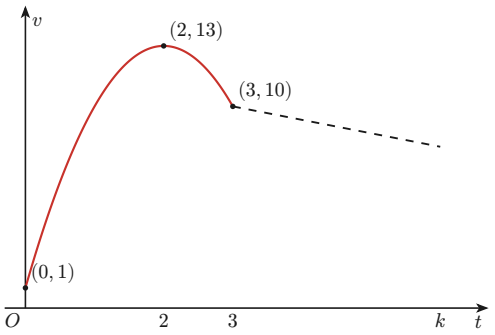
$$v(3) = 12 - \frac{2}{3} \times 3 = 10$$

故两段图象在 $(3,10)$ 处连接。
后一段速度式为一次式，其图象为下降的线段。
由该段速度为正，得

$$v(k)=12-\frac{2}{3}k>0$$

故终点在时间轴上方。
答：图象从 $(0,1)$ 起沿开口向下的抛物线上升，在 $(2,13)$ 处达到最高点，再下降至 $(3,10)$；随后沿直线下降，到横坐标为 k 的位置结束，整条图象均在时间轴上方。

实线 $v=1+12t-3t^2$；虚线 $v=12-2\frac{t}{3}$



$(0,1)$；$(2,13)$；$(3,10)$

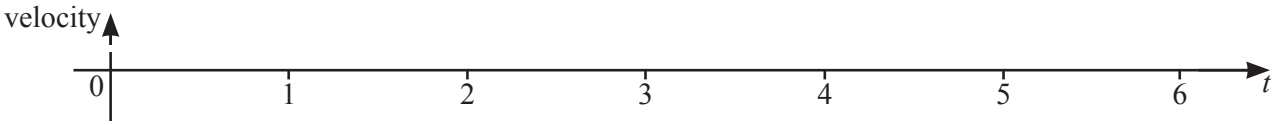
3. [2022 · May/June 0606/12 Q11(c)]
提示：先展开位移式并对时间求导，再求速度图象的截距、顶点和右端点。

In this question all lengths are in kilometres and time is in hours.

A particle P moves in a straight line such that its displacement, s, from a fixed point at time t is given by $s=(t+2)(t-5)^2$, for $t\geqslant 0$.

(a) Find the values of t for which the velocity of P is zero.

(c) On the axes below, draw the velocity–time graph for P for $0\leqslant t\leqslant 6$, stating the coordinates of the points where the graph meets the coordinate axes.



本题中，所有长度以千米计，时间以小时计。
粒子 P 沿一直线运动。在时刻 t，它相对于某固定点的位移 s 为

$$s=(t+2)(t-5)^2,\quad t\geq 0$$

(a) 求粒子 P 的速度为零时 t 的值。
(c) 在下方给出的坐标轴上，画出粒子 P 在 $0\leq t\leq 6$ 内的速度时间图，并写出图象与坐标轴交点的坐标。
图中纵轴表示速度，横轴标为 t；原点标为 0，横轴刻度依次为 1、2、3、4、5、6。

✓ **答案** (a) $t=\frac{1}{3}$ 或 $t=5$，单位为小时。
(c) 图象为 $v=3t^2-16t+5$ 在 $0\leq t\leq 6$ 内的抛物线段，开口向上；与坐标轴的交点为 $(0,5)$、$\left(\frac{1}{3},0\right)$、$(5,0)$，顶点为 $\left(\frac{8}{3},-\frac{49}{3}\right)$，右端点为 $(6,17)$。

解析 展开位移式，得

$$s=(t+2)(t^2-10t+25)=t^3-8t^2+5t+50$$

由位移对时间求导，得速度

$$v=\frac{ds}{dt}=3t^2-16t+5=(3t-1)(t-5)$$

速度的单位为 $\mathrm{km\ h^{-1}}$。令 $v=0$，得

$$(3t-1)(t-5)=0$$

$$t=\frac{1}{3}\quad 或\quad t=5$$

两个时刻均满足 $t\geq 0$，故速度为零的时刻为 $\frac{1}{3}$ 小时和 5 小时。
图上坐标按 (t,v) 记。令 $t=0$，得

$$v=5$$

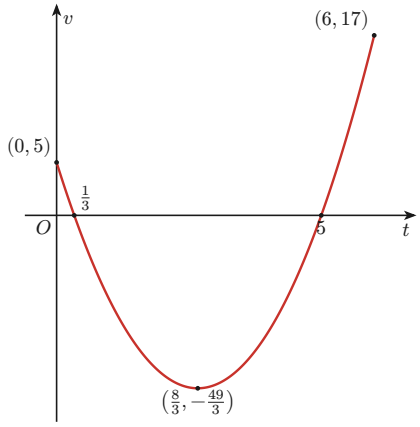
故纵轴交点为 $(0,5)$，横轴交点为 $\left(\frac{1}{3},0\right)$、$(5,0)$。
将速度式配方，得

$$v=3\left(t^2-\frac{16}{3}t\right)+5=3\left(t-\frac{8}{3}\right)^2-\frac{49}{3}$$

