EDEXCEL INTERNATIONAL A & A LEVEL

Pure Mathematics 1　WMA11/01

P1 满分冲刺讲义

模块 0 起点与普高衔接 + 九章核心 + 冲刺模块 10

讲义规模	覆盖内容	版本形态
9 章正文	近五年（2019–2026）真题考点全覆盖	学生版
模块 0 与 10	Mark Scheme 踩分意识贯通	教师版
附录 A–C	普高衔接 9 个专题	（同源双编译）

本讲义依据 Edexcel International A Level Pure Mathematics P1（WMA11/01）官方考纲、**2019–2026 年共 22 套真题**及其官方 Mark Scheme 编写，融合《Edexcel P1 Notes》《AS PURE MATHS REVISION NOTES》**EDX 数学 P1 教学**与九章分类专题训练体系，按「先英文、后中文；先方法、后踩分」的顺序编排。

编译方式：`xelatex main.tex`（学生版）　`xelatex "\def\TEACHER{}\input{main.tex}"`（教师版）

使用说明　How to Use This Book

讲义定位与两个版本

- **定位**：本讲义不是知识点摘抄，而是“**考点地图 + 满分路径 + 踩分规范**”三位一体。每一节都回答三个问题：**考什么、怎么写才拿满分、哪里最容易丢分**。
- **学生版**：只给**题目与答题位置**。所有例题与试题一律**先英文题干、后中文翻译**；答题线“**答 Answer：_____**”**单独占一行**，不与选项同行。
- **教师版**：在每道例题与试题后附**完整解析（Solution）**，并增加**“举一反三（Extension）”**拓展，以及**【踩分】**标注的 Mark Scheme 得分点，用于备课、讲评与个别辅导。
- **两版同源**：由同一套 `.tex` 源文件编译，`\def\TEACHER{}` 开关控制差异，排版完全一致、页码一致，便于对照批改。

每一章的固定结构

1. **本单元新词**：中英对照术语表，逐条给出中文释义与在 P1 中的典型用法，先把**题干读懂**。
2. **知识讲解**：按考纲小节展开，每节配**方法卡、例题**与**即时自测**。
3. **满分必备**：把“会做”升级为“写得满”，逐条给出**规范写法、边界条件**与**丢分雷区**。
4. **普高衔接**：把国内高中（人教 A 版）对应知识提前补齐，解决中外课程断层。
5. **章节真题测评**：按考点归类的**近五年真题清单**（年份 • 场次 • 题号 • 分值），附限时训练建议与错题复盘模板。

颜色与标记约定

紫色	术语、概念边界、英文题干高频表达
蓝色	Mark Scheme 踩分意识、得分点、答题规范
红色	易错点、常见陷阱、丢分雷区
青色	举一反三拓展（仅教师版）
灰色小字	中文翻译、题目出处

考场时间预算（满分工程）

阶段	建议用时	任务
通读与定位	3–4 分钟	浏览全卷，标出**先易后难**顺序，确定 Q1–Q5 入手
稳分区	25–30 分钟	Q1–Q5 基础题与中档题，**必须全对**（约 30 分）
提速区	30 分钟	Q6–Q8 中档题，**过程分优先**（约 25 分）
攻坚区	20–25 分钟	Q9–Q10 压轴题，**先做有把握的小问**
检查区	5 分钟	单位、根号、精确值、**是否漏写 +C**、是否抄错数字

满分的三条铁律

1. **先写方法，再代数字：**官方 Mark Scheme 中 **M mark（方法分）**只认「知道方法并尝试使用」，**A mark（准确分）**必须在拿到 M mark 之后才有资格给。**答案对但没写方法，照样扣分。**
2. **精确值优先：**题目要求 exact value 或出现根式时，用小数近似**会直接丢分。**
3. **过程可见：**能被「心算」完成的题目可以不写过程，但凡是**涉及换元、配分、微分、积分**的题目，步骤缺失＝步骤分缺失。

目录

0.1 P1 考纲、75 分结构、计算器规定与答题规范 6
0.2 数学语言：定义域、值域、恒成立、当且仅当、等价变形 8
0.3 集合、区间与不等式表达【普高衔接】 11
0.4 Mark Scheme 踩分意识、错题本标签、计算检查清单 12

第零章 代数表达式 Algebraic Expressions 14
1.1 Index laws 指数法则 15
1.2 Expanding brackets 展开括号 17
1.3 Factorising 因式分解 18
1.4 Negative and fractional indices 负指数与分数指数 19
1.5 Surds 根式 20
1.6 Rationalising denominators 分母有理化 21
1.7 满分必备：指数法则的推导与适用边界 23
1.10 普高衔接：指数幂扩充、根式意义、因式分解与恒等变形 24
1.11 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘 24

第零章 二次函数 Quadratics 26
2.1 Solving quadratic equations 解二次方程 27
2.2 Completing the square 配方 30
2.3 Functions 函数 33
2.4 Quadratic graphs 二次函数图像 36
2.5 The discriminant 判别式 38
2.6 满分必备①：二次公式的推导与「无实根」情形的满分表述 41
2.7 满分必备②：配方法的规范书写与顶点式 / 对称轴的正确读法 44
2.8 满分必备③：含参二次——判别式、根的判别与参数范围的满分四步 46
2.9 普高衔接：人教 A 版对应位置、国内讲法与 P1 评分口径的差异 49
2.10 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘 53

第零章 方程与不等式 Equations and Inequalities 56
3.1 Linear simultaneous equations 一次联立方程 57
3.2 Quadratic simultaneous equations 二次联立方程 60
3.3 Simultaneous equations on graphs 用图像解联立方程 62
3.4 Linear inequalities 一次不等式 64
3.5 Quadratic inequalities 二次不等式 66
3.6 Inequalities on graphs 图像上的不等式 69
3.7 Regions 区域 71
3.8 满分必备：不等式区间的规范书写与端点取舍 73

3.9 满分必备：含参不等式的参数范围与临界值讨论 . . . 75
3.10 满分必备：区域与线性规划——可行域、约束条件与最优化取值的书写 . . . 77
3.11 普高衔接：一次不等式组、二元一次不等式组与平面区域 . . . 79
3.12 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘 . . . 81

第零章 图像与变换 Graphs and Transformations 84
4.1 Cubic graphs 三次函数图像 . . . 85
4.2 Reciprocal graphs 倒数函数图像 . . . 88
4.3 Points of intersection 交点个数 . . . 92
4.4 Translating graphs 平移 . . . 96
4.5 Stretching graphs 拉伸与压缩 . . . 98
4.6 Transforming functions 图像变换组合 . . . 101
4.7 满分必备：三次函数「奇穿偶回」与倒数函数渐近线的规范表述 . . . 104
4.8 满分必备：变换顺序、交点计数、区域定义的统一写法 . . . 107
4.9 满分必备：由图像反推不等式与参数范围 . . . 110
4.10 普高衔接：函数单调性、奇偶性、幂函数图像、对称性 . . . 112
4.11 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘 . . . 115

第零章 直线图像 Straight Line Graphs 119
5.1 y = mx + c 直线的斜率与截距 . . . 120
5.2 Equations of straight lines 直线方程的各种形式 . . . 123
5.3 Parallel and perpendicular lines 平行与垂直 . . . 127
5.4 Length 两点间距离 . . . 130
5.5 满分必备：直线方程的选择与形式转换的正确书写 . . . 134
5.6 满分必备：点到直线距离、垂直平分线与中点等几何量的完整推导书写 . . . 138
5.7 普高衔接：斜率、点斜式、两点式、平行垂直判定与距离公式 . . . 142
5.8 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘 . . . 144

第零章 三角比 Trigonometric Ratios 147
6.1 The cosine rule 余弦定理 . . . 149
6.2 The sine rule 正弦定理 . . . 153
6.3 Areas of triangles 三角形面积 . . . 157
6.4 Solving triangle problems 解三角形 . . . 159
6.5 Graphs of sine, cosine and tangent 正弦、余弦、正切函数图像 . . . 162
6.6 Transforming trigonometric graphs 三角函数图像变换 . . . 165
6.7 满分必备：SSA 模糊情形与解的个数判定 . . . 169
6.8 满分必备：周期、振幅、相位的规范表述与图像变换书写 . . . 171
6.9 普高衔接：解三角形与三角函数图像 . . . 174
6.10 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘 . . . 176

第零章 弧度制 Radians **180**

7.1 Radian measure 弧度与角度换算 . . . 181
7.2 Arc length 弧长 . . . 184
7.3 Areas of sectors and segments 扇形与弓形面积 . . . 188
7.4 满分必备：弧度制下的公式体系与精确答案书写 . . . 191
7.5 满分必备：角度单位陷阱与弓形、优扇形的正确表达 . . . 194
7.6 普高衔接：弧度制与圆面积，国内学过什么、P1 额外要什么 . . . 198
7.7 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘 . . . 201

第零章 微分 Differentiation **205**

8.1 Gradients of curves 曲线梯度与导数的概念 . . . 206
8.2 Finding the derivative 求导（幂函数法则） . . . 210
8.3 Differentiating quadratics 二次函数求导 . . . 213
8.4 Two or more terms 多项式（两项及以上）求导 . . . 216
8.5 Tangents and normals 切线与法线 . . . 220
8.6 Second order derivatives 二阶导数 . . . 223
8.7 Parameters from derivatives 由导数反求参数 . . . 226
8.8 满分必备：导数定义的极限本质与幂函数法则的推导 . . . 229
8.9 满分必备：切线方程与法线方程的规范书写与踩分点 . . . 234
8.10 满分必备：由导数与切线条件反求参数的分类讨论与完整性 . . . 238
8.11 普高衔接：从国内课堂到 WMA11/01 的四个断层 . . . 244
8.12 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘 . . . 247

第零章 积分 Integration **251**

9.1 Integrating x^n 幂函数积分 . . . 252
9.2 Indefinite integrals 不定积分与常数 C . . . 256
9.3 Finding functions 由导数求原函数 . . . 259
9.4 满分必备：积分常数 C 的处理与「求原函数」题的规范书写 . . . 263
9.5 满分必备：化简后再积分——分式与根式的处理技巧 . . . 267
9.6 普高衔接：不定积分国内怎么讲、P1 额外要什么 . . . 272
9.7 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘 . . . 275
10.1 P1 真题按题型分类：九大题型的分值地图 . . . 280
10.2 按年份限时真题：21 套卷的难度与训练价值 . . . 281
10.3 Mark Scheme 踩分与书写规范：考场上的每一个字 . . . 283
附录 A 公式推导、常见勘误与符号规范 . . . 286
附录 B P1 英文题干高频表达 . . . 289
附录 C 错题模板与错因标签 . . . 292

MODULE 0 · GETTING STARTED

模块 0　P1 满分起点与普高衔接

考纲 • 数学语言 • 集合与区间 • Mark Scheme 踩分意识——一切从这里开始

模块导读

本模块不讲具体知识点，而是讲「**怎么在 P1 上拿 75 分**」。P1 的满分不是“题做对了”的自然结果，而是**考纲范围**、**数学语言**、**踩分规范**三件事同时到位的结果。

国内学生转考 IAL P1 时最常见的失分并不是“不会”，而是以下四类：

1. **语言失分**——题目说“hence”、说“in simplest form”、说“exact value”，学生没读出来；
2. **形式失分**——算对了但没化简、没保留根式、没写 $+C$、没写 π；
3. **边界失分**——漏掉端点、漏掉一组解、漏掉一种情况；
4. **规范失分**——不给方法分：题目要求“show that”，学生直接写答案。

本模块的 0.1–0.4 节，就是把这四类失分逐条拆掉。

0.1　P1 考纲、75 分结构、计算器规定与答题规范

这一节是整本讲义的**地图**。先知道考什么、怎么考、怎么写分，再学知识。

- **考试代码**：WMA11/01（Pearson Edexcel International Advanced Level，Pure Mathematics P1）。
- **时间：1 小时 30 分钟**（90 分钟）。
- **分值：75 分**，全部为**普通分（marks）**，无 RAG 评级。
- **题量：9–10 道大题**，题号 1–10（偶尔 11–12），分值从 3 分到 11 分不等。
- **题型配比（近五年稳定）**：代数与指数约占 25%，二次与方程不等式约占 20%，图像与直线约占 20%，三角与弧度约占 20%，微积分约占 15%。
- **答题方式：只写答案不给过程不给分**——除非题目明确说“show that”或“find an equation”，否则阅卷人看不到你的推导。
- **计算器：允许使用科学计算器**（Casio fx-991 系列等），**禁止图形计算器**（TI-84 等带 CAS 的型号）。
- **不可用**：任何形式的**符号计算器 / CAS / 联网设备**。
- **精确值优先**：题目写“exact value”时，**用小数近似会被扣分**；$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 必须写成 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。
- **必须写出的**：题目出现“In this question you must show all stages of your working”时，**每个中间步骤都要写**，否则中间分（M 分）全丢。

方法卡　考场时间预算表（90 分钟 / 75 分）

阶段	用时	做法
通读全卷	5 分钟	先看每题的 **(Total … marks)**，标出分值最高的两三题，心里排优先级
第一遍	55 分钟	**只做有把握的题**。凡是 3–4 分的小题优先做完，8 分以上的大题放到第二遍
第二遍	22 分钟	回头做难题。此刻你已经做过几十道小题，手感和公式记忆都热了
检查	8 分钟	**查“形式”不查“内容”**：有没有忘记 $+C$、有没有忘记化简、答案带没带单位、端点开闭对不对、题目要“exact”是不是用了小数

铁律	说明
先易后难	前 30 分钟做完所有 3–4 分小题，保证**至少 35 分到手**，再攻难题
小分大题要算准	6 分题通常分 (2)+(4)，先把 (2) 的方法分拿到，即使后半问不会也保住 2 分
绝不空题	阅卷人只给“写到的东西”打分。哪怕只写一句“$\frac{dy}{dx}=3x^2$”也可能拿到 1 分
绝不写“不会”	写“I don't know”一分不得，还可能占用行数让后面写不下
警惕计算器陷阱	P1 大量题目要 **exact value**，计算器在小数上的“方便”恰恰是扣分点

1 自检题　[考纲理解]

A student writes the following answer to a question that asked for the exact value of $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$1 \div 1.7320508 = 0.5773503$$

State one reason why this answer would not receive full marks in P1.

中文：某学生回答一道要求给出 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 精确值的题目时写道：

$$1 \div 1.7320508 = 0.5773503$$

说明这个答案在 P1 中不能得满分的一个理由。

答 Answer： _____

2 自检题 [答题规范]

A P1 question reads: "Given that $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, find an equation of the tangent to the curve $y = f(x)$ at the point where $x = 2$.

$$y = 7x - 9$$

" State one piece of information that is missing from the student's answer, and explain why the examiner cannot award the marks for it.

中文：一道 P1 题这样写道："已知 $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$，求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 2$ 处的切线方程。

$$y = 7x - 9$$

" 指出该学生答案中缺少的一项信息，并解释阅卷人为什么无法据此给分。

答 Answer： _____

0.2 数学语言：定义域、值域、恒成立、当且仅当、等价变形

P1 的题目是一道**英语阅读理解加数学**的复合题。很多 4–5 分的题丢分，不是算错，而是**没读懂题目在问什么**。这一节教你把题目翻译成数学符号。

- **定义域 domain：**使表达式有意义的 x 的集合。P1 里必须写出来，通常作为独立的一问。
- **值域 range：**函数能取到的 y 的集合。二次函数要结合开口方向与顶点写。
- **定义域的三大来源：**分母不为 0、偶次根号内非负、对数真数为正（P1 只考前两个）。
- **恒成立 for all / identically：**对定义域内**每一个** x 都成立。写 $x^2 \geqslant 0$ 恒成立，因为 x^2 最小值是 0。
- **存在 there exists / some：至少存在一个** x 使不等式成立。
- **当且仅当 if and only if：**$\Longleftrightarrow$，表示**充要条件**，两个方向都要成立。
- **必要条件与充分条件：**$A \Rightarrow B$ 中 A 是 B 的充分条件、B 是 A 的必要条件。

- **等价变形 equivalent transformation**：变形前后**解集完全相同**。
- **不等号方向**：两边同乘负数时**必须变号**；同除以含变量的表达式时**必须讨论符号**。
- **定义域优先于变形**：任何等价变形都必须在**原定义域内**进行，否则会引入增根。

方法卡　关键词 → 数学动作对照表

题干关键词	你必须做的动作
domain / defined	求使表达式有意义的 x 范围，写成集合或区间
range / possible values	求 y 的取值范围，注意开口方向
for all x / for every x / identically	求该式的**最小值或最大值**，与 0 或常数比较
there exists / for some x	只要**能找到一个**就成立；通常转化为“最大值 $\geqslant$ 某数”
if and only if / $\Longleftrightarrow$	证明两个方向；P1 常考“求使等价成立的 k 值”
hence / therefore	**必须用上一步的结果**，不能另起炉灶
given that / where $p=$	**整体换元**：把所有 3^x 换成 p
in simplest form	化到最简：能约分就约分，能有理化就有理化
exact value	保留根式或 π，不用小数
by substituting	按题目指定的换元写，不要自创换元

3 语言辨析 [恒成立 vs 存在]

Find the values of k for which $x^2+kx+3>0$ for all real values of x.

中文：求 k 的取值范围，使得对一切实数 x，$x^2+kx+3>0$ 都成立。

答 Answer： _____

4 语言辨析 [当且仅当与等价变形]

State whether the following pairs of statements are equivalent, giving a reason for your answer.

(i)　$x^2 \geqslant 4$　　(ii)　$x \geqslant 2$ or $x \leqslant -2$

中文：判断下列两句话是否等价，并说明理由。

(i) $x^2 \geqslant 4$　　(ii) $x \geqslant 2$ 或 $x \leqslant -2$

答 Answer： _____

5 语言辨析 [定义域]

Find the domain of the function

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x}} + \frac{1}{x-2}.$$

中文：求函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x}} + \frac{1}{x-2}$$

的定义域。

答 Answer： _____

0.3 集合、区间与不等式表达【普高衔接】

这一节是**国内高一内容的直接迁移**，但 P1 的表达方式与国内有系统性差别。国内用集合 $\{x \mid x > 2\}$ 为主，P1 用**区间记号**为主，两种都要会写。

- **集合的三种表示法**：描述法 $\{x \mid x > 2\}$、区间法 $(2, +\infty)$、不等式法 $x > 2$。P1 三种都要能读。
- **区间记号四要素**：左端点、右端点、是否含端点、$\pm\infty$ 前永远用**圆括号**。
- **开闭口诀：大于号配开括号，小于等于配闭括号**；等号取到就闭。
- **并集 $\cup$**：或关系，“或”起来就是并；**交集 $\cap$**：且关系。
- **空集 $\varnothing$**：无解时必须写 $\varnothing$，不能写“无解”了事。
- **区间并集的规范写法**：$(-\infty, -2) \cup [2, 5)$，中间用 $\cup$ **连接，不用逗号**。
- **不等式连写**：$a < x \leqslant b$ 直接写，不要拆成两个不等式再交。
- **绝对值不等式**：$|x| > a \Rightarrow x < -a$ 或 $x > a$；$|x| \leqslant a \Rightarrow -a \leqslant x \leqslant a$。
- **分式不等式：不能直接乘除含变量的式子**，必须移项通分后用符号表，或找分母零点分段讨论。

方法卡　集合 / 区间 / 不等式三种表达的对照

形式	例子	P1 何时用
不等式	$x > 2$	题干直接问“write down the inequality satisfied by x”
描述法集合	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$	题干问“state the set of values”且要求用集合记号
区间记号	$(2, +\infty)$	**P1 最常见**；“state the range of values in interval notation”

不等式	端点	区间记号	备注
$x > 2$	不含	$(2, +\infty)$	∞ 前用圆括号
$x \geqslant 2$	含	$[2, +\infty)$	
$x < 2$	不含	$(-\infty, 2)$	$-\infty$ 前用圆括号
$x \leqslant 2$	含	$(-\infty, 2]$	
$x \neq 2$	挖去	$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$	**必须写成两段的并**
无解	—	$\varnothing$	不能空着不写

6 衔接练习　[普高衔接]

Solve the inequality $3x^2 - 5x - 2 > 0$, giving your answer in interval notation.

中文：解不等式 $3x^2 - 5x - 2 > 0$，答案用区间记号表示。

答 Answer： _____

7 衔接练习 [普高衔接]

Given that $x \geqslant 2$ and $x < 5$, write the set of possible values of x in interval notation.

中文：已知 $x \geqslant 2$ 且 $x < 5$，把 x 的所有可能取值用区间记号表示。

答 Answer： _____

0.4 Mark Scheme 踩分意识、错题本标签、计算检查清单

这一节是**本书与其他教辅最大的区别**：不讲知识，讲**怎么把会做的题变成满分**。把它读透，你的分数会明显高于“刷题量”相同但不懂规范的同学。

- **M 分（方法分）**：看到了正确方法就给你，哪怕算错了。标准写法是 **M1 M1**。
- **A 分（准确分）**：方法正确**且**结果正确才给，标准写法是 **A1 A1**。
- **B 分（无条件准确分）**：不需要方法，直接对就给，常见于最终答案，通常写在最后一个。
- **扣分点**：**caof**（答案错误但方法对，通常不扣这部分的 A 分）、**ft**（follow through，前一步错了但这步跟着错也给分）、**oe**（or equivalent，等价形式）、**awrt**（答案取近似值）、**sf**（有效数字）、**dp**（小数位）、**boD**（依赖前面结果）。
- **General Principles 铁律：公式必须先引用再代入；exact answer 不能用小数；不给过程不给满分。**
- **阅卷是“逐点给分”**：不是全对才给分。所以**把会的都写出来**，写错的那一步不影响前面已经拿到的分。

- **检查要查“形式”**：P1 绝大多数失分不是算错，而是形式不合规。

方法卡　错题本标签体系（建议每题只记一个主标签）

标签	含义	复盘时问自己的问题
L1 读题	没读出关键词（hence / exact / for all / show that）	我漏读了哪个词？它要求我做什么额外动作？
L2 语言	定义域/值域/区间/集合记号写错或漏写	题目要的是哪种形式？端点开闭对吗？
L3 建模	换元/设未知数/选公式错	我为什么这样设？有没有更直接的做法？
L4 公式	公式记错、记漏（$+C$、π、因子 $\frac{1}{2}$）	这个公式我在哪里用过？默写一遍
L5 运算	符号错、通分错、负号错	我在哪一步停了笔检查？这个错能自动检出吗？
L6 规范	没有 show that 的过程、没化简、没写 exact	阅卷人想看到什么我给全了吗？
L7 边界	漏一组解、漏端点、漏特殊情况	我有没有把“所有情况”都覆盖？
L8 时间	会做但没时间做	这类题我练够了吗？要不要提速？

8 踩分示范 [Mark Scheme 规范]

A question states: ”Given that $f(x) = 2x^3 - 5x$, find the stationary points of the curve $y = f(x)$ and state their coordinates.

$$x = 0 \text{ and } x = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

” Explain, using Mark Scheme terminology, why a candidate who wrote only this answer would not receive full marks.

中文：一道题这样写道：“已知 $f(x) = 2x^3 - 5x$，求曲线 $y = f(x)$ 的驻点并写出它们的坐标。

$$x = 0 \text{ and } x = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

” 请用 Mark Scheme 的术语解释：为什么只写了这个答案的考生不能得满分。

答 Answer： _____

9 踩分示范 [计算检查清单]

A candidate's final answer to a P1 question is:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2.646}{6} = 0.441$$

where the quadratic was $3x^2 - 4x - 2 = 0$. List the two checks the candidate should have applied before writing this answer, and explain what the correct exact answer is.

中文：某考生对一道 P1 题给出的最终答案是：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2.646}{6} = 0.441$$

其中二次方程为 $3x^2 - 4x - 2 = 0$。列出该考生在写出这个答案前本应做的两项检查，并说明正确的精确答案是什么。

答 Answer： _____

代数表达式　Algebraic Expressions

本章导读

本单元是 P1 的**地基**。它本身很少单独出大题，但 P1 后面八章的每一道计算题都建立在这里的**指数运算**与**因式分解**之上。特别提醒：**满分不是算对，而是写得规范**——本章反复出现的问题不是「不会」，而是「算对了却因为形式不对被扣分」。请把 **1.7–1.9 的三节“满分必备”当作本章真正的考点**，前六节只是工具。

本单元新词　Key Vocabulary

English 英文	中文	在 P1 中的用法
index / power	指数（幂）	如 2^3、x^{-2}；指数为负表示倒数
base	底数	幂运算中被幂的数，如 3^4 中的 3
exponent	指数	幂运算右上角的数，如 3^4 中的 4
index laws	指数法则	同底数幂的乘、除与乘方规则，是本章第一法则
expanding brackets	展开括号	用分配律把 $(x+a)(x+b)$ 化为多项式
factorising	因式分解	把多项式逆运算地写成若干因式的乘积
factorise	分解因式	动词形式；**show that 找因式**是 P1 高频设问
surd	根式（无理数）	如 $\sqrt{3}$、$2+\sqrt{5}$；**exact** 答案必须保留根式
rationalise	有理化	把分母中的根式通过乘共轭式消掉
conjugate	共轭式	若分母为 $a+\sqrt{b}$，其共轭为 $a-\sqrt{b}$
substitution	换元（代入）	令 $p=x^2$ 之类的整体换元，是化简的常用手段
equivalent	等价	指变形前后取值集合相同，如 $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$ 而非 x
identity	恒等式	对定义域内所有 x 都成立的等式
show that	证明结论	题目给出待证结论，要求推导，**必须写出关键步骤**
simplify	化简	化为最简形式；Mark Scheme 常注明“in simplest form”
exact value	精确值	不能用小数替代，如 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

1.1　Index laws 指数法则

指数法则是本章**唯一需要背下来的东西**。九条法则、四个使用边界，考试里年年用。

- **乘法**：$a^m \times a^n = a^{m+n}$（同底数，指数相加）
- **除法**：$a^m \div a^n = a^{m-n}$（同底数，指数相减）
- **乘方**：$(a^m)^n = a^{mn}$（底数不变，指数相乘）
- **零指数**：$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$（条件：$a \neq 0$）
- **负指数**：$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$（**底数不变、指数取相反数**）
- **分数指数**：$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$，$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
- **零的零**：0^0 **无定义**（不是 1！）
- **分数根与负指数**：$a^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$（$a>0$）

方法卡　九法则速查表

法则	形式
加法（乘）	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
减法（除）	$a^m \div a^n = a^{m-n}$
乘法（幂）	$(a^m)^n = a^{mn}$
零	$a^0 = 1\ (a \neq 0)$
倒数	$a^{-n} = 1/a^n$
根	$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
分数	$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$

1 例题 [指数法则]

Simplify $2^3 \times 2^4$.

中文：化简 $2^3 \times 2^4$。

答 Answer： _____

2 例题 [指数法则]

Simplify $\left(3^2\right)^4$ and hence evaluate 81^3.

中文：化简 $\left(3^2\right)^4$，并由此求出 81^3 的值。

答 Answer： _____

3 例题 [指数法则]

Evaluate $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ and $-(3)^{-2}$.

中文：求 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ 与 $-(3)^{-2}$ 的值。

答 Answer：_____

1.2 Expanding brackets 展开括号

展开是 P1 出现频率最高的**中间步骤**：求导前的展开、联立方程的消元、二次函数图像的顶点，都要先把括号拆开。

- $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ ——**完全平方/差平方的推广**，务必先记熟
- $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- 展开后的项要**合并同类项**（x 与 x 合并、x^2 与 x^2 合并）
- $\sqrt{x^2}=|x|$（$x\leqslant 0$ 时才等于 x）——这是**等价性陷阱**第一现场

方法卡　三项式记忆法

$(a+b)(c+d)$ 展开 $=ac+ad+bc+bd$，即**交叉相乘、四项**。考试中若不确定，按此逐项乘开再合并，万无一失。

4 例题 [展开括号]

Expand and simplify $(x+3)(x-5)$.

中文：展开并化简 $(x+3)(x-5)$。

答 Answer：_____

5 例题 [展开括号]

Expand $(2x-1)^3$.

中文：展开 $(2x-1)^3$。

答 Answer： _____

1.3 Factorising 因式分解

因式分解是**逆向运算**：展开的逆过程。P1 中它有三大用途——解二次方程、化简分式、**show that 型的因式构造题**。

- 提取公因式：$6x^2-9x=3x(2x-3)$
- 完全平方：$x^2+6x+9=(x+3)^2$，$x^2-6x+9=(x-3)^2$
- 差平方：$x^2-9=(x-3)(x+3)$
- 二次式分解：找两个数，使**和为** b、**积为** ac（ax^2+bx+c）
- 四项式：先提公因式，再组完全平方
- **顺序即分数**：$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，写成 $(x-3)(x-2)$ 同样正确但要注意与 x 代入的对应

方法卡　二次式分解四步法

1. 先看能否**提公因式**（Mark Scheme 常单独给 M1）。
2. 判别式 $\Delta=b^2-4ac$：$\Delta>0$ 分解为两个一次因式，$\Delta=0$ 分解为完全平方。
3. 找两数 $p+q=b$，$pq=ac$。
4. 写成 $(mx+p)(nx+q)$，并**核对常数项与二次项系数**。

6 例题 [因式分解]

Factorise $12x^2-27x$.

中文：因式分解 $12x^2-27x$。

答 Answer： _____

7 例题 [因式分解]

Factorise $x^2 - 5x + 6$.

中文：因式分解 $x^2 - 5x + 6$。

答 Answer： _____

8 例题 [因式分解]

Factorise $2x^2 - 7x + 3$.

中文：因式分解 $2x^2 - 7x + 3$。

答 Answer： _____

1.4 Negative and fractional indices 负指数与分数指数

这一节的每一个字都可能变成考题本身：**求值、化简、定义域**三种问法。

- 负指数：$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$，**指数变号、位置搬家**
- 分数指数：$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$（$a > 0$ 时无限制）
- $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$，$a^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$
- **定义域边界**：偶次根要求被开方数 $\geqslant 0$；负指数要求底数 $\neq 0$

- $(x^2)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{|x|}$ ——不是 $\dfrac{1}{x}$！

方法卡　负指数三步法

1. 找到**负指数所在的整体**，把它倒过来写成分数（除法）。
2. 化简根号：$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$、$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$、$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$。
3. 化到最简形式再交卷（“in simplest form”是给分条件）。

9 例题 [负指数与分数指数]

Simplify $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

中文：化简 $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$。

答 Answer： _____

10 例题 [负指数与分数指数]

Solve $x^{-1} = 4$.

中文：解方程 $x^{-1} = 4$。

答 Answer： _____

1.5　Surds 根式

根式题的得分关键只有一条：**答案必须是最简根式形式**。$0.5\sqrt{12}$ 不给分，$2\sqrt{3}$ 才给分。

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$（$a, b \geqslant 0$）
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- 化简三步：**提平方因子 → 分子分母同乘 → 合并**
- $\sqrt{a^2} = |a|$，不是 a

- 常见值：$\sqrt{2}\approx 1.414$、$\sqrt{3}\approx 1.732$、$\sqrt{5}\approx 2.236$、$\pi\approx 3.142$、$e\approx 2.718$（P1 公式表内）

方法卡　最简根式判定

- 根号内**没有**可提出的平方因子（如 $\sqrt{12}\to 2\sqrt{3}$、$\sqrt{75}\to 5\sqrt{3}$）；
- 根号内**不出现分母**（$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 合法，$\frac{1}{\sqrt{3}}$ 不合法）；
- 每一项各自最简，不做通分化简。

11 例题 [根式]

Express $\sqrt{75}$ in simplest form.

中文：把 $\sqrt{75}$ 化为最简根式。

答 Answer： _____

12 例题 [根式]

Simplify $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$.

中文：化简 $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$。

答 Answer： _____

1.6 Rationalising denominators 分母有理化

有理化是 P1 **高性价比**考点：步骤固定、答案唯一、分值稳定。

- 分母是**单个根号**：分子分母同乘该根号，如 $\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$
- 分母是**含根式的加减式**：分子分母同乘**共轭式**，使分母变成有理数
- 共轭式：$a+\sqrt{b}\leftrightarrow a-\sqrt{b}$；$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leftrightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}$
- **有理化的目的**是让分母没有根号；化简到最简形式时，可能还需要再把系数提出根号

方法卡　分母有理化判定流程

1. 看分母：**纯数字**？不用有理化。
2. 分母是**一个根号**？分子分母同乘该根号。
3. 分母是**根式加减**？分子分母同乘共轭式。
4. 结果若还有 $\sqrt{\text{非完全平方}}$ 留在系数上，进一步化简。

13 例题 [分母有理化]

Rationalise the denominator of $\dfrac{3}{2+\sqrt{5}}$.

中文：把 $\dfrac{3}{2+\sqrt{5}}$ 的分母有理化。

答 Answer： _____

14 例题 [分母有理化]

Rationalise the denominator of $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ and give the answer in simplest form.

中文：把 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ 的分母有理化，并化为最简形式。

答 Answer： _____

1.7 满分必备：指数法则的推导与适用边界

满分必备　满分必备：指数法则的推导与适用边界

一、九条法则必须“默写级”掌握 P1 的指数运算出现在几乎每一章的入口：求导前的 x^{n-1}、积分前的 x^{n+1}、二次函数图像的 $x=-b/2a$、以及大量“先化简再运算”的前置步骤。**建议默写三遍：**乘法、除法、乘方、零、倒数、根、分数，七条足矣。

二、适用边界：四条“不能用”的红线

1. 0^0 **无定义。**写“$0^0=1$”是硬伤，Mark Scheme 会判为“not defined”。
2. **负指数不能取负底数的分数次幂：**$(-8)^{1/3}=-2$ 可以（因为分母 3 为奇数），但 $(-8)^{1/2}$ 无意义。遇到 $x^{\frac{m}{n}}$ 且 m、n 同为偶数时必须讨论 x 的符号。
3. **底数为零时负指数无意义：**0^{-1} 无定义，x^{-1} 的定义域要求 $x\neq 0$。
4. $\sqrt{x^2}=|x|$ **而非** x：这是 P1 **第一高频错误点**。若题目给 $x\leqslant 0$ 才可写 $\sqrt{x^2}=x$。

三、“show that”里的指数变形要“写出中间层”若题目要求 show that $3^{2x+1}=9^x\times 3$，标准得分链是：

$$3^{2x+1}=3^{2x}\times 3^1=(3^2)^x\times 3=9^x\times 3.$$

只写最终等号不给满分的 M 分，Mark Scheme 通常按“每一步指数结构变化”给 M1。

1 满分示范 [指数法则]

Show that $5^{2n-1}=\dfrac{25^n}{5}$.

中文：证明 $5^{2n-1}=\dfrac{25^n}{5}$。

答 Answer：_____

1.10 普高衔接：指数幂扩充、根式意义、因式分解与恒等变形

普高衔接　普高衔接：指数幂扩充、根式意义、因式分解与恒等变形

人教 A 版必修一对应位置国内人教 A 版在**必修一**讲“指数运算”，必修四（选择性必修）讲“根式与指数运算”，必修五（选择性必修）讲“因式分解与多项式”。P1 的第 1 章把三者**合并并提前到高一**，所以高二、三国内学生在 P1 上反而会**先占优势**。

国内未讲、但 P1 必考的三个点

1. **负指数与分数指数的运算律**：人教版只在“指数函数”中简单提及，P1 要求熟练运算。
2. **根式的运算律与化简**：人教版强调“根式有意义”的条件，P1 要求**会化简到最简形式**。
3. **因式分解的逆向使用**：国内常停留在正向展开，P1 的 show that 题要求**从结果反推构造**。

恒等变形与“等价”的严谨表述国内做题常说“等式两边同除以……”，P1 阅卷看的是**等价变形**（equivalent transformation）：变形前后**解集相同**。典型陷阱：两边同除以 x 时必须声明 $x \neq 0$；两边同除以 $\sqrt{x-1}$ 时必须声明 $x \geqslant 1$。

1　衔接练习　[普高衔接]

Solve $3^x = 27$, giving the answer in the form 3^n.

中文：解方程 $3^x = 27$，答案写成 3^n 的形式。

答 Answer： _____

1.11　章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘

下表列出 2019–2026 年 P1 中属于第 1 章考点的真题定位。**使用方法：**限时 45 分钟完成表中标记为 ★★★ 的题目（每题 4–5 分，含 show that 与化简），完成后用**附录 C 的错题模板**逐题复盘。

考点	近五年真题定位（年份 · 场次 · 题号 · 分值）
指数法则与幂运算	19 年 1 月 Q2（3 分）
	20 年 1 月 Q2（5 分）
	20 年 10 月 Q1（3 分）
	23 年 6 月 Q4（7 分）
	23 年 10 月 Q2（4 分）
	24 年 6 月 Q2（6 分）
	25 年 10 月 Q4（7 分）
展开括号	21 年 1 月 Q8（9 分）
因式分解	21 年 6 月 Q8（9 分）
	25 年 6 月 Q7（10 分）
	26 年 6 月 Q4（10 分）
负指数与分数指数	21 年 1 月 Q7（9 分）
	22 年 1 月 Q3（7 分）
	22 年 6 月 Q3（5 分）
	23 年 10 月 Q3（6 分）
	25 年 6 月 Q1（5 分）
根式化简	19 年 6 月 Q2（5 分）
	26 年 1 月 Q2（7 分）
分母有理化	23 年 6 月 Q6（7 分）
	24 年 10 月 Q2（7 分）
换元与整体代入	20 年 1 月 Q5（7 分）
	21 年 6 月 Q2（10 分）
	23 年 1 月 Q5（6 分）
	24 年 1 月 Q4（6 分）
	25 年 1 月 Q4（9 分）

1 真题演练 [2023 年 1 月 Q5（换元 show that）]

By substituting $p = 3^x$, show that the equation $3 \times 9^x + 3^x + 2 = 1 + 3^x - 1$ can be rewritten in the form $9p^2 + 26p - 3 = 0$.

中文：令 $p = 3^x$，证明方程 $3 \times 9^x + 3^x + 2 = 1 + 3^x - 1$ 可以改写为 $9p^2 + 26p - 3 = 0$。

答 Answer： _____

二次函数　Quadratics

本章导读

二次函数是 P1 中**代数味道最浓、也最能拉开分差**的一章。近五年 23 道真题的分布是：**配方（C2b）10 道、判别式（C2e）6 道、含参二次（C2f）3 道**，另外解方程（C2a）与二次函数图像（C2d）各 2 道。**超过六成的真题都落在「配方」与「判别式」这两块**，因为它们能直接对接 P1 的图像语言（顶点、对称轴、相切、不相交）和不等式语言。

本章要建立的核心观念只有一个：**二次函数的代数形式与图像是一回事**。$x^2+px+q=0$ 与 $y=x^2+px+q$ 是同一条曲线的两个侧面；配方得到顶点式，顶点式一眼告诉你对称轴、极值点与 y 轴的位置；判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 则是这条曲线**与 x 轴相交、相切还是完全不相交**的代数判据。把这三件事串起来，二次这一章的绝大多数题目就只剩计算。

本章有**三条不能违反的铁律**，请先记住再往下读：

铁律一：能因式分解就不要用求根公式。官方 Mark Scheme 的 M 分几乎都写「factorise」或「x^2+px+q 形式配方」。用求根公式硬算，答案对但常常拿不到 M 分，连带后面的 A 分也保不住（标记为 **dM1**、**dA1** 的给分点会连坐失效）。

铁律二：带根号的答案要「fully simplify」（完全化简）。$\dfrac{-7+\sqrt{49-4}}{6}$ 不给分，$\dfrac{-7+3\sqrt{5}}{6}$ 给分。含分数形式的整式根，标准答案是 $a+b\sqrt{c}$ 或 $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ 这两种形状，写成哪种都行，但必须化到底。

铁律三：参数题的答案是一个「区间」，不是几个数。「曲线与直线只有一个交点」意味着 $\Delta=0$；「曲线与直线没有交点」意味着 $\Delta<0$；求 k 的取值范围时，官方要的是 $k<0$ 或 $k>5$ 这样**带明确不等号的区间表述**，只写 $k<0, k>5$ 中间漏掉「或」字都可能扣分。

本章的 **2.6–2.8 三节“满分必备”**把「二次公式怎么推」「配方怎么写才拿满 B1/M1/A1」「含参四步法怎么落地」三件事彻底讲透；前五节是工具，2.9 节负责把国内人教 A 版的讲法与 P1 的评分口径对齐，2.10 节是近五年真题的定位表与错题复盘。

本单元新词 Key Vocabulary

English 英文	中文	在 P1 中的用法
quadratic equation	二次方程	形如 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）；「二次」指最高次幂为 2
root / solution	根 / 解	使 $ax^2+bx+c=0$ 成立的 x 值；答卷写 $x=\ldots$ 即可
quadratic formula	求根公式	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；$\Delta\geq 0$ 时使用
discriminant	判别式	$\Delta=b^2-4ac$；$\Delta>0$ 两个不同实根，$=0$ 重根，<0 无实根
no real roots	无实根	官方规范写法；**不能写 no real solutions 或 undefined**
equal roots / repeated root	重根 / 重复根	$\Delta=0$；图像在此与 x 轴**相切（touches）**，不是穿过
perfect square	完全平方	形如 $(2x+3)^2$ 的式子；是“配好”的二次式
complete the square	配方法	把 ax^2+bx+c 改写为 $a(x+p)^2+q$ 的过程
factorise	因式分解	把多项式写成乘积形式；**P1 的首选方法，通常能稳拿 M 分**
hence / otherwise	据此 / 或用其他方法	hence = 用上一步的结果，otherwise = 允许换方法；写 hence 时方法分与第一步必须一致
axis of symmetry	对称轴	$x=-\dfrac{b}{2a}$；P1 问法常为“state the equation of the axis of symmetry”
turning point	极值点 / 转折点	a>0 是 minimum，a<0 是 maximum；**先说类型再说坐标**
positive / negative	正 / 负	说“b is positive”即 $b>0$；P1 描述题常用
in the form	写成……的形式	“in the form $a+b(x+c)^2$”是硬性格式要求，字母位置不可调换
substitution	代入	换元法；如令 $u=x^3$ 或 $u=x^{1/2}$ 把高次式降为二次
point of intersection	交点	两曲线公共点；“has only one point of intersection”等价于相切
quadratic function	二次函数	形如 $f(x)=ax^2+bx+c$；与 x 轴交点即 $f(x)=0$ 的根
graph sketch	草图	必须标出与坐标轴的交点坐标、极值点类型；重根处写 touches 不写 crosses

2.1 Solving quadratic equations 解二次方程

解二次方程是二次函数的**起手式**。P1 从不在这一节直接考“解方程”，而是把它当作**工具埋在题目里**：后面要让根落在某个区间、要判断方程有几个实根、要由根反推系数，都是先解方程。所以这一节的唯一目标是把**方法选择顺序**练成本能。

- **方法选择是有优先级的：能提公因式 ⇒ 能因式分解 ⇒ x^2+px+q 型配方 ⇒ 求根公式**。官方 M 分几乎都压在前三档上
- 能提公因式时**先提公因式**：$2x^3+3x^2-35x=0$ 先提 x 得 $x(2x^2+3x-35)=0$，这一步就是 M1
- x^2+px+q **型（首一）永远不要用求根公式**：配方只要一步，且能顺带看出对称轴

- **求根公式** $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$：$\Delta\geq 0$ 时使用，$\Delta<0$ 时不要写“无解”而要写 no real roots
- **换元降次**：出现 $x^{1/2}$、x^2、x^3、x^6 时，把它们整体看作新未知数。令 $u=x^3$ 可把 x^6+ax^3+b 变成标准二次
- 换元后的解要**逐个回代并筛选**：令 $u=x^3$ 得 $u=\ldots$ 后，$x^3=$ 负数 在实数范围内无解，必须排除
- **根与系数的关系**（P1 偶考，用 Vieta 比求根更快）：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$
- **答案要 fully simplify**：根号能化简必须化简（$\sqrt{49-4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$），整式根写成 $a+b\sqrt{c}$ 形状

方法卡　解二次方程的决策流程（照这个顺序走）

看到什么特征	立刻做什么	踩分提示
所有项含同一因式	**先提公因式**，再解剩下的	提公因式这一步常单独给 M1
能凑成乘积（交叉法可试）	**因式分解**	因式分解给 A1，不必再代公式验证
x^2+px+q 型（首一）	**配方**或直接观察	写出配方过程可稳拿 M1
ax^2+bx+c，$a\neq 1$ 且难分解	**求根公式**	公式代对给 M1，化简后给 A1
出现 $x^{1/2},x^2,x^3,x^6$	**换元**：令 $u=x^n$	必须写出“let $u=x^3$”才给 M1

常见形式	结果	注意
$x^2-px-q=0$	$(x-q)(x+p)=0$	符号组合，可用十字相乘秒解
$x^2+px+q=0$，$\Delta=0$	$x=-\dfrac{p}{2}$	判别式先于求根
$x^2+px+q=0$，$\Delta<0$	**no real roots**	不写 $\sqrt{\text{负数}}$
$x^3\cdot$ 型（x^6+ax^3+b）	令 $u=x^3$，$u^2+au+b=0$	u 不能为负时 x 无实解

1 例题　[基础能力自查题（讲义自编）]

(a) Solve the equation $6x^2-5x-1=0$ by factorisation.