二次项系数为正，故抛物线开口向上，顶点为 $\left(\frac{8}{3},-\frac{49}{3}\right)$。
在右端时刻 $t=6$，有

$$v(6)=3\times 6^2-16\times 6+5=17$$

答：在 $0\leq t\leq 6$ 内，曲线从 $(0,5)$ 起下降，穿过 $\left(\frac{1}{3},0\right)$，到达最低点 $\left(\frac{8}{3},-\frac{49}{3}\right)$ 后上升，穿过 $(5,0)$，止于 $(6,17)$；标明三处坐标轴交点。



题型 33　由二次速度的斜率画直线加速度图

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **展开位移乘积：**本例粒子 P 的位移为 s，时间为 t。位移单位为 cm，时间单位为 s。先展开括号，写成各次幂相加的形式。

$$s=3(t+2)(t-4)^2=3(t+2)(t^2-8t+16)=3t^3-18t^2+96$$

② **位移求出速度：**速度 v 是位移对时间的_____。幂函数求导时，指数乘到前面，指数减一；常数项求导得零。下式中 n 为正整数，C 为常数。

$$(t^n)'=nt^{n-1},\quad C'=0$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=3\times 3t^2-18\times 2t+0=9t^2-36t$$

速度单位为 $\mathrm{cm\ s^{-1}}$。

③ **分解速度因式：**求速度为零的时刻，先将速度式分解因式。各因式的乘积为零，至少一个因式为零。二次式还可拆开一次项，再分组提取公因式。

$$v=9t^2-36t=9t(t-4)$$

$$t^2-5t+6=t^2-2t-3t+6=t(t-2)-3(t-2)=(t-2)(t-3)$$

④ **速度求出加速度：**加速度 a 是速度对时间的导数，等于速度图象切线的_____。将速度式再求导，加速度单位为 $\mathrm{cm\ s^{-2}}$。

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=9\times 2t-36=18t-36$$

⑤ **截距确定直线：**加速度式为一次式，先求与两轴的交点。
令 $t=0$，得 $a=-36$。纵轴交点为_____。　|　令 $a=0$，得 $18t-36=0$。横轴交点为_____。

本例限定 $0\le t\le 5$，还需确定右端点。

$$a(5)=18\times 5-36=54$$

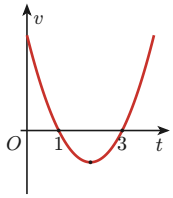
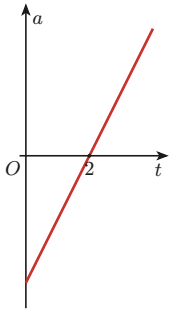
连接 $(0,-36)$ 与 $(5,54)$，线段经过 $(2,0)$。

⑥ **速度图象读斜率：**已给速度图时，用切线斜率判断加速度。起点切线水平，初加速度为零；切线越陡，加速度越大。例如下式的速度图为抛物线，加速度图为经过原点的上升直线。

$$v=t^2-1,\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2t$$

⟵ 填空：①导数　②斜率　③$(0,-36)$　④$(2,0)$

同一运动的速度与加速度

	$v(t)=t^2-4t+3$	$a(t)=2t-4$
图像		
联系	$a(t)=v'(t)$	
零点	$t=1,3$	$t=2$
符号变化	速度变号时换向	加速度变号时速度取极值

点石成金　题目出现位移式或二次速度图，要求画加速度与时间的图象时，先求速度的导数或读速度图的切线斜率。

例 1　[2023 · May/June 0606/13 Q9(d)]

In this question lengths are in centimetres and time is in seconds.

A particle P moves in a straight line such that its displacement s, from a fixed point at a time t, is given by $s = 3(t+2)(t-4)^2$ for $0 \leqslant t \leqslant 5$.

(a) Find the values of t for which the velocity, v, of P is zero.

(d) (i) Find an expression for the acceleration of P at time t.

(ii) Hence, on the axes below, sketch the acceleration–time graph of P, stating the intercepts with the axes.



本题中，长度单位为厘米，时间单位为 s。
粒子 P 沿直线运动。在时刻 t，它相对于某固定点的位移 s 为

$$s = 3(t+2)(t-4)^2, \quad 0 \leq t \leq 5$$

(a) 求粒子 P 的速度 v 为零时 t 的值。
(d) (i) 求粒子 P 在时刻 t 的加速度表达式。
(ii) 由此，在下方所给坐标轴上，画出粒子 P 的加速度与时间的图象草图，并标明图象与两坐标轴的交点。
图中纵轴表示加速度，横轴标为 t；原点标为 0，横轴上标有 5。

解答　由位移式得

$$s = 3(t+2)(t-4)^2 = 3t^3 - 18t^2 + 96$$

速度为位移对时间的导数，故

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 9t^2 - 36t = 9t(t-4)$$

令速度为零，得

$$9t(t-4) = 0$$

$$t = 0 \quad 或 \quad t = 4$$

两值均在 $0 \leq t \leq 5$ 内。
加速度为速度对时间的导数，故

方法：先看速度式或速度图，求导或读切线斜率，再按时间范围标端点。

辨析：速度图上，速度为零是纵坐标为零，加速度为零是切线斜率为零。

拓展：二次速度的导数为一次式，加速度图的斜率等于速度二次项系数的两倍。

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 18t - 36$$

令 $t = 0$，得

$$a = -36$$

令 $a = 0$，得

$$18t - 36 = 0$$

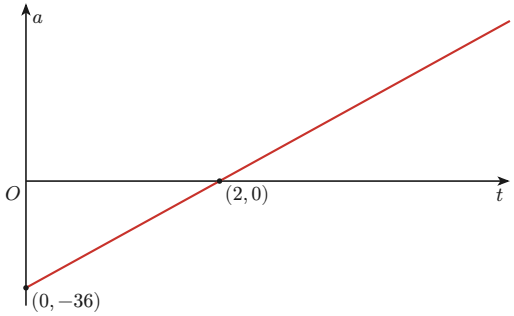
$$t = 2$$

又当 $t = 5$ 时，

$$a = 18 \times 5 - 36 = 54$$

故加速度图象为连接 $(0, -36)$ 与 $(5, 54)$ 的上升线段，经过 $(2, 0)$。
答：(a) $t = 0$ s 或 $t = 4$ s；(d) (i) $a = (18t - 36)$ cm s^{-2}；(ii) 图象与纵轴、横轴的交点分别为 $(0, -36)$、$(2, 0)$。

实线 $a = 18t - 36$



$(0, -36)$；$(2, 0)$

针对练习

1. [2025 · May/June 0606/22 Q2(e)]

提示：看加速度式的两轴截距，再按时间范围确定图象边界。

In this question, all lengths are in metres and time is in seconds.

A particle P moves in a straight line such that its displacement s from a fixed point O at time t is given by $s = (t-4)^2(t-1)$ for $t \geqslant 0$.

(b) Find an expression for the velocity, v, of P.
Give your answer in a factorised form.

(d) Find an expression for the acceleration, a, of P.

(e) On the axes, sketch the acceleration–time graph of P, stating the intercepts with the axes.



本题中，所有长度的单位为米，时间单位为 s。
粒子 P 沿直线运动。在时刻 t，它相对于固定点 O 的位移 s 为

$$s=(t-4)^2(t-1),\quad t\geq 0$$

(b) 求粒子 P 的速度 v 的表达式，答案须写成因式分解的形式。
(d) 求粒子 P 的加速度 a 的表达式。
(e) 在所给坐标轴上，画出粒子 P 的加速度与时间的图象草图，并标明图象与两坐标轴的交点。
图中纵轴标为 a，横轴标为 t，原点标为 O。

✓ **答案** (b) $v=3(t-4)(t-2)$ m s^{-1}；(d) $a=(6t-18)$ m s^{-2}；(e) 从 $(0,-18)$ 出发、经过 $(3,0)$ 向右上方延伸的射线。