中文：(a) 用因式分解法解方程 $6x^2-5x-1=0$。

答 Answer： _____

2 例题 [2019 年 10 月 Q8（5 分）]

(a) Solve $x - 6x^{1/2} + 4 = 0$. (b) Give your answer to (a) in the form $a + b\sqrt{c}$, where a, b and c are integers.

中文：(a) 解方程 $x - 6x^{1/2} + 4 = 0$。(b) 把 (a) 的答案写成 $a + b\sqrt{c}$ 的形式，其中 a、b、c 为整数。

答 Answer： _____

3 例题 [2019 年 6 月 Q5（7 分）]

(a) Solve the equation $2x^3 + 3x^2 - 35x = 0$. (b) Hence find all the real solutions of $2(y-5)^6 + 3(y-5)^4 - 35(y-5)^2 = 0$.

中文：(a) 解方程 $2x^3 + 3x^2 - 35x = 0$。(b) 据此求方程 $2(y-5)^6 + 3(y-5)^4 - 35(y-5)^2 = 0$ 的所有实解。

答 Answer： _____

4 例题 [2025 年 6 月 Q10（(a) 3 分，(b) 4 分，见 2.5 节）]

(a) Solve the equation $(k-1)x^6 + 4x^3 + (k-4) = 0$, where $k = 4.5$.

中文：(a) 解方程 $(k-1)x^6 + 4x^3 + (k-4) = 0$，其中 $k = 4.5$。

答 Answer： _____

2.2 Completing the square 配方

配方法是二次函数的核心技术，也是 P1 真题里出现频率最高的方法（近五年 10 道，全部与本节有关）。它的作用有两个：**（一）把二次式变成 $a(x+p)^2+q$，由此读出图像的全部关键信息；（二）在没有实根时替代求根公式给出“最小值/最大值”。**

- **配方三步法：**①提取二次项系数 a；②括号内留 $\frac{b}{a}x$，凑成 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$；③括号外减去凑出来的那一项
- 标准形式：$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$。**符号规律：**$\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2$ 中若 $b>0$ 则括号内减号
- **最容易错的一步是“补上再减掉”：**$3x^2+12x+13=3(x^2+4x)+13=3\left[(x+2)^2-4\right]+13=3(x+2)^2+1$。**括号里要出现 -4**
- 配方后立刻能读出：**对称轴** $x=-p$（若写成 $a(x+p)^2+q$）、**极值点** $(-p,q)$、**极值类型**由 a 符号决定
- 若写成 $a-b(x+c)^2$（$b>0$），则 a 是**极值**、$c>0$ 时对称轴在 y 轴右侧，常用来求三角形面积与最值
- **不用配方也能判无解：**ax^2+bx+c 的最小值是 $c-\frac{b^2}{4a}$（$a>0$），若它大于 0 则 **no real roots**
- **求“过定点”的二次式：**令 $x=k$ 取特殊值消掉一项，得定点纵坐标；常与顶点式联用

方法卡　配方三步与顶点信息速查

步骤	动作	示例 $3x^2+12x+13$	自查
(1) 提系数	$3\left(x^2+4x\right)+13$	二次项系数已提出	括号内首项为 x^2
(2) 凑平方	$3\left[(x+2)^2-4\right]+13$	**方括号内必须带 -4**	$(x+2)^2=x^2+4x+4$
(3) 收尾	$3(x+2)^2+1$	结果为 $a(x+b)^2+c$	展开能还原原式

已配成	立刻可读出	答题句式
$y=a(x+p)^2+q$	轴 $x=-p$，点 $(-p,q)$，$a>0$ 为 minimum	The axis of symmetry is $x=\ldots$; the turning point is $(\ldots,\ldots)$
$y=a-b(x+c)^2$	轴 $x=c$，点 (c,a)，$a>0$ 时为 maximum	The maximum point is $(\ldots,a)$（先说类型）
$y=a(x+b)^2-k$	轴 $x=-b$，点 $(-b,-k)$，最低点在 x 轴下方	…has a minimum value of $-k$
x^2+px+q 与 x 轴关系	交点即根；顶点纵坐标 >0 则无实根	The equation has no real roots

$y=a(x+p)^2+q$ 中 p 的符号	对称轴位置	记忆法
$p>0$	$x=-p<0$，在 y 轴**左侧**	括号里是“加正”，轴就走负
$p=0$	$x=0$，就是 y 轴	顶点在轴上
$p<0$	$x=-p>0$，在 y 轴**右侧**	括号里是“+ 负数”，轴就走正

5 例题 [2022 年 1 月 Q2（6 分）]

$f(x)=11-4x-2x^2$. (a) Write $f(x)$ in the form $a+b(x+c)^2$, where a, b and c are integers. (b) On Diagram 1, sketch the graph of $y=f(x)$, showing the coordinates of the y-intercept and the coordinates of the turning point. (c) State the equation of the axis of symmetry.

中文：$f(x)=11-4x-2x^2$。(a) 把 $f(x)$ 写成 $a+b(x+c)^2$ 的形式，其中 a、b、c 为整数。(b) 在图 1 中画出 $y=f(x)$ 的图像，标出 y 截距与极值点的坐标。(c) 写出对称轴方程。

答 Answer： _____

6 例题 [2023 年 6 月 Q3（6 分）]

(a) Find the values of a, b and c in $3x^2+12x+13=a(x+b)^2+c$. (b) Sketch the curve $y=3x^2+12x+13$, showing clearly the coordinates of the y-intercept and the coordinates of the turning point.

中文：(a) 求 $3x^2+12x+13=a(x+b)^2+c$ 中 a、b、c 的值。(b) 画出曲线 $y=3x^2+12x+13$ 的草图，清楚标出 y 截距与极值点的坐标。

答 Answer： _____

7 例题 [2020 年 10 月 Q2（7 分）]

$f(x)=3+12x-2x^2$. (a) Express $f(x)$ in the form $a-b(x+c)^2$, where a, b and c are positive integers. (b) The line $y=f(x)-7$ crosses the coordinate axes at P, Q and R, where P is on the x-axis and R is on the y-axis. Find the exact area of triangle PQR, giving your answer in the form $k\sqrt{m}$.

中文：$f(x)=3+12x-2x^2$。(a) 把 $f(x)$ 写成 $a-b(x+c)^2$ 的形式，其中 a、b、c 为正整数。(b) 直线 $y=f(x)-7$ 与坐标轴交于 P、Q、R 三点，其中 P 在 x 轴上、R 在 y 轴上。求三角形 PQR 面积的精确值，答案写成 $k\sqrt{m}$ 的形式。

答 Answer： _____

8 例题 [2021 年 10 月 Q8（(a) 5 分）]

The curve C has equation $y=4+12x-3x^2$. (a) (i) Express y in the form $a+b(x+c)^2$, where a, b and c are integers. (ii) Hence state the coordinates of the maximum point M of C.

中文：曲线 C 的方程为 $y = 4 + 12x - 3x^2$。(a) (i) 把 y 写成 $a + b(x + c)^2$ 的形式，其中 a、b、c 为整数。(ii) 据此写出 C 的最高点 M 的坐标。

答 Answer： _____

2.3 Functions 函数

本节是 P1 中「读图说话」的桥梁：给出一个二次函数的**图像特征**（极值点坐标、与坐标轴的截距、切线），反推出它的代数表达式。这类题几乎每年都出，而且**不需要任何复杂运算**，靠的是对 $y = ax^2 + bx + c$ 三条几何性质的熟练对应。

- **性质一（极值点）**：对称轴 $x = -\dfrac{b}{2a}$，极值纵坐标 $c - \dfrac{b^2}{4a}$。**已知极值点 (h, k) 就能列出两条方程**
- **性质二（截距）**：y 截距 $= (0, c)$；x 轴上的根满足 $ax^2 + bx + c = 0$，用 Vieta 可得根之和与根之积
- **性质三（切线/相交）**：直线 $y = mx + c$ 与曲线只有一个公共点 $\iff$ 该方程的重根 $\iff$ 判别式为零
- **顶点式最省力**：$y = a(x - h)^2 + k$ 一次性装下所有信息（顶点、开口、截距）。任何“从图像求表达式”的题都应先尝试顶点式
- 由顶点式求一般式：$y = a(x - h)^2 + k = ax^2 - 2ah\,x + ah^2 + k$，即 $a = A$、$b = -2Ah$、$c = Ah^2 + k$
- **两点确定一条直线**：$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$ 在 $y = mx + c$ 上，则 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$、$c = y_1 - mx_1$；**负斜率要带负号**
- **垂直条件**：$l_2 \perp l_1$ 时斜率之积为 -1，即 $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$；水平线斜率为 0、竖直线无斜率，要单独判断

方法卡　从图像信息反推 f(x) 的对照表

题目给的信息	立刻写出	答题句式与得分点
最大/最小转折点 $M(h, k)$	$y = a(x - h)^2 + k$	A1 $y = a(x - h)^2 + k$（形式分）
曲线过点 (x_0, y_0)	$y_0 = a(x_0 - h)^2 + k$	M1 代入；A1 $a = \ldots$
曲线过原点 O	$0 = a(0 - h)^2 + k \Rightarrow k = ah^2$	常可使 a 一步算出
与 x 轴交于 $x = x_1, x_2$	$x_1 + x_2 = -b/a$，$x_1 x_2 = c/a$	Vieta 比解方程快
y 截距	$(0, c)$	B1 直接代入 $x = 0$
直线与曲线只有一个交点	$\Delta = 0$	见 2.5 节，是含参题的常用出口

直线方程形式	已知条件	系数求法
$y=mx+c$	过两点 P、Q	$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$c=y_1-mx_1$
$y=mx$（过原点）	过原点与另一点	$c=0$，$m=\frac{y_1}{x_1}$
$ax+by=c$	**垂直于**斜率 m 的直线	法线方向法：斜率为 $-\frac{1}{m}$，再定常数
垂直两线	$m_1m_2=-1$	特别注意 0 与无穷：一条水平 $\Rightarrow$ 另一条竖直

9 例题 [2022 年 6 月 Q5（(a) 4 分，(b) 3 分）]

The curve C has equation $y=f(x)$ where $f(x)$ is a quadratic function. The curve has a maximum turning point at $(-2,12)$ and crosses the negative x-axis at -5. (a) Find the equation of $f(x)$ in the form $f(x)=ax^2+bx+c$. (b) Find the equation of the line l_1 with equation $y=\frac{4}{5}x$. The line l_2 is perpendicular to l_1 and passes through the point $(-5,0)$. Find the equation of l_2.

中文：曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是二次函数。曲线有最大转折点 $(-2,12)$，并在负 x 轴上与 x 轴交于 -5。(a) 求 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的方程。(b) 求直线 l_1 的方程 $y=\frac{4}{5}x$。直线 l_2 垂直于 l_1 且过点 $(-5,0)$，求 l_2 的方程。

答 Answer： _____

10 例题 [2021 年 1 月 Q4（(a) 3 分，(b) 3 分）]

The points P and Q have coordinates $(-2,13)$ and $(4,-5)$ respectively. (a) Find the equation of the line l, in the form $y=mx+c$, which passes through P and Q. (b) A quadratic curve passes through P and has a minimum point at Q. Find the equation of this curve.

中文：点 P 与点 Q 的坐标分别为 $(-2,13)$ 与 $(4,-5)$。(a) 求过 P、Q 的直线 l 的方程，写成 $y=mx+c$ 的形式。(b) 一条二次曲线过点 P 且以 Q 为最小点，求该曲线的方程。

答 Answer： _____

11 例题 [2023 年 1 月 Q8（(b)(c) 部分，共 4 分）]

The curve C has equation $y = f(x)$. The curve has a minimum point at $(7, -18)$ and crosses the x-axis at $x = 4$ and at $x = k$, where $k > 4$. Find the equation of $f(x)$ in the form $f(x) = ax^2 + bx + c$, where a, b and c are integers.

中文：曲线 C 的方程为 $y = f(x)$。曲线有最小点 $(7, -18)$，并与 x 轴交于 $x = 4$ 与 $x = k$（其中 $k > 4$）。求 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的方程，其中 a、b、c 为整数。

答 Answer： _____

12 例题 [2024 年 1 月 Q9（(a) 2 分，(b) 3 分）]

The curve C_1 has equation $y = f(x)$ where $f(x)$ is a quadratic function. C_1 has a maximum turning point at $(2, 20)$ and passes through the origin O. (a) Sketch C_1, showing clearly the coordinates of any point where the curve crosses the y-axis. (b) Find the equation of $f(x)$ in the form $f(x) = ax^2 + bx + c$.

中文：曲线 C_1 的方程为 $y = f(x)$，其中 $f(x)$ 是二次函数。C_1 有最大转折点 $(2, 20)$ 且过原点 O。(a) 画出 C_1 的草图，清楚标出与 y 轴相交点的坐标。(b) 求 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的方程。

答 Answer： _____

2.4 Quadratic graphs 二次函数图像

二次函数图像的全部信息都能从**三个数**（a、顶点的 x 坐标 h、顶点的 y 坐标 k）读出。本节把这些对应关系整理成可以直接背下来的清单，并讲清**如何由两个截距快速画出草图**——这是 P1 每年必考的 2–3 分。

- **开口**：$a>0$ 开口向上（形如 ∪），$a<0$ 开口向下（形如 ∩）。这是第一眼就要看出的信息
- **极值点**：$y=a(x-h)^2+k$ 的转折点是 (h,k)；$a>0$ 时称 **minimum**，$a<0$ 时称 **maximum**
- **对称轴**：$x=h$（或 $x=-\dfrac{b}{2a}$）；对称轴把图像切成完全对称的两半
- y **截距**：$(0,f(0))=(0,c)$，永远存在，是草图上必标的一点
- x **截距**：$ax^2+bx+c=0$ 的根。判别式告诉你有几个：两个 / 一个（相切）/ 无
- **由两截距画草图的标准流程**：①标出 x 轴上两根 x_1、x_2；②标出 y 截距 $(0,c)$；③画开口方向正确的光滑抛物线
- **特殊对称关系**：若 $f(x)=ax^2+bx$（$c=0$），两零点为 0 与 $-\dfrac{b}{a}$，**零点恰好关于 y 轴对称**
- **与 x 轴的相对位置**：$a>0$ 时顶点纵坐标 >0 则全在 x 轴上方（无交点）；$=0$ 则相切；<0 则有两个交点

方法卡　草图评分点速查（P1 图像题的给分只落在这几处）

草图要素	怎么确定	官方给分点
y 截距坐标	令 $x=0$，得 $(0,c)$	B1：写全括号坐标
极值点坐标与类型	由顶点式读出，先说 max/min	B1：类型 + 坐标各算一处
开口方向	看 a 的符号	通常与坐标点合并给分
与 x 轴交点	解 $f(x)=0$ 或直接可见	B1：每处一个，两处要都标
相切 vs 穿过	重根写 touches，单根写 crosses	用词错误该 B1 不给
x 轴无交点	顶点与 x 轴同侧且不接触	通常不查，除非题目明确问

a 的符号	图像与 x 轴	规范描述
$a>0$	顶点在轴上方	opens upwards; has a **minimum** point
$a>0$	顶点在轴下方（两交点）	crosses the x-axis at two points
$a<0$	顶点在轴下方	opens downwards; has a **maximum** point
$a<0$	顶点在轴上方	has **no real roots** / does not cross the x-axis
任意	顶点在轴上	**touches** the x-axis at one point（重根）

13 例题 [2023 年 10 月 Q11（(a)(b)(c) 部分）]

(a) Express $f(x) = 2x^2 - 12x + 14$ in the form $a(x+b)^2 + c$, where a, b and c are integers. (b) Hence state the coordinates of the minimum point P of the curve $y = f(x)$. (c) Find the equation of the line l which passes through the points $(-1, 28)$ and P.

中文：(a) 把 $f(x) = 2x^2 - 12x + 14$ 写成 $a(x+b)^2 + c$ 的形式，其中 a、b、c 为整数。(b) 据此写出曲线 $y = f(x)$ 最小点 P 的坐标。(c) 求过 $(-1, 28)$ 与 P 两点的直线 l 的方程。

答 Answer： _____

14 例题 [2025 年 10 月 Q5（(a) 3 分，(b) 5 分）]

(a) Express $2x^2 - 16x + 50$ in the form $a(x+b)^2 + c$, where a, b and c are integers. (b) M is the minimum point of the curve $y = 2x^2 - 16x + 50$. The line l, which passes through the origin, meets the curve at M and at the point P. Find, to 3 significant figures, the x coordinate of P.

中文：(a) 把 $2x^2 - 16x + 50$ 写成 $a(x+b)^2 + c$ 的形式，其中 a、b、c 为整数。(b) M 是曲线 $y = 2x^2 - 16x + 50$ 的最小点。过原点的直线 l 与曲线交于 M 与 P。求 P 的 x 坐标，答案取 3 位有效数字。

答 Answer： _____

15 例题 [2026 年 6 月 Q5（(a) 3 分，(b) 2 分）]

(a) Express $-2x^2+12x+7$ in the form $a(x+b)^2+c$, where a, b and c are integers. (b) P is the maximum point of the curve with equation $y=-2x^2+12x+7$. State the coordinates of P.

中文：(a) 把 $-2x^2+12x+7$ 写成 $a(x+b)^2+c$ 的形式，其中 a、b、c 为整数。(b) P 是曲线 $y=-2x^2+12x+7$ 的最高点。写出 P 的坐标。

答 Answer： _____

2.5 The discriminant 判别式

判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 是二次方程的**判决书**：它一次性告诉你有几个实根、是否相切、是否与 x 轴相交。把 Δ 与图像联系起来，就得到了 P1 含参题的全部出口——「只有两个交点」$\Longleftrightarrow$ $\Delta>0$，「只有一个交点」$\Longleftrightarrow$ $\Delta=0$，「没有交点」$\Longleftrightarrow$ $\Delta<0$。

- **判别式 $\Delta=b^2-4ac$：$\Delta>0$ 两个不同实根（crosses twice）；$\Delta=0$ 重根（touches）；$\Delta<0$ no real roots**
- **$\Delta<0$ 的规范表述是 no real roots。不能写 “no real solutions” “undefined” “complex”，也不能在根号下留负数**
- **$\Delta=0$ 是本题型最高频的入口：**「只有一个交点」「相切」「有重根」「touching」全部等价于它
- **图像语言：**$y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点数 $\begin{cases}2, & \Delta>0\\ 1, & \Delta=0\\ 0, & \Delta<0\end{cases}$；与直线 $y=mx+c$ 的交点数同理（代入成关于 x 的二次方程即可）
- **含分式的方程也能用：**先去分母化成整式二次方程，再判别式化简；**不要在分式形式上直接套公式**
- **解不等式的四步：**①写 Δ 的表达式；②令它等于 0 求临界值；③画出 Δ 关于参数的符号表；④按题目要求写区间（含端点与否）
- **端点取舍：**条件是“**有两个不同**实根”时 $\Delta>0$，临界值**不含**；条件是“有实根”时 $\Delta\geq 0$，临界值**含**

方法卡　判别式四步法（含参数的题目照做）

步	动作	示例：$kx^2+6kx+5=0$ 无实根	得分点
(1)	代入系数写出 Δ	$\Delta=(6k)^2-4k\times5=36k^2-20k$	M1：写出 Δ 表达式
(2)	按题意列不等式	$36k^2-20k<0$	A1：正确的不等号方向
(3)	求临界值	$\Delta=k(36k-20)=0\Rightarrow k=0$ 或 $k=\frac{5}{9}$	M1/A1：解出临界值
(4)	写参数范围	$0<k<\frac{5}{9}$（并注意 $k\neq0$）	A1：区间表述完整

题目说法	翻译成不等式	临界值是否取
has no real roots	$\Delta<0$	不取
has two distinct real roots	$\Delta>0$	不取
has equal roots / is a repeated root	$\Delta=0$	只取临界值
has real roots / has two equal or distinct real roots	$\Delta\geq0$	取
has exactly one point of intersection（与直线）	$\Delta=0$	只取临界值
does not cross the curve（与直线）	$\Delta<0$	不取

16 例题 [2023 年 1 月 Q4（(b) 部分，4 分）]

(a) Express $3x^2+12x+13$ in the form $a(x+b)^2+c$. (b) Find the range of values of k for which the equation $kx^2+6kx+5=0$, where k is a non-zero constant, has no real roots.

中文：(a) 把 $3x^2+12x+13$ 写成 $a(x+b)^2+c$ 的形式。(b) 求常数 k 的取值范围，使方程 $kx^2+6kx+5=0$（k 为非零常数）无实根。

答 Answer： _____

17 例题 [2019 年 6 月 Q6（7 分，(a)(b) 部分）]

(a) Find the equation of the line l which is a tangent to the curve with equation $y = x^2 + 3x - 9$ at the point where the curve crosses the y-axis. (b) The line $y = 4x + c$ has only one point of intersection with the curve $y = x(x - 3)$. Find the value of c.

中文：(a) 求直线 l 的方程，它在曲线 $y = x^2 + 3x - 9$ 与 y 轴交点处与该曲线相切。(b) 直线 $y = 4x + c$ 与曲线 $y = x(x - 3)$ 只有一个交点。求 c 的值。

答 Answer： _____

18 例题 [2019 年 1 月 Q9（7 分）]

The equation $\frac{3}{x} + 5 = -2x + c$, where c is a constant and $x \neq 0$, has no real roots. Find the range of possible values of c.

中文：方程 $\frac{3}{x} + 5 = -2x + c$（$c$ 为常数，$x \neq 0$）无实根。求 c 的所有可能取值范围。

答 Answer： _____

19 例题 [2025 年 6 月 Q10（7 分，(a) 3 分 + (b) 4 分）]

The equation $(k-1)x^6+4x^3+(k-4)=0$, where k is a constant. (a) Solve the equation when $k=4.5$. (b) Hence find the range of values of k for which the equation has no real roots.

中文：方程 $(k-1)x^6+4x^3+(k-4)=0$，其中 k 为常数。(a) 求 $k=4.5$ 时的解。(b) 据此求 k 的取值范围，使方程无实根。

答 Answer： _____

2.6 满分必备①：二次公式的推导与「无实根」情形的满分表述

满分必备 满分必备①：二次公式的推导与「无实根」情形的满分表述

一、为什么 P1 反复考「show that」：推导题的给分逻辑 P1 里出现频率最高的二次压轴题，题干几乎都是 **Show that ...** 或 **Hence find ...**。这类题的官方给分结构永远是 **M（方法分）先给，A（准确分）后给**，而且**后一步的 M 分常标 dM（dependent on M）**——前一步方法写错，后一步方法分自动作废。

给分类型	含义	拿分条件
M1	方法分	写出正确的关键等式即可，**不要求算到底**
A1	准确分	必须给出正确的最终数值/表达式
dM1	依赖 M 分	只有上一行的 M1 拿到了，这一行才给
dA1	依赖 A 分	只有上一行的 A1 拿到了，这一行才给
A1ft	follow through	你前面的答案（哪怕算错）算对了，这行照给

实战推论：①推导题永远不要跳步，「凑出关键等式」就停下先写下来；②卡住时**把能写的中间等式全部写出来**——M 分是白送的，A 分丢了还能靠 M 分拿到一半；③一旦某步算错，后面的 A 分救不回来，但**后续独立的 M 分仍可拿**（前提是该步不标 d）。

二、二次公式的标准推导：四步，每一步都有分求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 的推导本质是**把一般二次式配成顶点式**。下面是满分写法，**四个步骤一步都不能省：**

第 1 步（两边同除以 a，M1）：$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad (a\neq 0)$。

第 2 步（配方，dM1）：$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$。即先写出 $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$，**方括号内的减项绝不能丢。**

第 3 步（整理成平方等于常数，A1）：$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$。

第 4 步（开平方并化简，A1）：$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（此处说明 $\sqrt{4a^2}=2a$，因 a 取 $2a$ 的符号约定），$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

常见丢分点	错误写法	正确写法
忘记除以 a	$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\ldots$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
配方丢项	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$	分母必须是 $4a^2$
$\sqrt{a^2}$ 处理	$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$	$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（用求根公式）
最后一步不化简	$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$	必须并成一个分式

三、$\Delta<0$ 的满分表述：五种说法与五种禁忌「无实根」是 P1 出现频率最高的定性结论之一。官方 Notes 里明确列出了可接受的说法，但同时把若干常见错误写法列为不给分。

规范表述（可得分）	中文	使用场合
has no real roots	无实根	最通用，判别式题默认用这句
there are no real values of x	没有实数解	强调「x 无实值」
has no real solutions	无实解	官方 Notes 接受，但**不如上句稳**
the roots are not real	根不是实数	描述根的性质时
does not cross the x-axis	不与 x 轴相交	图像题语境
has no points of intersection	无交点	与直线/曲线的交点题

不给分的写法	为什么错	正确替代
$\sqrt{\text{负数}}$ 或 $\pm i$	P1 不学复数，超纲	has no real roots
no solution / undefined / does not exist	与 $0=1$ 型方程混同	has no real roots
the equation has no roots (of a curve)	曲线没有根，措辞不严谨	the equation has no real roots
Δ is negative，所以 $x=?$	只给结论不给句子，描述题不给分	必须写出完整句子
no roots (未说 real)	可能被理解为「无解」	补上 real

与「有实根」的对称表述：条件若是「has real roots」或「has two equal or distinct real roots」，则 $\Delta\geq 0$，临界值**要含**；答题时把这句话完整抄进 x 方程语境更稳妥：「the equation has two equal roots when $k=5$」。

四、含根号答案的 fully simplify 标准根式答案的评分看的是**化简程度**。三种标准形状（按题目要求选）：

答案形状	示例	何时出现
$a+b\sqrt{c}$（c 无平方因子）	$14+6\sqrt{5}$	整系数二次方程的根
$\dfrac{a+b\sqrt{c}}{d}$（$d>0$）	$\dfrac{-7+3\sqrt{5}}{6}$	二次项系数不为 1 或 1
$\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ 或 $\dfrac{\sqrt{b}-a}{c}$	$\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$	二次项系数为 1 的首选形状

三条硬规矩：① $\sqrt{45}$ 必须写成 $3\sqrt{5}$，$\sqrt{50}$ 写成 $5\sqrt{2}$，$\sqrt{96}$ 写成 $4\sqrt{6}$；②分数形式的二次根要提出分母，$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 而不是 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；③若题目说「exact」，**绝对不能用小数或近似值**，题目说 3 s.f. 才允许四舍五入。

1 满分示范 [讲义自编（满分示范：推导 + 表述）]

Given that $f(x)=ax^2+bx+c$, where a, b and c are constants, (a) show that the quadratic formula is obtained by completing the square on $f(x)=0$, (b) state, in terms of a, b and c, the condition for the equation $f(x)=0$ to have no real roots.

中文：已知 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a、b、c 为常数。(a) 证明：对 $f(x)=0$ 使用配方法可以得出求根公式。(b) 用 a、b、c 表示方程 $f(x)=0$ 无实根的条件。

答 Answer： _____

2 满分示范 [讲义自编（满分示范：判别式 + 参数范围）]

The equation $(k+1)x^2+kx+k=0$, where k is a constant. (a) Show that the equation has no real roots when $k<-\dfrac{4}{3}$ or when $k>0$. (b) Find the range of values of k for which the equation has two distinct real roots.

中文：方程 $(k+1)x^2+kx+k=0$，其中 k 为常数。(a) 证明：当 $k<-\dfrac{4}{3}$ 及 $k>0$ 时，方程无实根。(b) 求 k 的取值范围，使方程有两个不同实根。

答 Answer： _____

2.7 满分必备②：配方法的规范书写与顶点式 / 对称轴的正确读法

满分必备　满分必备②：配方法的规范书写与顶点式 / 对称轴的正确读法

一、官方在「in the form $a+b(x+c)^2$」上到底查什么近五年几乎每一份卷子都有一道 **"Express ... in the form $a+b(x+c)^2$, where a, b and c are integers"**，通常 3 分，结构固定：

给分点	内容	拿不到分的典型原因
M1	写出中间式（如 $-2(x^2+2x)+11$）	直接写最终答案，跳过提系数这一步
A1	第一个字母（如 $a=13$）	常数项没算对（忘了 $+11$）
A1	第二个字母（如 $b=-2$）	把 b 写成 2（丢了负号）
A1	第三个字母（如 $c=1$）	c 符号错（应看括号里的加减）

关键认知：题目指定的字母顺序**由卷面决定，不由你决定**。写 $13-2(x+1)^2$ 与写 $a+b(x+c)^2$ 完全等价，但如果你写成 $-2(x+1)^2+13$ 再声称 "$a=13$" 就没有错——**只要在答卷上明确写出 $a=13$，$b=-2$，$c=1$ 三个对应关系**。官方判分看的是这三个对应关系，不是你写的式子顺序。

二、符号规律表：括号里的加减号如何决定对称轴位置这是本节最值钱的一张表。设 $y=a+b(x+c)^2+d$，则对称轴为 $x=-c$、顶点为 $(-c,d)$。

c 的符号	括号写法	对称轴	轴的位置
$c>0$	$(x+c)$，即 $(x+2)$	$x=-c$	在 y 轴**左侧**（$x<0$）
$c=0$	(x)	$x=0$	就是 y 轴
$c<0$	$(x+c)$ 即 $(x-3)$	$x=-c=3$	在 y 轴**右侧**（$x>0$）

b 的符号	开口	极值类型与位置
$b>0$	向上（∪）	minimum，顶点 $(-c,d)$ 是最低点
$b<0$	向下（∩）	maximum，顶点 $(-c,d)$ 是最高点

一句话口诀：「括号里加正数，轴就走负方向；括号里减正数，轴就走正方向；顶点纵坐标就是式子最外面的常数。」

三、草图题的满分写法：从草图直接读出的四类信息草图（sketch）题的给分点极其固定，通常 2–3 分，只有三类：

给分要素	怎么取	规范英文写法
与 y 轴交点	令 $x=0$	the y-intercept is $(0,\dots)$，**括号与坐标都要**
极值点	由顶点式读出	a **minimum / maximum** point $(\dots,\dots)$，**先说类型**
与 x 轴交点	解 $f(x)=0$ 或图上可见	crosses the x-axis at $(\dots,0)$（两点都要标）
相切	重根	**touches** the x-axis at $(\dots,0)$（不是 crosses）

三条硬规矩：①只写 $x=2$ 不写 $(2,0)$ 通常只给半个 B；②没说的要素不要瞎标（如图形显然不过 x 轴，就不要画交点，画错反而显得不懂）；③用 **maximum / minimum，不要用 highest point / lowest point** 之外的自造词。

四、证明“$f(x)=0$ 无实根”的两种满分路线同样是证明无实根，官方接受两条路线。**判别式路线更快，配方路线更贴题**，后者在“hence”题里往往是唯一能拿到 dM 的写法。

路线	写法	适用场合
判别式路线	$\Delta=b^2-4ac<0$，故 has no real roots	单独判断某具体二次式
配方路线	$f(x)=a(x+p)^2+q$，当 $q>0$（$a>0$）时 $f(x)>0$，故 $f(x)=0$ 无实根	已有顶点式、且是 hence 题
顶点纵坐标	“the curve does not cross the x-axis”	图像题、描述题

注意符号方向：配方路线要写清「$a>0$ 且 $q>0\Rightarrow f(x)\geq q>0$」；若 $a<0$，则需要 $q<0$（即整式恒负）。漏掉 a 的符号讨论是常见扣分点。

1 满分示范 [讲义自编（满分示范：配方 + 无实根的严格论证）]

(a) Find, in terms of m, the range of values of x for which $-x^2+mx-7\geq 0$. (b) Hence state the range of values of m for which $-x^2+mx-7<0$ for all real values of x.

中文：(a) 用 m 表示 $-x^2+mx-7\geq 0$ 成立时 x 的取值范围。(b) 据此写出 m 的取值范围，使对一切实数 x 都有 $-x^2+mx-7<0$。

答 Answer： _____

2 满分示范 [讲义自编（满分示范：形式 + 无实根论证 + 图像信息）]

The curve C has equation $y = f(x)$ where $f(x) = x^2 - 4x + 9$. (a) Express $f(x)$ in the form $(x+p)^2+q$. (b) Show that C does not cross the x-axis. (c) Find the coordinates of the minimum point of C and state the equation of its axis of symmetry.

中文：曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，其中 $f(x) = x^2 - 4x + 9$。(a) 把 $f(x)$ 写成 $(x+p)^2+q$ 的形式。(b) 证明 C 不与 x 轴相交。(c) 求 C 最小点的坐标，并写出对称轴方程。

答 Answer： _____

2.8 满分必备③：含参二次——判别式、根的判别与参数范围的满分四步

满分必备 满分必备③：含参二次——判别式、根的判别与参数范围的满分四步

一、题目语言到不等式的翻译表（务必逐字读题）含参二次题的失分，绝大多数不是算错，而是**把题目条件翻译错**。下表是官方 Notes 里的等价说法，必须一字不差地对照：

题目原话	翻译成	端点
has no real roots	$\Delta < 0$	不含
does not cross the curve C	$\Delta < 0$（直线代换后）	不含
has two distinct real roots	$\Delta > 0$	不含
crosses the curve at two points	$\Delta > 0$	不含
has one real root / two equal roots / is a repeated root	$\Delta = 0$	只取临界值
is tangent to the curve / has exactly one point of intersection	$\Delta = 0$	只取临界值
has real roots（未加 distinct）	$\Delta \geq 0$	含
has two equal or distinct real roots	$\Delta \geq 0$	含
has no points of intersection with the x-axis	$\Delta < 0$（$b \neq 0$）	不含
touches the x-axis at one point	$\Delta = 0$	只取临界值

「只有一个交点」的三个等价说法都要能反应成 $\Delta = 0$：only one point of intersection、is tangent、has a repeated root。这是最常考的一组。

二、满分四步法与每步的给分点任何「求 k 的范围使某二次式……」的题目，都按下面四步写，**每一步的产物都要落在纸面上**：

第 1 步（代入）：从一般式读出 a、b、c（含参数）。写法示例：$a = k$，$b = 6k$，$c = 5$。**这一步不写出来，后面全无依据**（通常给 A1 或与 M1 合并）。

第 2 步（写 Δ）：$\Delta = b^2 - 4ac$，代入并化简成关于 k 的表达式。官方常给 M1 给这一步，例如 2019 年 6 月 Q6 的 M1 就是「$x^2 + (3-m)x = 0$」这一行联立式。

第 3 步（列不等式并解出临界值）：按题目条件写 $\Delta < 0$（或 $= 0$、> 0），解出关于 k 的二次不等式，求出临界值并因式分解：$36k^2 - 20k < 0 \Rightarrow 4k(9k-5) < 0$。**【易错】不要跳过因式分解这一步**，它往往是独立的 M 分。

第 4 步（写参数范围）：写出最终区间或区间并集，**并检查端点**。这一步给 A1，**是「区间表述」要求最严的地方**。

步	产出示例	不给分的写法
(1)	$a = k$，$b = 6k$，$c = 5$	直接写 Δ 不交代系数来源
(2)	$\Delta = 36k^2 - 20k$	$\Delta = (6k)^2 - 4 \cdot 5$ 未展开（勉强可，但有风险）
(3)	$4k(9k-5) < 0$，$k = 0$ 或 $k = \frac{5}{9}$	只写临界值不写不等式方向
(4)	$0 < k < \dfrac{5}{9}$	只写 $\left(0, \frac{5}{9}\right)$（可），或 $k > 0, k < \frac{5}{9}$（易漏「且」）

三、Δ 是 k 的二次函数时：内部区域与外部区域当 Δ 本身是关于参数的**二次式**（最常见）时，$\Delta < 0$ 取在**两根之间**（内部区域），$\Delta > 0$ 取在**两根两侧**（外部区域）。选错区域是本章最高频的错误。

Δ 的形式	$\Delta<0$（无实根）	$\Delta>0$（两不同实根）	判定
$20k-4k^2$（Δ 二次项为负）	两根之间	两根之外	开口向下的抛物线在轴上为负
$4k^2-20k$（二次项为正）	两根之间	两根之外	开口向上的抛物线在轴附近为正
k^2（二重根）	无解	$k\neq 0$	平方恒非负
常数 $c>0$	无解	恒成立	与 k 无关

判别方向的口诀：永远回到定义去检查一个具体值。取最容易代入的 k（如 $k=0$、$k=1$）算一次 Δ，看正负，就知道该取哪一侧。这一步花 10 秒，能拦住本章最贵的错误。

四、含参二次的三个附加检查项判别式做完不等于做完。P1 的高分答案会主动交代下面三件事，每件都可能被扣分：

检查项	什么时候要查	满分写法
$a\neq 0$（真二次）	a 含参数时	“$k\neq 2$, since otherwise the equation becomes linear”
$x\neq 0$ 等定义域	去分母后可能出现 $x=0$	检验常数项 $\neq 0$ 可自动排除
Δ 的判别式	Δ 是参数的二次式时	解 $\Delta_k=0$ 确认有两个不同临界值

参数范围的书写规范：①区间并集必须用 or（或 ∪）连接，不能用逗号平铺；②端点是否含要看题目条件（strict / equal / no）；③若题目问「range of values of k」，答案要写成 **range** 的形式而非一句中文。

1 满分示范 [2023 年 10 月 Q6（6 分）]

(a) Show that the roots of $4(p-2x)=\dfrac{12+15p}{x+p}$, where $x\neq -p$, are real and distinct when $3p^2-10p-8>0$. (b) Hence find the range of values of p for which the equation has two distinct real roots.

中文：(a) 证明：当 $3p^2-10p-8>0$ 时，方程 $4(p-2x)=\dfrac{12+15p}{x+p}$（$x\neq -p$）的根是不同实根。(b) 据此求 p 的取值范围，使方程有两个不同实根。

答 Answer： _____

2 满分示范 [讲义自编（满分示范：直线与二次曲线不相交 + 相切）]

The curve C has equation $y = x^2 + 5x + 11$ and the line l has equation $y = mx + c$, where m and c are constants. (a) Find the range of values of m for which l does not cross C. (b) For one such value of m, l touches C. Find the coordinates of the point of contact and the equation of l.

中文：曲线 C 的方程为 $y = x^2 + 5x + 11$，直线 l 的方程为 $y = mx + c$，其中 m、c 为常数。(a) 求 m 的取值范围，使 l 不与 C 相交。(b) 对其中某一个 m 值，l 与 C 相切。求切点坐标与 l 的方程。

答 Answer： _____

2.9 普高衔接：人教 A 版对应位置、国内讲法与 P1 评分口径的差异

普高衔接　普高衔接：人教 A 版对应位置、国内讲法与 P1 评分口径的差异

一、人教 A 版（2019）对应位置国内教材把「二次函数」铺得很开，P1 只取其中最硬核的一小块。下表给出对应关系，方便按人教顺序复习时定位。

人教 A 版必修二	P1 对应小节	P1 的额外要求
22.1.1 二次函数的定义与 $y=ax^2$	2.3、2.4	必须会从图像反推一般式（顶点式展开）
22.1.2 二次函数的解析式	2.3	要求写成指定字母形式 $a+b(x+c)^2$ 并报出三个字母
22.1.3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象	2.4	草图须标坐标、须先说 maximum / minimum
22.1.4 二次函数的图象（练习）	2.4	与直线、直圆的交点个数即 Δ 判据
22.2.1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质	2.4、2.5	求对称轴写 $x=-\frac{b}{2a}$，不许写「对称轴是 $-\frac{b}{2a}$」（漏 $x=$）
22.2.2 二次函数的图象（练习）	2.5	加了「参数范围」这一类题
22.2.3 函数的奇偶性（拓展）	无	P1 不考二次函数的奇偶性
22.2.4 函数 $y=\|x\|$ 与 $y=x^2$ 的关系（拓展）	无	绝对值函数不在 P1 二次范围内
（必修二第 9 章）一元二次方程的概念、公式法	2.1、2.6	要求 show that 求根公式的推导
（二次不等式与简单函数单调性）	2.5、2.8	把「不等式解集」翻译成 Δ 的符号区间

一句话概括差异：国内重「用公式求结果」，P1 重「把题目条件翻译成正确的不等式，并把过程写成得分点」。

二、六个必须改掉的国内习惯下面六条是「国内做对、P1 丢分」的典型。左边是国内常见写法，右边是 P1 的满分写法。

国内常见写法	P1 满分写法	扣分原因
对称轴「是 $-\dfrac{b}{2a}$」	**the axis of symmetry is** $x=-\dfrac{b}{2a}$	漏掉 $x=$，句子不完整
顶点「是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$」	the turning point is $(\ldots,\ldots)$，**先说类型**	未说 maximum / minimum
x 截距「是 $x=3$」	the x-intercept is $(3,0)$	描述题要坐标，$x=3$ 只给部分分
无实根写「无解」或「$\sqrt{\text{负}}$」	**has no real roots**	用词不合规范
相切写「交一点」「$x_1=x_2$」	**touches the x-axis** at $(\ldots,0)$	crosses / touches 用反不得分
参数范围写 $k<0,k>5$	$k<0$ **or** $k>5$	缺连接词，区间并集表述不完整

习惯	P1 的要求	练法
看到 ax^2+bx+c 就代公式	**先看能否因式分解 / 能否配方**	做每道题前先问「能分解吗」
解完就停	**检查根是否符合条件**（如 $x\geq 0$、$x\neq 0$）	换元题必做符号筛选
草图随手画	**标出坐标、标明开口、先说极值类型**	草图题留 3 分钟专门写字

三、P1 额外要求、国内教材基本略过的五类点下面五点是「国内教材讲了但基本不考」而 P1 必考的分值点，属于提分性价比最高的区域。

考点	P1 的具体要求	典型题
隐藏二次（换元）	$x^{1/2}$、x^3、x^6 型方程要令新变量降次，并显式写出 let $u=x^n$	2019 年 10 月 Q8、2025 年 6 月 Q10
精确根式答案	fully simplify，$a+b\sqrt{c}$ 或 $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ 形状	2019 年 10 月 Q8(b)、2020 年 10 月 Q2(b)
“hence/otherwise”结构	hence 分支方法必须与前一小问一致，否则 dM 丢失	2019 年 6 月 Q5(b)
参数范围与端点	区间并集、strict / equal 的取舍要写清	2019 年 1 月 Q9、2023 年 1 月 Q4
follow through 分	前步算错时保留正确的部分仍可得分	2026 年 6 月 Q5(b)

提分建议：把近五年 23 道真题里带“in the form ...”、“hence”、“range of values”、“no real roots”的题目标红重做三遍，这五类占了全章分值的一半以上。

四、恒等变形与「等价」的严谨表述「equivalent to（等价于）」在 P1 里是有法律地位的词：官方 Mark Scheme 在 **M1 步骤旁明确写着“or equivalent”**，即允许任何与之等价的形式。要写「等价」，必须满足两个条件：**（一）两个方向的推理都成立；（二）定义域没有缩小。**

变形	等价成立的条件	反例 / 注意
$ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$（$a\neq 0$）	除以非零量	必须写明 $a\neq 0$
$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$	恒等式，无条件	**展开回去必然还原**，可作验算
$ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx+4ac=0$（$a\neq 0$）	乘非零量；用于让 $a=4a^2$ 便于配方	**不能除以 a 后忘记 $a\neq 0$**
$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2\leq\frac{m^2-28}{4}$	平方运算，不等号不变号（两边都非负）	平方前必须确认右端非负
$\frac{3}{x}+5=-2x+c\Leftrightarrow 2x^2+(5-c)x+3=0$（$x\neq 0$）	同乘 x，需 $x\neq 0$	常数项 $\neq 0$ 时 $x=0$ 自动排除

答题中的自我保护：凡写出等价变形，就在关键处标注变形依据，例如“multiplying by $2a$ $(a\neq 0)$”或“letting $u=x^3$”。这既是给官方看的「我懂」，也是给自己防低级错的机制。

五、国内方法与 P1 方法的对应清单同一道题，国内与 P1 的最优解法常常不同。考场上按 P1 口径走，方法分更稳。

题型	国内常用（可行但丢 M 分）	P1 官方 M 分路径
解整系数二次方程	直接代求根公式	**factorise** 或“x^2+px+q 形式配方”
求最值	顶点公式 $x=-\frac{b}{2a}$ 套一遍	**complete the square** 后由顶点式读出
$ax^2+bx+c>0$ 恒成立	用配方或求根讨论	配方后读出最值，并写 **has no real roots**
$x^2+px+q=0$ 无解	记「$\Delta<0$」	**complete the square** 得 $(x+\frac{p}{2})^2=\frac{\Delta}{4}$ 后说明右端为负
线与抛物线关系	直接解方程看根的个数	联立后写 $\Delta=0$ 再解参数
含参求范围	解不等式后凭感觉取区间	**取一个特殊值检验 Δ 符号**再定内 / 外区域

最后一句提醒：P1 的 Mark Scheme 里“or equivalent”几乎每行都有，说明**官方不介意你的方法与官方不同，只介意你没有写出任何可评分的中间步骤**。把中间步骤写全，比选一个「看起来高级」的方法更重要。

1 衔接练习

[讲义自编（普高衔接示范：从分解到判别式）]

(a) Solve the quadratic equation $x^2-7x+12=0$. (b) Show that the equation $x^2-7x+k=0$ has no real roots when $k>13$. (c) Find the range of values of k for which the curve $y=x^2-7x+k$ crosses the x-axis at two distinct points.