解析 展开位移式，得

$$s=(t-4)^2(t-1)=(t^2-8t+16)(t-1)=t^3-9t^2+24t-16$$

速度为位移对时间的导数，故

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=3t^2-18t+24$$

分解因式，得

$$v=3(t^2-6t+8)=3(t^2-4t-2t+8)=3[t(t-4)-2(t-4)]=3(t-4)(t-2)$$

加速度为速度对时间的导数，故

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=6t-18$$

令 $t=0$，得

$$a=-18$$

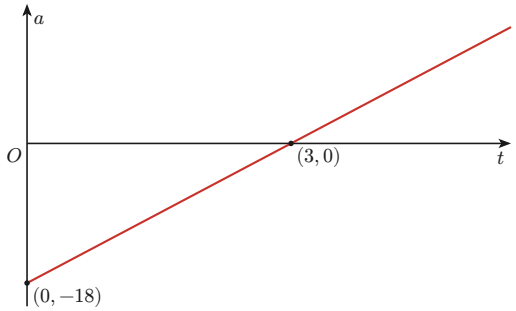
令 $a=0$，得

$$6t-18=0$$

$$t=3$$

$\because t\geq 0$，$\therefore$图象从 $(0,-18)$ 出发，经过 $(3,0)$ 向右上方延伸。
答：(b) $v=3(t-4)(t-2)$ m s^{-1}；(d) $a=(6t-18)$ m s^{-2}；(e) 图象为上述射线，与纵轴、横轴的交点分别为 $(0,-18)$、$(3,0)$。

实线 $a = 6t - 18$

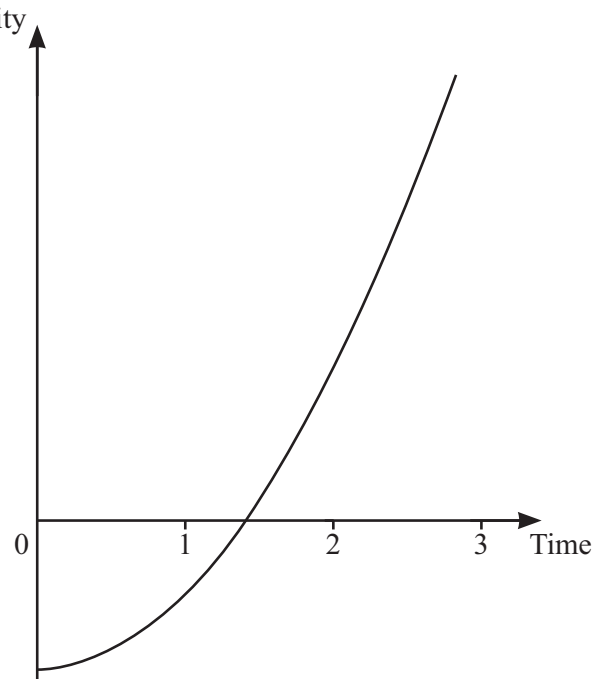


$(0, -18)$；$(3, 0)$

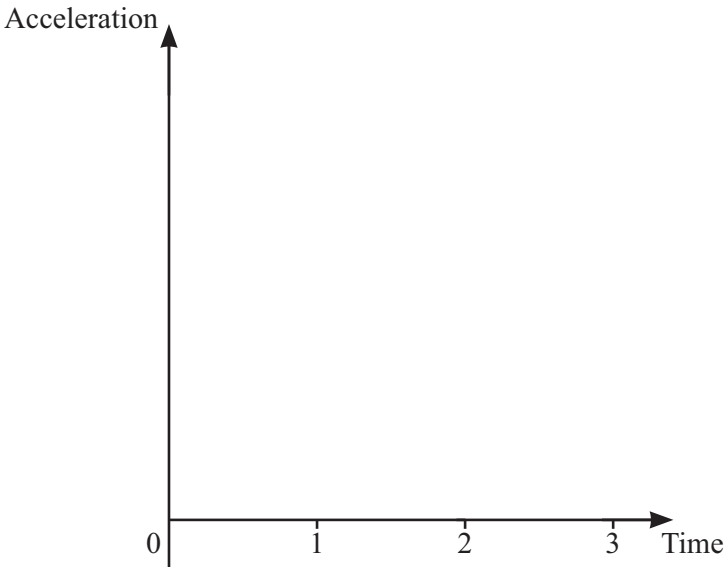
2. [2025 · October/November 0606/11 Q9(b)]

提示：比较速度曲线起点及后续切线的斜率，判断加速度的变化。

The diagram shows the velocity–time graph for a particle moving in a straight line.



(b) On the diagram below sketch a possible acceleration–time graph for the motion of the particle.