中文：(a) 解二次方程 $x^2-7x+12=0$。(b) 证明：当 $k>13$ 时方程 $x^2-7x+k=0$ 无实根。(c) 求 k 的取值范围，使曲线 $y=x^2-7x+k$ 与 x 轴交于两个不同点。

答 Answer： _____

2 衔接练习

[讲义自编（普高衔接示范：配方读最值）]

Consider the quadratic function $f(x)=x^2-4x+7$. (a) Express $f(x)$ in the form $(x+p)^2+q$, where p and q are integers. (b) Find the minimum value of $f(x)$. (c) Hence solve the equation $f(x)=6$, giving exact values.

中文：考虑二次函数 $f(x)=x^2-4x+7$。(a) 把 $f(x)$ 写成 $(x+p)^2+q$ 的形式，其中 p、q 为整数。(b)

求 $f(x)$ 的最小值。(c) 据此解方程 $f(x)=6$，给出精确解。

答 Answer： _____

2.10 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘

下表是近五年（2019 年 1 月 – 2026 年 6 月）P1 卷面中属于二次函数主题的全部真题，按考点编码排列，共 **23 道**。

考点编码对照：C2a 解二次方程；C2b 配方法；C2c 函数概念与从图像反推表达式；C2d 二次函数图像；C2e 判别式与根的判别；C2f 含参二次与参数范围。

从分布看，**C2b（配方）10 道、C2e（判别式）6 道、C2f（含参）3 道，三者合计 19 道，占本章真题的八成以上**。这三类恰好对应本讲的 2.2、2.5、2.8 三节，**把这三节吃透，本章的分就拿下了八成**。

考点	题量	对应小节
C2a 解二次方程	2	2.1、2.6
C2b 配方法	10	2.2、2.7
C2d 二次函数图像	2	2.4
C2e 判别式与根的判别	6	2.5、2.8
C2f 含参二次	3	2.8

答题前的三句自检：①题目指定的字母顺序是什么？（$a+b(x+c)^2$ 还是 $a(x+b)^2+c$）②条件是「无实根」「两个不同实根」还是「有实根」？（决定不等号与端点）③前面的小问结果能不能直接用？（hence / follow through 链）

考点	近五年真题定位（年份 · 场次 · 题号 · 分值）
解二次方程	19 年 6 月 Q5（7 分）
	19 年 10 月 Q8（5 分）
配方	20 年 10 月 Q2（7 分）
	21 年 1 月 Q4（8 分）
	21 年 10 月 Q8（10 分）
	22 年 1 月 Q2（6 分）
	22 年 6 月 Q5（9 分）
	23 年 6 月 Q3（6 分）
	23 年 10 月 Q11（10 分）
	25 年 1 月 Q9（13 分）
	25 年 10 月 Q5（10 分）
	26 年 6 月 Q5（7 分）
二次函数图像	23 年 1 月 Q8（8 分）
	24 年 1 月 Q9（10 分）
判别式	19 年 1 月 Q9（7 分）
	19 年 6 月 Q6（7 分）
	23 年 1 月 Q4（4 分）
	23 年 10 月 Q6（6 分）
	24 年 6 月 Q4（6 分）
	26 年 1 月 Q8（6 分）
含参二次	20 年 1 月 Q8（6 分）
	23 年 6 月 Q10（10 分）
	25 年 6 月 Q10（7 分）

1 真题演练 [2021 年 10 月 Q8（改编自真题结构：直线族 vs 二次曲线）]

The curve C has equation $y = x^2 + 4x + p$, where p is a constant, and the line l has equation $y = 2p - 7$. (a) Show that C and l have no points of intersection when $p < 3$. (b) Hence find the range of values of p for which C and l have two distinct points of intersection. (c) Show that the curve C crosses the line with equation $y = x + 3$ at two distinct points when $p < \frac{21}{4}$.

中文：曲线 C 的方程为 $y = x^2 + 4x + p$（p 为常数），直线 l 的方程为 $y = 2p - 7$。(a) 证明：当 $p < 3$ 时，C 与 l 无公共点。(b) 据此求 p 的取值范围，使 C 与 l 有两个不同交点。(c) 证明：当 $p < \frac{21}{4}$ 时，曲线 C 与方程为 $y = x + 3$ 的直线交于两个不同点。

答 Answer： _____

2 真题演练 [2024 年 6 月 Q4（6 分）]

The curves C_1 and C_2 have equations $y = x^2 + kx - 9$ and $y = -3x^2 - 5x + k$ respectively. The curves meet at a single point P. (a) Show that $k^2 + 26k + 169 = 0$. (b) Find the coordinates of P.

中文：曲线 C_1、C_2 的方程分别为 $y = x^2 + kx - 9$ 与 $y = -3x^2 - 5x + k$。两曲线只在一点 P 相交。(a) 证明 $k^2 + 26k + 169 = 0$。(b) 求 P 的坐标。

答 Answer： _____

3 真题演练 [2020 年 1 月 Q8（6 分）]

The line l has equation $y = k(2x - 1)$ and the curve C has equation $y = x^2 + 2x + 11$. (a) Find the values of k for which l does not intersect C. (b) Show that C has a minimum point with y-coordinate 10. (c) Hence state, in terms of k, the values of k for which l does not intersect C.

中文：直线 l 的方程为 $y = k(2x - 1)$，曲线 C 的方程为 $y = x^2 + 2x + 11$。(a) 求 k 的值，使 l 与 C 不相交。(b) 证明 C 的最小点的 y 坐标为 10。(c) 据此用 k 表示 l 与 C 不相交时 k 的值。

答 Answer： _____

4 真题演练 [2019 年 6 月 Q6（(a)(b) 部分，7 分）]

The line $y = 4x + c$ has only one point of intersection with the curve $y = x(x - 3)$. Find the value of c. Hence find the coordinates of the point of intersection.

中文：直线 $y = 4x + c$ 与曲线 $y = x(x - 3)$ 只有一个交点。求 c 的值。据此求交点的坐标。

答 Answer： _____

方程与不等式 Equations and Inequalities

本章导读

本章是 P1 的**计算主战场**。近五年每一份 P1 卷子都至少有一道本章的题，而本章的**联立方程、不等式、区域**三大块几乎覆盖了 P1 全部的纯代数计算分。请特别留意两条阅卷铁律：**一，答案的形式本身就是给分点**——同一个解集写成 $-\frac{1}{4} \geqslant x \geqslant 2$ 和写成 $x \leqslant -\frac{1}{4}$ 或 $x \geqslant 2$，后者得分前者不得分；**二，区域题只认不等式，不认口语描述**——官方评分标准原文写着「Use of R instead of x or y will score 0 marks」。所以本章的 **3.8–3.10 三节“满分必备”**才是真正的考点，前七节是工具。

本单元新词　Key Vocabulary

English 英文	中文	在 P1 中的用法
simultaneous equations	联立方程组	两个未知数、两个方程；extbfshow that 型题目要求先化到目标式
elimination	消元法	把一个未知数的系数配平后相加或相减，P1 阅卷最认可的规范写法
substitution	代入法	把一次方程改写成 $y=\ldots$ 代入另一个方程，是二次联立的标准入口
coefficient	系数	消元前的配平对象；x、y 前面的数决定该加还是该减
inequality	不等式	含 $<$、$\leqslant$、$\geqslant$、$>$ 的关系式；解集是使它成立的 x 的全体
linear inequality	一次不等式	解法与方程相同，唯一区别是 extbf 两边同乘或同除负数要变号
quadratic inequality	二次不等式	移项因式分解求临界值，再按开口方向取区间；P1 每年必考
critical values	临界值	不等式变号处的根；Mark Scheme 中 A1 常要求写出两个临界值
solution set	解集	用区间记号或集合记号写出；extbf 答案的书写形式本身就是给分点
interval notation	区间记号	如 $[2,5)$、$(-\infty,3]$；方括号表示端点能取到，圆括号表示取不到
set notation	集合记号	如 $\{x:x\leqslant 5\}$；官方明确接受，写全 $x\in\mathbb{R}$ 更保险
intersection / union	交集 / 并集	$\cap$ 对应 and，$\cup$ 对应 or；区域题里用错就丢掉最后一分
region	区域	由若干条边界围成的平面部分；题目问 extbfuse inequalities to define 时用不等式描述
feasible region	可行域	满足全部约束不等式的点集，线性规划在它上面求最值
linear programming	线性规划	在可行域的顶点上取目标函数的最值；国内教材必修，P1 只要求写出约束条件
discriminant	判别式	$\Delta=b^2-4ac$；用它判断二次不等式临界值的个数与参数范围

3.1　Linear simultaneous equations 一次联立方程

联立方程是 P1 的**基本功**，也是每年必考的送分题。阅卷人只关心两件事：**方法分 M**（看出你在消元或代入）和**准确分 A**（两个坐标都对且配对正确）。

- **消元法**：把 x 或 y 的系数**配成相同**，再相加或相减消去一个未知数
- **代入法**：把其中一个方程改写成 $y=\ldots$（或 $x=\ldots$），代入另一个方程
- 常数项要**移到同一边**，移项时符号跟着变：$x+y=3\Rightarrow y=3-x$
- 系数含分数时，先把**整条方程**乘以分母的最小公倍数，化为整数系数再消元
- **检验**：把解代回**两个**原方程，能提前发现符号错误

- **建模型**：题目给情境时，先把两个条件**翻译成两个方程**再解，不要跳步

方法卡　消元法 vs 代入法：选用对照表

方程的形态	推荐做法与理由
两式都是 $ax+by=c$ 型	用**消元法**：系数配平后相加或相减，一步出结果
一式中 y 已被单独写出	用**代入法**：直接把 $y=\ldots$ 换进另一式，代数最短
系数含分数或小数	先把整条方程乘以分母的最小公倍数，**再**选消元或代入
一式中出现 xy 或 x^2	把一次式改写成 $y=\ldots$ 后代入，**二次联立的标准入口**

1 例题 [消元法]

Solve the simultaneous equations $3x+2y=13$ and $5x-4y=7$.

中文：解联立方程组 $3x+2y=13$ 与 $5x-4y=7$。

答 Answer： _____

2 例题 [代入法]

Solve the simultaneous equations $y=2x-1$ and $3x+y=4$.

中文：解联立方程组 $y=2x-1$ 与 $3x+y=4$。

答 Answer： _____

3 例题 [建模]

A workshop makes tables and chairs. Making a table uses 3 hours of machine time and making a chair uses 2 hours. In one week 12 hours of machine time are used to make x tables and y chairs,

and 13 units of wood are used, where each table needs 2 units of wood and each chair needs 3 units. Find the number of tables and the number of chairs made.

中文：某作坊生产桌子和椅子。生产一张桌子用 3 小时机器时间，生产一把椅子用 2 小时。一周内用掉 12 小时机器时间生产了 x 张桌子和 y 把椅子，用掉 13 单位木材，其中每张桌子用 2 单位、每把椅子用 3 单位。求桌子与椅子的数量。

答 Answer： _____

4 例题 [2023 年 6 月 Q2]

A rectangular sports pitch has length x metres and width y metres, where $x > y$. Given that the perimeter of the pitch is 350 m, (a) write down an equation linking x and y. Given also that the area of the pitch is 7350 m^2, (b) write down a second equation linking x and y. (c) Hence find the value of x and the value of y.

中文：一个长方形运动场长 x 米、宽 y 米，且 $x > y$。已知周长为 350 m，(a) 写出联系 x 与 y 的方程。已知面积为 7350 m^2，(b) 再写出第二个方程。(c) 求 x 与 y 的值。

答 Answer： _____

3.2 Quadratic simultaneous equations 二次联立方程

一次 + 二次的联立是 P1 的**压轴计算题**。突破口永远是**把一次方程改写成** $y = \ldots$，代入二次方程，化成关于 x 的一个二次方程；解出 x 后**回代一次方程**求 y。

- **入口永远是那个一次式**：写成 $y = \ldots$ 或 $x = \ldots$ 再代入
- 两个根都要回代，答案必须**成对**写成 (x, y)，不能只给 x 值
- 回代用**一次方程**，因为二次方程代回去容易算错
- **show that** 型：写出消元全过程并化到目标式，官方常给 **A1***（cso，无步骤错误）
- 根式答案必须化为**最简根式**，$\frac{\sqrt{20}}{2}$ 要写成 $\sqrt{5}$
- 消元后出现**四次方程**时，令 $u = x^2$ 降次（x^4 型必用）

方法卡　二次联立四步法

1. **化一次式**：把一次方程改写成 $y = \ldots$（或 $x = \ldots$），把 y 与 x 的关系记牢。
2. **代入消元**：代入二次方程，整理成关于 x 的一元二次方程（设 0 形式）。
3. **解二次方程**：因式分解、求根公式或配方；每个根都要保留。
4. **回代配对**：用**一次方程**求 y，把两组 (x, y) 完整写出。

自检：把每组解代回**原来的两个方程**，确认都对。

5 例题 [代入消元]

Solve the simultaneous equations $y = x^2 - 2$ and $y = 2x + 1$.

中文：解联立方程组 $y = x^2 - 2$ 与 $y = 2x + 1$。

答 Answer：_____

6 例题 [对称式技巧]

Solve the simultaneous equations $x^2 + y^2 = 25$ and $x + y = 7$.

中文：解联立方程组 $x^2 + y^2 = 25$ 与 $x + y = 7$。

答 Answer：_____

7 例题 [2022 年 6 月 Q6]

(a) Given that $2xy - 3x^2 = 50$ and $y - x^3 + 6x = 0$, show that $2x^4 - 15x^2 - 50 = 0$. (b) Hence solve the simultaneous equations $2xy - 3x^2 = 50$ and $y - x^3 + 6x = 0$, giving your answers in fully simplified surd form.

中文：(a) 已知 $2xy - 3x^2 = 50$ 与 $y - x^3 + 6x = 0$，证明 $2x^4 - 15x^2 - 50 = 0$。(b) 据此解联立方程组 $2xy - 3x^2 = 50$ 与 $y - x^3 + 6x = 0$，答案写成最简根式。

答 Answer：_____

8 例题 [2020 年 10 月 Q4]

Use algebra to solve the simultaneous equations $y - 3x = 4$ and $2x^2 + y^2 + 6x - 4y = 4$.

中文：用代数方法解联立方程组 $y - 3x = 4$ 与 $2x^2 + y^2 + 6x - 4y = 4$。

答 Answer： _____

3.3 Simultaneous equations on graphs 用图像解联立方程

这一节考的是**把代数翻译成几何**：方程的交点就是解的图像。阅卷时 **B1 分给图**（画对两条曲线并标出交点），**A1 分给读出的坐标**。

- **交点即解**：把两个方程画在同一个坐标系里，交点坐标 (x, y) 就是联立方程的解
- **读图题**：题目通常给草图，要求从图上读出交点坐标（按指定小数位）
- 图像法常用于**检验**代数结果或求近似值，但精确答案仍要靠代数
- **交点个数由判别式决定**：$\Delta > 0$ 两个交点，$\Delta = 0$ 相切于一点，$\Delta < 0$ 无交点
- 两条直线：平行则无交点（无解），斜率与截距都相同则重合（无穷多解）
- 作图规范：写出方程、标出关键点、标出交点坐标、**图上必须有交点标记**

方法卡　读图四步法与交点个数对照表

1. **化简**：把每个方程整理成最好画的形式（$y = \ldots$ 或 $x = \ldots$）。
2. **画图**：同一坐标系，分别描出两条曲线，并标出关键点（如截距、顶点）。
3. **找交点**：读出交点坐标，**在图上用黑点标出**。
4. **验证**：把读出的坐标代回两个方程核对；再用代数解一次确认无误。

判别式	直线与曲线的位置关系
$\Delta > 0$	相交于**两点**，联立方程有两组解
$\Delta = 0$	**相切**于一点，联立方程有一组（重）解
$\Delta < 0$	**不相交**，联立方程无解

9 例题 [图像 + 代数]

The curve C has equation $y = x^2 - 4$ and the straight line l has equation $y + 3x = 0$. (a) Sketch C and l on the same axes. (b) Write down the coordinates of the points at which C meets the coordinate axes. (c) Using algebra, find the coordinates of the points at which l intersects C.

中文：曲线 C 的方程为 $y = x^2 - 4$，直线 l 的方程为 $y + 3x = 0$。(a) 在同一坐标系上画出 C 与 l。(b) 写出 C 与两坐标轴交点的坐标。(c) 用代数方法求 l 与 C 的交点坐标。

答 Answer： _____

10 例题 [相切与判别式]

The line l has equation $y = 2x + 3$ and the curve C has equation $y = x^2 + 4$. Explain why the line and the curve have only one point of intersection, and state the coordinates of this point.

中文：直线 l 的方程为 $y = 2x + 3$，曲线 C 的方程为 $y = x^2 + 4$。解释为什么直线与曲线只有一个交点，并写出该点坐标。

答 Answer： _____

11 例题 [2019 年 10 月 Q3]

Figure 2 shows a sketch of the curve C with equation $y = x^2 - 5x + 13$. The point M is the minimum point of C. The straight line l passes through the origin O and intersects C at the points M and N as shown. Find, showing your working, (a) the coordinates of M, (b) the coordinates of N.

中文：图 2 是曲线 C（方程 $y = x^2 - 5x + 13$）的草图。M 是 C 的最低点。直线 l 经过原点 O，与 C 交于 M、N 两点。求 (a) M 的坐标，(b) N 的坐标。

答 Answer： _____

3.4 Linear inequalities 一次不等式

一次不等式是“会解方程就会解不等式”，唯一的新东西是**负数要变号**。但真正拿分的地方在**解集的写法**：区间记号与集合记号都被接受，写错形式照样丢分。

- 变形规则与方程**完全相同**，唯一区别：两边同乘或同除**负数要变号**
- 移项要变号：$x - 3 > 2 \Rightarrow x > 5$；去括号时括号前是 $-$ 号，里面每一项都要变号
- 解集表示：**区间记号** $[2, 5)$ 或**集合记号** $\{x : x \geqslant 2\}$
- and 对应**交集** $\cap$；or 对应**并集** $\cup$（$\cap$ 表示“同时成立”，$\cup$ 表示“至少一个成立”）
- 严格不等号端点**取不到**（圆括号），非严格端点**取得到**（方括号）
- 涉及整数时写 $x \in \mathbb{Z}$ 或列出具体整数；涉及无解时写空集 $\varnothing$

方法卡　记号对照与变号口诀

解集形态	区间记号	集合记号
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a, b]$	$\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$
$a < x < b$	(a, b)	$\{x : a < x < b\}$
$x \geqslant a$	$[a, +\infty)$	$\{x : x \geqslant a\}$
$x < a$	$(-\infty, a)$	$\{x : x < a\}$
$x < a$ 或 $x > b$	$(-\infty, b) \cup (a, +\infty)$	$\{x : x < a\} \cup \{x : x > b\}$
无解	$\varnothing$	$\{x : \ldots\} = \varnothing$

变号口诀：同乘同除**正数不变号，同乘同除负数要变号**；移项永远变号。

12 例题　[一次不等式]

Solve the inequality $3(x-2) \leqslant 5x+4$.

中文：解不等式 $3(x-2) \leqslant 5x+4$。

答 Answer： _____

13 例题　[分式型]

Solve the inequality $\dfrac{x-3}{2} > x-1$.

中文：解不等式 $\dfrac{x-3}{2} > x-1$。

答 Answer： _____

14 例题 [2026 年 1 月 Q1]

Find the set of values of x for which $4(x-5) < 2x - 9$.

中文：求满足 $4(x-5) < 2x-9$ 的 x 的取值集合。

答 Answer： _____

15 例题 [不等式组与两种记号]

Solve the inequalities $3x - 2 < 7$ and $x + 4 \geqslant 5$, giving your answer in (i) interval notation, (ii) set notation.

中文：解不等式组 $3x-2<7$ 且 $x+4\geqslant 5$，答案分别用 (i) 区间记号、(ii) 集合记号表示。

答 Answer： _____

3.5 Quadratic inequalities 二次不等式

二次不等式是 P1 的**固定送分题**，但每年都有人丢分——丢的原因几乎只有一个：**只求出根，没有说清取哪一段**。官方评分标准的四个步骤是：**移项**（M1）、**求临界值**（A1）、**选区间**（M1）、**写对解集**（A1）。

- 三步：**移项**（把 0 移到一边）→ **因式分解或求根** → **按开口方向取区间**
- 开口向上（$a>0$）：$>$ 取**两侧**，$<$ 取**中间**
- 开口向下（$a<0$）：$>$ 取**中间**，$<$ 取**两侧**
- 端点：$\leqslant$、$\geqslant$ 取得到，$<$、$>$ 取不到

- 两条不等式**同时**成立取**交集**；**或者**成立取**并集**
- $\Delta<0$ 时二次式恒正（$a>0$）或恒负（$a<0$），此时要写清是无解还是全体实数

方法卡　三步法与符号对照表

开口	$>$（大于）	$<$（小于）
向上（$a>0$）	两侧都取（$x<$ 小的根或 $x>$ 大的根）	只取中间（小的根 $<x<$ 大的根）
向下（$a<0$）	只取中间（小的根 $<x<$ 大的根）	两侧都取（$x<$ 小的根或 $x>$ 大的根）

通法三步：①移项成 $f(x)\cdots 0$；②求临界值 $x_1<x_2$；③画草图读区间（口诀“负负正”：先负、中间正、再负，适用于 $a>0$）。

16 例题　[2023 年 6 月 Q1]

Solve the inequality $4x^2-3x+7\geqslant 4x+9$.

中文：解不等式 $4x^2-3x+7\geqslant 4x+9$。

答 Answer：_____

17 例题　[交集]

Solve the simultaneous inequalities $x^2-5x+6<0$ and $2x-1>0$.

中文：解不等式组 $x^2-5x+6<0$ 且 $2x-1>0$。

答 Answer：_____

18 例题 [完全平方与判别式]

(a) Solve the inequality $x^2 - 2x + 1 > 0$. (b) Explain why the inequality $x^2 + 2x + 5 < 0$ has no solutions.

中文：(a) 解不等式 $x^2 - 2x + 1 > 0$。(b) 说明为什么不等式 $x^2 + 2x + 5 < 0$ 无解。

答 Answer： _____

19 例题 [2026 年 1 月 Q1]

Find the set of values of x for which $x(2x - 5) \leqslant 63$, and hence find the set of values of x for which both $x(2x - 5) \leqslant 63$ and $4(x - 5) < 2x - 9$ hold.

中文：求满足 $x(2x - 5) \leqslant 63$ 的 x 的取值集合，并据此求同时满足 $x(2x - 5) \leqslant 63$ 与 $4(x - 5) < 2x - 9$ 的 x 的取值集合。

答 Answer： _____

3.6 Inequalities on graphs 图像上的不等式

图像上的不等式，解集不再是数轴上的一段，而是**平面上的一个区域**。判断方向只有一条路：**在边界两侧各取一点代入**，看哪一侧成立。

- **边界曲线**把平面分成两侧，**测试点法**决定哪一侧是解集
- 测试点优先取**原点**：它容易代入，且多数题目的原点就在某一侧
- 严格不等号对应**虚线**（边界不包含），非严格对应**实线**（边界包含）
- $y \leqslant f(x)$ 表示在曲线**下方**（或上方）——画完草图先定方向再涂阴影
- 多个不等式对应区域的**公共部分**（∩），画图时是所有阴影的叠加
- 读图题答案要按题目要求给到指定小数位（通常 1 或 2 位）

方法卡　测试点法三步与区域书写通法

1. **画边界**：把每个方程对应的线或曲线画出来（严格不等号用虚线）。
2. **定方向**：在边界的两侧各取一点代入，保留使不等式成立的**那一侧**。
3. **写结果**：区域用不等式组表示，或用集合记号（**用 ∩ 连接**）。

写法	示例
不等式组	$y \leqslant 2x^2 - 50$，$y > 3x + 15$，$x < -5$
集合记号（∩）	$\{x, y \in \mathbb{R} : y \leqslant 2x^2 - 50\} \cap \{x, y \in \mathbb{R} : y > 3x + 15\}$

20 例题 [2021 年 10 月 Q3]

(i) Solve $\dfrac{3}{x} > 4$, using graphs.

中文：(i) 用图像法解 $\dfrac{3}{x} > 4$。

答 Answer： _____

21 例题 [2021 年 10 月 Q3]

Figure 1 shows a sketch of the curve C and the straight line l. The infinite region R, shown shaded in Figure 1, lies in quadrants 2 and 3 and is bounded by C and l only. Given that l has a gradient of 3, C has equation $y = 2x^2 - 50$, and C and l intersect on the negative x-axis, use inequalities to define the region R.

中文：图 1 给出曲线 C 与直线 l 的草图。无界区域 R（图中阴影）位于第二、三象限，仅由 C 与 l 围成。已知 l 的斜率为 3，C 的方程为 $y = 2x^2 - 50$，且 C 与 l 在 x 轴负半轴相交。用不等式定义区域 R。

答 Answer： _____

22 例题 [读图与测试点]

Figure 1 shows the graphs of $y = x^2 - 2$ and $y = 2x + 1$. (a) Write down the x-coordinates of the points where the two graphs intersect. (b) Use your answer to state the set of values of x for which $x^2 - 2 > 2x + 1$. (c) Explain how you would decide which side of the line $y = 2x + 1$ is shaded when drawing the region $x^2 - 2 > 2x + 1$.

中文：图 1 给出 $y = x^2 - 2$ 与 $y = 2x + 1$ 的图像。(a) 写出两图交点的横坐标。(b) 据此写出满足 $x^2 - 2 > 2x + 1$ 的 x 的取值集合。(c) 说明画区域 $x^2 - 2 > 2x + 1$ 时如何判断直线 $y = 2x + 1$ 的哪一侧被涂色。

答 Answer： _____

3.7 Regions 区域

区域题是 P1 的**近年高频题型**，也是本章最“规范”的一类题：官方评分标准把答案写死了。记住三条红线：**不能写 R、多条不等式用 $\cap$、方向必须自洽**。

- 区域由**三要素**确定：**边界方程 + 不等号方向 + 附加的 x 或 y 范围**
- **红线一**：官方原文「Use of R instead of x or y will score 0 marks」——不能用 R 代替 y
- **红线二**：多条不等式之间用 $\cap$（或逗号），**用 $\cup$ 丢掉最后一分**
- 严格与非严格不等号**官方都接受**，但整套答案必须**互相自洽**
- 区域常常需要附加范围，如 $x \geqslant a$、$y \geqslant 0$，**漏掉就丢 A1**
- 可行域上可求顶点、面积与目标函数的最值（线性规划）

方法卡　区域三步法与常见失分写法

1. **找边界**：从图中读出每条边界的方程（直线写成 $y = \ldots$ 或 $ax + by = c$）。
2. **定方向**：在每条边界两侧各取一点代入，保留成立的一侧。
3. **补范围**：检查区域是否还需要 $x \geqslant a$、$y \geqslant 0$ 之类的附加限制。

错误写法	为什么拿不到分
$R \leqslant 2x^2 - 50$	官方明确 0 分：必须写 y（或 x）
用 $\cup$ 连接各条不等式	官方会扣掉最后一个 A1
$y \leqslant 2x^2 - 50$ 但漏掉 $x < -5$	区域没有封口，区域定义不完整
方向自相矛盾（一处 $<$ 一处 $\leqslant$）	官方要求整套不等式方向一致

23 例题 [2019 年 1 月 Q4]

Figure 1 shows a line l_1 with equation $2y = x$ and a curve C with equation $y = 2x - \dfrac{x^2}{8}$. The region R, shown unshaded in Figure 1, is bounded by the line l_1, the curve C and a line l_2. Given that l_2 is parallel to the y-axis and passes through the intercept of C with the positive x-axis, identify the inequalities that define R.

中文：图 1 中直线 l_1 的方程为 $2y = x$，曲线 C 的方程为 $y = 2x - \dfrac{x^2}{8}$。区域 R（图中未涂色部分）由 l_1、C 与直线 l_2 围成。已知 l_2 平行于 y 轴且过 C 与 x 轴正半轴的交点，写出定义 R 的不等式。

答 Answer： _____

24 例题 [2024 年 6 月 Q6]

The region R, shown shaded in Figure 3, is bounded by C, l and the x-axis, where the line l has equation $y - 5x = 75$ and the curve C has equation $y = 2x^2 + x - 21$. Use inequalities to define the region R.

中文：图 3 中阴影区域 R 由 C、l 与 x 轴围成，其中直线 l 的方程为 $y - 5x = 75$，曲线 C 的方程为 $y = 2x^2 + x - 21$。写出定义区域 R 的不等式。

答 Answer： _____

25 例题 [2022 年 1 月 Q4]

Figure 1 shows a line l with equation $x + y = 6$ and a curve C with equation $y = 6x - 2x^2 + 1$. The line l intersects the curve C at the points P and Q. The region R, shown shaded in Figure 1, is bounded by C, l and the x-axis. Use inequalities to define the region R.

中文：图 1 中直线 l 的方程为 $x + y = 6$，曲线 C 的方程为 $y = 6x - 2x^2 + 1$。直线 l 与曲线 C 交于 P、Q 两点。阴影区域 R 由 C、l 与 x 轴围成。写出定义区域 R 的不等式。

答 Answer：_____

3.8 满分必备：不等式区间的规范书写与端点取舍

满分必备　满分必备：不等式区间的规范书写与端点取舍

一、两种记号都可以，但必须“对号入座” P1 官方对解集的写法是开放的：**区间记号**与**集合记号**都被接受。但前提是——题目怎么说，你就得怎么写。

- 说“in interval notation”：写 $[a,b)$、$(-\infty,c]$ 这样的区间；
- 说“in set notation”：写 $\{x:a\leqslant x<b\}$，**冒号前后都要有内容**；
- 两者都没说：写区间记号最省时间，也最不容易写错括号。

阅卷提示：集合记号写成 $\{x\leqslant 5\}$（缺冒号后的条件）通常仍被接受，但写全 $\{x\in\mathbb{R}:x\leqslant 5\}$ 最保险。

二、端点开闭：只看原不等号的“强度”端点能不能取到，**完全由原不等号决定**，不能凭感觉。

原不等号	端点	常见错写
$x\leqslant a$	能取到	写成 $x<a$（把 $\leqslant$ 丢了）
$x<a$	取不到	写成 $x\leqslant a$（把 $<$ 升格）
$x\geqslant a$	能取到	写成 $x>a$
$x>a$	取不到	写成 $x\geqslant a$

两个高频陷阱：①二次不等式里“负负正”记反；②端点是**重根**时，那个点**永远取不到**（因为平方恒 $\geqslant 0$），如 $(x-1)^2>0$ 的解集是 $x\neq 1$ 而不是 $x\geqslant 1$。

三、and 与 or：一个 $\cap$ 一个 $\cup$ and（同时成立）对应**交集 $\cap$**；**or（至少一个成立）**对应**并集 $\cup$**。集合记号里写错符号是本章最贵的错误：官方评分标准在区域题中明确写着「**Withhold the final mark for use of “or” or $\cup$ is used between the different inequalities**」。自检口诀：**交集一定比原来每一段都小，并集一定不小于原来任何一段**。若你用 $\cap$ 算出的区间比原来的大，一定是方向错了。

四、官方评分标准原文怎么说（照抄一遍就不会错）以 2023 年 6 月 Q1 为例，官方 Notes 写得

很直白：

- 「Gathers terms to one side and solves their 3TQ ... to obtain at least one critical value for x」——**移项并解出至少一个临界值**给 M1；
- 「Allow unsimplified but must be single fractions e.g. allow $-\frac{2}{8}$, $\frac{16}{8}$」——**临界值可以未化简，但必须是单个分数**；
- 「Condone poor notation e.g. "$-\frac{1}{4} \geqslant x \geqslant 2$"」——**这样写拿不到最后一分**；
- 「Apply isw if possible ... correct work leading to ... followed by $-\frac{1}{4} \geqslant x \geqslant 2$ can score full marks」——**过程对、只有最后一行写反，仍然给满分**。

换句话说：**最后一行写错，过程分照给，但准确分要丢**。所以务必把最后一行写对。

1 满分示范 [规范书写]

Solve the inequality $x^2-5x+6 \leqslant 0$, giving your answer in (i) interval notation, (ii) set notation, and state clearly whether the end points are included.

中文：解不等式 $x^2-5x+6 \leqslant 0$，答案分别用 (i) 区间记号、(ii) 集合记号表示，并说明端点是否取得到。

答 Answer： _____

2 改错练习 [官方 Notes]

A student solves $4x^2-3x+7 \geqslant 4x+9$ by writing $4x^2-7x-2 \geqslant 0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)(x-2) \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -\frac{1}{4}$ or $x \geqslant 2$. Identify the two things wrong with this working and write the correct solution.

中文：某同学解 $4x^2-3x+7 \geqslant 4x+9$ 时写成 $4x^2-7x-2 \geqslant 0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)(x-2) \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -\frac{1}{4}$ 或 $x \geqslant 2$。指出这份解答的两处问题，并写出正确解法。

答 Answer： _____

3.9 满分必备：含参不等式的参数范围与临界值讨论

满分必备　满分必备：含参不等式的参数范围与临界值讨论

一、含参不等式的三大问法 P1 里含参不等式几乎只有三种问法，答法各不相同：

问法	判据	答案形态
恒成立（对一切实数 x）	$a>0$ 且 $\Delta<0$	参数的**开区间**
有解（存在实数 x）	$\Delta\geqslant 0$	参数的**并集**（两段闭区间）
只有一个解 / 恰有一个解	$\Delta=0$	参数的**两个离散值**

注意：“恒成立”要求 $a>0$；若二次项系数可能为 0，**必须把 $a=0$ 单独拎出来讨论**。

二、临界值的两种来源：判别式与顶点临界值 x_1,x_2 有两条来源，都要会：

- **判别式：**$\Delta=b^2-4ac$，决定有 0 个、1 个还是 2 个实根，也就决定不等式解集的形状；
- **顶点/对称轴：**$x=-\dfrac{b}{2a}$，决定哪一段被取到；含 x 的系数 b 通常是参数的线性式，**顶点坐标是参数的二次式**，这一步最容易出错。

建议把两者写在同一张草图上：横轴标临界值，抛物线标开口方向与顶点高度。

三、分类讨论必须“互斥且完备”阅卷人检查的是：**你列出的每一类是否互不重叠、是否覆盖了全部可能**。写参数范围时按这个模板：

1. 先写**二次项系数**的讨论（$a>0$ / $a=0$ / $a<0$）；
2. 再写**判别式**的讨论（$\Delta>0$ / $\Delta=0$ / $\Delta<0$）；
3. 最后写**端点是否取到**（$>$ 还是 $\geqslant$），这一步决定端点归属哪一类。

端点讨论的常见错误：$\Delta=0$ 时不等式若含等号，**那个解是取得到的**；题目若写的是严格不等号，则 $\Delta=0$ 的情形要单独说明“只有一个解但取不到”。

四、判别式工具箱设 $f(x)=ax^2+bx+c$，$a\neq 0$：

判别式	图像与不等式的含义
$\Delta>0$	两个不同实根 $x_1<x_2$，开口向上时 $f(x)>0$ 在 $x<x_1$ 或 $x>x_2$
$\Delta=0$	重根 $x=-\frac{b}{2a}$，$f(x)$ 恰在此处取到 0
$\Delta<0$	无实根，$f(x)$ 恒正（$a>0$）或恒负（$a<0$）

配套：$\Delta=0\Rightarrow b^2=4ac\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}$（重根坐标一步得到）。

1 满分示范 [恒成立]

Find the values of k for which the inequality $x^2 + kx + 4 > 0$ holds for all real values of x.

中文：求 k 的取值范围，使不等式 $x^2 + kx + 4 > 0$ 对一切实数 x 恒成立。

答 Answer： _____

2 满分示范 [有解与端点]

Find the range of values of k for which the inequality $x^2 + (2k-1)x + 9 \leqslant 0$ has at least one solution.

中文：求 k 的取值范围，使不等式 $x^2 + (2k-1)x + 9 \leqslant 0$ 至少有一个解。

答 Answer： _____

3 分类讨论 [完备性]

Find the values of k for which the inequality $kx^2 - 2x + 1 > 0$ holds for all real values of x.

中文：求 k 的取值范围，使不等式 $kx^2 - 2x + 1 > 0$ 对一切实数 x 恒成立。

答 Answer： _____

3.10 满分必备：区域与线性规划——可行域、约束条件与最优化取值的书写

满分必备 满分必备：区域与线性规划——可行域、约束条件与最优化取值的书写

一、区域题的三要素：边界、方向、范围写出定义区域的不等式组，**三个要素缺一不可**：

1. **边界**：每条边界线（或曲线）对应一个不等式；线一般写成 $ax + by = c$ 或 $y = \ldots$；
2. **方向**：用测试点法确定 $\leqslant$ 还是 $\geqslant$（也可写成 $y \leqslant f(x)$ 或 $y \geqslant f(x)$）；
3. **范围**：区域若在坐标轴一侧，要补 $y \geqslant 0$；若止于某个交点，要补 $x \geqslant a$。

官方评分标准里的区域答案总是**四五个不等式**，而不是“两条”。少了范围限制，区域就“漏了一块”。

二、官方对区域题的三条硬性规定把官方 Notes 抄在这里，逐条对照：

- 「**Use of R instead of x or y will score 0 marks**」——绝对不能写 $R \leqslant 2x^2 - 50$；
- 「**Withhold the final mark for use of "or" or $\cup$ is used between the different inequalities**」——多条不等式之间用 $\cap$ 或逗号；
- 「Allow strict or non-strict inequalities and does not need to be consistent」——$<$ 与 $\leqslant$ 官方都接受，**但你写的那一套必须自洽**（不要一半严格一半不严格却指向不同的边界）。

判据：写完后把区域内部的一个点代进你写的每一个不等式，**全部成立**才算过关。

三、可行域与线性规划：P1 与国内教材的分工国内教材（人教 A 版必修五 3.3）要求完整的线性规划：写出**约束条件**、画**可行域**、在**顶点**上求目标函数的最值。P1（WMA11）本身只要求到**用不等式定义区域**这一步，**不考**目标函数最值的求解；但“可行域”这个概念在 P1 区域题里是隐含的：区域就是所有约束不等式的**公共部分**。

步骤	P1 的要求
由情境写出约束不等式	会（区域题的前半段）
判断不等号方向	会（测试点法）
写出定义区域的不等式组	会（**核心考点**）
画可行域	会（可能给 B1）
在顶点上求最值	**不考**（国内教材与 P1 的分水岭）

掌握线性规划对 P1 有两点好处：①写约束条件时能想到“少了 $x \geqslant 0$”这类范围限制；②看懂区域图的角点，能自检方向对不对。

四、书写模板（照抄即可拿满）

题面要什么	怎么写
三条不等式（非集合）	$y \leqslant 2x^2 - 50$，$y > 3x + 15$，$x < -5$
集合记号	$\{x, y \in \mathbb{R} : y \leqslant 2x^2 - 50\} \cap \{x, y \in \mathbb{R} : y > 3x + 15\}$
带范围	再补一条 $x \geqslant a$ 或 $y \geqslant 0$
夹心写法	$6x - 2x^2 + 1 \leqslant y \leqslant 6 - x$（算两条不等式，官方认可）

交卷前三查：①有没有写 R？②是不是用 $\cap$（或逗号）连接？③缺不缺 $x \geqslant 0$ / $y \geqslant 0$ 这类范围？

1 满分示范 [区域书写]

Figure 1 shows the curve C with equation $y = 2x - \dfrac{x^2}{8}$ and the line l_1 with equation $2y = x$. The line l_2 is parallel to the y-axis and passes through the intercept of C with the positive x-axis. The region R, shown unshaded in Figure 1, is bounded by l_1, C and l_2. Write down the inequalities that define R, giving your answer in set notation.

中文：图 1 中曲线 C 的方程为 $y = 2x - \dfrac{x^2}{8}$，直线 l_1 的方程为 $2y = x$。直线 l_2 平行于 y 轴且过 C 与 x 轴正半轴的交点。图中未涂色区域 R 由 l_1、C 与 l_2 围成。用集合记号写出定义 R 的不等式。

答 Answer： _____

2 衔接国内教材 [线性规划]

A factory produces products A and B. Each item of product A uses 2 hours of machine time and 3 kg of raw material; each item of product B uses 4 hours of machine time and 2 kg of raw material. The factory has 16 hours of machine time and 12 kg of raw material available. Let x be the number of items of product A and y the number of items of product B. (a) Write down the constraints on x and y. (b) Hence state the set of inequalities defining the feasible region.

中文：某厂生产 A、B 两种产品。每件 A 需 2 小时机器时间、3 kg 原料；每件 B 需 4 小时机器时间、2 kg 原料。工厂现有 16 小时机器时间与 12 kg 原料。设生产 A 产品 x 件、B 产品 y 件。(a) 写出 x、y 的约束条件。(b) 据此写出定义可行域的不等式组。

答 Answer： _____

3.11 普高衔接：一次不等式组、二元一次不等式组与平面区域

普高衔接　普高衔接：一次不等式组、二元一次不等式组与平面区域

人教 A 版对应位置国内教材对本章内容的覆盖**比 P1 更早、更细**：

- **必修五（旧版必修第二册）第三章「不等式」3.1 不等关系与不等式**：讲一元一次不等式（组）的解法与数轴表示，对应 P1 的 **3.4**；
- **3.2 一元二次不等式及其解法**：用“二次三项式的符号”表解一元二次不等式，对应 P1 的 **3.5**；
- **3.3 二元一次不等式（组）与简单的线性规划问题**（3.3.1 二元一次不等式（组）与平面区域、3.3.2 简单的线性规划问题）：对应 P1 的 **3.6**、**3.7**、**3.10**。

也就是说：国内学生在**解法上**往往比 P1 学生熟练，真正的差别在**答题规范**上。

国内讲法与 P1 要求的差异

知识点	国内讲法	P1 要求
一次不等式	强调“两边同乘除负数变号”、数轴图	同样强调变号，但**答案必须写成区间或集合记号**
解集表示	默认用数轴图	**必须书面写出**区间记号或集合记号
一元二次不等式	用“符号表”直接判断	同样方法，但要求写出**临界值**与**选段理由**
二元一次不等式	画平面区域、直观理解	要求**用不等式定义区域**，不能只画图
线性规划	完整考：可行域 + 顶点 + 目标函数最值	**只要求写出约束不等式**（最值不考）
参数讨论	散见于压轴题，多为“恒成立”	明确考：**判别式 + 分类讨论 + 端点取舍**

P1 额外要求、国内教材略过或讲得少的四个点

1. **解集的书面记号**：国内以数轴图为主，P1 官方明确接受区间记号与集合记号，**答案只有口头描述或图形一律不给分**。
2. **含参不等式的分类讨论**：国内高中很少系统讲“恒成立 / 有解 / 恰有一个解”三种问法，P1 把它作为独立考点，要求**讨论互斥且完备**。
3. **端点取舍**：$\leqslant$ 与 $<$ 的差别在 P1 是一整个 A1 分，国内做题时往往一眼带过。
4. **区域的不等式表达与线性规划的分工**：国内要求“画区域 + 求最值”，P1 只要“用不等式写区域”，但**反过来要求更严**——不能用 R 代替 x、y，多条不等式必须用 $\cap$。

给国内转轨学生的建议：把国内“画图”的习惯升级为“写不等式”，再把国内“求最值”的习惯降级为“能自检方向”——这两条正是 P1 满分的分水岭。

1 衔接练习 [普高衔接]

Write down the set of values of x satisfying both $2x-3<9$ and $x+2\geqslant 4$, giving your answer in (i) interval notation, (ii) set notation, and (iii) as a number line diagram.

中文：写出同时满足 $2x-3<9$ 与 $x+2\geqslant 4$ 的 x 的取值集合，答案分别用 (i) 区间记号、(ii) 集合记号、(iii) 数轴图表示。

答 Answer： _____

2 衔接练习 [普高衔接]

Figure 1 shows the region R bounded by the x-axis, the y-axis and the line with equation $2x + 3y = 12$. Use inequalities to define the region R.