图中给出了一个沿直线运动的粒子的速度与时间的图象。

图中纵轴表示速度，横轴表示时间；原点标为 0，时间轴上标有 1、2、3。

(b) 在下方所给坐标图中，画出该粒子运动的一种可能的加速度与时间的图象草图。
下方图中纵轴表示加速度，横轴表示时间；原点标为 0，时间轴上标有 1、2、3。

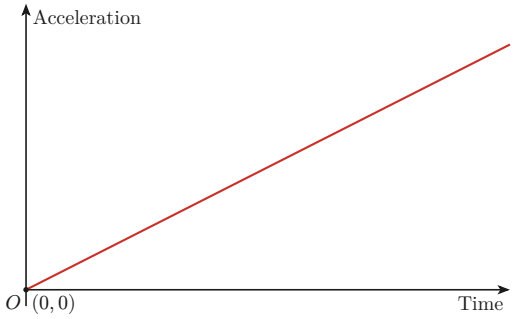
✓ **答案** 从原点出发、向右上方延伸的正斜率直线。

解析 由速度图象可见，初始时刻的切线水平，故

$$a(0)=0$$

随着时间增加，速度图象的切线斜率为正且逐渐增大，故加速度为正且逐渐增大。
原速度图象呈开口向上的抛物线形，因此可画一条从原点出发、向右上方延伸的直线。
答：在所给时间范围内，画经过原点、斜率为正的直线。

一条可行的加速度图



$(0,0)$

3. [2022 · May/June 0606/12 Q11(d)(ii)]
提示：位移式连续求导两次，再求截距及限定区间的端点。

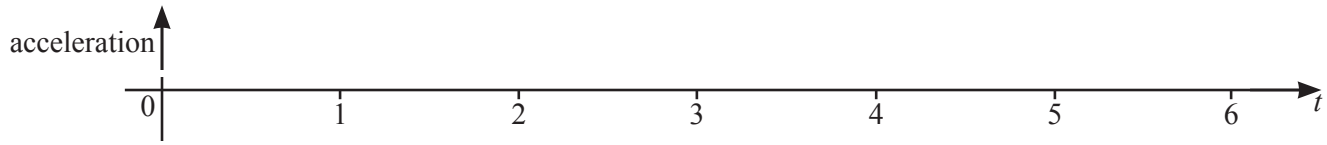
In this question all lengths are in kilometres and time is in hours.

A particle P moves in a straight line such that its displacement, s, from a fixed point at time t is given by $s=(t+2)(t-5)^2$, for $t \geqslant 0$.

(a) Find the values of t for which the velocity of P is zero.

(d) (i) Write down an expression for the acceleration of P at time t.

(ii) Hence, on the axes below, draw the acceleration–time graph for P for $0 \leqslant t \leqslant 6$, stating the coordinates of the points where the graph meets the coordinate axes.



本题中，所有长度均以千米为单位，时间以小时为单位。
粒子P沿直线运动。在时刻t，它相对于某固定点的位移s为

$$s=(t+2)(t-5)^2,\quad t\geq 0$$

(a) 求粒子P的速度为零时t的值。
(d) (i) 写出粒子P在时刻t的加速度表达式。
(ii) 由此，在下方所给坐标轴上，画出粒子P在$0\leq t\leq 6$内的加速度与时间的图象，并写出图象与两坐标轴交点的坐标。
图中纵轴表示加速度，横轴标为t；原点标为0，横轴上依次标有1、2、3、4、5、6。

✓ **答案** 图象为$a=6t-16$在$0\leq t\leq 6$上的上升线段，两端点为$(0,-16)$、$(6,20)$，与纵轴、横轴的交点分别为$(0,-16)$、$\left(\frac{8}{3},0\right)$。

解析 将位移式展开，得

$$s=(t+2)(t-5)^2=(t+2)(t^2-10t+25)=t^3-8t^2+5t+50$$

速度为位移对时间的导数，故

$$v=\frac{ds}{dt}=3t^2-16t+5=(3t-1)(t-5)$$

令速度为零，得

$$(3t-1)(t-5)=0$$

$$t=\frac{1}{3}\quad 或\quad t=5$$

两值均满足$t\geq 0$。
加速度为速度对时间的导数，故

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-16$$

加速度的单位为$\mathrm{km\ h^{-2}}$。
由此，令$t=0$，得

$$a=-16$$

令$a=0$，得

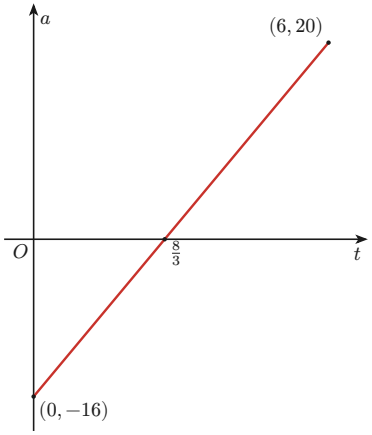
$$6t-16=0$$

$$t=\frac{8}{3}$$

在右端点处，

$$a(6)=6\times 6-16=20$$

加速度是t的一次函数，斜率为正。
答：在$0\leq t\leq 6$上，图象为连接$(0,-16)$与$(6,20)$的上升线段；与纵轴、横轴的交点分别为$(0,-16)$、$\left(\frac{8}{3},0\right)$。



题型 34　用速度图线段斜率求加速度

考频 ★★☆☆☆

知识梳理

① **图下面积求路程：**图中 t 表示时间，v 表示速度。前 10 s 的图线与横轴围成三角形。速度非负时，路程等于图线与横轴之间的_____。

$$\frac{1}{2}\times 10\times 10 = 50\ \text{m}$$

② **分段计算面积：**图中匀速段围成矩形，随后上升段围成梯形。分别求出各段面积，再相加。

时间为 10 至 20 s

$10\times(20-10)=100\ \text{m}$

时间为 20 至 30 s

$\frac{1}{2}(10+V)(30-20)=5(10+V)\ \text{m}$

③ **线段斜率求加速度：**图中 $t=35$ 位于端点为 $(30,V)$、$(45,0)$ 的线段上。加速度 a 等于速度改变量与_____的比。下降线段的斜率为负，加速度单位为 m s^{-2}。

$$a=\frac{0-V}{45-30}=-\frac{V}{15}$$

④ **未知时长求速度：**设一质点从静止匀加速运动，时长为 τ，末速度为 h。时间、速度分别以 s、m s^{-1} 为单位。若加速度为 2m s^{-2}，先用斜率表示高度，再代入面积式。

$$\frac{h}{\tau}=2$$

$$h=2\tau$$

⑤ **方程根的取舍：**面积方程含未知时长时，先整理，再用因式分解求根。例如下式中的 x 满足 $0<x<4$，可取的根为_____。

$$x^2-7x+10=0$$

$$(x-2)(x-5)=0$$

$$x=2\ \text{或}\ x=5$$

⑥ **静止出发作图：**图中前 10 s 的图线是从原点出发的上升线段。从静止开始表示初速度为_____，恒正加速度对应这样的直线。设经过 t_0 时速度为 w、位移为 s，由三角形面积求终点高度。