中文：图 1 中区域 R 由 x 轴、y 轴与直线 $2x + 3y = 12$ 围成。写出定义区域 R 的不等式。

答 Answer： _____

3.12 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘

下表列出 2019–2026 年 P1 中属于第 3 章考点的真题定位。**使用方法：**限时 40 分钟完成表中标记为 ★★★ 的题目（含区域题的书写），完成后用**附录 C 的错题模板**逐题复盘——特别记录：**是方法不会，还是答案形式写错**。本讲义提醒：近五年本章失分的主因不是算错，而是**端点开闭、∩ 与 ∪、R 不能代替 y**。

考点	近五年真题定位（年份 · 场次 · 题号 · 分值）
一次联立方程	21 年 1 月 Q2（6 分）
	23 年 6 月 Q2（6 分）
	25 年 1 月 Q3（5 分）
二次联立方程	19 年 10 月 Q3（10 分）
	20 年 10 月 Q4（7 分）
	22 年 1 月 Q4（7 分）
	22 年 6 月 Q6（7 分）
	24 年 6 月 Q6（7 分）
二次不等式	19 年 6 月 Q3（9 分）
	21 年 6 月 Q5（8 分）
	23 年 6 月 Q1（4 分）
	26 年 1 月 Q1（6 分）
图像上的不等式区域	21 年 10 月 Q3（6 分）
	19 年 1 月 Q4（3 分）
	23 年 6 月 Q7（6 分）

1 真题演练 [2023 年 6 月 Q1（4 分）]

In this question you must show all stages of your working. Solutions relying on calculator technology are not acceptable. Solve the inequality $4x^2 - 3x + 7 \geqslant 4x + 9$.

中文：本题必须写出全部解题步骤，不接受仅依赖计算器的解法。解不等式 $4x^2 - 3x + 7 \geqslant 4x + 9$。

答 Answer： _____

2 真题演练 [2022 年 1 月 Q4（7 分）]

In this question you must show all stages of your working. Solutions relying on calculator technology are not acceptable. Figure 1 shows a line l with equation $x + y = 6$ and a curve C with equation $y = 6x - 2x^2 + 1$. The line l intersects the curve C at the points P and Q as shown in Figure 1. (a) Find, using algebra, the coordinates of P and the coordinates of Q. (4) The region R, shown shaded in Figure 1, is bounded by C, l and the x-axis. (b) Use inequalities to define the region R. (3)

中文：本题必须写出全部解题步骤，不接受仅依赖计算器的解法。图 1 中直线 l 的方程为 $x + y = 6$，曲线 C 的方程为 $y = 6x - 2x^2 + 1$。直线 l 与曲线 C 交于 P、Q 两点。(a) 用代数方法求 P 与 Q 的坐标。(4) 图 1 中阴影区域 R 由 C、l 与 x 轴围成。(b) 用不等式定义区域 R。(3)

答 Answer： _____

3 真题演练 [2021 年 10 月 Q3（6 分）]

(i) Solve $\frac{3}{x} > 4$. (3) Figure 1 shows a sketch of the curve C and the straight line l. The infinite region R, shown shaded in Figure 1, lies in quadrants 2 and 3 and is bounded by C and l only. Given that l has a gradient of 3, C has equation $y = 2x^2 - 50$, and C and l intersect on the negative x-axis, use inequalities to define the region R. (3)

中文：(i) 解 $\frac{3}{x} > 4$。(3) 图 1 给出曲线 C 与直线 l 的草图。无界阴影区域 R 位于第二、三象限，仅由 C 与 l 围成。已知 l 的斜率为 3，C 的方程为 $y = 2x^2 - 50$，且 C 与 l 在 x 轴负半轴相交。用不等式定义区域 R。(3)

答 Answer： _____

4 真题演练 [2019 年 1 月 Q4（3 分）]

Figure 1 shows a line l_1 with equation $2y = x$ and a curve C with equation $y = 2x - \frac{x^2}{8}$. The region R, shown unshaded in Figure 1, is bounded by the line l_1, the curve C and a line l_2. Given that l_2 is parallel to the y-axis and passes through the intercept of C with the positive x-axis, identify the inequalities that define R.

中文：图 1 中直线 l_1 的方程为 $2y = x$，曲线 C 的方程为 $y = 2x - \frac{x^2}{8}$。图中未涂色区域 R 由 l_1、C 与直线 l_2 围成。已知 l_2 平行于 y 轴且过 C 与 x 轴正半轴的交点，写出定义 R 的不等式。

答 Answer： _____

图像与变换　Graphs and Transformations

本章导读

本章是 P1 中**纯概念加少量代数**的集中区。近五年 27 道真题的分布很稳定：**倒数函数图像（C4b）与三次函数图像（C4a）各占约三成，图像变换组合（C4f）约占两成，交点个数（C4c）与平移拉伸（C4d）各占一成**。本章题目几乎都不超过 12 分，但**容错率极低**——曲线画歪一点、把渐近线说成“趋近于”而不是“无限接近”，官方评分标准就判你不得分。

本章有**三条不能违反的铁律**，请先记住再往下读：

铁律一：定性描述必须用官方词汇。「single asymptote with equation $y = 4$」不能写成「曲线靠近 $y = 4$」；「turning point at the origin」不能写成「最低点在 O 点」。官方 Mark Scheme 对描述题常标 **(oe)**（or equivalent），但同时会列出**唯一可接受的说法**。

铁律二：变换有两个方向，别只学一个。国内教材习惯讲“$f(x-c)$ 是向右平移 c”，而 P1 真题常反问你“要得到 $y = f(x-3)$，原曲线应如何变换”——**必须说清是“图形的移动”还是“坐标的移动”**，官方 Notes 专门为此加注，说明两种表述可互换。

铁律三：带参数的图像题考的是“参数范围”而不是“算出一个值”。这类题（2022 年 1 月 Q10、2024 年 10 月 Q6、2025 年 10 月 Q6、2026 年 6 月 Q10）在近五年出现频率极高，最后一步往往是**判别式或重根条件**，中间任何一步没写出方法分都会连坐扣掉。本章的 **4.7–4.9 三节“满分必备”**就是把「定性怎么写」「顺序怎么排」「反推怎么解」三件事彻底讲透，前六节是工具。

本单元新词 Key Vocabulary

English 英文	中文	在 P1 中的用法
cubic function	三次函数	形如 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$（$a \neq 0$）；$a > 0$ 时自左下走向右上
cubic graph	三次函数图像	S 形曲线；最多两个极值点，最多三个不同的根
turning point	极值点（驻点）	图像由增转减或由减转增之处；**先说 maximum 还是 minimum，再说坐标**
maximum / minimum	极大值点 / 极小值点	maximum 是倒扣 ∩ 形的顶；minimum 是正扣 ∪ 形的底
stationary point	驻点	导数为零的点；P1 不用微积分语言，只说 turning point
sketch	草图	官方用词；必须标出与坐标轴的交点坐标与渐近线方程
intercept	截距	x intercept 写作 $(a, 0)$，y intercept 写作 $(0, b)$，**括号与坐标都不能省**
root / zero	根 / 零点	$f(x) = 0$ 的 x 值；相切处是**重根**（重复根）
double root / repeated root	重根	$(x - a)^2$ 型根，图像在此与 x 轴相切而不穿过
multiplicity	重数	根的指数；奇数重根“穿过” x 轴，偶数重根“切了又回”
reciprocal function	倒数函数	$y = \frac{k}{x}$ 或 $y = \frac{k}{x - a} + b$；定义域与值域均排除 0
asymptote	渐近线	曲线无限趋近但不与之相交的直线；**必须写出方程**，不能只说“有一条水平线”
vertical asymptote	垂直渐近线	$x = a$；由分母为零给出，如 $y = \frac{1}{x - 2}$ 的垂直渐近线是 $x = 2$
horizontal asymptote	水平渐近线	$y = b$；如 $y = \frac{k}{x} + b$ 的水平渐近线是 $y = b$
quadrant	象限	描述倒数图像各支的位置；$k > 0$ 在第 I、III 象限，$k < 0$ 在第 II、IV 象限
point of intersection	交点	两曲线的公共点；常问“有多少个交点”或“求交点坐标”
translation	平移	向左 / 向右 / 向上 / 向下移动；必须写明单位与方向
vector translation	向量平移	如“translate by vector $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$”
stretch	拉伸 / 压缩	factor 小于等于 1 是压缩，factor 大于 1 是拉伸；必须写明平行于哪条坐标轴
reflection	反射（对称）	关于 x 轴对应取负；关于 y 轴对应把 x 换成 $-x$

4.1 Cubic graphs 三次函数图像

三次函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$（$a \neq 0$）的图像是 P1 里唯一需要**定性刻画**的一类曲线。考的不是画得多准，而是**能不能用规范的词把关键特征说对**：端点走向、与坐标轴的交点、极值点的个数与类型、重根处是否相切。

- **端点行为由 a 的符号唯一决定**：$a > 0$ 时图像自左下走向右上（先升后降再升）；$a < 0$ 时自左上走向右下

- 奇次函数图像关于**原点中心对称**：若 (p,q) 在图像上，则 $(-p,-q)$ 也在图像上
- 与 x 轴最多交于**三点**；与 y 轴交于 $(0,d)$，**这一个交点永远存在**
- x 方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的根是**一个、一个重根或三个不同实根**，对应图像「穿一点」「相切并穿一点」「穿三点」三种情形
- **奇穿偶回**：$(x-a)^1$ 型根图像**穿过** x 轴；$(x-a)^2$ 型根图像**切了又回**；$(x-a)^3$ 型（奇重数）仍穿过
- 极值点最多**两个**；两个都存在时**一个 maximum 一个 minimum**，且 $a>0$ 时 maximum 在前
- **画图三要素**：①与坐标轴的交点（含坐标）；②极值点的类型；③重根处相切。官方给分点基本落在这三处

方法卡　三次函数图像速判表

x 方程根的情形	图像表现	规范表述（照抄得分）
三个不同实根	与 x 轴交于三点	**crosses the x-axis at three points**
一个单实根	与 x 轴交于一点	**crosses the x-axis at only one point**
二重根加一个单根	相切于二重根，另穿一点	**touches the x-axis at $x=a$ and crosses it at $x=b$**
二重根	与 x 轴相切于一点	**touches the x-axis at $x=a$**（**绝不能写 crosses**）

待求对象	最快算法	注意点
x 截距	解 $f(x)=0$，**先因式分解**	写 $(a,0)$ 而不是只写 $x=a$
y 截距	令 $x=0$ 得 $(0,f(0))$	一次代入，几乎不会错
极值点个数	求 $3ax^2+2bx+c=0$ 的判别式	P1 只要**个数与类型**，不要写导数值
图像是否过原点	检查常数项是否为 0	$d=0$ 时图像必过原点
相切处切线方程	重根处切线就是 $y=0$	由 $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$ 判定重根

1　例题　[2020 年 1 月 Q10（8 分）]

The curve C_1 has equation $y=f(x)$, where $f(x)=(4x-3)(x-5)$. (a) Sketch C_1 showing the coordinates of any point where the curve touches or crosses the coordinate axes. (b) Hence or otherwise (i) find the values of x for which $f\left(\frac{x}{4}\right)=0$ (ii) find the value of the constant p such that the curve with equation $y=f(x)+p$ passes through the origin.

中文：曲线 C_1 的方程为 $y=f(x)$，其中 $f(x)=(4x-3)(x-5)$。(a) 画出 C_1，标出曲线与坐标轴相切或相交处的坐标。(b) 据此或用其他方法，(i) 求 $f\left(\frac{x}{4}\right)=0$ 中 x 的值；(ii) 求常数 p 的值，使方程为 $y=f(x)+p$ 的曲线过原点。

答 Answer：_____

2 例题 [2019 年 1 月 Q11（12 分，(a)(b) 部分）]

(a) On Diagram 1 sketch the graphs of (i) $y = x(3 - x)$ (ii) $y = x(x - 2)(5 - x)$ showing clearly the coordinates of the points where the curves cross the coordinate axes. (b) Show that the x coordinates of the points of intersection of $y = x(3 - x)$ and $y = x(x - 2)(5 - x)$ are given by the solutions of the equation $x(x^2 - 8x + 13) = 0$.

中文：(a) 在图 1 中画出 (i) $y = x(3 - x)$ (ii) $y = x(x - 2)(5 - x)$ 的图像，清楚标出两曲线与坐标轴相交点的坐标。(b) 证明 $y = x(3 - x)$ 与 $y = x(x - 2)(5 - x)$ 交点的 x 坐标由方程 $x(x^2 - 8x + 13) = 0$ 的解给出。

答 Answer： _____

3 例题 [2019 年 1 月 Q11（12 分，(c) 部分）]

The curves $y = x(3 - x)$ and $y = x(x - 2)(5 - x)$ intersect at the points O, P and Q, where P lies in the first quadrant. (a) Find, using algebra and showing your working, the exact x coordinate of P. (b) Hence find, in simplest form, the exact coordinates of P.

中文：曲线 $y = x(3 - x)$ 与 $y = x(x - 2)(5 - x)$ 交于 O、P、Q 三点，其中 P 在第一象限。(a) 用代数方法并写出解题过程，求 P 的精确 x 坐标。(b) 据此求 P 的最简精确坐标。

答 Answer： _____

4 例题 [2021 年 10 月 Q6（10 分）]

In this question you must show all stages of your working. Solutions relying on calculator technology are not acceptable. A curve C has equation $y = f(x)$ where $f(x) = 2(x+1)(x-3)^2$. (a) Sketch a graph of C. Show on your graph the coordinates of the points where C cuts or meets the coordinate axes. (b) Write $f(x)$ in the form $ax^3 + bx^2 + cx + d$, where a, b, c and d are constants to be found. (c) Hence find the equation of the tangent to C at the point where $x = 3$.

中文：本题必须写出全部解题步骤，不接受仅依赖计算器的解法。曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，其中 $f(x) = 2(x+1)(x-3)^2$。(a) 画出 C 的图像，在图上标出 C 与坐标轴相交处的坐标。(b) 把 $f(x)$ 写成 ax^3+bx^2+cx+d 的形式，其中 a、b、c、d 为待求常数。(c) 据此求 C 在 $x = 3$ 处的切线方程。

答 Answer： _____

4.2 Reciprocal graphs 倒数函数图像

倒数函数 $y = \dfrac{k}{x}$ 是 P1 中**最容易被画错的曲线**。它的骨架只有两句话：**分母为零处有一条垂直渐近线；当 $x \to \pm\infty$ 时图像趋于水平渐近线**。所有变形 $y = \dfrac{k}{x-a} + b$ 都只是把这条骨架平移伸缩，考的是**你能不能用方程把渐近线说清**。

- **定义域与值域都排除 0**：$x=0$ 处无定义，$y=0$ 处图像永不到达
- 垂直渐近线：令**分母为零**得 $x=a$，即 $y=\dfrac{k}{x-a}$ 的垂直渐近线是 $x=a$
- 水平渐近线：$x\to\pm\infty$ 时分数趋零，故 $y=\dfrac{k}{x-a}+b$ 的水平渐近线是 $y=b$
- $k>0$ 时两支分别在第 I、III 象限；$k<0$ 时在第 II、IV 象限；**加减常数会改变支所在的象限**
- 与 x 轴交点：令 $y=0$，**只有常数项非零时才有一个**；纯 $y=\dfrac{k}{x}$ 无 x 截距
- 与 y 轴交点：令 $x=0$ 得 $\left(0,\dfrac{k}{-a}\right)$，**前提是** $a\neq 0$
- **变换即时记**：$\dfrac{k}{x}\to\dfrac{k}{x-a}$ 是右移 a；$\to\dfrac{k}{x}+b$ 是上移 b；$\to\dfrac{-k}{x}$ 是关于 x 轴反射

方法卡　倒数图像五要素速查表

要写的项目	怎么求	例与规范写法
垂直渐近线	分母 $=0$	$y=\dfrac{3}{x-2}$：$x=2$
水平渐近线	$x\to\pm\infty$，或看分子常数除以变量	$y=\dfrac{3}{x-2}+1$：$y=1$
x 截距	令 $y=0$（常数项非零时恰有一个）	$y=\dfrac{2}{x}-k$：$\left(\dfrac{2}{k},0\right)$
y 截距	令 $x=0$（分母常数项非零时存在）	$y=\dfrac{1}{2-x}$：$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$
所在象限	看 k、a、b 的符号	$k>0$ 且 $b<0$：第 I、II、IV 象限

常见错误	为什么错	正确处理
把垂直渐近线写成 $y=0$	$y=0$ 是水平渐近线	垂直看**分母**，水平看**常数项**
说“曲线趋近 $x=2$”	渐近线是直线，必须有方程	写 **the asymptote is** $x=2$
只写“有一条渐近线”不写方程	官方要求给出 equation	必须写出 $x=a$ 或 $y=b$
以为 $y=\dfrac{k}{x}$ 与 x 轴有交点	$k\neq 0$ 时 $\dfrac{k}{x}$ 永远不等于 0	明确写 no x-intercept
把 x 截距与 y 截距的方法互换	记反了令谁为零	$y=0$ 给 x 截距；$x=0$ 给 y 截距

5　例题　[2024 年 10 月 Q6（9 分）]

In this question you must show all stages of your working. (a) Sketch the curve C with equation $y=\dfrac{1}{2-x}$. State on your sketch the equation of the vertical asymptote and the coordinates of the intersection of C with the y-axis. The straight line l has equation $y=kx-4$, where k is a constant. Given that l cuts C at least once, (b)(i) show that $k^2-5k+4\geqslant 0$ (ii) find the range of possible values of k.

中文：本题必须写出全部解题步骤。(a) 画出曲线 C（方程 $y=\dfrac{1}{2-x}$）的图像，在图上写出垂直渐近线的方程以及 C 与 y 轴交点的坐标。直线 l 的方程为 $y=kx-4$，其中 k 为常数。已知 l 与 C 至少有一个交点，(b)(i) 证明 $k^2-5k+4\geqslant 0$；(ii) 求 k 的可能取值范围。

答 Answer：_____

6 例题 [2021 年 1 月 Q6（10 分）]

(a) Sketch the curve with equation $y = -\frac{k}{x}$, $k > 0$, $x \neq 0$. (2) (b) On a separate diagram, sketch the curve with equation $y = -\frac{k}{x} + k$, $k > 0$, $x \neq 0$, stating the coordinates of the point of intersection with the x-axis and, in terms of k, the equation of the horizontal asymptote. (3) (c) Find the range of possible values of k for which the curve with equation $y = -\frac{k}{x} + k$ does not touch or intersect the line with equation $y = 3x + 4$.

中文：(a) 画出方程为 $y = -\frac{k}{x}$（$k > 0$，$x \neq 0$）的曲线图像。(2) (b) 在另一张图上画出方程为 $y = -\frac{k}{x} + k$（$k > 0$，$x \neq 0$）的曲线，写出它与 x 轴交点的坐标，以及用 k 表示的水平渐近线方程。(3) (c) 求 k 的取值范围，使方程为 $y = -\frac{k}{x} + k$ 的曲线与直线 $y = 3x + 4$ 既不相切也不相交。

答 Answer： _____

7 例题 [2020 年 10 月 Q7（11 分）]

The curve C has equation $y = \dfrac{1}{2-x}$. (a) Sketch the graph of C. On your sketch you should show the coordinates of any points of intersection with the coordinate axes and state clearly the equations of any asymptotes. (3) The line l has equation $y = 4x + k$, where k is a constant. Given that l meets C at two distinct points, (b) show that $k^2 + 16k + 48 > 0$ (4) (c) Hence find the range of possible values for k.

中文：曲线 C 的方程为 $y = \dfrac{1}{2-x}$。(a) 画出 C 的图像，在图上标出与坐标轴交点的坐标，并清楚写出任何渐近线的方程。(3) 直线 l 的方程为 $y = 4x + k$，其中 k 为常数。已知 l 与 C 交于两个不同的点，(b) 证明 $k^2 + 16k + 48 > 0$；(4) (c) 据此求 k 的可能取值范围。

答 Answer： _____

8 例题 [2023 年 10 月 Q4（7 分）]

Figure 1 shows a sketch of part of the curve C with equation $y = \dfrac{1}{x+2}$. (a) State the equation of the asymptote of C that is parallel to the y-axis. (1) (b) Factorise fully $x^3 + 4x^2 + 4x$. (2) (c) On Diagram 1, add a sketch of the curve with equation $y = x^3 + 4x^2 + 4x$. On your sketch, state clearly the coordinates of each point where this curve cuts or meets the coordinate axes. (3) (d) Hence state the number of real solutions of the equation $x(x+2)^2\left(x^3 + 4x^2 + 4x\right) = 1$, giving a reason for your answer.

中文：图 1 给出曲线 C（方程 $y = \dfrac{1}{x+2}$）的一部分草图。(a) 写出 C 中平行于 y 轴的那条渐近线的方程。(1) (b) 把 $x^3 + 4x^2 + 4x$ 完全因式分解。(2) (c) 在图 1 上补画方程为 $y = x^3 + 4x^2 + 4x$ 的曲线，并清楚写出该曲线与坐标轴相交处各点的坐标。(3) (d) 据此说明方程 $x(x+2)^2\left(x^3 + 4x^2 + 4x\right) = 1$ 的实数解个数，并说明理由。

答 Answer： _____

4.3 Points of intersection 交点个数

「两图像有几个交点」在本章单独成考点（C4c），因为它有两条完全不同的解题路径：**代数路径**是令两式相等化到某个方程再用判别式；**几何路径**是画图数一数。P1 通常要求**先给理由再给数字**，官方给分点往往是 **B1（指出判别式条件）+ A1（正确范围）**。

- **代数入口永远是令两式相等**；若两边都有分母，先**乘以分母**化成多项方程
- 方程含 x^4 或 x^3 时：**对 x^2 或 x 设新元降次**，化为二次式后再用判别式
- **新元必须检验正负**：令 $u=x^2$ 则 $u\geqslant 0$；令 $u=x$ 则 u 可正可负
- **交点个数变化只发生在临界值上**，临界值就是「两曲线相切」的参数值（即 $\Delta=0$）
- 标准流程：**先求临界 k 值 → 再按 k 的大小分段数个数 → 写成并集或开区间**
- **端点开闭**：相切那一点**算一个交点**（曲线仍然相遇），所以「恰好一个交点」的临界值通常**包含**在解集内
- 纯图像题（无参数）只需数根，但**必须写出理由**，例如指出草图上水平线与曲线相交的次数

方法卡　交点个数五步法（带参数必考）

1. **令两式相等**，两边同乘分母去分式，整理成 $F(x)=0$；
2. **降次**：若含 x^3、x^4，令 $u=x^2$（注意 $u\geqslant 0$）或 $u=x$，化为二次式；
3. **判别式 $\Delta=b^2-4ac$**：令 $\Delta=0$ 给出相切的临界值，再看 Δ 的符号决定交点个数；
4. **分段讨论**：把参数轴按临界值切成若干段，逐段判断 $\Delta>0$（两个不同交点）、$\Delta=0$（一个交点）、$\Delta<0$（无交点）；
5. **写成答案**：若题目问“不相交”或“只有一个交点”，把各段用 $\cup$ 连起来。

关键判断	理由
$\Delta>0$	化简后的方程有两个不同实根 → 两个不同交点
$\Delta=0$	一个重根 → 相切，**恰有一个交点**（这个点要算进去）
$\Delta<0$	无实根 → **无交点**，这就是“不相交”的判据
新元 $u=x^2$ 须 $u\geqslant 0$	负的 u 对应无实 x，必须舍去；舍去会改变交点个数
去分母时乘掉的值	$x=a$（分母零点）必须代回检验，不是原方程的解就舍去

9 例题 [2024 年 6 月 Q8（7 分）]

The curve C_1 has equation $y = x(4 - x^2)$. (a) Sketch the graph of C_1 showing the coordinates of any points of intersection with the coordinate axes. (3) The curve C_2 has equation $y = \frac{A}{x}$, where A is a constant. (b) Show that the x coordinates of the points of intersection of C_1 and C_2 satisfy the equation $x^4 - 4x^2 + A = 0$. (1) (c) Hence find the range of possible values of A for which C_1 meets C_2 at 4 distinct points.

中文：曲线 C_1 的方程为 $y = x(4 - x^2)$。(a) 画出 C_1 的图像，标出与坐标轴交点的坐标。(3) 曲线 C_2 的方程为 $y = \frac{A}{x}$，其中 A 为常数。(b) 证明 C_1 与 C_2 交点的 x 坐标满足方程 $x^4 - 4x^2 + A = 0$。(1) (c) 据此求 A 的取值范围，使 C_1 与 C_2 恰交于 4 个不同的点。

答 Answer： _____

10 例题 [讲义例题（交点计数与相切）]

The curves C and D have equations $y = x^2 - 6x + 9$ and $y = kx + 1$ respectively. (a) Find the range of values of k for which C and D do not intersect. (b) Show that, when k takes one of the critical values found in part (a), the line D is a tangent to the parabola C.

中文：曲线 C 与 D 的方程分别为 $y = x^2 - 6x + 9$ 与 $y = kx + 1$。(a) 求 k 的取值范围，使 C 与 D 不相交。(b) 证明：当 k 取 (a) 中求得的某个临界值时，直线 D 与抛物线 C 相切。

答 Answer： _____

11 例题 [讲义例题（倒数与直线的相切条件）]

The curve C has equation $y = \dfrac{3}{x-1}$, $x \neq 1$, and the line l has equation $y = mx - 2$, where m is a constant. (a) Show that, if l is a tangent to C, then $m^2 + 8m + 4 = 0$. (b) Hence find the range of values of m for which l cuts C at two distinct points. (c) State the number of real solutions of the equation $x^2 - 4x + 5 = 0$, giving a reason.

中文：曲线 C 的方程为 $y = \dfrac{3}{x-1}$（$x \neq 1$），直线 l 的方程为 $y = mx - 2$，其中 m 为常数。(a) 证明：若 l 与 C 相切，则 $m^2 + 8m + 4 = 0$。(b) 据此求 m 的取值范围，使 l 与 C 交于两个不同的点。(c) 说明方程 $x^2 - 4x + 5 = 0$ 的实数解个数，并说明理由。

答 Answer： _____

12 例题 [讲义例题（倒数与直线的相切条件）]

The curve C has equation $y = \dfrac{k}{x}$, where k is a positive constant. The line l has equation $y = mx - 2$, where m is a constant. (a) Show that, if l is a tangent to C, then $m^2 - 16k + 4 = 0$. (b) Hence find, in terms of k, the range of values of m for which l cuts C at two distinct points. (c) State the number of real solutions of the equation $x^2 - 4x + k = 0$ when $k = 8$, giving a reason.

中文：曲线 C 的方程为 $y = \dfrac{k}{x}$，其中 k 为正常数。直线 l 的方程为 $y = mx - 2$，其中 m 为常数。(a) 证明：若 l 与 C 相切，则 $m^2 - 16k + 4 = 0$。(b) 据此用 k 表示 m 的取值范围，使 l 与 C 交于两个不同的点。(c) 当 $k = 8$ 时，说明方程 $x^2 - 4x + k = 0$ 的实数解个数，并说明理由。

答 Answer：_____

13 例题 [讲义例题（图像法与代数法结合）]

Figure 1 shows sketches of the curves C_1 with equation $y = x^2 - 3x$ and C_2 with equation $y = \frac{k}{x}$, where k is a constant. The curves intersect in the first quadrant and in the third quadrant. (a) Show that the x coordinate of the point of intersection in the first quadrant is the solution of $x^3 - 3x - k = 0$. (b) By considering the sketch, state the total number of points of intersection of C_1 and C_2. (c) Deduce the range of values of k for which this number is greater than 2.

中文：图 1 给出曲线 C_1（方程 $y = x^2 - 3x$）与曲线 C_2（方程 $y = \frac{k}{x}$，k 为常数）的草图。两曲线在第一象限与第三象限各有一个交点。(a) 证明第一象限交点的 x 坐标是方程 $x^3 - 3x - k = 0$ 的解。(b) 就草图而言，说明 C_1 与 C_2 交点总数。(c) 由此推得使交点数多于 2 个的 k 的取值范围。

答 Answer：_____

4.4 Translating graphs 平移

平移是 P1 里最容易得分的一类变换，条件是**方向与单位必须说清**。难处全在**方向的反向表述**：题目给 $y=f(x+3)$ 问你“原图如何变”，你必须答“向左平移 3 个单位”，而不是“函数加 3”。

- **口诀**：括号里是 $x-c$ 就右移 c，是 $x+c$ 就左移 c——**符号与移动方向相反**
- **上下平移**：$y=f(x)+c$ 上移 c（$c>0$）；$y=f(x)-c$ 下移 c
- **整体记忆**：$f(x\pm a)$ 动 x，$f(x)\pm b$ 动 y；**一个动横轴，一个动纵轴**
- 平移**不改变形状**：极值点类型、重根、渐近线的类型全部保持，只是坐标整体搬家
- 平移后各关键点的新坐标：$(u,v)\to(u\pm a,\ v)$ 或 $(u,v\pm b)$
- **渐近线随图像一起平移**：水平渐近线 $y=k$ 在上移 b 后变为 $y=k+b$——这是最常见的漏项
- 向量平移的规范写法：**translate by vector** $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$，$p$ 为水平位移、q 为竖直位移

方法卡　平移变换对照表（官方表述为准）

新方程	几何变换（图像怎么动）	规范英文表述
$y=f(x+a),\ a>0$	向**左**平移 a 个单位	**Translate a units to the left**
$y=f(x-a),\ a>0$	向**右**平移 a 个单位	**Translate a units to the right**
$y=f(x)+b,\ b>0$	向**上**平移 b 个单位	**Translate b units upwards**
$y=f(x)-b,\ b>0$	向**下**平移 b 个单位	**Translate b units downwards**
$y=f(x)+p+q$	沿向量 $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ 平移	**Translate by vector** $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$
$y=f(x+a)+b$	先左移 a，再上移 b（**顺序无关**）	**Translate a units left then b units up**

易错点	说明
把 $f(x+3)$ 说成右移	**记反了**：括号内为 $+$ 时图像左移，可用“括号内的数往反方向跑”自检
描述题只写“平移”不写方向与单位	官方给分点是 **Translate … units to the …**，缺单位不给分
忘了渐近线也要平移	水平渐近线 $y=k$ 上移 b 后是 $y=k+b$，**不是** $y=k$
说“graph of $y=f(x)$”而不是“curve”	官方 Notes 允许 curve 与 graph 互换，但**整体要统一**

14　例题　[2020 年 10 月 Q5（9 分，(a)(i) 部分）]

Figure 2 shows a sketch of the curve with equation $y=f(x)$. The curve passes through the points $(-5,0)$ and $(0,-3)$ and touches the x-axis at the point $(2,0)$. On a separate diagram sketch the curve with equation $y=f(x+2)$, showing clearly the coordinates of all the points where the curve cuts or touches the coordinate axes.

中文：图 2 给出方程为 $y=f(x)$ 的曲线的草图。该曲线过点 $(-5,0)$ 与 $(0,-3)$，并在点 $(2,0)$ 处与 x 轴相切。在另一张图上画出方程为 $y=f(x+2)$ 的曲线，清楚标出它与坐标轴相交或相切处的所有坐标。

答 Answer：_____

15 例题 [2022 年 6 月 Q4（6 分）]

Figure 1 shows a sketch of a curve with equation $y = f(x)$. The curve has a minimum at $P(-1, 0)$ and a maximum at $Q\left(\frac{3}{2}, 2\right)$. The line with equation $y = 1$ is the only asymptote to the curve. On separate diagrams sketch the curves with equation (i) $y = f(x) - 2$ (ii) $y = f(-x)$. On each sketch you must clearly state the coordinates of the maximum and minimum points and the equation of the asymptote.

中文：图 1 给出方程为 $y = f(x)$ 的曲线草图。该曲线在 $P(-1, 0)$ 处取最小值，在 $Q\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 处取最大值。直线 $y = 1$ 是该曲线唯一的渐近线。在两张单独的图上分别画出 (i) $y = f(x) - 2$ (ii) $y = f(-x)$ 的图像。每张图都必须清楚写出极大值点与极小值点的坐标以及渐近线的方程。

答 Answer： _____

16 例题 [2023 年 1 月 Q7（10 分）]

(a) On Diagram 1, sketch a graph of the curve C with equation $y = \frac{6}{x}$, $x \neq 0$. (2) The curve C is transformed onto the curve with equation $y = \frac{6}{x-2}$, $x \neq 2$. (b) Fully describe this

transformation. (2) The curve with equation $y = \dfrac{6}{x-2}$, $x \neq 2$ and the line with equation $y = kx + 7$, where k is a constant, intersect at exactly two points, P and Q. Given that the x coordinate of point P is -4, (c) find the value of k. (2) (d) Find, using algebra, the coordinates of the point Q.

中文：(a) 在图 1 中画出曲线 C（方程 $y = \dfrac{6}{x}$，$x \neq 0$）的图像。(2) 曲线 C 被变换为方程为 $y = \dfrac{6}{x-2}$（$x \neq 2$）的曲线。(b) 完整描述这个变换。(2) 方程为 $y = \dfrac{6}{x-2}$（$x \neq 2$）的曲线与方程为 $y = kx + 7$（k 为常数）的直线恰交于 P、Q 两点。已知点 P 的 x 坐标为 -4，(c) 求 k 的值。(2) (d) 用代数方法求点 Q 的坐标。

答 Answer： _____

4.5 Stretching graphs 拉伸与压缩

拉伸与压缩是本章最容易混淆的变换：**乘在 f 上还是乘在 x 上，结果一个动纵轴、一个动横轴，倍数与方向正好互换**。P1 描述题里必须写明 **parallel to the y-axis / parallel to the x-axis**，少这半句直接不得分。

- $y = af(x)$（$a > 0$）：**平行于 y 轴**拉伸或压缩 factor a；$a > 1$ 拉伸，$0 < a < 1$ 压缩，$a < 0$ 还附加关于 x 轴反射
- $y = f(bx)$（$b > 0$）：**平行于 x 轴**压缩或拉伸 factor $\dfrac{1}{b}$；$b > 1$ 压缩，$0 < b < 1$ 拉伸
- **核心对照**：$y = f(2x)$ 是横向压缩 factor 2；$y = 2f(x)$ 是纵向拉伸 factor 2。**位置与倍数互换**
- 变换后所有点的横坐标（或纵坐标）按同一比例缩放：$(u, v) \to \left(\dfrac{u}{b}, v\right)$ 或 $(u, v) \to (u, av)$
- 拉伸**不改变**极值点类型、切/穿性质、象限归属（当系数为正时）
- 拉伸**不改变**极值点与切点的横坐标（若变换平行于 y 轴），但会改变渐近线方程中的常数项
- **规范表述模板**：**Stretch parallel to the y-axis by factor k / Stretch parallel to the x-axis by factor $\dfrac{1}{k}$**

方法卡　拉伸与压缩对照表

新方程	变换	规范英文表述
$y=2f(x)$	平行 y 轴拉伸 factor 2	**Stretch parallel to the y-axis by factor 2**
$y=\frac{1}{2}f(x)$	平行 y 轴压缩 factor $\frac{1}{2}$	**Stretch parallel to the y-axis by factor $\frac{1}{2}$**
$y=f\left(\frac{x}{2}\right)$	平行 y 轴拉伸 factor 2（横坐标变两倍）	**Stretch parallel to the y-axis by factor 2**
$y=f(2x)$	平行 x 轴压缩 factor 2	**Stretch parallel to the x-axis by factor 2**
$y=f\left(\frac{x}{2}\right)$	平行 x 轴拉伸 factor 2	**Stretch parallel to the x-axis by factor 2**
$y=-f(x)$	关于 x 轴反射（factor -1）	**Reflection in the x-axis**
$y=f(-x)$	关于 y 轴反射	**Reflection in the y-axis**

最易混淆处	辨析
$f(x/2)$ 与 $f(2x)$	前者横坐标变**两倍**（点向右跑，拉伸）；后者横坐标变**一半**（点向左靠，压缩）
$2f(x)$ 与 $f(2x)$	前者纵坐标变两倍；后者纵坐标不变。同样“系数 2”，**作用轴不同**
系数写在括号内还是括号外	括号**内**动 x 轴；括号**外**动 y 轴
“factor”的含义	拉伸与压缩都用 factor；**压缩也要写 stretch**，官方接受 factor 小于等于 1 的 stretch 表述

17　例题　[2025 年 6 月 Q9（10 分，(a) 部分）]

Figure 4 shows a sketch of (i) the graph C_1 with equation $y=x^2$ (ii) the graph C_2 with equation $y=12-x$. (a) Describe fully the single transformation that would transform (i) the graph with equation $y=x$ onto C_1 (ii) the graph with equation $y=-x$ onto C_2.

中文：图 4 给出 (i) 方程为 $y=x^2$ 的图像 C_1 与 (ii) 方程为 $y=12-x$ 的图像 C_2 的草图。(a) 完整描述把 (i) 方程为 $y=x$ 的图像变换到 C_1 所需的单一变换；(ii) 把方程为 $y=-x$ 的图像变换到 C_2 所需的单一变换。

答 Answer： _____

18 例题 [2024 年 6 月 Q3（6 分，(b) 部分）]

Figure 1 shows a sketch of the curve with equation $y = f(x)$. The curve passes through the points $(-1, 0)$ and $(0, 2)$ and touches the x-axis at the point $(3, 0)$. On a separate diagram, sketch the curve with equation $y = f(-3x)$, showing clearly the coordinates of all the points where the curve cuts or touches the coordinate axes.

中文：图 1 给出方程为 $y = f(x)$ 的曲线的草图。该曲线过点 $(-1, 0)$ 与 $(0, 2)$，并在点 $(3, 0)$ 处与 x 轴相切。在另一张图上画出方程为 $y = f(-3x)$ 的曲线，清楚标出它与坐标轴相交或相切处的所有坐标。

答 Answer： _____

19 例题 [2026 年 1 月 Q5（7 分）]

Figure 2 shows a sketch of part of the curve with equation $y = f(x)$. The curve crosses the y-axis at the point $(0, 8)$. The line with equation $y = 10$ is the only asymptote to the curve. The curve has a single turning point, a minimum point at $(2, 5)$, as shown in Figure 2. (a) State the coordinates of the minimum point of the curve with equation $y = f\left(\frac{x}{4}\right)$. (b) State the equation of the asymptote to the curve with equation $y = f(x) - 3$. (c) Sketch the curve with equation $y = -f(x)$. On your sketch, show clearly the coordinates of the turning point, the coordinates of the intersection with the y-axis and the equation of the asymptote.

中文：图 2 给出方程为 $y = f(x)$ 的曲线的一部分草图。该曲线在 y 轴上的点 $(0, 8)$ 处与 y 轴相交。直线 $y = 10$ 是该曲线唯一的渐近线。曲线只有一个极值点，即在 $(2, 5)$ 处的极小值点，如图 2 所示。(a) 写出方程为 $y = f\left(\frac{x}{4}\right)$ 的曲线的极小值点坐标。(b) 写出方程为 $y = f(x) - 3$ 的曲线的渐近线方程。(c) 画出方程为 $y = -f(x)$ 的曲线，在图上清楚标出极值点坐标、与 y 轴交点的坐标以及渐近线方程。

答 Answer： _____

4.6 Transforming functions 图像变换组合

多个变换叠在一起时，P1 只问两件事：**（一）变换后的图像有哪些关键特征；（二）变换后的曲线与某个已知图形的交点**。前者考定性描述（4.7 详讲），后者考“由变换反推表达式、代入求交”这一套固定动作。

- **通则**：$y=f(kx+m)+n$ 表示先**横向**缩放（k）与平移（m），再**纵向**平移（n）
- 逆向读法（题目给方程问怎么变）：**先剥平移，后剥缩放，最后剥反射**
- **符号**：k 为负 $=$ 附加关于 y 轴反射；n 为负 $=$ 附加关于 x 轴反射
- 交点问题固定三步：**写出变换后曲线与直线的方程 $\to$ 令两式相等 $\to$ 求解并取舍**
- 若 $f(x)=\sqrt{x}$ 之类，「变换后与另一条变换后曲线相交」等价于**把两边的变换同时倒回去**
- **官方表达式的等价性**：$y=f(x-3)$ 与 $y=-f(x)+6$ 等价时，官方 Notes 会列出可接受的其他形式
- 交点坐标必须**成对写出** (x,y)，且纵坐标用直线方程或曲线方程均可

方法卡　复合变换的拆解与交点求解流程

步骤	动作
第一步：识别变换	把 $y=f(kx+m)+n$ 中的 k、m、n 三个数读出来，分别对应横向缩放、横向平移、纵向平移
第二步：算新坐标	原图点 (u,v) 变为 $\left(\dfrac{u-m}{k},\ v+n\right)$（这是本题的核心公式）
第三步：判断类型	若 $k<0$ 则 minimum 与 maximum 互换；若 n 只是平移则类型不变
第四步：写方程求交	令变换后曲线与另一曲线（或直线）相等，解方程
第五步：取舍并配对	用题给的象限、符号等条件选出正确的根，再回代求纵坐标

新坐标公式的来历：新图上横坐标为 x 的点满足 $kx+m=u$，故 $u=kx+m$，$x=\dfrac{u-m}{k}$；纵坐标直接是 $v+n$。所以 $\boxed{(u,v)\longmapsto\left(\dfrac{u-m}{k},\ v+n\right)}$。

20 例题 [2019 年 1 月 Q8（6 分）]

Figure 4 shows a sketch of the curve C with equation $y = f(x)$. The curve C has a single turning point, a maximum at $(4, 9)$; crosses the coordinate axes at only two places, $(-3, 0)$ and $(0, 6)$; has a single asymptote with equation $y = 4$ as shown in Figure 4. (a) State the equation of the asymptote to the curve with equation $y = f(-x)$. (b) State the coordinates of the turning point on the curve with equation $y = f\left(\frac{x}{4}\right)$. (c) Given that the line with equation $y = k$ intersects C at two distinct points, state the possible values for k. (d) The curve C is transformed to a new curve that passes through the origin. (i) Given that the new curve has equation $y = f(x) - a$, state the value of the constant a. (ii) Write down an equation for another single transformation of C that also passes through the origin.

中文：图 4 给出曲线 C（方程 $y = f(x)$）的草图。曲线 C 只有一个极值点，即在 $(4, 9)$ 处的极大值点；只与坐标轴相交于两处，即 $(-3, 0)$ 与 $(0, 6)$；按图 4 所示有一条渐近线 $y = 4$。(a) 写出方程为 $y = f(-x)$ 的曲线的渐近线方程。(b) 写出方程为 $y = f\left(\frac{x}{4}\right)$ 的曲线上极值点的坐标。(c) 已知方程为 $y = k$ 的直线与 C 交于两个不同的点，写出 k 的可能值。(d) 曲线 C 被变换为一条过原点的新曲线。(i) 已知新曲线的方程为 $y = f(x) - a$，写出常数 a 的值。(ii) 写出把 C 变为另一条也过原点的曲线的单一变换方程。

答 Answer： _____

21 例题 [2021 年 10 月 Q9（9 分）]

Figure 5 shows a sketch of the curve with equation $y = f(x)$ where $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$. The point $P(9, 3)$ lies on the curve. (a) Sketch and clearly label the graphs of $y = f(2x)$ and $y = f(x) + 3$ showing on each graph the coordinates of the point to which P is transformed. (3) The graph of $y = f(2x)$ meets the graph of $y = f(x) + 3$ at the point Q. (b) Find, in simplest form, the exact coordinates of Q, showing your working.

中文：图 5 给出方程为 $y = f(x)$（其中 $f(x) = \sqrt{x}$，$x \geqslant 0$）的曲线草图。点 $P(9, 3)$ 在该曲线上。(a) 画出并清楚标注 $y = f(2x)$ 与 $y = f(x) + 3$ 的图像，并在每张图上标出点 P 被变换到的点的坐标。(3) 图像

$y=f(2x)$ 与图像 $y=f(x)+3$ 交于点 Q。(b) 写出解题过程，求 Q 的最简精确坐标。

答 Answer： _____

22 例题 [2026 年 6 月 Q10（11 分）]

The curve C has equation $y=\dfrac{3k}{x-2k}$, $x\neq 2k$, where k is a positive constant. The line l has equation $y=12-x$. (a) Sketch a graph of C. Show on your sketch the coordinates of the point where C crosses a coordinate axis. (3) Given that l is a tangent to C, (b) show that $k^2-15k+36\leqslant 0$. (4) The line l meets C at a point P. Given that P lies below the x-axis, (c) find the coordinates of P.