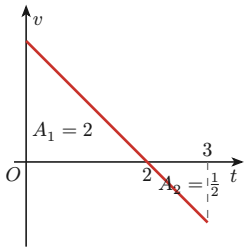
$$s=\frac{1}{2}t_0 w$$

$$w=\frac{2s}{t_0}$$

$$a=\frac{w}{t_0}$$

⑦ 位移保留符号，路程累计绝对值

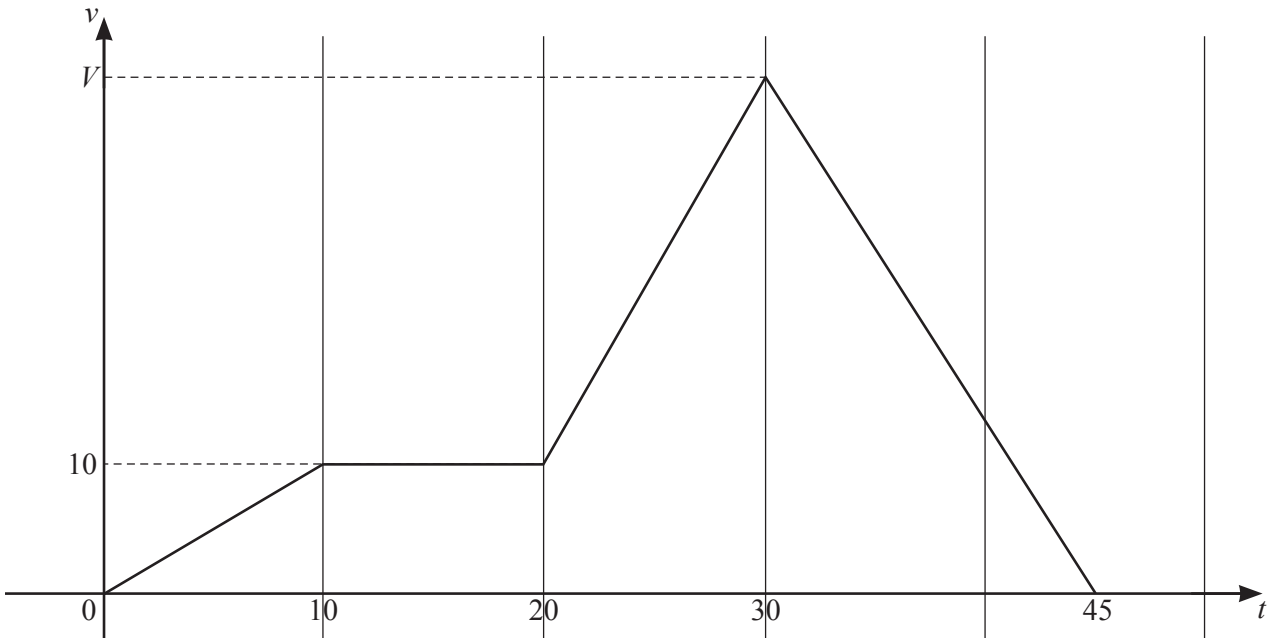
$$v(t)=2-t,\quad 0\le t\le 3$$



填空：①面积　②时间改变量　③2　④0

点石成金　题目出现速度与时间图象并求某时刻的加速度时，先确定该时刻所在的线段，再用两端的速度差除以时间差。

例 1　[2023 · May/June 0606/11 Q4(b)]



The diagram shows the velocity–time graph for a particle travelling in a straight line with velocity, $v\,\text{ms}^{-1}$, at time t seconds. When $t = 30$ the velocity of the particle is $V\,\text{ms}^{-1}$. The particle travels 800 metres in 45 seconds.

(a) Find the value of V.

(b) Find the acceleration of the particle when $t = 35$.

图示为一质点沿直线运动的速度与时间图象。在时刻 t，时间单位为 s，质点的速度为 v，速度单位为 m s^{-1}。当 $t = 30$ 时，质点的速度为 $V\,\text{m s}^{-1}$。质点在 45 s 内走过 800 m。

图中横轴为 t 轴，标有 0、10、20、30、45；纵轴为 v 轴，标有 10、V。图线依次连接 $(0,0)$、$(10,10)$、$(20,10)$、$(30,V)$、$(45,0)$。图中在速度为 10 和 V 处画有水平虚线。

(a) 求 V 的值。

(b) 求 $t = 35$ 时质点的加速度。

解答　图中速度非负，由图线下的总面积等于路程，得

$$\frac{1}{2}\times 10\times 10 + 10\times 10 + \frac{1}{2}(10+V)\times 10 + \frac{1}{2}\times 15V = 800$$

$$200 + \frac{25}{2}V = 800$$

$$V = 48$$

方法：先定位三十五秒所在的线段，再用两端速度差除以时间差。

辨析：斜率是加速度，图线下的面积是位移。

当 $t = 35$ 时，质点处于 30 至 45 s 的运动段，加速度等于该线段的斜率。

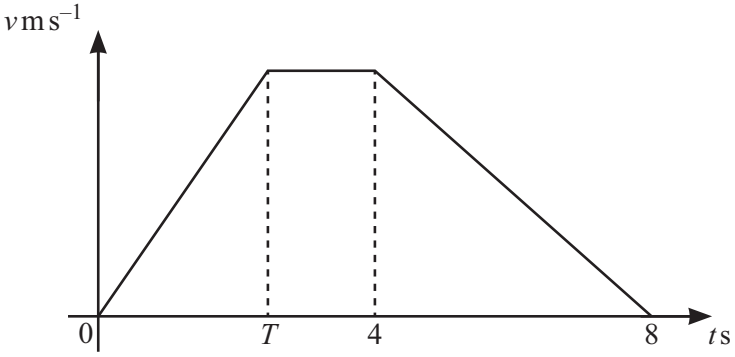
$$a = \frac{0-48}{45-30} = -\frac{48}{15} = -\frac{16}{5}\,\text{m s}^{-2}$$

答：(a) $V = 48$；(b) 加速度为 $-\frac{16}{5}\,\text{m s}^{-2}$。

针对练习

1. [2025 · October/November 0606/13 Q4(b)]

提示：看末段两端，比较速度差与对应的时间差。



The velocity–time graph represents the motion of a particle moving in a straight line.
The acceleration during the first T seconds of the motion is $2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
The total distance travelled is 27 m.

(a) Calculate T.

(b) Calculate the acceleration during the last 4 seconds of the motion.

速度与时间图象表示一质点沿直线运动的情况。横轴表示时间 t，单位为 s，标有 0、T、4、8；纵轴表示速度 v，单位为 $\mathrm{m\ s^{-1}}$。图线从原点沿直线上升，在 $t=T$ 时达到最大速度，保持此速度至 $t=4$，再沿直线下降至 $(8,0)$。图中在 $t=T$ 和 $t=4$ 处画有竖直虚线。运动开始的前 T s 内，加速度为 $2\mathrm{m\ s^{-2}}$。所走的总路程为 27 m。