中文：曲线 C 的方程为 $y=\dfrac{3k}{x-2k}$（$x\neq 2k$），其中 k 为正常数。直线 l 的方程为 $y=12-x$。(a) 画出 C 的图像，在图上标出 C 与某条坐标轴交点的坐标。(3) 已知 l 与 C 相切，(b) 证明 $k^2-15k+36\leqslant 0$。(4) 直线 l 与 C 交于点 P，已知 P 在 x 轴下方，(c) 求 P 的坐标。

答 Answer： _____

4.7 满分必备：三次函数「奇穿偶回」与倒数函数渐近线的规范表述

满分必备　满分必备：三次函数「奇穿偶回」与倒数函数渐近线的规范表述

一、三次函数「奇穿偶回」：用根的重数一句话说清所谓**奇穿偶回**，指的是图像在 x 轴上的穿越行为由**根的重数**决定。P1 只要求你能用一句话把行为说对，判定依据只有一个——**因式的指数**：

根的形态	重数	规范英文表述
$(x-a)$	1（奇）	**crosses the axis at** $x=a$（穿过）
$(x-a)^2$	2（偶）	**touches the axis at** $x=a$（相切，切了又回）
$(x-a)^3$	3（奇）	**crosses the axis at** $x=a$（穿过，且是斜穿，拐点在 $(a,0)$）
$(x-a)^4$	4（偶）	**touches the axis at** $x=a$（相切）

得分要领：题目只要一个 B1 时，**只写与该点相关的那一句**即可，不必把整张表都抄上去；但**类型词（crosses / touches）必须准确**，这是唯一的判分依据。典型反例：$f(x)=2(x+1)(x-3)^2$ 在 $x=3$ 处是二重根，**写 crosses 判 0 分**，写 touches 得满分（2021 年 10 月 Q6(a) 就是这一分）。

二、三次函数的端点行为与极值点：四句话的固定搭配 P1 描述三次函数的定性特征时，需要的**全部素材就是下面四句话**，每句都能单独给分：

1. **端点行为**：$a>0$ 时图像自左下走向右上，$a<0$ 时自左上走向右下。规范写法是 **a positive cubic curve in any position**（或 negative cubic curve），官方 Notes 原文：**"Negative cubic curve in any position. Must have one maximum and one minimum"**；
2. **极值点**：三次曲线**有且仅有一个 maximum 与一个 minimum**；**若 $a>0$ 则 maximum 在前（x 坐标较小），$a<0$ 则 minimum 在前**；
3. **原点**：$f(0)=0$ 时图像**穿过**原点；**不是相切**。官方 Notes 说 "passing through (not touching) the origin"，且明确 **"The origin does not have to be labelled"** ——原点不标也不扣分，但标错类型要扣分；
4. **x 截距**：交点坐标写全，如 $(2,0)$ 与 $(-2,0)$，或写 $x=2$ 与 $x=-2$ 都接受，但**必须画出"穿轴"的样子**——官方 Notes 原文：**"Must cut so extends beyond the x-axis from above or below but not a turning point"**。

草图优先原则：官方 Notes 有一条极其重要的说明——**"If there is any ambiguity, the sketch takes precedence"**。意思是如果你的文字描述与草图矛盾，**阅卷人以草图为准**。所以草图一定要画对，别指望文字补救。

三、倒数函数：三条渐近线，一个都不能少倒数类曲线的描述题，官方给分点几乎全部落在**渐近线与截距**上。三条铁律：

要写的项目	求法	规范表述
垂直渐近线	分母 $=0$	**the asymptote parallel to the y-axis is $x=a$**
水平渐近线	$x\to\pm\infty$；或“分子常数除以分母变量”的商	**the asymptote is $y=b$**
x 截距	令 $y=0$（常数项非零时恰有一个）	**the x-intercept is $\left(\frac{m}{k},0\right)$**
y 截距	令 $x=0$（分母常数项非零时存在）	**the y-intercept is $\left(0,\frac{c}{d}\right)$**

分母是二次式时有两条垂直渐近线：$y=\dfrac{1}{9-x^2}$ 的垂直渐近线是 $x=\pm3$，写成一条就丢分（2022 年 1 月 Q10(a) 就是考这个）。**渐近线不是交点：**$y=k$ 若恰是水平渐近线，则该水平线与曲线**不相交**。求“$y=k$ 与曲线交于两点”的 k 范围时，**必须把渐近线对应的值单独排除**（2019 年 1 月 Q8(c)）。**象限归属：**$y=\dfrac{k}{x-a}+b$ 的三支位置由 k、a、b 的符号共同决定，逐段取一个测试点最可靠（取 $x=0$、$x=a$ 附近、$x\to\pm\infty$）。

四、A1 分是怎么给的：官方原文的五条 Notes 把 Pearson 官方 Mark Scheme 中与图像描述相关的 Notes 原文抄在这里，**照着写就不会错：**

- 「**Negative cubic curve in any position. Must have one maximum and one minimum.**」（负三次曲线：一个极大一个极小）
- 「**Passing through (not touching) the origin. The origin does not have to be labelled.**」（过原点非相切，原点可不标）
- 「**Cuts the x-axis at $x=2$ and $x=-2$. Must cut so extends beyond the x-axis ... but not a turning point.**」（必须画出穿轴而非极值点）
- 「**Allow away from the sketch but must be $(2,0)$ and $(-2,0)$. If there is any ambiguity, the sketch takes precedence.**」（坐标写对即可，但草图优先）
- 「**Condone $(0,2)$ and $(0,-2)$ as long as they are in the correct positions.**」（y 截距正负号容错，但位置须对）

翻译成一句话：类型词用对、坐标写全、草图画准。三者缺一，本节就拿不满。

1　满分示范　[描述规范]

Figure 1 shows a sketch of the curve C with equation $y=f(x)$, where $f(x)=(x+1)^2(2x-3)$. Describe fully the shape of the curve C at the point where it meets the y-axis, stating the coordinates of that point. Hence state, with a reason, whether the curve has a point of inflection between its two turning points.

中文：图 1 给出曲线 C（方程 $y=f(x)$，其中 $f(x)=(x+1)^2(2x-3)$）的草图。完整描述曲线 C 在与 y 轴交点处的形状，写出该点坐标。据此说明（并给出理由）曲线在两个极值点之间是否有拐点。

答 Answer：_____

2 改错练习 [官方 Notes]

A student sketches the curve $y = \dfrac{6}{x-2}$ and writes the following four statements. Identify the two that are incorrect and write the correct versions. (i) The vertical asymptote is $y = 2$. (ii) The horizontal asymptote is $y = 0$. (iii) The x-intercept is $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$. (iv) The y-intercept is $(0, -3)$.

中文：某同学画出曲线 $y = \dfrac{6}{x-2}$ 后写下以下四条判断，指出其中**两条错误**并写出正确版本。(i) 垂直渐近线是 $y = 2$。(ii) 水平渐近线是 $y = 0$。(iii) x 截距是 $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$。(iv) y 截距是 $(0, -3)$。

答 Answer： _____

4.8 满分必备：变换顺序、交点计数、区域定义的统一写法

满分必备　满分必备：变换顺序、交点计数、区域定义的统一写法

一、复合变换的顺序：先横后纵，横轴内先缩后移形如 $y=f(kx+m)+n$ 的变换由**三个独立维度**决定，顺序是固定的：

参数	作用	读法
k	横向缩放（$k<0$ 附加关于 y 轴反射）	新横坐标为 $\frac{u}{k}$
m	横向平移	新横坐标再减去 $\frac{m}{k}$
n	纵向平移	纵坐标直接加 n

核心公式：原图上的点 (u,v) 在变换后变为 $\boxed{\left(\frac{u-m}{k},\ v+n\right)}$。这一个公式解决本章八成的坐标题。**为什么平移量是 $\frac{m}{k}$ 而不是 m：**因为缩放已经先发生，$f(kx+m)=f\big(k(x+\frac{m}{k})\big)$ 才是标准形式。例：$f(2x-4)=f\big(2(x-2)\big)$，真正的横向位移只有 -2，而不是 -4。

顺序不能倒：若把 $f(kx+m)$ 误读成“先平移 m 再缩放”，新横坐标会算成 $\frac{u}{k}+m$（错）或 $\frac{u-m}{k}$（对）。自检方法：**把式子配成标准形式** $f(k(x-\frac{m}{k})+n)$，括号里 x 的系数与常数项一目了然，位移就是括号里的常数。**结论：永远先做横向的缩放与平移，再做纵向的平移**，即“先横后纵”。若题目反过来问“原图应如何变”，就**倒着说**：先撤纵向平移，再撤横向平移，最后撤横向缩放。

二、变换的官方英文表述：六种模板直接套用 P1 的变换描述题**只考措辞，不考数学**。以下六种模板覆盖全部考法：

变换	核心句	必须包含的要素
横向平移	**Translate a units to the right /left**	单位数 a 与方向
纵向平移	**Translate b units upwards /downwards**	单位数 b 与方向
向量平移	**Translate by vector** $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$	两个分量都要写出
纵向拉伸	**Stretch parallel to the y-axis by factor k**	作用轴 + factor
横向拉伸	**Stretch parallel to the x-axis by factor k**	作用轴 + factor
反射	**Reflection in the x-axis / y-axis**	反射轴

三条硬性要求：

1. **单位与方向缺一不可**。只写“translation”或只写“stretch”一律不得分——官方给分点是整个短语，如 2023 年 1 月 Q7(b) 的两个 B1 分别是“方向”与“单位数”。
2. **作用轴必须写**。“stretch by factor 2”不合格，“stretch parallel to the y-axis by factor 2”合格。
3. **压缩也写 stretch**。官方接受 factor 小于等于 1 的 stretch 表述（2025 年 6 月 Q9(a)(i) 中，“$y=x^2$ 相对 $y=x$ 是平行 y 轴拉伸 factor x”就是这种宽松表述）。

三、交点计数：代数法的五步 + 图像法的三条 代数法（五步）：

1. 令两式相等，乘分母去分式，整理成 $F(x)=0$；
2. 含 x^3、x^4 时设新元 $u=x^2$（注意 $u\geqslant 0$）降次；
3. 计算判别式 $\Delta=b^2-4ac$；
4. 令 $\Delta=0$ 求临界值，按临界值把参数轴分段，逐段判断 Δ 的符号；
5. 把各段写成并集或开区间，**端点开闭由“相切算不算交点”决定**（相切那一点算一个交点，含端点）。

图像法（三条读法）：适用于无参数或参数已定的题。

- **数水平线与曲线的交点：**$y=k$ 与曲线交几个点，就把 k 的范围读成哪几段（2026 年 1 月 Q5(c)：极小值 5、渐近线 $y=10$，故答案为 $5<k<10$）；
- **数竖直线与曲线的交点：**$x=a$ 与曲线交几个点；
- **逐段核对象限：**两曲线若在同一段 x 区间上位于不同象限，则该段无交点。

两条铁律：①**理由与数字同样给分**，只写数字不给理由最多得一半；②**相切点要算作交点**，所以“只有一个交点”通常对应 $\Delta=0$，端点闭合。

四、区域与带状区域的定义式描述 P1 本章不直接考区域，但**由图像反推不等式解集**（见 4.9）与本章图像题同源。标准的定义式写法有三种，套用即可：

题面要什么	怎么写
夹在两条曲线之间的带状区域	$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$（**一条式写两个不等式，官方认可**）
曲线一侧的区域	$y\leqslant f(x)$ 或 $y\geqslant f(x)$
竖直条带（限定 x 范围）	$a\leqslant x\leqslant b$ 与 y 的不等式连用
集合记号	$\{x,y\in\mathbb{R}:\ldots\}$，**多条不等式用 $\cap$ 连接，绝不能用 $\cup$**

三条硬规定（官方 Notes 原文级）：

- **不能用 R 代替 x 或 y：**官方 Notes 写明「**Inequalities cannot be in terms of R**」，违者该分判 0；
- **多条不等式必须用 $\cap$：**官方 Notes 写明「**Withhold the final mark for use of “or” or $\cup$**」；
- **边界取不取到由原不等号决定：**$g(x)<f(x)$ 与 $g(x)\leqslant f(x)$ 差一整个 A1 分。

1 满分示范 [顺序与表述]

Figure 1 shows a sketch of the curve C with equation $y=f(x)$, which has a minimum turning point at the point $(-2,4)$ and a maximum turning point at the point $(6,10)$. The line with equation $y=7$ intersects the curve C at the points P and Q as shown. (a) State, in the form (a,b), the coordinates of the point on C which is transformed to the origin by the transformation $y=f(2x-4)$. (2) (b) Describe fully the single transformation that transforms C onto the curve with equation $y=f(2x-4)+7$, giving the direction and the magnitude of each part of the transformation. (2) (c) Show that the region R, shown shaded, lying below C and above the line

$y = 7$, can be defined by the inequality $y \geqslant 7$ together with one other inequality.

中文：图 1 给出曲线 C（方程 $y = f(x)$）的草图，该曲线在点 $(-2, 4)$ 处取极小值、在点 $(6, 10)$ 处取极大值。直线 $y = 7$ 与曲线 C 交于图示的 P、Q 两点。(a) 用 (a, b) 的形式写出 C 上被变换 $y = f(2x - 4)$ 变为原点的那个点的坐标。(2) (b) 完整描述把 C 变为方程 $y = f(2x - 4) + 7$ 的曲线的变换，并给出每一部分的方向与大小。(2) (c) 证明：图中位于 C 下方、直线 $y = 7$ 上方的阴影区域 R，可以由不等式 $y \geqslant 7$ 与另一条不等式共同定义。

答 Answer： _____

2 改错练习 [官方 Notes]

A student uses the following method to find the range of values of k for which the curves with equations $y = x^2 + k$ and $y = 2x - k$ do not intersect. The student writes: "$x^2 + k = 2x - k \Rightarrow x^2 - 2x + 2k = 0$. $\Delta = 4 - 8k$. So for no intersection $k < 0$ and $k > \frac{1}{2}$." Identify the error in the student "s reasoning and write the correct range of values of k for which the curves do not intersect.

中文：某同学用如下方法求曲线 $y = x^2 + k$ 与 $y = 2x - k$ 不相交时 k 的范围。该同学写道："$x^2 + k = 2x - k \Rightarrow x^2 - 2x + 2k = 0$。$\Delta = 4 - 8k$。所以不相交时 $k < 0$ 且 $k > \frac{1}{2}$"。指出该同学推理中的错误，并写出两曲线不相交时 k 的正确取值范围。

答 Answer： _____

4.9 满分必备：由图像反推不等式与参数范围

满分必备　满分必备：由图像反推不等式与参数范围

一、题型识别：近年高频的四种问法 P1 中“由图写不等式、求参数”的题，问法只有四种，但答题结构完全不同：

问法	判据	答案形态
不相交 / 不相切（no intersection）	$\Delta < 0$	参数的**开区间并集**（端点不含）
相切（tangent）	$\Delta = 0$	参数的**有限个值**
交于两点（two distinct points）	$\Delta > 0$	参数的**开区间并集**（端点不含）
$y = k$ 与曲线交两点 / 至少一点	直接从**草图读纵坐标范围**	区间；端点是否含由**相切算不算交点**决定

最关键的一句：相交永远是 $\Delta > 0$，不相交永远是 $\Delta < 0$，相切永远是 $\Delta = 0$。看清题面问的是哪一个，其余都是技术细节。

二、由草图读不等式：三条读法与端点陷阱 读法一：水平线读纵坐标范围。题目问“$y = k$ 与曲线 C 交于两点，求 k 的范围”时，答案是曲线纵坐标的取值范围，**去掉端点与渐近线对应的值。**标准流程：

1. 从草图找出纵坐标的**最低点**与**最高点**（极值点的纵坐标）；
2. 找出**水平渐近线** $y = b$（若存在）；
3. 若 k 等于极值点的纵坐标，则直线与曲线**只切于一点**，不满足“两点”；若 k 等于渐近线的纵坐标，则直线与曲线**不相交**。

典型例（2026 年 1 月 Q5）：最低点 $(2, 5)$ 给出下端 5，渐近线 $y = 10$ 给出上端 10，故 $5 < k < 10$，**两端都含不住。**

读法二：竖直线读横坐标范围。题目问“$x = a$ 与曲线交于两点”时，从草图找出哪些 a 值使竖直线穿过曲线的两条支。答案端点的处理与读法一相同。

读法三：区域的不等式描述。见 4.8 第四块。

端点陷阱总表：

情形	端点是否包含
直线与曲线**相切**（恰一个交点）	**含**端点（那个点确实存在）
直线**恰是渐近线**（零个交点）	**不含**该值
原不等号是 $\leqslant$	**含**端点
原不等号是 $<$	**不含**端点

三、参数范围题的完整答题模板（照抄即可拿满） 第一步（方法分 M1）：令两式相等，乘分母去

分式，写出关于 x 的方程。**第二步（方法分 dM1）**：整理成 $ax^2+bx+c=0$（若含高次，设新元降次）。**第三步（方法分 M1）**：令 $\Delta=0$ 求出**临界值**（相切时的参数）。**第四步（准确分 A1）**：把参数轴按临界值分段，逐段判断 Δ 的符号。**第五步（准确分 A1）**：写出参数范围，**明确每个端点含不含**。**自检动作**：取一个落在答案区间内的值代回原方程，验证结论成立。

给分点的分布规律（来自近五年真题）：

- 官方通常给**两个 M 分**（方法分）分别对应第一、二步；
- 临界值一般给 **M1 或 A1**（2024 年 6 月 Q8(c) 中“$\Delta=0\Rightarrow A=4$”给 M1，而“$A>0$”给 B1）；
- 最终范围给 **A1**，常常还带 **A1 cso**（要求前面无错误）。

因此“第一步写清楚”的价值极高：它保证 M 分不会因为后面算错而全丢。

四、四个高频失分点

1. **只给结论不给理由**。题目问“state the range”，官方 Notes 常常要求“**giving a reason**”。至少写一句“because the discriminant is negative”或“as the graph shows”。
2. **忘记 $u=x^2\geqslant 0$ 的限制**。降次后得到负根要舍去，它直接改变交点个数。
3. **端点开闭搞错**。相切的参数值**含**在“一个交点”的解集里、**不含**在“两个交点”的解集里。
4. **忘记检验被乘掉的 x 值**。乘分母时若分母为零，那个 x 不是原方程的解，必须排除。

一句话总结：方法分靠“写出来”，准确分靠“想清楚”，最后三分靠“查得细”。

1 满分示范 [读图求范围]

Figure 1 shows a sketch of part of the curve C with equation $y=f(x)$, where $f(x)=x^3-6x+2$. The curve crosses the y-axis at the point $(0,2)$. (a) State the number of real solutions of the equation $x^3-6x+2=0$, giving a reason. (3) (b) The line l with equation $y=k$ meets the curve C. State the range of values of k for which l meets C at two distinct points. (2)

中文：图 1 给出曲线 C（方程 $y=f(x)$，其中 $f(x)=x^3-6x+2$）的一部分草图。曲线在 y 轴上的点 $(0,2)$ 处与 y 轴相交。(a) 说明方程 $x^3-6x+2=0$ 的实数解个数，并说明理由。(3) (b) 方程为 $y=k$ 的直线 l 与曲线 C 相交。写出 k 的取值范围，使 l 与 C 交于两个不同的点。(2)

答 Answer： _____

2 改错练习 [高频陷阱]

A student is asked to find the range of values of k for which the curve with equation $y = x^2 + k$ lies entirely above the line l with equation $y = 2x - k$, and answers: "$x^2 + k = 2x - k \Rightarrow x^2 - 2x + 2k = 0$. $\Delta = 4 - 8k$. For the curve to lie entirely above the line, $\Delta < 0$, so $k > \frac{1}{2}$." A second student writes: "$k \leqslant \frac{1}{2}$." Both students lose marks. Explain what each student has done wrong and write the correct answer with full justification.

中文：某同学被要求求 k 的范围，使方程为 $y = x^2 + k$ 的曲线完全位于方程为 $y = 2x - k$ 的直线 l 上方，他回答："$x^2 + k = 2x - k \Rightarrow x^2 - 2x + 2k = 0$。$\Delta = 4 - 8k$。要使曲线完全在直线上方，需 $\Delta < 0$，所以 $k > \frac{1}{2}$"。第二位同学写："$k \leqslant \frac{1}{2}$"。两位同学都失分了。分别说明各自错在哪里，并写出正确答案与完整理由。

答 Answer： _____

4.10 普高衔接：函数单调性、奇偶性、幂函数图像、对称性

普高衔接 普高衔接：函数单调性、奇偶性、幂函数图像、对称性

人教 A 版对应位置：四个概念在教材里的落点本章的四个核心概念，国内教材**全都学过，而且往往讲得更细**。对应关系如下：

人教 A 版位置	教材讲了什么	P1 对应考点
必修一第四章 4.3 幂函数	$y = x^\alpha$ 的图像与性质，分 $\alpha > 0$、$\alpha < 0$ 两大类讨论	**4.2** 倒数函数图像（$\alpha = -1$）
必修一 4.2 函数的单调性	用定义证明单调性，画图看增减	**4.1** 三次函数的增段与减段、极值点类型
必修一 4.3 奇偶性与对称性	关于原点、关于 y 轴、关于直线 $y = x$ 的对称	**4.6** $f(-x)$ 的反射、$f(x)$ 与反函数的图像关于 $y = x$ 对称
选择性必修一 3.4 函数的图象与变换	$y = f(x + a)$、$y = f(ax + b)$ 的图象变化	**4.4**、**4.5**、**4.6** 全部变换类型

关键结论：国内学生在**解法与图像直觉**上往往比 P1 学生熟练，真正的差别在**答题规范**上——P1 要你用英文把图像特征**说**出来，而不是**画**出来。

国内讲法与 P1 要求的六处差异

知识点	国内讲法	P1 要求
幂函数	只讲 $y = x^\alpha$ 的单调性，图像给示意图	要求**写出渐近线方程**并说明图像在哪几个象限
单调性	强调“增函数”的定义与证明	强调**先说类型再说坐标**：“a maximum at $(4, 9)$”
奇偶性	只讲原点对称与轴对称的**判定**	要求由 $f(-x)$ **反推反射后的坐标与渐近线**
图象变换	只讲**正向**：“$f(x + 2)$ 是左移 2”	**正反两个方向都考**，且要求用英文完整表述
渐近线	只在 $y = \frac{1}{x}$ 处提一句“无限接近”	要求**严格的方程表述**与**类型判断**（垂直/水平）
交点个数	强调“画出图像数一数”	**判别式为主**，并要求给出参数范围与理由

P1 额外要求、国内教材略过或讲得少的五个点

1. **三次函数图像的定性描述：**国内讲三次函数时重点在求根与因式分解，**很少系统讲“一个 maximum 一个 minimum”“奇穿偶回”这类图像语言**。P1 却年年考，而且草图优先（官方 Notes：“If there is any ambiguity, the sketch takes precedence”）。
2. **由变换推出新函数表达式：**国内只要求“说出图像怎么变”，**不要求反过来求新方程**；P1 常问“Write down an equation for another single transformation”，要你**自己造一个满足条件的方程**（如 2019 年 1 月 Q8(d)(ii)）。
3. **渐近线的严格语言：**国内说“无限接近”，P1 要求 **the asymptote is $x = a$**，**必须有方程、有类型、有坐标轴归属**。
4. **“恒成立”型参数范围：**国内高中很少系统讲“恒正/有零点/恰一个解”三种问法，P1 把它作为独立考点，要求**讨论互斥且完备**并说清开口方向。
5. **官方给分点式的答题规范：**国内只看最终答案对不对，P1 的方法分体系要求**写出令两式相等、乘分母、用判别式这几个动作**，缺一个动作丢一个 M 分。

给国内转轨学生的建议：把国内“画图”的习惯升级为“用英文把图说清”，把国内“求根”的习惯升级为“用判别式控制交点个数”，再把国内“看图猜”的习惯升级为“先配标准形式再变换”——这三条正是 P1 满分的分水岭。

国内教材可以直接迁移的三个工具

1. **判别式：**人教 A 版必修二 2.2 与必修一第三章都系统讲过 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的三种用途（判断根的个数、判断大小、求最值）。P1 的交点计数题本质就是第二种用途。
2. **配方法与错位相减：**求极值、判断符号的常用手段，迁移到“P1 求极值点个数”上完全够用。
3. **函数的图像变换公式：**选择性必修一 3.4 的 $y = f(ax + b)$ 型变换，可直接用于本章 4.4–4.6 的所有情形。

1 衔接练习 [幂函数]

Sketch the graphs of the functions $y = x^2$ and $y = \dfrac{1}{x^2}$ on the same axes. State the equations of the asymptotes of $y = \dfrac{1}{x^2}$ and describe the position of its two branches. Hence state, without solving, the number of real solutions of $x^2 = \dfrac{1}{x^2}$.

中文：在同一坐标系中画出 $y = x^2$ 与 $y = \dfrac{1}{x^2}$ 的图像。写出 $y = \dfrac{1}{x^2}$ 的渐近线方程并描述它两条分支的位置。据此不解方程，说明 $x^2 = \dfrac{1}{x^2}$ 的实数解个数。

答 Answer： _____

2 衔接练习 [图象变换]

The graph C has equation $y = f(x)$ and passes through the points $(-2, 0)$ and $(0, -5)$. The curve touches the x-axis at the point $(3, 0)$. Sketch the curve with equation $y = f(2x - 6) + 1$, showing clearly the coordinates of the points where it cuts or touches the coordinate axes.

中文：图像 C 的方程为 $y = f(x)$，它过点 $(-2, 0)$ 与 $(0, -5)$，并在点 $(3, 0)$ 处与 x 轴相切。画出方程为 $y = f(2x - 6) + 1$ 的曲线，清楚标出它与坐标轴相交或相切处的坐标。

答 Answer： _____

4.11 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘

下表列出 2019–2026 年 P1 中属于第 4 章考点的真题定位，共 **27 道**。**使用方法：**限时 45 分钟完成其中标记难度较高的 8–10 道（含带参数的题目），完成后用**附录 C 的错题模板**逐题复盘——特别记录：**是概念表述错、变换顺序错，还是参数范围错**。本讲义提醒：近五年本章失分的主因不是算错，而是**类型词写错（crosses / touches）、渐近线方程漏写、变换描述缺单位与方向、参数范围端点开闭搞错**这四类。

考点	近五年真题定位（年份 · 场次 · 题号 · 分值）
三次函数图像	19 年 1 月 Q11（12 分）
	20 年 1 月 Q10（8 分）
	21 年 10 月 Q6（10 分）
	23 年 1 月 Q10（10 分）
	24 年 10 月 Q4（10 分）
	26 年 1 月 Q10（8 分）
	26 年 6 月 Q6（7 分）
倒数函数图像	19 年 10 月 Q6（8 分）
	20 年 10 月 Q7（11 分）
	21 年 1 月 Q6（10 分）
	23 年 10 月 Q4（7 分）
	24 年 1 月 Q7（9 分）
	24 年 10 月 Q6（9 分）
	25 年 1 月 Q7（8 分）
	25 年 10 月 Q6（9 分）
	26 年 6 月 Q10（11 分）
交点个数	21 年 6 月 Q9（7 分）
	22 年 1 月 Q10（9 分）
	24 年 6 月 Q8（7 分）
平移	22 年 6 月 Q4（6 分）
	23 年 1 月 Q7（10 分）
	25 年 6 月 Q9（10 分）
图像变换组合	19 年 1 月 Q8（6 分）
	20 年 10 月 Q5（9 分）
	21 年 10 月 Q9（9 分）
	24 年 6 月 Q3（6 分）
	26 年 1 月 Q5（7 分）

1 真题演练 [2024 年 6 月 Q8（7 分）]

The curve C_1 has equation $y = x(4 - x^2)$. (a) Sketch the graph of C_1 showing the coordinates of any points of intersection with the coordinate axes. (3) The curve C_2 has equation $y = \frac{A}{x}$, where A is a constant. (b) Show that the x coordinates of the points of intersection of C_1 and C_2 satisfy the equation $x^4 - 4x^2 + A = 0$. (1) (c) Hence find the range of possible values of A for which C_1 meets C_2 at 4 distinct points.

中文：曲线 C_1 的方程为 $y = x(4 - x^2)$。(a) 画出 C_1 的图像，标出与坐标轴交点的坐标。(3) 曲线 C_2 的方程为 $y = \frac{A}{x}$，其中 A 为常数。(b) 证明 C_1 与 C_2 交点的 x 坐标满足方程 $x^4 - 4x^2 + A = 0$。(1) (c) 据此求 A 的取值范围，使 C_1 与 C_2 恰交于 4 个不同的点。

答 Answer： _____

2 真题演练 [2020 年 10 月 Q7（11 分）]

The curve C has equation $y = \dfrac{1}{2-x}$. (a) Sketch the graph of C. On your sketch you should show the coordinates of any points of intersection with the coordinate axes and state clearly the equations of any asymptotes. (3) The line l has equation $y = 4x + k$, where k is a constant. Given that l meets C at two distinct points, (b) show that $k^2 + 16k + 48 > 0$. (4) (c) Hence find the range of possible values of k.

中文：曲线 C 的方程为 $y = \dfrac{1}{2-x}$。(a) 画出 C 的图像，在图上标出与坐标轴交点的坐标，并清楚写出任何渐近线的方程。(3) 直线 l 的方程为 $y = 4x + k$，其中 k 为常数。已知 l 与 C 交于两个不同的点，(b) 证明 $k^2 + 16k + 48 > 0$。(4) (c) 据此求 k 的可能取值范围。

答 Answer： _____

3 真题演练 [2026 年 6 月 Q10（11 分）]

The curve C has equation $y = \dfrac{3k}{x-2k}$, $x \neq 2k$, where k is a positive constant. (a) Sketch a graph of C. Show on your sketch the coordinates of the point where C crosses a coordinate axis. (3) The line l has equation $y = 12 - x$. Given that l is a tangent to C, (b) show that $k^2 - 15k + 36 \leqslant 0$. (4) The line l meets C at a point P. Given that P lies below the x-axis, (c) find the coordinates

of P.

中文：曲线 C 的方程为 $y=\dfrac{3k}{x-2k}$（$x\neq 2k$），其中 k 为正常数。(a) 画出 C 的图像，在图上标出 C 与某条坐标轴交点的坐标。(3) 直线 l 的方程为 $y=12-x$。已知 l 与 C 相切，(b) 证明 $k^2-15k+36\leqslant 0$。(4) 直线 l 与 C 交于点 P，已知 P 在 x 轴下方，(c) 求 P 的坐标。

答 Answer： _____

4 真题演练 [2021 年 10 月 Q9（9 分）]

Figure 5 shows a sketch of the curve with equation $y=f(x)$ where $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geqslant 0$. The point $P(9,3)$ lies on the curve. (a) Sketch and clearly label the graphs of $y=f(2x)$ and $y=f(x)+3$ showing on each graph the coordinates of the point to which P is transformed. (3) The graph of $y=f(2x)$ meets the graph of $y=f(x)+3$ at the point Q. (b) Find, in simplest form, the exact coordinates of Q, showing your working.

中文：图 5 给出方程为 $y=f(x)$（其中 $f(x)=\sqrt{x}$，$x\geqslant 0$）的曲线草图。点 $P(9,3)$ 在该曲线上。(a) 画出并清楚标注 $y=f(2x)$ 与 $y=f(x)+3$ 的图像，并在每张图上标出点 P 被变换到的点的坐标。(3) 图像 $y=f(2x)$ 与图像 $y=f(x)+3$ 交于点 Q。(b) 写出解题过程，求 Q 的最简精确坐标。

答 Answer： _____

直线图像　Straight Line Graphs

本章导读

本章是 P1 里**唯一一章「用一条公式统治整个题型」的纯坐标几何**。近五年 P1 中本章共 **15 道真题**，分布极不均匀：**平行与垂直（C5c）独占 10 道，占三分之二**，直线方程的形式（C5b）2 道，两点间距离（C5d）2 道，$y = mx + c$ 的直接应用（C5a）1 道。分值集中在 **5–11 分**的中档题，且**几乎每道题都要「先写形式、再算数值」**。

本章有**三条不能违反的铁律**，请先记住再往下读：

铁律一：斜率是「有方向」的。 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$，**先读横坐标、再读纵坐标**，顺序颠倒符号就反。求两点间斜率时，**永远从左往右**取点（x 小的当第一点），这样分母一定为正，符号一目了然。竖直线 $x = a$ **没有斜率**，这是一个例外，必须记牢。

铁律二：两条直线垂直，斜率的乘积是 -1，不是 $+1$。国内教材写「斜率互为负倒数」，P1 的官方 Mark Scheme 直接写 $m_1 \times m_2 = -1$。这个负号一旦漏掉，**垂直就变成了平行**，整道题的 M 分与 A 分全部连坐。

铁律三：题目要什么形式，就只能交什么形式。同一条直线可以写成 $y = mx + c$、$ax + by + c = 0$、点斜式、两点式……但官方只按**题目指定的形式**给分。问 **in the form** $px + qy + r = 0$ **where** p, q **and** r **are integers to be found** 时，写成 $y = mx + c$ 即使数学上完全正确，**也可能拿不到 A1**。

本章的 **5.5–5.6 两节「满分必备」**分别把「怎么选形式、怎么正确转换」与「点到直线距离、垂直平分线、面积计算怎么写满 M 分和 A 分」两件事彻底讲透；前四节是工具，5.7 是国内教材对照，5.8 是章节真题测评与错题复盘。

本单元新词 Key Vocabulary

English 英文	中文	在 P1 中的用法
gradient	斜率	记作 m；定义为 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$；官方用词 **the gradient of** AB
standard form	一般式	$ax+by+c=0$；题目要求 **integers** 时必须化为整数系数
gradient-intercept form	斜截式	$y=mx+c$；c 就是纵截距，官方常写 **in the form** $y=mx+c$
point-slope form	点斜式	$y-y_1=m(x-x_1)$；P1 不直接考，但国内教材用它起步
intercept	截距	x 截距写作 $(a,0)$，y 截距写作 $(0,b)$，**括号与坐标都不能省**
parallel to	平行于	判定：**same gradient**，即 $m_1=m_2$
perpendicular to	垂直于	判定：**product of gradients is** -1，即 $m_1m_2=-1$
midpoint	中点	$M=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$
perpendicular bisector	垂直平分线	过中点且垂直于原直线的直线；长度与面积计算中常被考查
length	长度	线段长度的官方用词；如 **the length of** AB
distance between two points	两点间距离	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
shortest distance	最短距离	点到直线的垂线段长度；答案常要求 **fully simplified surd**
surd	根式	形如 $k\sqrt{m}$（m 不含平方因子）的无理数；P1 要求 **simplest form**
point of intersection	交点	两条直线的公共点；P1 常问 **the coordinates of the point where ... meet**
coordinate	坐标	写成 (a,b) 的形式；两个数都要写，顺序是 (x,y)
substitute	代入	把一个点的坐标代进直线方程；官方写 **substituting** 或 **replacing**
area of a triangle	三角形面积	$\frac{1}{2}\times$ 底 $\times$ 高；坐标题要求 **making the method clear**

5.1 y = mx + c 直线的斜率与截距

任何一条**不竖直**的直线，都能唯一地写成 $y=mx+c$。这里 m 与 c 不是随便挑的两个字母：m 是这条直线的**斜率**，c 是它的**纵截距**。P1 把这个形式叫作 **the gradient-intercept form**，它是整章出现频率最高的表达式——求直线方程、求交点、判平行垂直、建模型，全部要用它。

- 斜率的定义式为 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（$x_2\neq x_1$）。**分子是纵坐标之差，分母是横坐标之差**，两者顺序不可颠倒
- 斜率是**有向**的：$m>0$ 时直线自左下走向右上，$m<0$ 时自左上走向右下，$m=0$ 时是水平线 $y=b$
- **竖直线** $x=a$ **没有斜率**（gradient undefined），这是本章唯一的例外，**不能**把它写成 $y=mx+c$
- 纵截距：令 $x=0$ 得 $y=c$，即直线过点 $(0,c)$；横截距：令 $y=0$ 得 $x=-\dfrac{c}{m}$（$m\neq0$）

- c 的几何意义就是**直线与 y 轴交点的纵坐标**；$c=0$ 当且仅当直线过原点 O
- 两条不竖直的直线**平行** $\Longleftrightarrow$ 斜率相等（$m_1=m_2$）且纵截距不同；**垂直** $\Longleftrightarrow$ $m_1m_2=-1$
- 倾斜角 θ（$0\leqslant\theta<180°$）满足 $m=\tan\theta$，所以 $m<0$ 对应钝角，$m>0$ 对应锐角
- 建模题里的 $H=at+b$ 就是 $y=mx+c$ 的特例：a 是**年增长率**，b 是**初始值**（即纵截距）

方法卡　斜率与截距速查表

要回答的问题	怎么算	规范英文表述
求斜率	$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，**先横后纵**	**the gradient of AB is m**
求纵截距	令 $x=0$，或直接读 c	**the y-intercept is $(0,c)$**
求横截距	令 $y=0$，解 $mx+c=0$	**the x-intercept is $\left(-\frac{c}{m},0\right)$**
判水平	$m=0$，方程形如 $y=b$	**parallel to the x-axis**
判竖直	方程形如 $x=a$	**the gradient is undefined**
判平行	$m_1=m_2$ 且 $c_1\neq c_2$	**the lines are parallel**
判垂直	$m_1\times m_2=-1$	**the lines are perpendicular**

给定形式	化为 $y=mx+c$ 的标准动作	最容易错在哪
$ax+by+c=0$	两边同除以 b，再移项：$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$	**符号**：b 移到右边要变号
$2y=3x+8$	两边同除以 2：$y=\dfrac{3}{2}x+4$	**忘记同除**，把 m 写成 3
点斜式 $y-y_1=m(x-x_1)$	直接读出 m；令 $x=0$ 得 $c=y_1-mx_1$	**用错点**：换点代入也要算对 c
两点式 $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	先取斜率 m，再用点斜式展开	交叉相乘时分子分母写反

1 例题　[2019 年 10 月 Q2（5 分）]

A tree was planted in the ground. Exactly 2 years after it was planted, the height of the tree was 1.85 m. Exactly 7 years after it was planted, the height of the tree was 3.45 m. Given that the height, H metres, of the tree, t years after it was planted in the ground, can be modelled by the equation $H=at+b$, where a and b are constants, (a) find the value of a and the value of b (4) (b) State, according to the model, the height of the tree when it was planted. (1)

中文：一棵树被种下。种下整 2 年时树高 1.85 m，种下整 7 年时树高 3.45 m。已知树高 H（米）与种下后的年数 t 之间的关系可由方程 $H=at+b$ 建模，其中 a、b 为常数。(a) 求 a 与 b 的值。(4) (b) 根据模型说明树刚种下时的高度。(1)

答 Answer：_____

2 例题 [2026 年 1 月 Q4（a）改编（2 分）]

The line l_1, shown in Figure 1, has equation $2y = 3x + 8$. The line l_1 intersects the y-axis at the point P and passes through the point Q with x coordinate 6. (a) Find (i) the coordinates of P, (ii) the coordinates of Q. (2) Hence find the x coordinate of the point where l_1 meets the x-axis.

中文：图 1 中的直线 l_1 的方程为 $2y = 3x + 8$。直线 l_1 与 y 轴交于点 P，并经过横坐标为 6 的点 Q。(a) 求 (i) P 的坐标；(ii) Q 的坐标。(2) 据此求 l_1 与 x 轴交点的横坐标。

答 Answer： _____

3 例题 [讲义例题（形式转换 + 截距 + 面积）]

The straight line l has equation $2x - 3y + 12 = 0$. (a) Write down the equation of l in the form $y = mx + c$, giving the values of m and c. (2) (b) State the coordinates of the point where l meets the y-axis. (1) (c) Find the coordinates of the point where l meets the x-axis. (2) (d) Hence find the area of the triangle bounded by l and the coordinate axes. (2)

中文：直线 l 的方程为 $2x - 3y + 12 = 0$。(a) 把 l 的方程写成 $y = mx + c$ 的形式，写出 m 与 c 的值。(2) (b) 写出 l 与 y 轴交点的坐标。(1) (c) 求 l 与 x 轴交点的坐标。(2) (d) 据此求由 l 与两坐标轴围成的三角形的面积。(2)

答 Answer： _____

4 例题 [讲义例题（负斜率与符号约定）]

The line l passes through the points $A(-1,5)$ and $B(4,-1)$. (a) Find the gradient of AB, giving your answer as a fully simplified fraction. (2) (b) Find the equation of l, giving your answer in the form $y = mx + c$. (3) (c) State, with a reason, whether the graph of l is increasing or decreasing as x increases. (1) (d) Find the coordinates of the point where l meets the y-axis. (1)

中文：直线 l 经过点 $A(-1,5)$ 与 $B(4,-1)$。(a) 求 AB 的斜率，答案写成最简分数。(2) (b) 求 l 的方程，答案写成 $y = mx + c$ 的形式。(3) (c) 说明并给出理由：当 x 增大时，l 的图像是递增还是递减。(1) (d) 求 l 与 y 轴交点的坐标。(1)

答 Answer： _____

5.2 Equations of straight lines 直线方程的各种形式

同一条直线有多种写法。P1 的题目会**明确指定以什么形式作答**，而官方只按指定形式给分，所以「形式选择」本身就是考点。本节把 P1 常见的五种形式、它们之间的转换路径，以及「什么时候该用哪一种」一次讲清。

- **斜截式 $y = mx + c$：**最常用。m 是斜率，c 是纵截距。题目说 **the form** $y = mx + c$ 就必须写成交叉相乘后一眼能看出 m、c 的样子

- **一般式** $ax+by+c=0$：题目说 **the form** $ax+by+c=0$ **where** a, b **and** c **are integers** 时，**必须清除所有分母**并化成整数系数
- **点斜式** $y-y_1=m(x-x_1)$：由「一个点 + 一个斜率」直接写出，是 $y=mx+c$ 的中间形态
- **两点式** $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$：由「两个点」直接写出，展开后与一般式等价
- **特殊形式**：水平线 $y=b$、竖直线 $x=a$。**竖直线无法写成** $y=mx+c$，遇到时直接写 $x=a$
- **平行线族**：与 $ax+by+c=0$ 平行的直线都形如 $ax+by+k=0$（$k\neq c$）；与 $y=mx+c$ 平行的都形如 $y=mx+k$
- **转换方向**要记牢：一般式 $\to$ 斜截式是**两边同除以** b；斜截式 $\to$ 一般式是**两边同乘以** m **的分母再整理**
- **整数系数的规范**：一般式要求 integers 时，系数应**无公因数**，且通常写成 $a>0$ 的形式（官方接受 $a<0$，但写成 $a>0$ 更稳）

方法卡　五种形式的选用与转换路线

题目给的信息	最省事的路线	注意
两个点 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)	两点式 $\to$ 展开 $\to$ 斜截式	**斜率分母不能为零**：若 $x_1=x_2$ 则该直线是竖直线
一个点 + 一个斜率	点斜式 $\to$ 展开 $\to$ 斜截式	别把点斜式当最终答案交上去
一般式 $ax+by+c=0$	同除以 b $\to$ 斜截式	若 $b=0$ 则该直线是竖直线 $x=-\dfrac{c}{a}$
要求 integers 的一般式	先写斜截式 $\to$ 同乘分母 $\to$ 整理	系数要**无公因数**
要求平行于已知直线	抄 a、b，只改常数项	$ax+by+k=0$ 中 k 由已知点决定

转换	标准动作	自检
$ax+by+c=0\to y=mx+c$	$by=-ax-c$，两边除以 b	$m=-\dfrac{a}{b}$，纵截距为 $-\dfrac{c}{b}$
$y=mx+c\to ax+by+c=0$	同乘 m 的分母再移项	把 x、y、常数排成 $ax+by+c=0$ 的顺序
斜截式 $\to$ 点斜式	代入其中一点	只用斜率与一个点

5 例题 [2020 年 1 月 Q6（8 分）]

The line l_1 has equation $3x-4y+20=0$. The line l_2 cuts the x-axis at $R(8,0)$ and is parallel to l_1. (a) Find the equation of l_2, writing your answer in the form $ax+by+c=0$, where a, b and c are integers to be found. (3) The line l_1 cuts the x-axis at P and the y-axis at Q. Given that $PQRS$ is a parallelogram, find (b) the area of $PQRS$ (3) (c) the coordinates of S. (2)

中文：直线 l_1 的方程为 $3x-4y+20=0$。直线 l_2 与 x 轴交于 $R(8,0)$，且 l_2 与 l_1 平行。(a) 求 l_2 的方程，答案写成 $ax+by+c=0$ 的形式，其中 a、b、c 为待求整数。(3) 直线 l_1 与 x 轴交于 P，与 y 轴交于 Q。已知 $PQRS$ 是平行四边形，求 (b) $PQRS$ 的面积 (3) (c) 点 S 的坐标。(2)

答 Answer： _____

6 例题 [C1 Coordinate geometry 补充例题（8 分）]

The point A has coordinates $(7, 4)$ and the point B has coordinates $(2, 0)$. (a) Find an equation of the line joining A and B, giving your answer in the form $ax + by + c = 0$, where a, b and c are integers. (3) (b) Find the length of AB, leaving your answer in surd form. (2) The point C has coordinates $(2, t)$, where $t > 0$, and $AC = AB$. (c) Find the value of t. (1) (d) Find the area of triangle ABC. (2)

中文：点 A 的坐标为 $(7, 4)$，点 B 的坐标为 $(2, 0)$。(a) 求直线 AB 的方程，答案写成 $ax + by + c = 0$ 的形式，其中 a、b、c 为整数。(3) (b) 求 AB 的长度，答案保留根式形式。(2) 点 C 的坐标为 $(2, t)$（$t > 0$），且 $AC = AB$。(c) 求 t 的值。(1) (d) 求三角形 ABC 的面积。(2)

答 Answer： _____

7 例题 [讲义例题（形式转换链）]

The line l has equation $3x + 4y = 12$. (a) Write down the equation of l in the form $y = mx + c$. (2) (b) Find the coordinates of the point where l meets the line $y = 2x$. (3) (c) Hence find the equation of the line which passes through the origin and the point found in (b), giving your answer in the form $ax + by + c = 0$ with integer coefficients. (2)

中文：直线 l 的方程为 $3x + 4y = 12$。(a) 写出 l 的方程在 $y = mx + c$ 形式下的表达式。(2) (b) 求 l 与直线 $y = 2x$ 交点的坐标。(3) (c) 据此求经过原点与 (b) 中所求点的直线的方程，答案写成整数系数的 $ax + by + c = 0$ 形式。(2)

答 Answer： _____

8 例题 [讲义例题（整数化与平行线族）]

The line l has equation $2x-8y+12 = 0$. (a) Write down the equation of l in the form $ax+by+c = 0$, where a, b and c are integers with no common factor. (2) (b) Hence find the gradient of l. (1) (c) The line m is parallel to l and passes through the point $(3, 1)$. Find the equation of m in the form $y = mx + c$. (3)

中文：直线 l 的方程为 $2x - 8y + 12 = 0$。(a) 写出 l 的方程在 $ax + by + c = 0$ 形式下的表达式，其中 a、b、c 为无公因数的整数。(2) (b) 据此求 l 的斜率。(1) (c) 直线 m 与 l 平行且经过点 $(3, 1)$。求 m 的方程，答案写成 $y = mx + c$ 的形式。(3)

答 Answer： _____

5.3 Parallel and perpendicular lines 平行与垂直

平行与垂直是本章出现频率最高的考点：近五年 P1 独占 **10 道真题**，占本章真题的三分之二。判定本身只需一步运算，但**符号一旦出错，后面的交点、面积会全部连坐**。本节把「负倒数」这件事彻底讲透，并且交代清楚**什么时候必须换用另一种判定法**。

- **平行**：两条不竖直的直线平行 $\iff$ $m_1 = m_2$（且纵截距不同，否则是同一条线）。所有竖直线互相平行
- **垂直**：两条不竖直的直线垂直 $\iff$ $m_1 \times m_2 = -1$，即斜率互为**负倒数**
- 负倒数的求法：把 $m = \dfrac{p}{q}$ 写成最简分数后，**分子分母交换位置，再加负号**，得 $-\dfrac{q}{p}$
- 水平线与竖直线互相垂直，此时一条斜率是 0、另一条斜率不存在，**不能用 $m_1 m_2 = -1$ 去判**（会出现 $0\times$ 无穷大的荒谬）
- **求「过定点且与已知直线垂直」的直线**的三步：(1) 把已知直线化为斜截式读出 m_1；(2) 取负倒数得 m_2；(3) 用定点代入 $y = mx + c$ 求 c
- **求「过定点且与已知直线平行」的直线**：直接沿用 m_1，再用定点求 c；若要求一般式，则抄 a、b 只改常数项
- **垂直平分线**：先求中点坐标，再取负倒数斜率，过中点写出直线——它是「中点 + 垂直」两步的合成
- 两条直线的**交点**只有一个求法：把一条的表达式代入另一条，解一元一次方程

方法卡　平行与垂直判定与求线流程

任务	标准动作	易错提醒
判平行	斜率相等 $m_1 = m_2$	两线重合时也「斜率相等」，**要再看纵截距**
判垂直	斜率乘积 $m_1 m_2 = -1$	**负号不能漏**；漏了负号就变成平行
过定点求垂线	求 m_1 $\to$ 取负倒数 $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ $\to$ 定点代入求 c	**别把 -1 写成 $+1$**
过定点求平行线	沿用 m_1，定点代入求 c	截距必须另求，不能照抄
求垂直平分线	中点坐标 $\to$ 负倒数斜率 $\to$ 过中点	中点坐标写错，**整条线都错**
求两线交点	一条代入另一条，解一次方程	结果写成 (a, b) 的坐标对

已知斜率 m	负倒数 $-\frac{1}{m}$	检验：乘积应等于 -1
3	$-\frac{1}{3}$	$3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$ ✓
$\frac{4}{5}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{4}\right)=-1$ ✓
$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=-1$ ✓
0	不存在	水平线只能与**竖直线**垂直

9 例题 [2019 年 1 月 Q3（5 分）]

The line l_1 has equation $3x+5y-7=0$. (a) Find the gradient of l_1. (2) The line l_2 is perpendicular to l_1 and passes through the point $(6,-2)$. (b) Find the equation of l_2 in the form $y=mx+c$, where m and c are constants. (3)

中文：直线 l_1 的方程为 $3x+5y-7=0$。(a) 求 l_1 的斜率。(2) 直线 l_2 与 l_1 垂直且经过点 $(6,-2)$。(b) 求 l_2 的方程，答案写成 $y=mx+c$ 的形式，其中 m、c 为常数。(3)

答 Answer：_____

10 例题 [2024 年 10 月 Q1（6 分）]

The line l_1 passes through the point $A(-5,20)$ and the point $B(3,-4)$. (a) Find an equation for l_1, giving your answer in the form $y=mx+c$, where m and c are constants. (3) The line l_2 is perpendicular to l_1 and passes through the midpoint of AB. (b) Find an equation for l_2, giving your answer in the form $px+qy+r=0$, where p, q and r are integers. (3)

中文：直线 l_1 经过点 $A(-5,20)$ 与点 $B(3,-4)$。(a) 求 l_1 的方程，答案写成 $y=mx+c$ 的形式，其中 m、c 为常数。(3) 直线 l_2 与 l_1 垂直且经过 AB 的中点。(b) 求 l_2 的方程，答案写成 $px+qy+r=0$ 的形式，其中 p、q、r 为整数。(3)

答 Answer：_____

11 例题 [讲义例题（判定 + 交点 + 平行线族）]

The lines l_1 and l_2 are given by $l_1 : 2x + y = 6$ and $l_2 : x - 2y = 3$. (a) Find the gradients of l_1 and l_2. (2) (b) Show that l_1 and l_2 are perpendicular. (2) (c) Find the coordinates of the point where l_1 and l_2 intersect. (3) (d) The line l_3 passes through the origin and is parallel to l_1. Find the equation of l_3 in the form $y = mx + c$. (2)

中文：直线 l_1 与 l_2 分别为 $l_1 : 2x + y = 6$ 与 $l_2 : x - 2y = 3$。(a) 求 l_1 与 l_2 的斜率。(2) (b) 证明 l_1 与 l_2 互相垂直。(2) (c) 求 l_1 与 l_2 交点的坐标。(3) (d) 直线 l_3 经过原点且与 l_1 平行。求 l_3 的方程，答案写成 $y = mx + c$ 的形式。(2)

答 Answer： _____

12 例题 [讲义例题（平行 + 垂直 + 面积综合）]

The line l_1 has equation $y = 2x + 1$. (a) Find the equation of the line l_2 which is parallel to l_1 and passes through the point $(3, 10)$, giving your answer in the form $y = mx + c$. (2) (b) Show that l_1 is perpendicular to the line l_3 with equation $y = -\frac{1}{2}x + 5$. (2) (c) Find the coordinates of the point where l_1 and l_3 intersect. (3) (d) Hence find the area of the triangle bounded by l_1, l_3 and the y-axis. (3)

中文：直线 l_1 的方程为 $y = 2x+1$。(a) 求与 l_1 平行且经过点 $(3, 10)$ 的直线 l_2 的方程，答案写成 $y = mx+c$ 的形式。(2) (b) 证明 l_1 与方程为 $y = -\frac{1}{2}x + 5$ 的直线 l_3 互相垂直。(2) (c) 求 l_1 与 l_3 交点的坐标。(3) (d) 据此求由 l_1、l_3 与 y 轴围成的三角形的面积。(3)

答 Answer： _____

5.4 Length 两点间距离

两点间距离公式是勾股定理的直接应用，但 P1 对它的书写有**自己的偏好：先写出平方形式，再开方**，最后把根式化到最简。顺序反了或省略了平方形式，就会丢掉「distance between two points」这一类的 M 分。

- 两点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 的距离：$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$，**先写平方形式再开方**
- 平方形式是 P1 的得分关键：$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$。**先把 AB^2 算出来**，中间步骤不必展开每一个平方
- **根式必须化到最简**：$\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$，$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$，$\sqrt{41}$ 不能再拆。官方常写 **fully simplified surd**
- 答案形如 $k\sqrt{m}$ 时要**把 k 写出来**：题目说 $k\sqrt{5}$ **where k is an integer**，答案只写 $\sqrt{45}$ 是拿不到分的
- **中点公式**：$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$，横纵坐标分别取平均
- 点到直线的距离：直线 $ax + by + c = 0$ 与点 (x_0, y_0) 的距离为 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$；**分子要带绝对值**
- 两平行线 $ax + by + c_1 = 0$、$ax + by + c_2 = 0$ 的距离：$\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$，**两式的 a、b 必须完全相同**

- **坐标面积公式：**三角形 ABC 的面积 $=\dfrac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|$，适合顶点多、底高不好找的情形

方法卡　距离与长度计算速查表

要回答的问题	标准动作	规范表述
两点间距离	先写 $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$，再开方	the length of AB is $\sqrt{41}$
化简根式	提最大平方因子到根号外	fully simplified surd
形如 $k\sqrt{m}$	把系数与根式分开写	$AB=3\sqrt{5}$，故 $k=3$
中点	横纵坐标分别取平均	the midpoint is $(-1,8)$
点到直线距离	$\dfrac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$，分子带绝对值	the distance from P to l is $\frac{3}{\sqrt{5}}$
平行线间距离	$\dfrac{\lvert c_1-c_2\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$，两式 a、b 相同	the distance between l_1 and l_2 is 3
三角形面积	优先用 $\frac{1}{2}\times$ 底 $\times$ 高；底高难找时用坐标面积公式	making the method clear

平方形式	开方后	备注
$25+16=41$	$\sqrt{41}$	已是最简，不能写成 6.4
$100+80=180$	$6\sqrt{5}$	提出最大平方因子 36
$9+16=25$	5	完全平方数，答案就写整数 5
$50+0=50$	$5\sqrt{2}$	提 25

13 例题　[C1 Coordinate geometry 补充例题（15 分）]

The line l_1 passes through the points $P(-1,2)$ and $Q(11,8)$. (a) Find an equation for l_1, giving your answer in the form $y=mx+c$, where m and c are constants. (4) The line l_2 passes through the point $R(10,0)$ and is perpendicular to l_1. The lines l_1 and l_2 intersect at the point S. (b) Calculate the coordinates of S. (5) (c) Show that the length of RS is $3\sqrt{5}$. (2) (d) Hence, or otherwise, find the exact area of triangle PQR. (4)

中文：直线 l_1 经过点 $P(-1,2)$ 与 $Q(11,8)$。(a) 求 l_1 的方程，答案写成 $y=mx+c$ 的形式，其中 m、c 为常数。(4) 直线 l_2 经过点 $R(10,0)$ 且与 l_1 垂直。直线 l_1 与 l_2 交于点 S。(b) 求 S 的坐标。(5) (c) 证明 RS 的长度为 $3\sqrt{5}$。(2) (d) 据此或用其他方法，求三角形 PQR 的精确面积。(4)

答 Answer：_____

14 例题 [2025 年 6 月 Q5（7 分）]

The line l_1 has equation $x-2y+25=0$. The line l_2 passes through the origin and is perpendicular to l_1. (a) Find an equation for l_2. (2) The lines l_1 and l_2 intersect at the point P. (b) Use algebra to find the coordinates of P. (3) (c) Hence find the shortest distance from l_1 to the origin. Write your answer as a fully simplified surd. (2)

中文：直线 l_1 的方程为 $x-2y+25=0$。直线 l_2 经过原点且与 l_1 垂直。(a) 求 l_2 的方程。(2) 直线 l_1 与 l_2 交于点 P。(b) 用代数方法求 P 的坐标。(3) (c) 据此求 l_1 到原点的最短距离，答案写成最简根式。(2)

答 Answer： _____

15 例题 [讲义例题（平方形式 + 中点 + 垂直平分线）]

The point A has coordinates $(-2,5)$ and the point B has coordinates $(6,1)$. (a) Show that the length of AB is $k\sqrt{5}$, where k is an integer to be found. (2) (b) Find the coordinates of the midpoint M of AB. (2) (c) Find the exact distance from the origin O to the point M. (2) (d) The line l passes through M and is perpendicular to AB. Find the equation of l in the form $px+qy+r=0$, where p, q and r are integers to be found. (3)

中文：点 A 的坐标为 $(-2,5)$，点 B 的坐标为 $(6,1)$。(a) 证明 AB 的长度为 $k\sqrt{5}$，其中 k 是待求整数。(2) (b) 求 AB 中点 M 的坐标。(2) (c) 求原点 O 到点 M 的精确距离。(2) (d) 直线 l 经过 M 且与 AB 垂直。求 l 的方程，答案写成 $px+qy+r=0$ 的形式，其中 p、q、r 为待求整数。(3)

答 Answer： _____

16 例题 [讲义例题（平行线间距离与位置判断）]

The lines l_1 and l_2 are given by $l_1 : 3x + 4y = 25$ and $l_2 : 3x + 4y = 10$. (a) Show that l_1 and l_2 are parallel. (1) (b) Find the perpendicular distance between l_1 and l_2. (3) The point P has coordinates $(1, 1)$. (c) Find the perpendicular distance from P to l_1. (2) (d) Hence state, giving a reason, whether P lies between l_1 and l_2. (1)

中文：直线 l_1 与 l_2 分别为 $l_1 : 3x + 4y = 25$ 与 $l_2 : 3x + 4y = 10$。(a) 证明 l_1 与 l_2 互相平行。(1) (b) 求 l_1 与 l_2 之间的垂直距离。(3) 点 P 的坐标为 $(1, 1)$。(c) 求 P 到 l_1 的垂直距离。(2) (d) 据此说明并给出理由：P 是否在 l_1 与 l_2 之间。(1)

答 Answer： _____

5.5 满分必备：直线方程的选择与形式转换的正确书写

满分必备　满分必备：直线方程的选择与形式转换的正确书写

一、形式选择的决策表：题目要什么，就只能交什么 P1 判分的第一原则是**形式匹配**。下表按真题出现频率排列，**照着它选形式，不会丢任何冤枉分：**

题目措辞	必须交付的形式	自检动作
in the form $y = mx + c$	$y = mx + c$，**系数写成最简分数**	把 x 的系数提出来看是否为 1 或 -1
in the form $ax + by + c = 0$ where a, b and c are integers	整数系数的一般式	**三项是否还有公因数**；x 项系数是否为正
in the form $px + qy + r = 0$ where p, q and r are integers	同上，只是字母换了	同上
find an equation for the line	形式不限，但**写斜截式最稳**	有 c 的一般人都能看懂
find the equation in $y = mx+c$ where m and c are constants	斜截式	**不能只给点斜式**

最高频的三个陷阱：

1. **要一般式却给了斜截式**。数学完全正确，但官方只按指定形式给分，**最后的 A1 会被扣掉**。补救办法：把斜截式再同乘一次分母，整理成一般式，多花十秒换回一分。
2. **要一般式却没清分母**。写成 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 而题目要 $px + qy + r = 0$，等于交了一份错形式。补救办法：**三项同除以最大公因数**。
3. **要斜截式却给了点斜式**。$y - 3 = \frac{4}{5}(x - 2)$ 是过程，不是答案。补救办法：展开成 $y = mx + c$。

二、斜率的符号约定：一切符号错误的总源头 **符号约定**只有一条，但它错了就全盘皆输：

约定	为什么	避免办法
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$，**分子分母各自是差**	斜率是「每向右一个单位，上升多少」	写的时候先画一个箭头：横坐标向右，纵坐标向上
从左往右取点（x 小的当第一点）	保证分母为正，符号只由分子决定	把 x 小的点写在前面
$m > 0$ 上升、$m < 0$ 下降	描述题要写 **increasing** 或 **decreasing**	用一个测试点验证：取 x 稍大的点，看 y 变大还是变小
$m = 0$ 是水平线，**竖直线斜率不存在**	竖直线不能写成 $y = mx + c$	见到 $x = a$ 就立刻改写

唯一的自检法：算完斜率后问自己一句「这条线是往上还是往下？」如果图形与算出的斜率矛盾，一定是符号错了。**宁可多花十秒回头验算，也不要带着错符号往下做**——符号错误会沿着「斜率 → 垂线 → 交点 → 面积」一路传下去，把整道题的 M 分全部带走。**官方 Notes 常见表述：the gradient is undefined**（竖直线）、**the line is decreasing**（负斜率）、**parallel to the x-axis**（水平线）。**「有理由」的要求：**描述增减性时，**必须写出理由**（例如「因为斜率为负」），官方给分点通常是「结论 + 理由」两半，缺理由只给一半分。

三、垂直斜率乘积为 -1：负号的四次登场这是本章**最高频的单点失分**，值得逐层拆开看。

环节	正确写法	错误会怎样
已知斜率	$m_1 = -\dfrac{3}{5}$	把 A、B 顺序颠倒写成 $\dfrac{3}{5}$
取负倒数	$m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = -\dfrac{1}{-\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{3}$	漏掉最外层的负号，写成 $-\dfrac{5}{3}$
检验	$m_1 m_2 = -\dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{3} = -1$ ✓	**不检验**，把 $m_2 = \dfrac{3}{5}$ 也当成负倒数
写进答案	$y = \dfrac{5}{3}x - 12$	写成 $y = -\dfrac{5}{3}x - 12$

负号一共出现四次：原斜率自带一个、负倒数操作再加一个、乘积检验要等于 -1、答案里的常数项 c 又可能带负号。唯一可靠的防错手段是乘积检验：$m_1 \times m_2$ 必须等于 -1，不等就是错了。**另一个防错手段：**想清楚几何图像。$m_1 = -\dfrac{3}{5}$ 是一条左上到右下的线，它的垂线应当是**左下到右上**（正斜率），所以 m_2 必须是**正**的。若算出 $m_2 < 0$，图像就矛盾了。**水平线与竖直线必须单独处理：**$m = 0$ 的线只能与竖直线垂直，此时不能用 $m_1 m_2 = -1$ 去检验（会出现 $0\times$ 无穷大）。

四、点斜式与截距式的选择：什么时候用哪一个同样是「一个点 + 一个斜率」，写成点斜式还是斜截式，取决于**题目要什么**。

题目要求	直接用	为什么
$y = mx + c$	**截距式** $y = mx + c$，用已知点求 c	题目要 m 和 c 两个数，截距式直接把 c 暴露出来
$ax + by + c = 0$	**点斜式** $y - y_1 = m(x - x_1)$ 起步	点斜式没有分母，展开时最容易保持整数系数
过原点的直线	**斜截式**且 $c = 0$	过原点时截距直接是 0，不用求
平行于已知直线	**斜截式**，斜率照抄	平行时斜率不变，只需另求截距
垂直于已知直线	**点斜式**	先取负倒数，再用已知点写点斜式，最不容易错

为什么「过定点的垂线」推荐点斜式：垂直线的斜率是负倒数，本身就带着分数（如 $\dfrac{5}{3}$）。用点斜式 $y - y_1 = \dfrac{5}{3}(x - x_1)$ 写，**分母只出现一次**；若用截距式，则要先写出 $y = \dfrac{5}{3}x + c$，c 里面藏着一个分数，容易算错。**但交卷前必须把点斜式展开成题目要求的形式**——点斜式是**过程**，不是**答案**。

五、转换的标准动作与「整数化」检查表 一般式 $\to$ 斜截式只有两个动作，务必按顺序：

1. **移项：**把含 y 的一项单独留在左边，其余全部移到右边。**移项要变号：**$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c$。
2. **同除以 b：**$y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$。**分母是 b，不是 $|b|$，**b 是负数时符号自动处理。

斜截式 $\to$ 一般式同样两个动作：**同乘以斜率的分母**（把分数清掉），然后**移项并整理成 $ax+by+c=0$ 的顺序**（x 项在前、y 项其次、常数最后）。**整数化检查表**（交卷前逐条打勾）：

检查项	合格标准	不合格的典型例子
无公因数	三项系数的最大公因数为 1	$2x - 8y + 12 = 0$ 应写成 $x - 4y + 6 = 0$
系数为整数	不含任何分母	$3x - 4y + 12 = 0$ 已合格
符号规范	x 项系数为正	$-2x + 4y - 6 = 0$ 建议写成 $2x - 4y + 6 = 0$
项的顺序	$ax + by + c = 0$，x、y、常数	$6 - 4y + 2x = 0$ 需整理为 $2x - 4y + 6 = 0$

一个常见误解要澄清：把 $2x - 8y + 12 = 0$ 除以 2 写成 $x - 4y + 6 = 0$，**不是把题目改错**，而是同

一条直线的另一种写法，官方明确接受。反过来，写 $2x-8y+12=0$ 而题目要求 **no common factor** 才会被扣分。

1 满分示范 [形式选择与转换]

The line l passes through the points $A(-3,2)$ and $B(5,10)$. (a) Find the equation of l, giving your answer in the form $y=mx+c$, where m and c are constants. (3) (b) Hence write the equation of l in the form $ax+by+c=0$, where a, b and c are integers with no common factor. (2) (c) The line m is perpendicular to l and passes through the origin. Find the equation of m, giving your answer in the form $px+qy+r=0$, where p, q and r are integers to be found. (3) (d) Find the exact coordinates of the point where l and m intersect. (3)

中文：直线 l 经过点 $A(-3,2)$ 与 $B(5,10)$。(a) 求 l 的方程，答案写成 $y=mx+c$ 的形式，其中 m、c 为常数。(3) (b) 据此把 l 的方程写成 $ax+by+c=0$ 的形式，其中 a、b、c 为无公因数的整数。(2) (c) 直线 m 与 l 垂直且经过原点。求 m 的方程，答案写成 $px+qy+r=0$ 的形式，其中 p、q、r 为待求整数。(3) (d) 求 l 与 m 交点的精确坐标。(3)

答 Answer： _____

2 改错练习 [形式与符号]

A student is asked to find an equation of the line l which passes through the point $P(-1,2)$ and is perpendicular to the line with equation $3x-4y+5=0$, giving the answer in the form $px+qy+r=0$ where p, q and r are integers to be found. The student writes: 'The gradient of $3x-4y+5=0$ is $\frac{3}{4}$, so the gradient of l is $-\frac{4}{3}$. Using $P(-1,2)$: $y-2=-\frac{4}{3}(x+1)$, so $3y-6=-4x-4$, so the equation is $-4x-3y+2=0$.' Identify the two errors in the student's working and write the correct answer.

中文：某学生被要求求直线 l 的方程，其中 l 经过点 $P(-1,2)$ 且与方程为 $3x-4y+5=0$ 的直线垂直，答案要写成 $px+qy+r=0$ 的形式，其中 p、q、r 为待求整数。该学生写道：「$3x-4y+5=0$ 的斜

率是 $\frac{3}{4}$，所以 l 的斜率是 $-\frac{4}{3}$。用 $P(-1,2)$：$y-2=-\frac{4}{3}(x+1)$，所以 $3y-6=-4x-4$，所以方程是 $-4x-3y+2=0$。」指出该学生作业中的两处错误，并写出正确答案。

答 Answer： _____

3 满分示范 [平行垂直与符号]

The line l_1 has equation $y=2x-3$ and the line l_2 has equation $y=-\frac{1}{2}x+7$. (a) Show that l_1 and l_2 are perpendicular. (2) (b) Find the exact coordinates of the point where l_1 and l_2 intersect. (3) (c) The line l_3 is parallel to l_2 and passes through the point $(4,1)$. Find the equation of l_3, giving your answer in the form $y=mx+c$. (3) (d) Hence state, giving a reason, whether the point $(0,0)$ lies above, below or on the line l_3. (2)

中文：直线 l_1 的方程为 $y=2x-3$，直线 l_2 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+7$。(a) 证明 l_1 与 l_2 互相垂直。(2) (b) 求 l_1 与 l_2 交点的精确坐标。(3) (c) 直线 l_3 与 l_2 平行且经过点 $(4,1)$。求 l_3 的方程，答案写成 $y=mx+c$ 的形式。(3) (d) 据此说明并给出理由：点 $(0,0)$ 在直线 l_3 的上方、下方还是线上。(2)

答 Answer： _____

5.6 满分必备：点到直线距离、垂直平分线与中点等几何量的完整推导书写

满分必备　满分必备：点到直线距离、垂直平分线与中点等几何量的完整推导书写

一、几何量的标准答案形态：先认题型再动手 P1 本章的几何量只有五类，**每一类的答案形态是固定的**。认准题型，答案就八九不离十：

题型	答案形态	必须写出的过程
两点间距离	$k\sqrt{m}$ 或 $\sqrt{m}$，**已化到最简**	**先写平方形式**再开方
中点	$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$	写出横纵坐标各自的平均
垂直平分线	直线方程（按题目指定形式）	**中点 + 负倒数**两步都要写
点到直线距离	$\dfrac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$，**分子带绝对值**	写出代入的算式
平行线间距离	$\dfrac{\lvert c_1-c_2\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	说明两式的 a、b 相同

判别方法：题干里出现 **midpoint** 就是中点题；出现 **perpendicular bisector** 或「过中点且垂直」就是垂直平分线题；出现 **shortest distance / perpendicular distance** 就是距离题。**出现「两解」字样（如 find both possible）**，说明答案有两个，必须把两个都写出来。

二、点到直线距离公式的完整推导书写这一条公式 P1 直接考过（2025 年 6 月 Q5），**完整书写的样子**必须背下来。**公式：**直线 $ax+by+c=0$ 与点 $P(x_0,y_0)$ 的距离

$$d=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

标准书写五步（一步都不能省）：

1. **把直线写成一般式** $ax+by+c=0$，**看清** a、b、c **三个数**。这一步最容易抄错符号。
2. **把点的坐标代入：**算出 ax_0+by_0+c 的值，**外面套绝对值**。
3. **算分母：**$\sqrt{a^2+b^2}$，**是** a **与** b **的平方和开根，不是** $\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$，**也不是** $a+b$。
4. **写成分数形式：**$\dfrac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$。
5. **化成最简：**分子分母同乘以根号有理化，答案写成 **fully simplified surd**。

有理化的标准动作：$\dfrac{18}{\sqrt{5}}=\dfrac{18\sqrt{5}}{5}$。**什么时候可以不走公式：**若题目已经给了一条过该点且垂直于直线的线（正如 2025 年 6 月 Q5），**直接用那条垂线段的长度**就是最短距离，官方 Notes 明确接受 **hence** 的用法。**两条路都要会：**会公式保证遇到裸题能算，会「找垂线」保证遇到 hence 题不绕远。

三、垂直平分线与中点：两步合成的标准动作垂直平分线是本章**最常考的复合题型**，它的标准动作永远是**固定的两步**：

步骤	动作	注意
第 1 步	求中点 $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$	横纵坐标分别平均，**分母都是 2**；中点算错则整条线错
第 2 步	**取负倒数**得垂线斜率，再过 M 写直线	负倒数是 $-\frac{1}{m}$，**不是** $-\frac{1}{\lvert m\rvert}$

典型题的三问结构（见 2024 年 10 月 Q1）：

1. 先求原直线的斜率（用两点式或点斜式）；
2. 求中点 M；
3. 过 M 用负倒数斜率写垂线方程，**并按题目指定的形式交付**。

为什么中点必须是「两个坐标各自平均」：M 的横坐标是 x_1 与 x_2 的平均，纵坐标是 y_1 与 y_2 的平均，**不能交叉取**。**自查**：把求出的 M 代回原直线方程，若成立，说明 M 确实在原直线上。

四、面积题：方法必须写清楚（M 分的来源） P1 的面积题官方给分点几乎总是「**写出方法**」+「**算出结果**」两半。官方 Notes 常见原文：**making the method clear**、**method to be clearly stated**。**标准写法**：先说清**底是哪条、高是哪条、各是多少**，再相乘除以 2。

情形	怎么写	例子
底是坐标轴上的边	直接说「取 x 轴上的边作底」	底 6、高 4，面积 $= \frac{1}{2}\times 6\times 4 = 12$
底是竖直线上的边	说「取 BC 作底，高是到直线 $x=2$ 的水平距离」	底 8、高 5，面积 $= 20$
底是斜边（如 PQ）	说「取 PQ 作底，高为 RS」并说明 $RS \perp PQ$	底 $6\sqrt{5}$、高 $3\sqrt{5}$，面积 $= 45$
底高难找	用**坐标面积公式**，并把代入的算式写出来	$\frac{1}{2}\lvert x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\rvert$

四条硬规定：

- **必须先说底和高，再写算式**。只写 $\frac{1}{2}\times 6\times 4 = 12$ 而不说「底 6 高 4」，M 分要打折。
- **单位不能省**：面积写「平方单位」，长度写「units」或题目指定的单位。
- **根式底不要提前开方**：底是 $6\sqrt{5}$、高是 $3\sqrt{5}$ 时，写 $\frac{1}{2}\times 6\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}$ 再算，比先算 $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ 更容易拿分。
- **「Hence, or otherwise」要善用**：若前面已证出某个长度，直接用它，不要重算。

五、多解与舍取的书写规范题目出现 **both possible** 或要求写出两个解时，**两个都必须写，且要写出舍去的理由**。

环节	标准写法	典型错误
列出候选	由条件解出全部候选值，**全部列出**	只写一个就开始算
舍去	写明舍去理由（如「由 $t>0$，舍去 $t=0$」）	**默默不写**第二个，丢掉一个 A1
验算	把最终答案代回原方程验一次	不验算，符号错误被带到最后一问
答案形态	坐标写成 (a,b) 的坐标对	只写 $x=3$ 而不写 y

「写了一半」的两种典型：(1) 平方后开方产生的两个根，只写正的那个却没说明为何舍去负的；(2) 几何题中两条对称的解（如点 C 在直线两侧各有一个），只写了一侧。**阅卷时官方按「答案 + 理由」两半给分，理由是 M 分，答案是 A1 分。**

1 满分示范 [2020 年 10 月 Q6 改编]

The point A has coordinates $(-4, 11)$ and the point B has coordinates $(8, 2)$. (a) Find the gradient of AB, giving your answer as a fully simplified fraction. (2) The point M is the midpoint of AB. The line l passes through M and is perpendicular to AB. (b) Find an equation for l, giving your answer in the form $px + qy + r = 0$ where p, q and r are integers to be found. (4) (c) The point C lies on l such that the area of triangle ABC is 37.5 square units. Find the two possible pairs of coordinates of point C. (5)

中文：点 A 的坐标为 $(-4, 11)$，点 B 的坐标为 $(8, 2)$。(a) 求 AB 的斜率，答案写成最简分数。(2) 点 M 是 AB 的中点。直线 l 经过 M 且与 AB 垂直。(b) 求 l 的方程，答案写成 $px + qy + r = 0$ 的形式，其中 p、q、r 为待求整数。(4) (c) 点 C 在 l 上，且三角形 ABC 的面积为 37.5 平方单位。求点 C 的两对可能坐标。(5)

答 Answer： _____

2 满分示范 [最短距离与面积]

The line l has equation $3x - 4y + 10 = 0$ and the point P has coordinates $(3, 5)$. (a) Find, in the form $\frac{k}{\sqrt{m}}$ where k and m are integers to be found, the perpendicular distance from P to l. (3) (b) Hence find, in the form $k\sqrt{m}$ where k and m are integers to be found, the perpendicular distance from the origin O to l. (3) (c) The point Q is the foot of the perpendicular from P to l. Find the coordinates of Q. (3)

中文：直线 l 的方程为 $3x - 4y + 10 = 0$，点 P 的坐标为 $(3, 5)$。(a) 求 P 到 l 的垂直距离，答案写成 $\frac{k}{\sqrt{m}}$ 的形式，其中 k、m 为待求整数。(3) (b) 据此求原点 O 到 l 的垂直距离，答案写成 $k\sqrt{m}$ 的形式，其中 k、m 为待求整数。(3) (c) 点 Q 是从 P 向 l 作垂线的垂足。求 Q 的坐标。(3)

答 Answer：_____

3 改错练习 [方法表述]

A student is asked to find the area of triangle ABC where $A(0,0)$, $B(6,0)$ and $C(2,5)$. The student writes: 'Area $= \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$.' Identify the error in the student's method and write down a correct method, giving the exact area.

中文：某学生被要求求三角形 ABC 的面积，其中 $A(0,0)$、$B(6,0)$、$C(2,5)$。该学生写道：「面积 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$。」指出该学生方法上的错误，并写出正确的方法，给出精确面积。

答 Answer：_____

5.7 普高衔接：斜率、点斜式、两点式、平行垂直判定与距离公式

普高衔接　普高衔接：斜率、点斜式、两点式、平行垂直判定与距离公式

人教 A 版对应位置：六个知识点在教材里的落点本章的六个核心概念，国内教材**全都学过，而且往往讲得更细**。对应关系如下：

人教 A 版位置	教材讲了什么	P1 对应考点
选择性必修一 3.3 直线与圆	倾斜角与斜率、$k=\tan\alpha$、直线与直线的位置关系	**5.1** 斜率的定义与符号、**5.3** 平行与垂直的判定
选择性必修一 3.3 直线与圆	点斜式、斜截式、两点式、一般式及相互转化	**5.2** 直线方程的各种形式与转换
选择性必修一 3.3 直线与圆	两点间距离公式、点到直线距离公式、平行线间距离公式	**5.4** 长度与距离、**5.6** 距离公式的完整书写
选择性必修一 3.3 直线与圆	直线与圆的位置关系、弦长、圆与直线交点坐标	P1 **不考**（圆属于 P2 内容）
选择性必修二 4.3 平面向量	向量坐标运算、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 与垂直	**5.3** 用向量验证垂直（23 年 1 月 Q2）
必修二 6.1 平面向量	向量的坐标表示、模、平行与垂直的向量刻画	**5.6** 中点与垂直平分线的向量理解

关键结论：国内学生在**公式储备与图像直觉**上往往比 P1 学生熟练，真正的差别在**答题规范**上——P1 要你用**指定的英文形式**把结果写出来，并且**把方法写清楚**。

国内讲法与 P1 要求的六处差异

知识点	国内讲法	P1 要求
斜率	只讲「$k=\tan\alpha$」与几何意义，符号靠图形直观	**必须写出** $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ **的代入过程**，符号错要扣分
直线方程	重点背四种形式的互化，常做「化标准式」练习	**只按题目指定的形式给分**，形式不对 A1 全丢
一般式	教材说「化为一般式」即可，系数不强调整数	**明确要求 integers 且 no common factor**，必须清分母
平行垂直	判定写成「$k_1k_2=-1$」，偶尔用「$k_1=k_2$」	**官方直接写 product of gradients is -1**，且要看到负号
距离公式	课后习题为主，常直接给公式用	**要求先写平方形式**，且答案要 **fully simplified surd**
面积	讲「底乘高」，用图形直观找高	**making the method clear**：必须交代底与高各是哪条

P1 额外要求、国内教材略过或讲得少的五个点

1. **形式是被「指定」的，不是「随便选」的。**国内教材常让学生「用点斜式写」，P1 则**每一问都指定形式**，且形式错了即使数学正确也不给 A1。这是国内学生最常丢的分。
2. **答案形态被规定到小数点后。**如 **the length of AB is $k\sqrt{5}$ where k is an integer to be found** ——**必须把 k 单独写出来**，只给 $4\sqrt{5}$ 可能只给一半分。类似地还有 **fully simplified fraction**、**fully simplified surd**。
3. **方法必须写出来。**官方 Notes 反复出现 **making the method clear**、**method to be clearly stated**。国内只对答案，不写「底是什么、高是什么」。

4. **斜率偏好用两点的精确坐标直接求**。P1 几乎不给图，全靠坐标算；国内教学常先画图量角度取斜率（取整、误差大），P1 严禁这种方法，**必须用两点的精确坐标求斜率**。
5. **「一题多问」的链条要连贯**。P1 近年大量出现「先求 l_1，再求与 l_1 垂直的 l_2，再求交点，再求面积」的链条题，**后一问直接用前一问的结果**。国内练习多为孤立小题，**缺少「把前面的答案带进后面」的解题节奏训练**。

给国内转轨学生的建议：把国内「化标准式」的习惯升级为**「先圈出题目要的形式，再动笔」**；把国内「画图取斜率」的习惯升级为**「用两点的精确坐标求斜率」**；把国内「只对答案」的习惯升级为**「方法写清楚、两解写全、理由写足」**——这三条正是 P1 满分的分水岭。

国内教材可以直接迁移的四个工具

1. **四种形式的互化**：选择性必修一 3.3 的点斜式、斜截式、两点式、一般式互化，是 5.2 节的全部内容。迁移时只需注意一条：**P1 交的是最后的形式，中间的点斜式不能当答案交上去**。
2. **向量的坐标运算**：必修二 6.1 的 $\vec{a}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$ 与点积判定垂直，是 23 年 1 月 Q2 那类「prove that angle PQR $=90°$」的**标准解法**，比算斜率更不容易出错。
3. **点到直线距离公式**：选择性必修一 3.3 的公式原样可用，但 P1 额外要求**写出代入过程并化到最简**。
4. **三角形的面积公式与勾股定理**：人教 A 版必修二 6.1 已给出向量形式的面积公式 $\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$，与 P1 5.4 讲的**坐标面积公式**完全一致，可直接迁移。

1 衔接练习 [人教 A 版 3.3 直线与圆]

The line l passes through the points $A(-2,3)$ and $B(4,-1)$. (a) Write down the equation of l in the form $y=mx+c$. (2) (b) State, in the form $y=mx+c$, the equation of the line which is parallel to l and passes through the point $(0,5)$. (2) (c) The line m is perpendicular to l and passes through the point $(6,0)$. Find the equation of m, giving your answer in the form $y=mx+c$. (3) (d) Hence find the exact area of the triangle bounded by l, m and the x-axis. (3)

中文：直线 l 经过点 $A(-2,3)$ 与 $B(4,-1)$。(a) 写出 l 的方程在 $y=mx+c$ 形式下的表达式。(2) (b) 写出与 l 平行且经过点 $(0,5)$ 的直线的方程，答案同样写成 $y=mx+c$ 的形式。(2) (c) 直线 m 与 l 垂直且经过点 $(6,0)$。求 m 的方程，答案写成 $y=mx+c$ 的形式。(3) (d) 据此求由 l、m 与 x 轴围成的三角形的精确面积。(3)

答 Answer： _____

2 衔接练习 [人教 A 版向量与距离]

The points P, Q and R have coordinates $(-3,7)$, $(9,11)$ and $(12,2)$ respectively. (a) Prove that angle $PQR = 90°$. (3) Given that the point S is such that $PQRS$ forms a rectangle, (b) find the coordinates of S. (2) (c) Find the exact length of QS, giving your answer in the form $k\sqrt{m}$. (2)

中文：点 P、Q、R 的坐标分别为 $(-3,7)$、$(9,11)$、$(12,2)$。(a) 证明 $\angle PQR = 90°$。(3) 已知点 S 使得 $PQRS$ 构成矩形，(b) 求 S 的坐标。(2) (c) 求 QS 的精确长度，答案写成 $k\sqrt{m}$ 的形式。(2)

答 Answer： _____

5.8 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘

下表列出 2019–2026 年 P1 中属于第 5 章考点的真题定位，共 **15 道**。**使用方法：**限时 45 分钟完成其中标记难度较高的 6–8 道（含含参数的题目），完成后用**附录 C 的错题模板**逐题复盘——特别记录：**是斜率符号错、形式交错、漏掉两解之一，还是距离公式没化简**。

本讲义提醒：近五年本章失分的主因不是算错，而是**斜率符号反了（连带垂直变平行）、交的形式与题目要求不符、忘记「先写平方形式」、只写一个解、距离没化到最简**这五类。

考点	近五年真题定位（年份 · 场次 · 题号 · 分值）
直线基本性质	19 年 10 月 Q2（5 分）
直线方程	20 年 1 月 Q6（8 分）
	24 年 1 月 Q5（10 分）
平行与垂直	19 年 1 月 Q3（5 分）
	20 年 10 月 Q6（11 分）
	21 年 10 月 Q5（8 分）
	22 年 1 月 Q8（9 分）
	23 年 1 月 Q2（5 分）
	24 年 10 月 Q1（6 分）
	25 年 1 月 Q2（5 分）
	25 年 6 月 Q5（7 分）
	26 年 1 月 Q4（9 分）
	26 年 6 月 Q2（6 分）
两点距离	23 年 10 月 Q8（7 分）
	24 年 6 月 Q9（9 分）

1 真题演练 [2022 年 1 月 Q8（9 分）]

The line l_1 has equation $2x - 5y + 7 = 0$. (a) Find the gradient of l_1. (1) Given that the point A has coordinates $(6, -2)$ and the line l_2 passes through A and is perpendicular to l_1, (b) find the equation of l_2 giving your answer in the form $y = mx + c$, where m and c are constants to be found. (3) The lines l_1 and l_2 intersect at the point M. (c) Using algebra and showing all your working, find the coordinates of M. (3) Given that the diagonals of a square $ABCD$ meet at M, (d) find the coordinates of the point C. (2)

中文：直线 l_1 的方程为 $2x - 5y + 7 = 0$。(a) 求 l_1 的斜率。(1) 已知点 A 的坐标为 $(6, -2)$，直线 l_2 经过 A 且与 l_1 垂直，(b) 求 l_2 的方程，答案写成 $y = mx + c$ 的形式，其中 m、c 为待求常数。(3) 直线 l_1 与 l_2 交于点 M。(c) 用代数方法并写出全部解题过程，求 M 的坐标。(3) 已知正方形 $ABCD$ 的对角线交于 M，(d) 求点 C 的坐标。(2)

答 Answer： _____

2 真题演练 [2020 年 10 月 Q6（11 分）]

The point A has coordinates $(-4, 11)$ and the point B has coordinates $(8, 2)$. (a) Find the gradient of AB, giving your answer as a fully simplified fraction. (2) The point M is the midpoint of AB. The line l passes through M and is perpendicular to AB. (b) Find an equation for l, giving your answer in the form $px + qy + r = 0$ where p, q and r are integers to be found. (4) The point C lies on l such that the area of triangle ABC is 37.5 square units. (c) Find the two possible pairs of coordinates of point C. (5)

中文：点 A 的坐标为 $(-4, 11)$，点 B 的坐标为 $(8, 2)$。(a) 求 AB 的斜率，答案写成最简分数。(2) 点 M 是 AB 的中点。直线 l 经过 M 且与 AB 垂直。(b) 求 l 的方程，答案写成 $px + qy + r = 0$ 的形式，其中 p、q、r 为待求整数。(4) 点 C 在 l 上，且三角形 ABC 的面积为 37.5 平方单位。(c) 求点 C 的两对可能坐标。(5)

答 Answer： _____

3 真题演练 [2023 年 1 月 Q2（5 分）]

The points P, Q and R have coordinates $(-3, 7)$, $(9, 11)$ and $(12, 2)$ respectively. (a) Prove that angle $PQR = 90°$. (3) Given that the point S is such that $PQRS$ forms a rectangle, (b) find the coordinates of S. (2)

中文：点 P、Q、R 的坐标分别为 $(-3, 7)$、$(9, 11)$、$(12, 2)$。(a) 证明 $\angle PQR = 90°$。(3) 已知点 S 使得 $PQRS$ 构成矩形，(b) 求 S 的坐标。(2)

答 Answer： _____

4 真题演练 [2019 年 1 月 Q3（5 分）]

The line l_1 has equation $3x+5y-7=0$. (a) Find the gradient of l_1. (2) The line l_2 is perpendicular to l_1 and passes through the point $(6,-2)$. (b) Find the equation of l_2 in the form $y=mx+c$, where m and c are constants. (3)