(a) 计算 T。

(b) 计算运动最后 4 s 内的加速度。

✓ **答案**　(a) $T=3$ s；(b) $-1.5\mathrm{m\ s^{-2}}$。

解析　设最大速度为 w，单位为 $\mathrm{m\ s^{-1}}$。由前 T s 的加速度为 $2\mathrm{m\ s^{-2}}$，得

$$\frac{w}{T}=2$$

$$w=2T$$

图中速度非负，由图线下的总面积为 27 m，得

$$\frac{1}{2}T(2T)+(4-T)(2T)+\frac{1}{2}\times 4\times(2T)=27$$

$$12T-T^2=27$$

$$T^2-12T+27=0$$

$$(T-3)(T-9)=0$$

$$T=3 \text{ 或 } T=9$$

由图知 $0<T<4$，故

$$T=3$$

$$w=2\times 3=6$$

最后 4 s 对应从 $(4,6)$ 至 $(8,0)$ 的线段，其加速度为

$$a = \frac{0-6}{8-4} = -1.5\text{m s}^{-2}$$

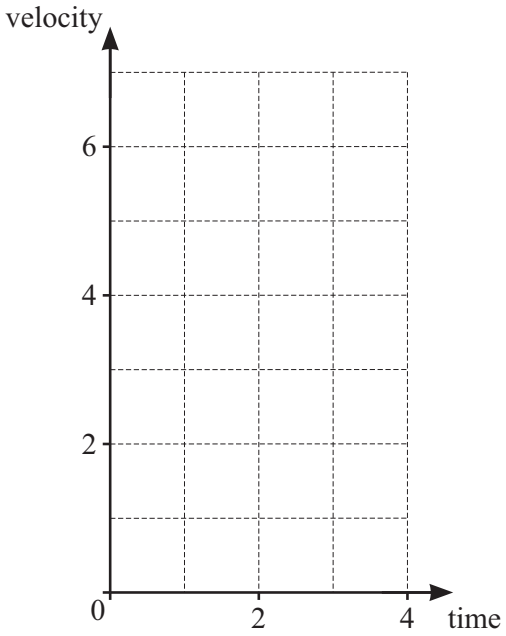
答：(a) $T = 3$ s；(b) 最后 4 s 的加速度为 -1.5m s^{-2}。

2. [2026 · February/March 0606/12 Q3(b)]
提示：先由三角形面积求高度，再比较高度与底边时长。

In this question, time t is in seconds and displacement s is in metres.

A particle starts from rest at the origin O and moves in a straight line with constant positive acceleration.
When $t = 4$, $s = 6$.

(a) Draw the velocity–time graph for $0 \leqslant t \leqslant 4$.



(b) Hence find the acceleration.

本题中，时间 t 的单位为 s，位移 s 的单位为 m。
一质点从原点 O 处由静止开始，沿直线以恒定的正加速度运动。当 $t = 4$ 时，$s = 6$。
(a) 画出 $0 \leq t \leq 4$ 时的速度与时间图象。
所给坐标网格的横轴标为时间，标有 0、2、4；纵轴标为速度，标有 2、4、6。
(b) 由此求出加速度。

✓ **答案** (a) 连接 $(0,0)$ 与 $(4,3)$ 的线段；(b) $\frac{3}{4}\text{m s}^{-2}$。

解析 质点从静止开始，且加速度恒正，故速度与时间图象是从原点出发的上升线段。设 $t = 4$ 时的速度为 w，单位为 m s^{-1}。由图线下的面积等于位移，得

$$\frac{1}{2} \times 4w = 6$$

$$w = 3$$

故在图上连接 $(0,0)$ 与 $(4,3)$，得到所求线段，其方程为

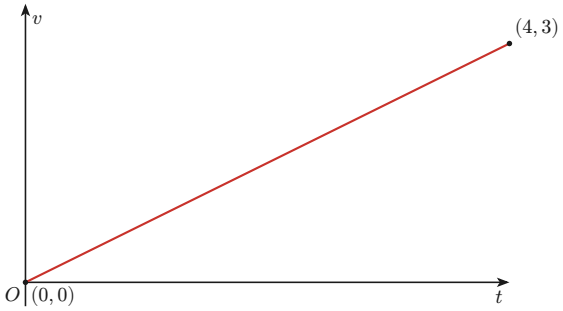
$$v = \frac{3}{4}t, \quad 0 \leq t \leq 4$$

由该线段的斜率，得

$$a = \frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}\text{m s}^{-2}$$

答：（a）图象为连接 $(0,0)$ 与 $(4,3)$ 的线段；（b）加速度为 $\frac{3}{4}\text{m s}^{-2}$。

实线 $v = 3\frac{t}{4}$



$(0,0)$；$(4,3)$