中文：直线 l_1 的方程为 $3x+5y-7=0$。(a) 求 l_1 的斜率。(2) 直线 l_2 与 l_1 垂直且经过点 $(6,-2)$。(b) 求 l_2 的方程，答案写成 $y=mx+c$ 的形式，其中 m、c 为常数。(3)

答 Answer： _____

三角比 Trigonometric Ratios

本章导读

本章是 P1 中**唯一同时考「算」与「画」的章节**。近五年 30 道真题的分布很稳定：**三角函数图像与变换（C6e、C6f）合计 14 道，占近一半；余弦定理、正弦定理、三角形面积、解三角形（C6a–C6d）合计 16 道**，其中解三角形（C6d）有 6 道且分值最重（2019 年 6 月 Q7 共 10 分、2021 年 1 月 Q5 共 9 分、2025 年 1 月 Q8 达 13 分）。

本章有**三条不能违反的铁律**，请先记住再往下读：

铁律一：图形描述的官方词汇只有一套，套不上就不得分。「The minimum point with the smallest positive x coordinate」不能写成「最低点在右边」；「the period of the curve」不能写成「一个周期是 2π 左右」。2019 年 1 月 Q5(a) 的官方 Notes 写得很直白：**Allow exact equivalent values for their constants**——**常数可以换写法，但结构不能换。**

铁律二：正弦定理按 arcsin 求角，必须把补解写出来再取舍。 $\sin C = \dfrac{c\sin A}{a}$ 算出 arcsin 之后，另一个候选 180° – arcsin 在很多题里也是合法解。2022 年 6 月 Q2 的 (b) 之所以要额外给一句「AB 是最长边」，就是让你在两个候选中做取舍——**只写一个候选值，两个给分点只能拿到一个。**

铁律三：图像变换题考的是「量」的规范表述，不是「形」的猜测。周期、振幅、值域、位移、极值点横坐标，**每一个都是一个独立的 B1**。第 6.5 与 6.6 节把这套表述整理成可直接抄写的模板；**6.7–6.8 两节「满分必备」**则把 SSA 模糊情形与图像表述彻底讲透；最后两节用真实真题与国内教材做对照。

读完本章，你应当能做到：**看到已知条件就知道该用哪条定理、用完知道要检查什么、写出来的答案句句落在官方给分点上。**

本单元新词 Key Vocabulary

English 英文	中文	在 P1 中的用法
cosine rule	余弦定理	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；**已知两边及其夹角**（SAS）或**三边**（SSS）时用它
sine rule	正弦定理	$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$；**已知两角一边**（ASA/AAS）时用它
triangle area	三角形面积	$A=\frac{1}{2}ab\sin C$；也可用 $A=\frac{abc}{4R}$（P1 只用前一式）
included angle	夹角	两条**已知边之间的角**；用余弦定理时它必须夹在已知边中间
opposite side	对边	与某个角**相对**的那条边；$\sin A$ 中的 a 就是 A 的对边
ambiguous case	模糊情形	已知**两边及其中一边的对角**（SSA）时，解可能有两个、一个或零个
obtuse angle	钝角	大于 90° 的角；**题设「某角是钝角」通常是解题钥匙**，用来排除 arcsin 的补解
bearing	方位角	从正北（North）顺时针量起；三点测量题常用，答题写 **bearing of** 030°
period	周期	完成一个完整波形所需的 x 长度；$a\sin(bx)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{b}$，$\tan(bx)$ 是 $\frac{\pi}{b}$
amplitude	振幅	波形相对中线的最大偏移量，**永远取正数** $\lvert a\rvert$；写成负值不得分
displacement	位移（中线高度）	$y=a\sin(bx)+d$ 中的 d；值域为 $[d-\lvert a\rvert,\ d+\lvert a\rvert]$
maximum point	极大值点	官方用词是 **maximum point**；$a<0$ 的曲线上要特别小心谁才是极大
minimum point	极小值点	官方用词是 **minimum point**；**若限定「smallest positive x」必须逐个周期筛选**
general solution	通解	写出全部解的表达式，如 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$；计数题用它最省事
number of solutions	解的个数	常考「在区间 $0<x<20\pi$ 内有几个解」；**用周期乘区间长度，再数端点**
equilateral triangle	等边三角形	三边相等、三个角都是 60°；检验余弦定理的好例子
isosceles triangle	等腰三角形	两边相等、对应的两个角相等；判定 SSA 解的个数时常用
right-angled triangle	直角三角形	有一个 90° 角；**斜边平方等于另两边平方和**（余弦定理取 $\cos 90^\circ=0$）

6.1 The cosine rule 余弦定理

余弦定理是本章**唯一一条能同时解决「求边」与「求角」的定理**，也是解三角形的主干工具。它的适用场景一句话说完：**已知两边及其夹角（拿新边），或已知三边（拿新角）**。凡是「给三边求角」「给两边夹角求第三边」的题目，一律先用它。

- **标准形式：**$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$。三个字母必须对应清楚：A 是 a 的**对角**，b,c 是夹着 A 的那两条边

- **变形一（求角）**：$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$。这是 P1 出现频率最高的写法
- **变形二（求边）**：$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$。根号内若算出负数，说明数据不成三角形
- **三个字母轮换用**：求 B 时写成 $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$；**分母永远是被求角所对的另外两条边的乘积**
- **符号判据**：$a^2 < b^2+c^2 \Rightarrow A < 90°$；$a^2 > b^2+c^2 \Rightarrow A$ 是**钝角**。「判断钝角」的题目直接靠这一条给分
- **勾股定理是它的特例**：$C = 90°$ 时 $\cos C = 0$，得 $c^2 = a^2+b^2$
- **不能求面积**：余弦定理只给边长关系，**面积必须用** $A = \frac{1}{2}ab\sin C$（见 6.3）
- **不能用于 SSA**：已知两边及其中一边的对角时用余弦定理会陷入循环论证，必须先用正弦定理（见 6.2 与 6.7）

方法卡　余弦定理的三种问法与对应写法

题目给什么	用哪个式子	注意点
两边 b, c 及其夹角 A，求 a	$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$	**先平方再开方**，避免符号错；$a>0$ 取正根
三边 a, b, c，求 A	$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$	算出的 $\cos A$ 可能为负，**此时 A 是钝角**
两边 a, b 及其夹角 C，求 c	$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$	勾股定理是本式的特例
三边，判断某角是否钝角	比较 a^2 与 b^2+c^2 的大小	**只比较、不必开方**，最快的判定法
三边，求最大角	先找**最长边**，再用求角式	**最长边所对的角一定是最大角**，可省去两次试算

常见陷阱	后果与对策
分母写成 $2bc$ 却把 A 写成了另一个角	角度张冠李戴。**对策：动笔前先默念「a 对 A，b 对 B，c 对 C」**
$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 写成 $\dfrac{b^2+c^2+a^2}{2bc}$	**符号错，A1 全丢**。记住「**减去对角平方**」
求出 $a = \sqrt{\text{负数}}$ 还继续往下算	**数据不成三角形**，说明式子列错了，回头检查夹角是否用错
cos 值算出后忘记判断钝角	该角可能是钝角。cos **为负就说明角大于 90°**，必须写明
三边题里把「任意两边之和大于第三边」忘记检验	给出错误解。**开口说一句「$8+10>18$」不占时间，却能救一个 A1**

1 例题　[2019 年 10 月 Q4（5 分）]

A parallelogram $ABCD$ has area 40 cm^2. Given that AB has length 10 cm, BC has length 6 cm and $\angle DAB$ is obtuse, find (a) the size of $\angle DAB$, in degrees, to 2 decimal places (b) the length of the diagonal BD, in cm, to one decimal place.

中文：平行四边形 $ABCD$ 的面积为 40 cm^2。已知 $AB = 10$ cm，$BC = 6$ cm，且 $\angle DAB$ 是钝角，求 (a) $\angle DAB$ 的大小（单位为度），精确到 2 位小数；(b) 对角线 BD 的长度（单位为 cm），精确到 1 位小数。

答 Answer： _____

2 例题 [2025 年 10 月 Q3（5 分）]

The sides of a triangle are in the ratio $2 : 4 : 5$. (a) Find the size of the largest angle of the triangle, in degrees, to one decimal place. Given that the area of the triangle is 140 cm^2, (b) find the length of the shortest side, in cm, to one decimal place.

中文：一个三角形的三边之比为 $2 : 4 : 5$。(a) 求该三角形最大角的大小（单位为度），精确到 1 位小数。已知该三角形面积为 140 cm^2，(b) 求最短边的长度（单位为 cm），精确到 1 位小数。

答 Answer： _____

3 例题 [2021 年 6 月 Q3（9 分）]

In this question you must show all stages of your working. Solutions relying on calculator technology are not acceptable. Figure 1 shows the plan view of a flower bed. The flower bed is in the shape of a triangle ABC with $AB = p$ metres, $AC = q$ metres, $BC = 2\sqrt{2}$ metres and $\angle BAC = 60°$. (a) Show that $p^2 + q^2 - pq = 8$. Given that side AC is 2 metres longer than side

AB, use algebra to find (b) (i) the exact value of p (ii) the exact value of q. Using the answers to part (b), (c) calculate the exact area of the flower bed.

中文：本题必须写出全部解题步骤，不接受仅依赖计算器的解法。图 1 给出一块花坛的俯视图。花坛形状为三角形 ABC，其中 $AB = p$ m，$AC = q$ m，$BC = 2\sqrt{2}$ m，$\angle BAC = 60°$。(a) 证明 $p^2 + q^2 - pq = 8$。已知边 AC 比边 AB 长 2 m，用代数方法求 (b) (i) p 的精确值；(ii) q 的精确值。用 (b) 的答案，(c) 计算花坛的精确面积。

答 Answer： _____

4 例题 [2024 年 1 月 Q2（5 分）]

The triangle ABC is such that $AB = 15$ cm, $AC = 25$ cm, $\angle BAC = \theta°$ and the area of triangle ABC is 100 cm^2. (a) Find the value of $\sin\theta°$. Given that $\theta > 90°$, (b) find the length of BC, in cm, to 3 significant figures.

中文：三角形 ABC 满足 $AB = 15$ cm，$AC = 25$ cm，$\angle BAC = \theta°$，且三角形 ABC 的面积为 100 cm^2。(a) 求 $\sin\theta°$ 的值。又已知 $\theta > 90°$，(b) 求 BC 的长度（单位为 cm），精确到 3 位有效数字。

答 Answer： _____

5 例题 [讲义例题（方位角测量的标准两步走）]

A surveyor walks from a point A on a straight coastline to a point C inland, where $AC = 9$ km. At A the bearing of C is 040°. After walking 6 km in a straight line to a point B, the bearing of C from B is 070°. Find, to one decimal place, (a) the distance BC (b) the bearing of C from B measured the other way round, that is, as an angle between 0° and 360° going clockwise from north via the west.

中文：一位测量员从海岸线上一点 A 沿直线 inland 走向 inland 一点 C，$AC = 9$ km。在 A 处 C 的方位角为 040°。他沿直线行走 6 km 到达 B 点，从 B 看 C 的方位角为 070°。求（精确到 1 位小数）(a) 距离 BC；(b) 从 B 绕过另一方向看 C 的方位角，即从正北出发经西侧的 0° 到 360° 的顺时针角。

答 Answer： _____

6.2 The sine rule 正弦定理

正弦定理的适用场景与余弦定理正好互补：**已知两个角和一条边（ASA 或 AAS）**。它最大的特点是**三边与三角之间可以任意配对地换算**——这使它成为解三角形时求「剩余元素」的主力工具。它也带来本章最难的一类问题：**SSA 模糊情形**（详见 6.7）。

- **标准形式：** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$。读作「**每条边除以它所对的角的正弦，所得比值相等**」
- **四个常用变形：** $\sin A = \dfrac{a\sin B}{b}$；$\sin B = \dfrac{b\sin A}{a}$；$a = \dfrac{b\sin A}{\sin B}$；$\sin C = \dfrac{c\sin A}{a}$
- **适用条件：已知两角及其一边**（必解且唯一）；**已知一角、其对边与另一边**（SSA，可能多解）
- **角度单位必须一致：**同一次计算中角度制与弧度制**不能混用**。**考试时务必确认计算器处于 DEG 或 RAD 模式**
- **先求第三角：** $A + B + C = 180°$（角度制）或 $A + B + C = \pi$（弧度制）。这一步能提前暴露不可能的情形
- **arcsin 的双值问题：**$\arcsin(v)$ 只给主值（$[-90°, 90°]$），**另一个候选是** $180° - \arcsin(v)$。求角时**两个都要写出来再取舍**

- **正弦定理不能做的事：已知两边与夹角时不要用正弦定理**（会陷入循环）——那属于余弦定理的 SAS 情形
- **检验：**求出的边长必须满足三角不等式（任意两边之和大于第三边），三角之和必须等于 $180°$

方法卡　正弦定理的四条配对路线

已知条件	起手式	要点
两角 A, B 与边 a	$C = 180° - A - B$，再求 b, c	**唯一解**。先求第三角可提前排除不合理
两角 A, C 与边 b	$B = 180° - A - C$，再求 a, c	同上，只是字母换位
一角 A、其对边 a、另一边 b	$\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$	**SSA：候选 B_1 与 $180° - B_1$，用三角和与「谁是最大角」取舍**
一角 A、其对边 a、另一角 B	$\sin C = \dfrac{c \sin B}{a}$	与上一行同理，只是求的是 C
两边 b, c 与夹角 A	**改用余弦定理**	**不要用正弦定理**，否则循环

SSA 的取舍判据	说明
算出的 $\sin B > 1$	**无解**。数据不成三角形（对应「a 太短」）
算出的 $\sin B = 1$	$B = 90°$，**唯一解**（直角三角形）
B_1 与 B_2 中有一支使 $A + B \geq 180°$	该支**无解**，只剩一支
$a > b$	$A > B$，**取较大的那个候选角**
$a < b$	$A < B$，**取较小的那个候选角**（较大那支会使三角和超过 $180°$）
题给「a 是最长边」或「B 是最大角」	**直接取较大支**，无需验算三角和

6 例题 [2022 年 6 月 Q2（5 分）]

In the triangle ABC, $AB = 21$ cm, $BC = 13$ cm, $\angle BAC = 25°$ and $\angle ACB = x°$. (a) Use the sine rule to find the value of $\sin x°$, giving your answer to 4 decimal places. Given also that AB is the longest side of the triangle, (b) find the value of x, giving your answer to 2 decimal places.

中文：在三角形 ABC 中，$AB = 21$ cm，$BC = 13$ cm，$\angle BAC = 25°$，$\angle ACB = x°$。(a) 用正弦定理求 $\sin x°$ 的值，精确到 4 位小数。又已知 AB 是该三角形的最长边，(b) 求 x 的值，精确到 2 位小数。

答 Answer： _____

7 例题 [2019 年 6 月 Q7（10 分）]

The shape $ABCDA$ consists of a sector $ABCOA$ of a circle, centre O, joined to a triangle AOD. The point D lies on OC. The radius of the circle is 6 cm, the length AD is 5 cm and $\angle AOD = 0.7$ radians. (a) Find the area of the sector $ABCOA$, giving your answer to one decimal place. Given that $\angle ADO$ is obtuse, (b) find the size of $\angle ADO$, correct to 3 decimal places, giving your answer in radians. (c) Hence find the perimeter of shape $ABCDA$, giving your answer to one decimal place.

中文：图形 $ABCDA$ 由一个圆心为 O 的扇形 $ABCOA$ 与一个三角形 AOD 连接而成，点 D 在线段 OC 上。圆的半径为 6 cm，AD 长 5 cm，$\angle AOD = 0.7$ 弧度。(a) 求扇形 $ABCOA$ 的面积，精确到 1 位小数。又已知 $\angle ADO$ 是钝角，(b) 求 $\angle ADO$ 的大小，精确到 3 位小数，答案以弧度表示。(c) 据此求图形 $ABCDA$ 的周长，精确到 1 位小数。

答 Answer： _____

8 例题 [2021 年 1 月 Q5（9 分）]

Figure 3 shows the plan view of a viewing platform at a tourist site. The shape of the viewing platform consists of a sector $ABCOA$ of a circle, centre O, joined to a triangle AOD. Given that $OA = OC = 6$ m, $AD = 14$ m, $\angle ADC = 0.43$ radians, $\angle AOD$ is an obtuse angle and OCD is a straight line, find (a) the size of $\angle AOD$, in radians, to 3 decimal places (b) the length of arc ABC, in metres, to one decimal place (c) the total area of the viewing platform, in m^2, to one decimal place.

中文：图 3 给出一处旅游景区观景台的俯视图。观景台的形状由一个圆心为 O 的扇形 $ABCOA$ 与一个三角形 AOD 连接而成。已知 $OA = OC = 6$ m，$AD = 14$ m，$\angle ADC = 0.43$ 弧度，$\angle AOD$ 为钝角，且

OCD 成直线，求 (a) $\angle AOD$ 的大小（单位为弧度），精确到 3 位小数；(b) 弧 ABC 的长度（单位为 m），精确到 1 位小数；(c) 观景台的总面积（单位为 m^2），精确到 1 位小数。

答 Answer： _____

9 例题 [讲义例题（SSA 模糊情形的标准演练）]

A triangle ABC has $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm and $\angle BAC = 30°$. Find (a) the possible values of $\angle ABC$, giving your answer to 2 decimal places (b) for each of your answers in part (a), the corresponding value of $\angle ACB$ (c) for each of your answers in part (a), the corresponding length of AB, giving your answer to 2 decimal places. Hence state how many distinct triangles satisfy these conditions.

中文：三角形 ABC 满足 $AB = 8$ cm，$BC = 10$ cm，$\angle BAC = 30°$。求 (a) $\angle ABC$ 的所有可能值，精确到 2 位小数；(b) 对 (a) 中的每个答案，求对应的 $\angle ACB$ 的值；(c) 对 (a) 中的每个答案，求对应的 AB 的长度，精确到 2 位小数。据此说明满足这些条件的不同三角形共有几个。

答 Answer： _____

6.3 Areas of triangles 三角形面积

面积是解三角形题的「中转站」：它能把**两条边与夹角**翻译成正弦，又能把**面积与两边**翻译成正弦值，进而配合余弦定理求第三边。P1 中面积公式几乎从不出现在「直接求面积」的简单题里，而是**作为求边、求角的桥梁**出现，这是本章最值得注意的命题方式。

- **标准形式：**$A=\dfrac{1}{2}ab\sin C$。**三条边中任选两条做 a,b，剩余那条的对角做 C**
- **等价形式：**$A=\dfrac{abc}{4R}$（R 为外接圆半径）。P1 基本不考，但知道它能解释「为什么正弦定理能求面积」
- **反用（求 sin）：**$A=\dfrac{1}{2}ab\sin C\Longrightarrow\sin C=\dfrac{2A}{ab}$。**这是给面积题的标准起手式**
- **与余弦定理联立：**由 $\sin C=\dfrac{2A}{ab}$ 求出 $\sin C$，再用 $\sin^2+\cos^2=1$ 求 $\cos C$，最后代入余弦定理求第三边
- **与正弦定理联立：**由 $\sin C$ 与一个角求另一个角，再由正弦定理求第三边
- **符号陷阱：**$\sin C$ **为正不代表** C **是锐角**。C 可能是 $156°$！**必须用三角和或「谁是最大角」再筛一次**
- **四边形与组合图形：**分割成若干三角形后**面积相加**，或整体减去重叠部分。扇形与三角形组合题（2019 年 6 月 Q7、2021 年 1 月 Q5）都是这个套路
- **单位与精度：**面积单位是 cm^2、m^2；**答案的精度要求与题目给出的角一致**——若角是精确值，面积也应是精确值

方法卡　面积公式的三种用法与联立路线

题目给什么	求什么	路线
两边 a,b 与夹角 C	面积	直接代 $A=\frac{1}{2}ab\sin C$，**一步到位**
面积 A 与两边 a,b	$\sin C$	$\sin C=\frac{2A}{ab}$，**但要检查 $\sin C$ 能否大于 1**
面积 A 与两边 a,b	第三边 c	$\sin C\to\cos C\to$ 余弦定理，**三步**
两边 a,b 与夹角 C	第三边 c	余弦定理；**不需要面积**
面积 A、两边 a 与第三边 c	某个角	$\sin=\frac{2A}{ac}\to$ 正弦定理，**注意 SSA 的双解**
三边 a,b,c	面积	$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\to\sin C\to A$，**三步**

最易错处	后果与对策
算出 $\sin C$ 就直接 $\cos^{-1}$ 求角	丢掉补解。**对策：算出 sin 后立刻写「两个候选」**
$\cos C$ 取正号	当 C 钝时结果偏小。**对策：用「三边最长者对应的角最大」定位 C**
面积单位写成 cm 或 cm^3	A1 丢。**面积一律平方单位**
组合图形中弧长当弦长用	结果偏大。**弧长 $s=r\theta$ 与弦长 $2r\sin\frac{\theta}{2}$ 是两回事**

10 例题 [2026 年 6 月 Q3（6 分）]

A triangular plot of land ABC has area 60 m^2. Given $AB=15$ m, $AC=10$ m and $\angle BAC=\theta°$: (a) show that $\sin\theta°=\dfrac{4}{5}$ (b) given also that θ is the largest angle in the triangle, find the length of the side BC, in metres, to 3 significant figures (c) find the size of the smallest angle in the

triangle, in degrees, to one decimal place.

中文：一块三角形地块 ABC 的面积为 60 m^2。已知 $AB = 15$ m，$AC = 10$ m，$\angle BAC = \theta°$：(a) 证明 $\sin\theta° = \frac{4}{5}$；(b) 又已知 θ 是该三角形中最大的角，求边 BC 的长度（单位为 m），精确到 3 位有效数字；(c) 求该三角形中最小角的大小（单位为度），精确到 1 位小数。

答 Answer： _____

11 例题 [2023 年 10 月 Q5（7 分，x 的取值改为 5 以避免退化）]

Figure 2 shows the plan view of a frame for a flat roof. The shape of the frame consists of triangle ABD joined to triangle BCD. Given that $BD = x$ m, $CD = (1 + x)$ m, $BC = 5$ m and $\angle BCD = \theta°$. (a) Show that $\cos\theta° = \frac{13 + x}{5 + 5x}$. Given also that $x = 5$, $\angle BAC = 30°$ and ADC is a straight line, (b) find the area of triangle ABC, giving your answer, in m^2, to one decimal place.

中文：图 2 给出一幅平屋顶框架的俯视图。该框架由三角形 ABD 与三角形 BCD 拼成。已知 $BD = x$ m，$CD = (1 + x)$ m，$BC = 5$ m，$\angle BCD = \theta°$。(a) 证明 $\cos\theta° = \frac{13 + x}{5 + 5x}$。又已知 $x = 5$、$\angle BAC = 30°$ 且 ADC 成直线，(b) 求三角形 ABC 的面积（单位为 m^2），精确到 1 位小数。

答 Answer： _____

12 例题 [讲义例题（面积版的 SSA 双解）]

A triangular greenhouse ABC has $AB = 8$ m and $AC = 12$ m, and its area is exactly 30 m^2. Find, to 2 decimal places, (a) the possible values of $\angle BAC$ (b) the corresponding possible values of BC. Hence state how many different triangles satisfy these conditions, and give a reason for your answer.

中文：一座三角形温室 ABC 的 $AB = 8$ m，$AC = 12$ m，面积为 30 m^2。求（精确到 2 位小数）(a) $\angle BAC$ 的所有可能值；(b) 对应的 BC 的所有可能值。据此说明满足这些条件的三角形共有几个，并说明理由。

答 Answer： _____

6.4 Solving triangle problems 解三角形

「解三角形」指的是**由三角形的一部分已知元素求出其余全部元素**。P1 中这类题几乎都是**真实情境建模**：屋顶支架、观景台、温室、地块、屋顶梁。它们的共同套路是：**把图形条件逐条翻译成「边」「角」「共线/垂直」的等式，再选择定理**。本节的重点不是新定理，而是**流程与踩分点**。

- **四步流程**：(1) 逐条转写图形条件（共线、垂直、在圆上、D 在线段 BC 上）→ (2) 判断条件类型（SAS / SSS / ASA / SSA）→ (3) 选定理并写字母配对 → (4) 检验（三角和、三角不等式、答案范围）
- **字母配对是第一步**：动笔前在草稿纸上写「$a = BC$，$b = CA$，$c = AB$」，**再把已知量对号入座**」。这一步做完，八成的错别解法会自动消失
- **共线与同角**：A, D, C 共线时，$\angle ACB = \angle DCB$，$\angle ADB = 180° - \angle CDB$。**这是把一个小三角形的信息搬到另一个三角形上的唯一途径**
- **垂直与直角**：出现直角时余弦定理退化为勾股定理，**可以省掉一次三角函数计算**
- **单位一致性**：同一题里弧度与角度不能混用；**长度单位（m / cm）与面积单位（m^2 / cm^2）必须对应**

- **精度逐级传递**：若中间量是精确值（如 $\frac{4}{5}$），后续结果也应是精确值；若中间量已取近似，最终答案的精度要相应降低
- **画图辅助**：复杂组合图形先画一张**不按比例的示意图**并标注已知量，**比在脑子里推快三倍**，也能立刻看出面积该相加还是相减
- **最后一步别忘单位**：写答案时把 m、m^2、°、rad 一并写上，**官方 A1 通常包含单位**」

方法卡　条件类型判定与定理选择的决策树

已知的「边」	已知的「角」	用哪条定理
三边	无	**余弦定理**求角，再由 $\sin^2+\cos^2=1$ 求 sin 配面积公式
两边	夹角	**余弦定理**求第三边，再**正弦定理**求其余角
两边	其中一边的对角	**正弦定理**（SSA），**必须取舍**，见 6.7
一边	两角	**正弦定理，唯一解**，最省心
两边与面积	无	面积公式求 sin，再**余弦定理**求边
一边与面积	一个角	面积公式求 sin，再**正弦定理**（注意双解）
三边与面积	无	面积公式反推 sin，再**正弦定理**（cos 符号靠「最大角」定）

真实情境题的高频图形条件	翻译成的等式
D lies on OC / BC	$OD+DC=OC$；$\angle ADO=\angle ADC$（同向）或 $\pi-\angle ADC$（反向）
OCD is a straight line	三点共线，**先判断 D 在 C 的哪一侧**，再定角是同角还是互补
A, D, C collinear（D 在线段上）	$\angle ACB=\angle DCB$；$\angle ADB=180°-\angle CDB$
$\angle AOD$ is obtuse	arcsin 的两个候选中**取钝角那支**
AB is the longest side	$\angle ACB$ 是**最大角**，取较大候选
$OC=OA$（同一圆上的半径）	两条边相等，**对应的角也相等**（等腰）

13 例题　[2019 年 1 月 Q7（6 分）]

Figure 3 shows the design for a structure used to support a roof. The structure consists of four wooden beams, AB, BD, BC and AD. Given $AB = 6.5$ m, $BC = BD = 4.7$ m and $\angle BAC = 35°$, find (a) the size of $\angle ACB$, to one decimal place (b) the total length of wood required to make this structure, to the nearest metre.

中文：图 3 给出一种屋顶支撑结构的设计图。该结构由四根木梁 AB、BD、BC、AD 组成。已知 $AB=6.5$ m，$BC=BD=4.7$ m，$\angle BAC=35°$，求 (a) $\angle ACB$ 的大小，精确到 1 位小数；(b) 制作该结构所需木材的总长度，精确到最近的米。

答 Answer：_____

14 例题 [2021 年 1 月 Q5（9 分）]

Figure 3 shows the plan view of a viewing platform at a tourist site. The shape of the viewing platform consists of a sector $ABCOA$ of a circle, centre O, joined to a triangle AOD. Given that $OA = OC = 6$ m, $AD = 14$ m, $\angle ADC = 0.43$ radians, $\angle AOD$ is an obtuse angle and OCD is a straight line, find (a) the size of $\angle AOD$, in radians, to 3 decimal places (b) the length of arc ABC, in metres, to one decimal place (c) the total area of the viewing platform, in m^2, to one decimal place.

中文：图 3 给出一处旅游景区观景台的俯视图。观景台的形状由一个圆心为 O 的扇形 $ABCOA$ 与一个三角形 AOD 连接而成。已知 $OA = OC = 6$ m，$AD = 14$ m，$\angle ADC = 0.43$ 弧度，$\angle AOD$ 为钝角，且 OCD 成直线，求 (a) $\angle AOD$ 的大小（单位为弧度），精确到 3 位小数；(b) 弧 ABC 的长度（单位为 m），精确到 1 位小数；(c) 观景台的总面积（单位为 m^2），精确到 1 位小数。

答 Answer： _____

15 例题 [讲义例题（解三角形的标准三段式）]

A triangular plot of land ABC has area 1323 m^2. Given $AB = 65$ m, $BC = 47$ m and $\angle ABC = 120°$: (a) find the length AC, to one decimal place (b) find the size of $\angle BAC$, to one decimal place (c) find the length of the perpendicular from B to the line AC, to one decimal place.

中文：一块三角形地块 ABC 的面积为 1323 m^2。已知 $AB = 65$ m，$BC = 47$ m，$\angle ABC = 120°$。(a) 求 AC 的长度，精确到 1 位小数；(b) 求 $\angle BAC$ 的大小，精确到 1 位小数；(c) 求从 B 到直线 AC 的垂线段长度，精确到 1 位小数。

答 Answer： _____

6.5 Graphs of sine, cosine and tangent 正弦、余弦、正切函数图像

这一节考的是「量」的规范表述：周期、振幅、值域、极值点坐标、解的个数。题目几乎从不用难超越方程，而是给你一张草图，让你**把图上的关键点用坐标写出来**。近五年本章的图像题有 14 道，**全部是这一类**。

- **基本图像（弧度制）**：$y = \sin x$ 过原点，$(0,0)$ 起上升；$y = \cos x$ 在 $(0,1)$ 处取极大；$y = \tan x$ 在 $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ 处有垂直渐近线
- **关键坐标表**：$y = \sin x$ 的极大点 $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ 1\right)$、极小点 $\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ -1\right)$、零点 $k\pi$；$y = \cos x$ 的极大点 $(2k\pi, 1)$、极小点 $((2k+1)\pi, -1)$、零点 $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ 0\right)$；$y = \tan x$ 的零点 $k\pi$
- **一般式**：$y = a\sin(bx)$ 的周期是 $\dfrac{2\pi}{|b|}$；$y = a\cos(bx)$ 与 $y = a\tan(bx)$ 分别在 $bx = 0$ 与 $bx = \dfrac{\pi}{2}$ 处取极值
- **正切与正弦、余弦的三点差异**：(1) 周期是 π 而非 2π；(2) 有**垂直渐近线** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$；(3) **没有极大点与极小点**，$y$ 无界
- **角度制与弧度制的切换**：若题目说 x 以**度**为单位，则 $y = \sin x°$ 的周期是 360°、极大点在 $x = 90°$；若说以**弧度**为单位，周期是 2π、极大点在 $x = \dfrac{\pi}{2}$。**看清题干是第一步**
- **带位移的曲线**：$y = a\sin(bx) + k$ 的值域是 $[k - |a|,\ k + |a|]$，极值点横坐标由 $bx = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi$ 决定，**纵坐标是** $k \pm |a|$ **而非** $\pm|a|$
- **解的个数**：在区间内数交点个数，用「**每个周期 2 个 → 乘周期数**」，端点是否含在内单独判断
- 「**smallest positive x**」：出现这个限定时，**必须在所有候选周期中逐个筛选出最小正数**，这是 P1 最高频的陷阱之一

方法卡　三大三角函数的关键坐标与表述模板

函数	周期	极大点	极小点
$y=\sin x$	2π	$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ 1\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ -1\right)$
$y=\cos x$	2π	$(2k\pi,\ 1)$	$((2k+1)\pi,\ -1)$
$y=\tan x$	π	无（无界）	无（无界）
$y=a\sin(bx)$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	$\left(\frac{\pi}{2b},\ a\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2b},\ -a\right)$
$y=a\tan(bx)$	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	无	无
$y=a\sin(bx)+k$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	$\left(\frac{\pi}{2b},\ k+a\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2b},\ k-a\right)$

零点（与 x 轴交点）	渐近线 / 其他
$y=\sin x$	零点 $x=k\pi$
$y=\cos x$	零点 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
$y=\tan x$	零点 $x=k\pi$；渐近线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$
$y=a\sin(bx)$	零点 $x=\frac{k\pi}{b}$；值域 $[k-\lvert a\rvert,\ k+\lvert a\rvert]$
$y=a\tan(bx)$	每两个相邻零点之间恰有一个渐近线，曲线在渐近线两侧无界

角度制版本（题干说 measured in degrees）	换算
$y=\sin x^\circ$	周期 360°；极大点 $(90^\circ+360^\circ k,\ 1)$；零点 $180^\circ k$
$y=\cos x^\circ$	周期 360°；极大点 $(360^\circ k,\ 1)$；零点 $(90^\circ+180^\circ k,\ 0)$
$y=\tan x^\circ$	周期 180°；零点 $180^\circ k$；渐近线 $x=(90^\circ+180^\circ k)$
$y=a\sin(bx^\circ)$	周期 $\frac{360^\circ}{\lvert b\rvert}$；极大点 $x=\frac{90^\circ}{b}$

16 例题　[2019 年 1 月 Q5（6 分）]

Figure 2 shows a plot of part of the curve with equation $y=\cos 2x$ with x being measured in radians. The point P, shown on Figure 2, is a minimum point on the curve. (a) State the coordinates of P. (b) Sketch, on a copy of Figure 2, the curve with equation $y=\sin x$. (c) Hence, or otherwise, deduce the number of solutions of the equation $\cos 2x=\sin x$ that lie in the region (i) $0\le x\le 20\pi$ (ii) $0\le x\le 21\pi$.

中文：图 2 给出曲线 $y=\cos 2x$ 的一部分图像，x 以弧度为单位。图 2 中的点 P 是该曲线上的一个极小值点。(a) 写出 P 的坐标。(b) 在图 2 的副本上画出曲线 $y=\sin x$ 的图像。(c) 据此（或用其他方法）推断方程 $\cos 2x=\sin x$ 在下列区域内解的个数：(i) $0\le x\le 20\pi$；(ii) $0\le x\le 21\pi$。

答 Answer：_____

17 例题 [2026 年 1 月 Q9（4 分）]

Given that k is a constant, $0 < k < 1$, state the number of solutions of the equation (a) $\sin x = k$ in the interval $0 < x < \pi$ (b) $\tan x = k$ in the interval $0 < x < \pi$ (c) $\cos 2x = k$ in the interval $0 < x < 100\pi$ (d) $\sin x = k + 1$ in the interval $-100\pi < x < 100\pi$.

中文：已知 k 为常数，$0 < k < 1$，写出下列方程在指定区间内解的个数：(a) $\sin x = k$，区间 $0 < x < \pi$；(b) $\tan x = k$，区间 $0 < x < \pi$；(c) $\cos 2x = k$，区间 $0 < x < 100\pi$；(d) $\sin x = k+1$，区间 $-100\pi < x < 100\pi$。

答 Answer： _____

18 例题 [2024 年 10 月 Q7（8 分，(a)(b) 部分）]

Figure 3 shows a sketch of part of the curve C with equation $y = -4\cos x$, where x is measured in radians. The points P and Q lie on the curve and are shown in Figure 3. (a) State (i) the coordinates of P (ii) the coordinates of Q. The curve C_2 has equation $y = -4\cos x + k$, where k is a constant. Given that C_2 has a maximum y value of 11, (b) (i) state the value of k (ii) state the coordinates of the minimum point on C_2 with the smallest positive x coordinate.

中文：图 3 给出曲线 C（方程 $y = -4\cos x$，x 以弧度为单位）的一部分草图。点 P 与点 Q 在曲线 C 上，如图 3 所示。(a) 写出 (i) P 的坐标；(ii) Q 的坐标。曲线 C_2 的方程为 $y = -4\cos x + k$，其中 k 为常数。已知 C_2 的 y 的最大值为 11，(b) (i) 写出 k 的值；(ii) 写出 C_2 上横坐标为最小正数的极小值点的坐标。

答 Answer： _____

19 例题 [2022 年 1 月 Q9（4 分）]

Figure 4 shows part of the curve with equation $y = A\cos(x - 30)°$, where A is a constant. The point P is a minimum point on the curve and has coordinates $(30, -3)$, as shown in Figure 4. (a) Write down the value of A. The point Q is shown in Figure 4 and is a maximum point. (b) Find the coordinates of Q.

中文：图 4 给出曲线 $y = A\cos(x - 30)°$（A 为常数）的一部分图像。点 P 是该曲线上的极小值点，坐标为 $(30, -3)$，如图 4 所示。(a) 写出 A 的值。图 4 中的点 Q 是一个极大值点。(b) 求 Q 的坐标。

答 Answer： _____

6.6 Transforming trigonometric graphs 三角函数图像变换

这一节考「**把 $y = f(x)$ 变成 $y = f(bx)$、$y = af(x)$ 后，某个指定点跑到了哪里**」。近五年有 6 道真题属于这一类（C6f），全部是「**给一张草图，问变换后某点的坐标**」的形式。本质上是第 4 章的图像变换在三角函数上的重复，**但描述必须换成官方词汇**。

- **核心公式：**变换 $y = f(bx)$ 时，原图上的点 (u, v) 变为 $\left(\frac{u}{b},\ v\right)$；$y = af(x)$ 时变为 $(u,\ av)$。**记住「b 动横轴、a 动纵轴」**

- **横坐标变化的读法**：$y=f\left(\frac{x}{2}\right)$ 令横坐标变为原来的 2 倍；$y=f(2x)$ 令横坐标变为原来的一半。**括号内是 x 的分母就放大**」
- **纵坐标变化的读法**：$y=2f(x)$ 令纵坐标变为原来的 2 倍（纵向拉伸 factor 2）；$y=\frac{1}{2}f(x)$ 压缩
- **负号即反射**：$f(-x)$ 关于 y 轴反射；$-f(x)$ 关于 x 轴反射；**两者的结果是不同的点，要分清**
- **极值类型的翻转：关于 x 轴反射会把 maximum 变成 minimum，minimum 变成 maximum**。这是官方常考的 B1
- **周期与振幅的变换**：$y=f(bx)$ 使周期变为原来的 $\frac{1}{|b|}$ 倍；$y=af(x)$ 使振幅变为 $|a|$ 倍、**周期不变**
- **相位的读写**：$y=\sin(x-30)^\circ$ 表示图像向右平移 30°；$y=\sin(x+B)$ 表示向左平移 B。「$x-\alpha$」**是右移 α**，「$x+\beta$」**是左移 β**
- **用「代入验证」代替「背公式」**：要判断 $P(u,v)$ 变成哪里，**把新横坐标代回原式，看是否等于 v**」

方法卡　点变换的速算表与表述模板

新方程	变换	点 (u,v) 变为
$y=f(x)$	不变	$(u,\ v)$
$y=f(2x)$	平行 x 轴压缩 factor 2	$\left(\frac{u}{2},\ v\right)$
$y=f\left(\frac{x}{2}\right)$	平行 x 轴拉伸 factor 2	$(2u,\ v)$
$y=f(-x)$	关于 y 轴反射	$(-u,\ v)$
$y=2f(x)$	平行 y 轴拉伸 factor 2	$(u,\ 2v)$
$y=\frac{1}{2}f(x)$	平行 y 轴压缩 factor $\frac{1}{2}$	$\left(u,\ \frac{v}{2}\right)$
$y=-f(x)$	**关于 x 轴反射（极值类型翻转）**	$(u,\ -v)$
$y=f(x)+k$	平行 y 轴平移 k 个单位	$(u,\ v+k)$
$y=f(x-5)$	平行 x 轴右移 5 个单位	$(u+5,\ v)$
$y=f(x)+5$	平行 y 轴上移 5 个单位	$(u,\ v+5)$

三角函数图像变换的表述模板	说明
$y=a\sin(bx)$ 的周期	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$（角度制 $\frac{360^\circ}{\lvert b\rvert}$），**与 a 无关**
$y=a\sin(bx+c)+d$ 的值域	$[d-\lvert a\rvert,\ d+\lvert a\rvert]$，**振幅 $\lvert a\rvert$，位移（中线）d**
$y=a\tan(bx)$ 的周期	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$，**与正弦余弦不同**
「$x-c$」的读法	**右移 c**；「$x+c$」为**左移 c**。角度制时单位是度
$a<0$ 的效果	**关于 x 轴反射**：原 maximum 变 minimum，**极值类型翻转必须写出**
$b<0$ 的效果	**关于 y 轴反射**；可写成 $y=\lvert b\rvert\sin(-\lvert b\rvert x)$ 统一处理

20 例题 [2025 年 10 月 Q9（6 分）]

Figure 3 shows a sketch of part of the graph of the trigonometric function with equation $y = f(x)$. (a) Write down an expression for $f(x)$. The point P lies on $y = f(x)$ and is shown in Figure 3. (b) State the coordinates of the point to which P is transformed when the graph of $y = f(x)$ is transformed to the graph with equation (i) $y = f\left(\frac{x}{6}\right)$ (ii) $y = 2f(x)$.

中文：图 3 给出三角函数 $y = f(x)$ 图像的一部分草图。(a) 写出 $f(x)$ 的表达式。图 3 中的点 P 在 $y = f(x)$ 上。(b) 当图像由 $y = f(x)$ 变换为下列方程的图像时，写出点 P 变换后所对应点的坐标：(i) $y = f\left(\frac{x}{6}\right)$；(ii) $y = 2f(x)$。

答 Answer： _____

21 例题 [2024 年 6 月 Q11（6 分）]

Figure 4 shows a sketch of C_1 with equation $y = 12\sin x$, where x is measured in radians. The point P shown in Figure 4 is a maximum point on C_1. (a) Find the coordinates of P. The curve C_2 has equation $y = 12\sin x + k$, where k is a constant. Given that the maximum value of y on C_2 is 3, (b) find the coordinates of the minimum point on C_2 which has the smallest positive x coordinate. The curve C_3 has equation $y = 12\sin(x + B)$, where B is a positive constant. Given that $\left(\frac{\pi}{4}, -A\right)$, where A is a constant, is the minimum point on C_3 which has the smallest positive x coordinate, (c) find (i) the value of A (ii) the smallest possible value of B.

中文：图 4 给出曲线 C_1（方程 $y = 12\sin x$，x 以弧度为单位）的草图。图 4 中的点 P 是 C_1 上的一个极大值点。(a) 求 P 的坐标。曲线 C_2 的方程为 $y = 12\sin x + k$，其中 k 为常数。已知 C_2 上 y 的最大值为 3，(b) 求 C_2 上横坐标为最小正数的极小值点的坐标。曲线 C_3 的方程为 $y = 12\sin(x + B)$，其中 B 为正常数。已知 $\left(\frac{\pi}{4}, -A\right)$（$A$ 为常数）是 C_3 上横坐标为最小正数的极小值点，(c) 求 (i) A 的值；(ii) B 的最小可能值。

答 Answer： _____

22 例题 [2023 年 1 月 Q9（4 分）]

Figure 4 shows part of the graph of the curve C_1 with equation $y = \sin x$ and Figure 4 shows the line l with equation $y = \pi x$, in the interval $-\pi < x < \pi$. (a) State the period of $\tan x$. (b) Write down the number of roots of the equation (i) $\tan x = (\pi + 2)x$ in the interval $-\pi < x < \pi$ (ii) $\tan x = \pi x$ in the interval $-2\pi < x < 2\pi$ (iii) $\tan x = \pi x$ in the interval $-100\pi < x < 100\pi$.

中文：图 4 给出曲线 C_1（方程 $y = \sin x$）图像的一部分，以及直线 l（方程 $y = \pi x$）在区间 $-\pi < x < \pi$ 内的图像。(a) 写出 $\tan x$ 的周期。(b) 写出下列方程在指定区间内根的个数：(i) $\tan x = (\pi + 2)x$，区间 $-\pi < x < \pi$；(ii) $\tan x = \pi x$，区间 $-2\pi < x < 2\pi$；(iii) $\tan x = \pi x$，区间 $-100\pi < x < 100\pi$。

答 Answer： _____

6.7 满分必备：SSA 模糊情形与解的个数判定

满分必备　满分必备：SSA 模糊情形与解的个数判定

一、SSA 的几何本质：为什么会「多出一个解」所谓 **ambiguous case（模糊情形）**，指的是**已知两边及其中一边的对角**（SSA）时解的个数不确定。要真正理解它，必须回到几何图景，而不是死记判据表。设已知 $\angle A$、对边 a 与另一边 b。作从 C 到直线 AB 的高 $h = b\sin A$，于是 C 的落点由「以 A 为圆心、a 为半径的圆」与「过 C 的直线 AB」的交点个数决定：

几何情形	解的个数	图形直觉
$a < h$	0 个	圆太小，够不到直线 AB（C 够不着）
$a = h$	1 个	圆与直线**相切**，$C = 90°$
$h < a < b$	1 个	圆与直线交于**一点在 A 的同一侧**（只有锐角支）
$a \geq b$	2 个	圆与直线交于**两点分居 A 两侧**（锐角支与钝角支都成立）

一句话抓住本质：解的个数 = 以 A 为圆心、a 为半径的圆与直线 AB 的交点个数。画不出图时，用这条代替图形记忆。

二、arcsin 之后的三个动作：一个都不能少正弦定理给出 $\sin B = k$（$0 < k < 1$）之后，**直接写 $\arcsin k$ 就丢分**。官方给分链是固定的三步，务必按顺序执行：

1. **列两支：**$B_1 = \arcsin k$，$B_2 = 180° - B_1$。**两个都写，各占一个给分点；**
2. **判合法：**对每一支算第三角 $C = 180° - A - B$，**只要 $C \leq 0$ 就说明 $A + B \geq 180°$，该支不成立。**「$C \leq 0$」**是唯一需要写出来的判据，**写「由图可见」通常不给分；
3. **数个数并说明：**$\sin B = k$ 在 $(0°, 180°)$ 内有**恰好两个值**，但只有满足 $C > 0$ 的那些才构成真正的三角形。**结论句式：**`There are two possible triangles / There is only one possible triangle.`

【易错】「列出两支」与「判合法」是两个独立的给分点。官方从不因为你已经答对了最终答案就补上被你省略的那一步（这叫 `cso`，consequential significant omission，后果显著的省略）。**只写最终答案而不写取舍过程，最多拿一半分。**

三、官方给分点的四种典型拆解（照着写就能拿满）近五年 P1 中 SSA 题的给分结构高度一致。下表把「写什么」与「值几分」对应起来，**左边一列全部写上，就能拿满该小问的分：**

答题纸上必须出现的句子	分值	为什么是独立给分点
$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$	M1	**建式。**字母配对错则此分不给
$\sin B = \dfrac{a\sin A}{b} = 0.8999$	A1	**中间值。**精度按题目要求
$B = 64.1°$ 或 $B = 115.9°$	A1 + A1	**两个候选各占一个 A1，**只写一支丢一个
`both values are possible since` $B + A < 180°$	M1	**合法性判断。**写「由图」不够
`there are two possible triangles`	A1	**个数结论**

【易错】一个常被忽略的得分点：题目若问 `find the possible values of` B，那个 `possible` 就是明示「可能不止一个」。**看到 possible / state all possible values，就必须在答卷上留下两支，**即使你心里已经知道只有一支成立。

四、四种高频错答与逐条改法

错误写法	错在哪	正确改法
$\sin B = \dfrac{b\sin A}{a}$	**字母配对反了**。正弦定理是 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$，交叉相乘后 $\sin B = \dfrac{b\sin A}{a}$ 只在 b 对 B 时成立；若已知的是 a 与 A，求 B 必须写 $\sin B = \dfrac{a\sin A}{b}$	动笔前先在草稿纸上写「$a = BC$，$b = CA$，$c = AB$」，再把已知量对号入座
只写 arcsin 的主值	丢一个 A1，**且答案本身不完整**	**永远先写两支**，再筛
用「由图可知」代替取舍	**不给分**，官方只认不等式或三角和	写 $B_2 + A = 154.6° + 40° > 180°$，故舍去
结论写「一个解」而不给理由	丢掉结论的 A1	加一句 `since only` B_1 `satisfies` $A + B < 180°$

本章通行的自查三连：(1) 三角和等于 180°；(2) 三角不等式成立；(3) a 最大时 A 也最大。三条全过，结果基本可信。

1 满分示范　[官方 Notes 结构 + 讲义改编]

In the triangle ABC, $a = 7$ cm, $b = 5$ cm and $\angle A = 40°$. (a) Find all the possible values of $\angle B$, giving your answer to 1 decimal place (b) for each of your answers in part (a), find the corresponding value of $\angle C$, in degrees, to 1 decimal place (c) Hence find the two possible values of the side c, in cm, to 2 decimal places.

中文：在三角形 ABC 中，$a = 7$ cm，$b = 5$ cm，$\angle A = 40°$。(a) 求 $\angle B$ 的所有可能值，精确到 1 位小数；(b) 对 (a) 中的每个答案，求对应的 $\angle C$ 的值（单位为度），精确到 1 位小数；(c) 据此求边 c 的两个可能值（单位为 cm），精确到 2 位小数。

答 Answer：_____

2 改错练习 [常见错答诊断]

In the triangle ABC, $a = 6$ cm, $b = 7$ cm and $\angle A = 30°$. A student writes: "$\sin B = \dfrac{b\sin A}{a} = \dfrac{7 \times 0.5}{6} = 0.5833$, so $\angle B = 35.7°$, so $\angle C = 180° - 30° - 35.7° = 114.3°$. There is one triangle." Identify and correct the error in the student's working, and hence state the correct value of $\angle B$.

中文：在三角形 ABC 中，$a = 6$ cm，$b = 7$ cm，$\angle A = 30°$。某学生写道：「$\sin B = \dfrac{b\sin A}{a} = \dfrac{7 \times 0.5}{6} = 0.5833$，所以 $\angle B = 35.7°$，所以 $\angle C = 180° - 30° - 35.7° = 114.3°$。只有一个三角形。」请指出并改正该学生解答中的错误，并据此写出 $\angle B$ 的正确值。

答 Answer： _____

6.8 满分必备：周期、振幅、相位的规范表述与图像变换书写

满分必备 满分必备：周期、振幅、相位的规范表述与图像变换书写

一、四个基本量：定义、公式与官方英文句式设 $y = a\sin(bx + c) + d$（$a \neq 0$，$b > 0$）。四个量必须能张口就报：

中文	公式	官方英文	一句话说明
振幅	$\lvert a\rvert$	**amplitude**	图像在最大值与最小值之间摆动的幅度
周期	$\dfrac{2\pi}{b}$	**period**	完成一次完整起伏所需的最小正 x 增量
中线	$y = d$	**midline**	图像关于水平直线 $y = d$ 对称
位移	$\dfrac{c}{b}$	**displacement** / **translation**	相对 $y = a\sin(bx)$ 沿 x 轴平移的距离

值域恒等于 $[d - \lvert a\rvert,\ d + \lvert a\rvert]$，与相位无关。这一点是本章最高频的偷分点：$y = 12\sin(x + B)$ 的最小值仍是 -12，**不要以为加了 B 就改变了振幅。**

二、相位符号的方向：一个正负号差一半题 $\sin(bx + c) = \sin\big(b\big(x + \frac{c}{b}\big)\big)$，所以：

表达式	平移方向与距离	口诀
$y=\sin(x-\alpha)$	向右平移 α	减号右移
$y=\sin(x+\alpha)$	向左平移 α	加号左移
$y=3\sin\big(2(x-\frac{\pi}{4})\big)$	$y=3\sin 2x$ 向右移 $\frac{\pi}{4}$	括号内先提系数，再看符号

「提系数」这一步不能跳：$3\sin\big(2x-\frac{\pi}{2}\big)$ 若直接说「右移 $\frac{\pi}{2}$」就错了，正确答案是 $\frac{\pi}{2}\div 2=\frac{\pi}{4}$。**规范做法**：先把 $bx+c$ 写成 $b\big(x+\frac{c}{b}\big)$，再读平移量 $\frac{c}{b}$。【易错】角度制下平移量带单位：$y=\sin(x-30°)$ 右移 30°（或 0.524 rad），**写答案时必须与题目所用单位一致**。

三、图像关键点的规范描述：五类点各有一句模板「`show clearly the coordinates of all the points where the curve intersects the coordinate axes`」这句话在近五年出现频率极高。**五类关键点**与它们的规范句式如下，描述时**位置先写、坐标后写、单位不漏**：

关键点	怎么求	规范英文表述
y 截距	令 $x=0$	**The y-intercept is $(0,\ d)$.**
x 截距	令 $y=0$，解 $bx+c$	**The curve crosses the x-axis at $x=\ldots$**
极大点	$a\sin(\cdot)=\lvert a\rvert$	**a maximum point / the maximum value is $\lvert a\rvert$**
极小点	$a\sin(\cdot)=-\lvert a\rvert$	**a minimum point / the minimum value is $-\lvert a\rvert$**
正切渐近线	分母为零	**vertical asymptotes at $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$**

「极值点的横坐标」比「极值点的坐标」多一个限制词：题目写 `with the smallest positive` x `coordinate` 时，通解 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ **不能直接作为答案**，必须筛出**最小正数**，否则 A1 不给。

四、四条「show clearly」清单（图像题的得分骨架）图像题丢分极少是因为画得不好，而是因为**该标的关键点没标全**。作图时按下列四条逐一核对，四条齐了图像题的分数基本拿满：

1. **坐标轴必须标出原点与轴名**，y 轴要标出**中线高度** d；
2. **所有截距**：y 截距必标；x 截距若题目给了区间，就标出该区间内的**全部**；
3. **至少一个极大点与一个极小点**，带坐标；
4. **中线用虚线画出并标注** $y=d$——**这一条最常被漏**，但它往往是区分「$y=a\sin x$」与「$y=a\sin x+d$」的唯一视觉证据。

【易错】「$\tan x$ 有渐近线、sin 与 cos 没有」是必背的图像差异：$y=\tan x$ 的渐近线是 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，**画成实线就丢分**；sin、cos 在 x 轴附近**平滑穿过，不会断开**。

1 满分示范 [官方 Notes 结构 + 讲义改编]

Figure 6 shows part of the curve C with equation $y=5\cos(x-30°)$, $0<x<360°$, where x is measured in degrees. (a) State the period of C. (b) State the range of C. (c) State the coordinates of the maximum point of C with the smallest positive x coordinate. (d) State the coordinates of the two points at which C crosses the positive x-axis.

中文：图 6 给出曲线 C（方程 $y=5\cos(x-30°)$，$0<x<360°$，其中 x 以度为单位）图像的一部分。(a) 写出 C 的周期。(b) 写出 C 的值域。(c) 写出 C 上横坐标最小的正数所对应的极大点的坐标。(d) 写出 C 与正 x 轴相交的两个点的坐标。

答 Answer：_____

2 改错练习 [常见错答诊断]

The curve C has equation $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$, where x is measured in radians. A student writes: "The period is 2π, the graph is $y = 3\sin 2x$ translated $\frac{\pi}{2}$ to the right, and the minimum point with the smallest non-negative x coordinate is $\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$." Identify and correct each of the three errors, and hence state the correct period, the correct translation, and the correct coordinates of that minimum point.

中文：曲线 C 的方程为 $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$，其中 x 以弧度为单位。某学生写道：「周期是 2π，图像是 $y = 3\sin 2x$ 向右平移 $\frac{\pi}{2}$，横坐标最小的非负数所对应的极小点是 $\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$。」请指出并改正这三处错误，并据此写出正确的周期、正确的平移，以及该极小点的正确坐标。

答 Answer：_____

6.9 普高衔接：解三角形与三角函数图像

普高衔接　普高衔接：解三角形与三角函数图像

一、人教 A 版对应位置：五个知识点在教材里的落点本章的全部内容，国内教材都学过，只是位置与深度不同。对照表如下，**遇到不熟的表述先回来查这一张表：**

P1 的知识	人教 A 版位置	国内常见讲法
余弦定理	必修二 §5.5	由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 推广而来，**常只讲「已知三边求角」**
正弦定理	必修二 §5.5	从「外接圆直径」引入，**常只讲「已知两角一边」**
三角形面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$	必修二 §5.5	通常作为余弦定理的推论给出
弧度制与 $\sin x,\cos x,\tan x$ 的图像	必修二 §5.1–5.2	**先讲弧度制再讲图像，顺序与 P1 相反**
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 与图像变换	必修二 §5.4	**重点在「振幅、周期、初相」的物理意义**

共同点：解三角形的两大定理与 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 在国内是人教 A 版必修二的正式内容，三角函数图像与性质也在必修二**完整出现过。因此本章不是新知识，而是「换一种问法」。**

二、国内讲法与 P1 要求的七处差异 P1 的题目几乎都把国内教材里的「定理陈述」反过来考：

环节	国内教材的默认	P1 的实际要求
余弦定理	默认「已知三边求角」	**大量出现「已知两边及夹角求第三边」**，且常要求 `show that`
正弦定理	默认 ASA、AAS	**SSA 必须判解的个数**，且答案要含 `possible values`
面积公式	用来算面积	**当作桥梁：**由面积反求 $\sin C$ 再求边
图像	画出标准曲线即可	**读出未给出的关键点坐标**并标在图上
变换	讲「$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 各参数的意义」	**要能从图像反求 φ，且平移量要先提系数**
解的个数	很少专门训练	**几乎年年出现，**且要给理由
精度与单位	写个近似值即可	**位数与单位写进答案，不给通常扣分**

【易错】最容易吃亏的一处：国内教材里余弦定理「求第三边」常被当成次要情形，而 **P1 的 C6a 题几乎每道都要用它求边。务必把「两边 + 夹角 ⇒ 求第三边」练成条件反射。**

三、P1 额外要求、国内略过或讲得浅的五个点这五点是本章失分最集中的地方，**每一个都值得单独练半小时：**

1. **SSA 模糊情形（解的个数）。**国内教材通常**完全不讲，**或只作为「思考题」提一句。P1 里**每年至少一道，**且 2022 年 6 月 Q2 就是明证。**对策：**把 6.7 节的判据表与三步动作背到能默写。
2. **三角函数图像的精确变换描述。**国内讲的是「参数的意义」，P1 讲的是**「$y=3\sin 2x$ 右移 $\frac{\pi}{4}$ 得到 $y=3\sin(2x-\frac{\pi}{2})$」这类具体变换，而且必须先把系数提出来。**这是国内训练最缺的一环。

3. **正弦定理求第三边时的「循环论证」意识**。国内例题几乎总是「已知两角一边」，于是学生形成「正弦定理只能求已知的那个角」的错觉。**P1 经常反过来问**：已知 A、a、b 求 c，此时必须先用正弦定理求出 C，再求 c——**这不是「用已知量直接代」，而是两步串联。意识不到这一点就会尝试用「凑」的办法，浪费大量时间**。
4. **解的个数要「按分段数」而不是「凭印象」**。跨越正切渐近线时符号会跳变，**凭印象数交点是最常见的错误来源**。**对策**：先画渐近线，把区间分段，再逐段数。
5. **答案的精度与单位**。国内教材常写「≈ 35.7」了事，**P1 的 A1 通常包含单位与指定位数**。**养成「写答案时顺手补上单位」的习惯**。

四、可以直接迁移的三个工具（先做这三个，能省一半时间）从国内教材直接搬过来就能用的技巧：

1. **字母配对表**。草稿纸第一行写 $a=BC$，$b=CA$，$c=AB$，$A=\angle BAC$，$B=\angle ABC$，$C=\angle ACB$。**这一步做完，八成的「配对反了」自动消失**。
2. **「先补成 SAS 再求」的习惯**。国内解三角形常先想办法凑出两边及夹角；**P1 里这个习惯同样有效**：缺什么补什么，补齐后立刻用余弦定理。
3. **特殊角的三角函数值要背到条件反射**：$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\tan 45^\circ=1$，$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。**P1 里这些值既用于精确答案（如 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$），也用于自检**。

1 衔接练习 [人教 A 版必修二典型题]

In the triangle ABC, $a=3$ cm, $b=5$ cm and $\angle C=60^\circ$. (a) Find the length of the side c, in cm, to 3 decimal places (b) Find the area of the triangle ABC, in cm^2, to 3 decimal places (c) Find the size of $\angle A$, in degrees, to 2 decimal places.

中文：在三角形 ABC 中，$a=3$ cm，$b=5$ cm，$\angle C=60^\circ$。(a) 求边 c 的长度（单位为 cm），精确到 3 位小数；(b) 求三角形 ABC 的面积（单位为 cm^2），精确到 3 位小数；(c) 求 $\angle A$ 的大小（单位为度），精确到 2 位小数。

答 Answer： _____

2 衔接练习 [人教 A 版必修二 §5.2 例题]

Figure 7 shows part of the curve C with equation $y = 2\cos 2x$, where x is measured in radians. (a) State the period of C. (b) State the range of C. (c) On Figure 7, show clearly the coordinates of the maximum point of C with $0 \leq x \leq \pi$.

中文：图 7 给出曲线 C（方程 $y = 2\cos 2x$，其中 x 以弧度为单位）图像的一部分。(a) 写出 C 的周期。(b) 写出 C 的值域。(c) 在图 7 上清楚地标出 C 在 $0 \leq x \leq \pi$ 内极大点的坐标。

答 Answer： _____

6.10 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘

下表列出 2019–2026 年 P1 中属于第 6 章考点的真题定位，共 **30 道**，覆盖六个考点编码（C6a 余弦定理、C6b 正弦定理、C6c 三角形面积、C6d 解三角形、C6e 三角函数图像、C6f 图像变换）。**使用方法**：先限时 40 分钟做完下面 4 道真题，再回到本章 6.1–6.8 的例题，用**错题模板**逐题复盘——特别记录：**是字母配对错、补解漏写、符号取错，还是图像关键点没标全**。本讲义提醒：近五年本章失分的主因不是算错，而是**四类书写问题**：

1. **只写 arcsin 主值，漏掉第二支候选**（6.7 节）；
2. **变换前忘记把系数提出来，平移量算成 $\frac{c}{b}$ 而不是 c**（6.8 节）；
3. **极值点写出通解而不筛「最小正 x」**（6.8 节）；
4. **答案漏写单位与指定精度**（贯穿全章）。

这四条只要改过来，本章的分数会立刻上一个台阶。

考点	近五年真题定位（年份 · 场次 · 题号 · 分值）
余弦定理	19 年 10 月 Q4（5 分）
	21 年 6 月 Q3（9 分）
	23 年 10 月 Q5（7 分）
	24 年 1 月 Q2（5 分）
	25 年 10 月 Q3（5 分）
	26 年 6 月 Q3（6 分）
正弦定理	22 年 6 月 Q2（5 分）
解三角形	19 年 1 月 Q7（6 分）
	19 年 6 月 Q7（10 分）
	21 年 1 月 Q5（9 分）
	25 年 1 月 Q8（13 分）
	26 年 1 月 Q6（11 分）
三角函数图像	19 年 1 月 Q5（6 分）
	19 年 6 月 Q9（7 分）
	19 年 10 月 Q9（4 分）
	20 年 1 月 Q7（5 分）
	21 年 1 月 Q3（5 分）
	21 年 10 月 Q4（5 分）
	22 年 1 月 Q9（4 分）
	24 年 1 月 Q6（6 分）
	24 年 10 月 Q7（8 分）
	25 年 6 月 Q4（6 分）
三角图像变换	22 年 6 月 Q9（8 分）
	23 年 1 月 Q9（4 分）
	23 年 6 月 Q9（9 分）
	23 年 10 月 Q10（6 分）
	24 年 6 月 Q11（6 分）
	25 年 10 月 Q9（6 分）
	26 年 1 月 Q9（4 分）
	26 年 6 月 Q9（5 分）

1 真题演练 [2022 年 6 月 Q9（8 分）]

Figure 4 shows part of the graph of the curve with equation $y = \sin x$. Given that $\sin\alpha = p$, where $0 < \alpha < 90°$, (a) state, in terms of p, the value of (i) $2\sin(180° - \alpha)$ (ii) $\sin(\alpha - 180°)$ (iii) $3 + \sin(180° + \alpha)$. A copy of Figure 4, labelled Diagram 1, is shown on the next page. (b) On Diagram 1, sketch the graph of $y = \sin 2x$. (c) Hence find, in terms of α, the x coordinates of any points in the interval $0 < x < 180°$ where $\sin 2x = p$.

中文：图 4 给出方程 $y = \sin x$ 的曲线的图像的一部分。已知 $\sin\alpha = p$，其中 $0 < \alpha < 90°$。(a) 用 p 表示下列各式的值：(i) $2\sin(180° - \alpha)$；(ii) $\sin(\alpha - 180°)$；(iii) $3 + \sin(180° + \alpha)$。(b) 在下一页的图 1 上画出 $y = \sin 2x$ 的图像。(c) 据此用 α 表示区间 $0 < x < 180°$ 内满足 $\sin 2x = p$ 的所有点的横坐标。

答 Answer： _____

2 真题演练 [2021 年 10 月 Q4（5 分）]

Figure 2 shows a sketch of the curve with equation $y = f(x)$, where $f(x) = \cos 2x$, $0 < x < k$. The points Q and R, where $R(k, 0)$, lie on the curve and are shown in Figure 2. (a) State (i) the coordinates of Q (ii) the value of k. (b) Given that there are exactly two solutions to the equation $\cos 2x = p$ in the region $0 < x < k$, find the range of possible values for p.

中文：图 2 给出曲线 $y = f(x)$（其中 $f(x) = \cos 2x$，$0 < x < k$）的草图。点 Q 与点 R（其中 R 的坐标为 $(k, 0)$）在曲线上，如图 2 所示。(a) 写出：(i) Q 的坐标；(ii) k 的值。(b) 已知方程 $\cos 2x = p$ 在区间 $0 < x < k$ 内恰有两个解，求 p 的取值范围。

答 Answer： _____

3 真题演练 [2025 年 6 月 Q4（6 分，(c) 部分）]

State the number of solutions of each of the following equations: (i) $4\cos x = 3$ in the interval $0 < x \leq 18000°$ (ii) $5 + 4\cos x = 1$ in the interval $-720° < x < 720°$ (iii) $4\cos x - 3 = 1$ in the

interval $-1080° \leq x \leq 1080°$.

中文：写出下列各方程在指定区间内解的个数：(i) $4\cos x = 3$，区间 $0 < x \leq 18000°$；(ii) $5 + 4\cos x = 1$，区间 $-720° < x < 720°$；(iii) $4\cos x - 3 = 1$，区间 $-1080° \leq x \leq 1080°$。

答 Answer： _____

4 真题演练 [2019 年 10 月 Q9（4 分）]

Figure 5 shows a sketch of part of the curve C with equation $y = \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)$, where x is measured in radians. The point M shown in Figure 5 is a minimum point on C. (a) State the period of C. (b) State the coordinates of M. The smallest positive solution of the equation $\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = k$, where k is a constant, is $\frac{\pi}{12}$. (c) Find, in terms of π, (i) the negative solution of the equation $\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = k$ that is closest to zero (ii) the smallest positive solution of the equation $\cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) = k$.

中文：图 5 给出曲线 C（方程 $y = \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)$，其中 x 以弧度为单位）图像的一部分。图 5 中的点 M 是 C 上的一个极小点。(a) 写出 C 的周期。(b) 写出 M 的坐标。已知方程 $\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = k$（$k$ 为常数）的最小正解为 $\frac{\pi}{12}$。(c) 用 π 表示：(i) 方程 $\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = k$ 中最接近零的负解；(ii) 方程 $\cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) = k$ 的最小正解。

答 Answer： _____

弧度制 Radians

本章导读

本章是 P1 中**几何分值最集中的考点群**。2019–2026 年共 **18 道**真题落在本章：C7c（扇形与弓形面积）**14 道**，C7b（弧长）**4 道**。**没有一道是送分的小题**——最短的是 2019 年 10 月 Q1（5 分），最重的是 2020 年 10 月 Q3、2021 年 10 月 Q7、2022 年 6 月 Q8、2023 年 1 月 Q6、2024 年 6 月 Q10（均为 10 分）。**这 18 道题几乎全部是「图形 + 两三步面积或周长运算」的组合题。**

本章有**三条不能违反的铁律**，请先记住再往下读：

铁律一：弧长公式与扇形面积公式里的角必须是弧度。 $s=r\theta$ 与 $A=\frac{1}{2}r^2\theta$ 这两条式子**只有在 θ 用弧度时才成立**。2019 年 10 月 Q1 给出「$\angle AOB=1.25$ 弧度」，若你把 1.25 当成 1.25° 代入，半径会算成 $2\sqrt{6}$ 的几十倍。**动笔前先在题干的角度旁圈出单位。**

铁律二：弓形面积是「扇形减三角形」，而且要先判断是哪一块弓形。 $\theta<\pi$ 时弓形在**小扇形**一侧，可以直接用 $\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$；$\theta>\pi$ 时弓形跨过大半个圆，**同一个公式直接套上去必错**。2025 年 6 月 Q6 的「直升机停机坪」就是大扇形与三角形的组合。

铁律三：题目要精确值时，答案里必须保留 π。 2019 年 10 月 Q1 的官方答案是 $\frac{13\sqrt{6}}{2}$ cm；2026 年 6 月 Q7 的官方答案要求写成 $a+b\sqrt{c}$ 的形式。**写成 15.71 不给分，写成 5π 才有分**——这是本章最常被忽视的给分点。

读完本章，你应当能做到：**看到「弧度」就知道公式可以直接代入、看到「弓形」就知道要减三角形、看到「exact value」就知道 π 不能提前丢掉。**

本单元新词 Key Vocabulary

English 英文	中文	在 P1 中的用法
radian	弧度	P1 中一切角度默认用弧度；**弧度制下的 $s = r\theta$ 与 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ 是本章的全部工具**
degree	度	需要换算时用 $\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \times \frac{\pi}{180}$；**题目问 in radians 时答案不能带 °**
central angle	圆心角	扇形与弓形的角，记作 θ，**单位一律是弧度**
arc length	弧长	$s = r\theta$；**近五年 18 道真题中至少 16 道要用到这一行**
sector	扇形	两条半径与所夹弧围成的部分；**面积 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$**
segment	弓形	弦与弧之间的部分；**面积 = 扇形 − 三角形**
major segment	大弓形	弦所对**大于半圆**的那一块；**要用整圆面积减去小弓形**
major sector	大扇形	圆心角大于 180° 的扇形；**圆心角要写成 $2\pi - \theta$**
chord	弦	圆上两点间的线段；**弦长 $= 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$**
circumference	圆周长	$2\pi r$；**整圆的圆心角是 2π**，代回 $s = r\theta$ 立刻得到
perimeter	周长	扇形周长 = 两条半径 + 弧长 $= 2r + r\theta$；**弓形周长 = 弧长 + 弦长**
exact value in terms of π	含 π 的精确值	题目要求含 π 的精确值时，**答案必须保留 π，不得写成小数**
in simplest form	最简形式	根式题的标准措辞；$\frac{13\sqrt{6}}{2}$ **不要写成** $\frac{26\sqrt{6}}{4}$
to n significant figures	精确到 n 位有效数字	官方措辞；**位数与单位都要写进答案里**
show that	证明	**必须写出从已知走到结论的推导过程，只写结果一分不给**
convert to radians	化为弧度	题干出现这句话时，**之前算出的角必须先乘 $\frac{180}{\pi}$ 再写成弧度**

7.1 Radian measure 弧度与角度换算

弧度制是本章的地基。P1 里所有与角度有关的公式——弧长、扇形面积、弓形面积——**都只在弧度下成立。**所以 7.1 节的内容看似简单，却直接决定后面两节能不能算对。一句话抓住定义：**弧长等于半径的圆心角为 1 弧度。**

- **定义：弧长等于半径的圆心角为 1 弧度（radian），记作 1 rad。角的大小只由「弧长 ÷ 半径」决定，与圆的大小无关**
- **换算公式：**$\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \times \frac{\pi}{180}$，反之 $\theta_{\text{deg}} = \theta_{\text{rad}} \times \frac{180}{\pi}$。计算时用常数 $\frac{180}{\pi} \approx 57.29578$
- **整圈是 2π 弧度，**半圈是 π 弧度，直角是 $\frac{\pi}{2}$ 弧度。**看到 π 就该想到「整圈的几分之几」**
- **为什么非要弧度：**只有弧度制才让 $s = r\theta$ 与 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ 成立。**用角度制必须写成** $s = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ **与** $A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$，多两步且极易算错
- **弧度是无量纲的：**$r\theta$ 中 r 带单位、θ 不带，**两者相乘才得到长度。**这正是弧度制「自然」的根源
- **三角函数里的角按弧度理解：**$y = \sin x$ 中若标了 x is measured in radians，则 $x = \pi$ 对应整圈；**若标了 degrees，同一个 x 落到完全不同的点上**

- **特殊角的弧度值：** $30^\circ=\frac{\pi}{6}$，$45^\circ=\frac{\pi}{4}$，$60^\circ=\frac{\pi}{3}$，$90^\circ=\frac{\pi}{2}$，$120^\circ=\frac{2\pi}{3}$，$135^\circ=\frac{3\pi}{4}$，$150^\circ=\frac{5\pi}{6}$，$180^\circ=\pi$
- **答题纪律：** 问 in radians 时答案**不能带 °**；问 in degrees 时**不能出现 π**。**写反了 A1 不给**

方法卡　弧度制的工作纪律与常用换算表

角度	弧度	角度	弧度
0°	0	180°	π
30°	$\frac{\pi}{6}$	210°	$\frac{7\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	225°	$\frac{5\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	240°	$\frac{4\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	270°	$\frac{3\pi}{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	300°	$\frac{5\pi}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	315°	$\frac{7\pi}{4}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	360°	2π

所求量	用弧度（θ 是弧度）	用角度（θ 是度）
弧长	$s=r\theta$	$s=\frac{\theta}{360}\times 2\pi r$
扇形面积	$A=\frac{1}{2}r^2\theta$	$A=\frac{\theta}{360}\times \pi r^2$
弓形面积	$A=\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$	**必须先换成弧度**，再用左边
整圆周长	$2\pi r$	同左，没有第二种写法

步骤	动作
1	**先把单位圈出来：**题目给的是度还是弧度？最后要的是度还是弧度？
2	**把角度换成弧度：**$\theta_{\text{rad}}=\theta_{\text{deg}}\times\frac{\pi}{180}$
3	**代入公式，全程不出现度：**$s=r\theta$，$A=\frac{1}{2}r^2\theta$
4	**最后才换回去：**$\theta_{\text{deg}}=\theta_{\text{rad}}\times\frac{180}{\pi}$

1 例题　[讲义例题 7.1.1]

Convert the following angles. (a) Write 150° and 225° in radians, giving your answer in terms of π. (b) Write $\frac{7\pi}{12}$ and $\frac{11\pi}{6}$ in degrees. (c) Convert 0.4 radians to degrees, giving your answer to 1 decimal place.

中文：转换下列角度。(a) 把 150° 与 225° 写成弧度，答案用 π 表示。(b) 把 $\frac{7\pi}{12}$ 与 $\frac{11\pi}{6}$ 写成角度。(c) 把 0.4 弧度转换成角度，精确到 1 位小数。

答 Answer： _____

2 例题 [讲义例题 7.1.2]

(a) Solve $\sin x = \frac{1}{2}$ for $0 < x < \frac{\pi}{2}$, giving your answer in radians. (b) Hence find the exact value of $\cos x$. (c) A student writes "$\sin 30° = 0.5$, so $\sin 30 = 0.5$". Explain the error in the student's working.

中文：(a) 解方程 $\sin x = \frac{1}{2}$，其中 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，答案用弧度表示。(b) 据此求 $\cos x$ 的精确值。(c) 某学生写道：「$\sin 30° = 0.5$，所以 $\sin 30 = 0.5$。」请解释该学生解答中的错误。

答 Answer： _____

3 例题 [2020 年 10 月 Q3（改编）]

Figure 1 shows the design for a badge. The design consists of a sector AOB of a circle with centre O. AO = OB = 3 cm and the angle AOB = α radians. Given that the area of the sector AOB is 7.2 cm^2 (a) show that $\alpha = 1.6$ radians. (2) (b) Hence find the length of the arc AB, giving your answer in cm to 3 significant figures.

中文：图 1 给出一种徽章的设计图。该设计由一个以 O 为圆心的扇形 AOB 组成，其中 AO = OB = 3 cm，角 AOB = α 弧度。已知扇形 AOB 的面积为 7.2 cm^2。(a) 证明 $\alpha = 1.6$ 弧度（2 分）。(b) 据此求弧 AB 的长度，精确到 3 位有效数字。

答 Answer： _____

4 例题 [讲义例题 7.1.3（改错练习）]

A student is asked to find the length of an arc of a circle of radius 6 cm which subtends an angle of 1.2 radians at the centre. The student writes: "$s = \frac{1.2}{360} \times 2\pi \times 6 = 0.1257$ cm. Since $s = r\theta$, $s = 6 \times 1.2 = 7.2$ cm. The perimeter of the sector is therefore $2 \times 6 + 7.2 = 19.2$ cm." Identify and correct the errors in the student's working, and hence find the correct perimeter of the sector.

中文：一道题要求求半径为 6 cm、圆心角为 1.2 弧度的弧长。某学生写道：「$s = \frac{1.2}{360} \times 2\pi \times 6 = 0.1257$ cm。又因为 $s = r\theta$，所以 $s = 6 \times 1.2 = 7.2$ cm。因此该扇形的周长是 $2 \times 6 + 7.2 = 19.2$ cm。」请指出并改正该学生解答中的错误，并据此求出该扇形的正确周长。

答 Answer： _____

7.2 Arc length 弧长

弧长公式 $s = r\theta$ 是本章出现频率最高的一行字：近五年的 18 道真题里，**至少 16 道**要用到它，有的题甚至在同一小问里连用三次。它的形式短到只有三个字符，**但每一个字符都有前提：**θ 必须是弧度，r 与 s 必须是同一个长度单位。本节要练的就是**换了单位也不出错**。

- **核心公式：**$s = r\theta$。s 是弧长，r 是半径，θ 是**以弧度表示的圆心角**
- **扇形周长：**$P = 2r + r\theta$，即**两条半径 + 一段弧长。先写 $2r$ 再写 $r\theta$，不要把弧长漏掉**

- **角度制的写法**：$s=\dfrac{\theta}{360}\times 2\pi r$。**这道式子与 $s=r\theta$ 完全等价，但步骤多一倍**；换算成弧度后一律用短的
- **反求半径**：已知弧长 s 与圆心角 θ，则 $r=\dfrac{s}{\theta}$。**2023 年 10 月 Q9 的 (a) 就是这一行**
- **弦长**：圆心角为 θ（弧度）时弦长 $=2r\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$。**弓形的周长 = 弧长 + 弦长**
- **整圆周长**：整圆的圆心角是 2π，代入 $s=r\theta$ 得 $2\pi r$，与角度制结果一致——**这是检验计算是否出错的好办法**
- **多段弧相加**：复合图形的周长常含**两段甚至三段不同半径的弧，每一段各自用 $s=r\theta$ 求出再相加**，不要把半径混用
- **精度与单位**：**弧长与周长是长度**（cm、m），**别写成平方**。位数与单位都要出现在答案里

方法卡　弧长题的四种问法与对应写法

题目给什么	用哪个式子	注意点
半径 r 与弧度角 θ	$s=r\theta$	**直接得弧长**，这是最常考的一行
弧长 s 与弧度角 θ	$r=\dfrac{s}{\theta}$	反求半径：**商一定要写成除法**
半径 r 与角度（度）	$s=\dfrac{\theta}{360}\times 2\pi r$	**先换算成弧度再算更省事**
圆心角 θ 与半径，求弦长	$2r\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$	**半角公式**：三角形面积另用 $\frac{1}{2}r^2\sin\theta$

单位陷阱	后果	对策
把 $1.25°$ 当成 1.25 弧度代入 $s=r\theta$	弧长**小了几十倍**，半径随之全错	**动笔前在题干的角度旁写上「rad」**
把弧度角 θ 当成度代进 $\dfrac{\theta}{360}\times 2\pi r$	弧长**小了 57 倍**	**统一用 $s=r\theta$**，不要两条公式混用
求周长时只写了 $2r$	漏掉弧长，**周长少一整段**	**先写「$P=2r+r\theta$」再拆开**

5 例题　[讲义例题 7.2.1]

Figure 1 shows a sector AOB of a circle with centre O and radius 7 cm. (a) Given that the angle AOB is 1.4 radians, find the length of the arc AB. (b) Hence find the perimeter of the sector AOB, giving your answer to 1 decimal place. (c) A student writes the answer to part (a) as $7\times 1.4\times\dfrac{180}{\pi}$. Identify the error in the student's working.

中文：图 1 给出一个扇形 AOB，其圆心为 O，半径为 7 cm。(a) 已知角 AOB 为 1.4 弧度，求弧 AB 的长度。(b) 据此求扇形 AOB 的周长，精确到 1 位小数。(c) 某学生把 (a) 的答案写成 $7\times 1.4\times\dfrac{180}{\pi}$。指出该学生解答中的错误。

答 Answer： _____

6 例题 [2019 年 10 月 Q1（5 分）]

Figure 1 shows a sector AOB of a circle with centre O and radius r cm. The angle AOB is 1.25 radians. Given that the area of the sector AOB is 15 cm^2, (a) find the exact value of r, (b) find the exact length of the perimeter of the sector AOB. Write your answer in simplest form.

中文：图 1 给出一个扇形 AOB，其圆心为 O，半径为 r cm。角 AOB 为 1.25 弧度。已知扇形 AOB 的面积为 15 cm^2，(a) 求 r 的精确值；(b) 求扇形 AOB 周长的精确长度。答案写成最简形式。

答 Answer： _____

7 例题 [2024 年 1 月 Q8（9 分）]

Figure 3 shows a sketch of the plan view of a platform. The plan view of the platform consists of a sector DOC of a circle centre O joined to a sector AOBEA of a different circle, also with centre O. Given that • angle AOB = 0.8 radians • arc length CD = 9 m • DA : AO = 3 : 5 (a) show that AO = 7.03 m to 3 significant figures. (3) (b) Find the perimeter of the platform, in m, to 3 significant figures. (3) (c) Find the total area of the platform, giving your answer in m^2 to the nearest whole number. (3)

中文：图 3 给出一个平台俯视图的草图。平台的俯视图由一个以 O 为圆心、圆心角为 DOC 的扇形，与另一个同心圆（也以 O 为圆心）的扇形 AOBEA 拼接而成。已知：• 角 AOB = 0.8 弧度；• 弧 CD 的长度为 9 m；• DA : AO = 3 : 5。(a) 证明 AO = 7.03 m（精确到 3 位有效数字）（3 分）。(b) 求平台的周长（单位为 m），精确到 3 位有效数字（3 分）。(c) 求平台的总面积，答案以 m^2 为单位，精确到最接近的整数（3 分）。

答 Answer：_____

8 例题 [2023 年 10 月 Q9（7 分）]

Figure 3 shows the plan view of the area being used for a ball-throwing competition. Competitors must stand within the circle C and throw a ball as far as possible into the target area, PQRS, shown shaded in Figure 3. Given that • circle C has centre O • P and S are points on C • OPQRSO is a sector of a circle with centre O • the length of arc PS is 0.72 m • the size of angle POS is 0.6 radians (a) show that OP = 1.2 m (1) Given also that • the target area, PQRS, is 90 m^2 • length PQ = x metres (b) show that $5x^2 + 12x - 1500 = 0$ (3) (c) Hence calculate the total perimeter of the target area, PQRS, giving your answer to the nearest metre. (3)

中文：图 3 给出投球比赛场地的俯视图。选手必须站在圆 C 内投球，尽可能远地投进阴影所示的目标区 PQRS。已知：• 圆 C 的圆心为 O；• P 与 S 是圆 C 上的点；• OPQRSO 是一个以 O 为圆心的扇形；• 弧 PS 的长度为 0.72 m；• 角 POS 为 0.6 弧度。(a) 证明 OP = 1.2 m（1 分）。又已知：• 目标区 PQRS 的面积为 90 m^2；• PQ 的长度为 x m。(b) 证明 $5x^2 + 12x - 1500 = 0$（3 分）。(c) 据此求目标区 PQRS 的总周长，精确到最近的整数米（3 分）。

答 Answer：_____

7.3 Areas of sectors and segments 扇形与弓形面积

这是本章分值最重的考点（C7c，近五年 14 道真题）。公式只有两条（$A = \frac{1}{2}r^2\theta$ 与 $A_{弓} = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$），**但真正的考点是「用哪一块面积相减」**。同一道题里往往要叠三步：先求一个角、再求两块面积、最后做加减。7.5 节专门讲这里的角度陷阱。

- **扇形面积：**$A = \frac{1}{2}r^2\theta$（θ 用弧度）。**也可写成** $A = \frac{1}{2}rs$，其中 $s = r\theta$
- **三角形面积：**两条半径夹角为 θ 时，$\triangle AOB$ 的面积 $= \frac{1}{2}r^2\sin\theta$。**这是本章第二个必会公式，也是弓形公式的来源**
- **弓形面积：**$A_{弓} = A_{扇形} - A_{\triangle} = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$。**只对劣弓形（$\theta \leqslant \pi$）直接成立**
- **优弓形（$\theta > \pi$）：不能用同一个公式。正确做法是整圆面积减去劣弓形：**$A = \pi r^2 - \frac{1}{2}r^2(\theta_{劣} - \sin\theta_{劣})$
- **优扇形：**圆心角写成 $2\pi - \theta$。**看到题目里出现「major sector」或图形超过半圆，立刻检查这一点**
- **复合图形：**多个扇形、弓形、三角形拼成的图形，**面积做加减，周长做分段相加。加减号的正负必须靠画图或看官方图确定，不能猜**
- **精度与单位：面积单位是平方**（cm^2、m^2），**周长是米或厘米。写错单位丢 A1**

方法卡　扇形、弓形与优弓形的公式对照

所求图形	公式	什么时候用
扇形（劣）	$A = \frac{1}{2}r^2\theta$	**永远成立**，θ 是圆心角（弧度）
扇形（优）	$A = \frac{1}{2}r^2(2\pi - \theta)$	圆心角超过 180°，**先写 θ 再换成 $2\pi - \theta$**
三角形 AOB	$A = \frac{1}{2}r^2\sin\theta$	两条边都是半径、夹角为 θ 时
劣弓形	$A = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$	弦所对的劣弓形，$\theta \leqslant \pi$
优弓形	$A = \pi r^2 - \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$	弦所对的优弓形，**整圆减劣弓形**
扇形周长	$P = 2r + r\theta$	**两条半径加一段弧**

常见错误	后果	对策
把弓形面积写成 $\frac{1}{2}r^2\theta$	算出的是**扇形**面积，比弓形大	**永远记「弓形 = 扇形 − 三角形」**
优弓形也套 $\frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$	结果为负或严重偏小	**先判断 θ 是否超过 π**
优扇形用 θ 而不是 $2\pi - \theta$	面积明显偏小	**圈出「超过半圆」四个字**
弧长与周长用了同一条公式	周长少两条半径	**扇形周长永远是 $2r + r\theta$**

9 例题 [2020 年 10 月 Q3（10 分）]

Figure 1 shows the design for a badge. The design consists of two congruent triangles, AOC and BOC, joined to a sector AOB of a circle centre O. Angle AOB = α, AO = OB = 3 cm and OC = 5 cm. Given that the area of sector AOB is 7.2 cm^2, (a) show that $\alpha = 1.6$ radians. (2) (b) Hence find (i) the area of the badge, giving your answer in cm^2 to 2 significant figures, (ii) the perimeter of the badge, giving your answer in cm to one decimal place. (8)

中文：图 1 给出一种徽章的设计图。该设计由两个全等三角形 AOC 与 BOC 拼接到一个以 O 为圆心的扇形 AOB 上而成。已知角 AOB = α，AO = OB = 3 cm，OC = 5 cm。已知扇形 AOB 的面积为 7.2 cm^2。(a) 证明 $\alpha = 1.6$ 弧度（2 分）。(b) 据此求 (i) 徽章的面积，答案以 cm^2 为单位，精确到 2 位有效数字；(ii) 徽章的周长，精确到 1 位小数。（共 8 分）

答 Answer： _____

10 例题 [2022 年 1 月 Q5（7 分）]

Figure 2 shows a plan view of a semicircular garden ABCDEOA. The semicircle has centre O, diameter AOE and radius 3 m. The straight line BD is parallel to AE and angle BOA is 0.7 radians. (a) Show that, to 4 significant figures, angle BOD is 1.742 radians. (1) The flowerbed R, shown shaded in Figure 2, is bounded by BD and the arc BCD. (b) Find the area of the flowerbed, giving your answer in square metres to one decimal place. (3) (c) Find the perimeter of the flowerbed, giving your answer in metres to one decimal place. (3)

中文：图 2 给出半圆形花园 ABCDEOA 的俯视图。该半圆的圆心为 O，直径为 AOE，半径为 3 m。直线 BD 平行于 AE，且角 BOA 为 0.7 弧度。(a) 证明角 BOD 为 1.742 弧度（精确到 4 位有效数字）（1 分）。图 2 中阴影所示的花坛 R 由 BD 与弧 BCD 围成。(b) 求花坛的面积，答案以平方米为单位，精确到 1 位小数（3 分）。(c) 求花坛的周长，答案以米为单位，精确到 1 位小数（3 分）。

答 Answer： _____

11 例题 [2025 年 6 月 Q6（9 分）]

The shaded area in Figure 2 shows the plan view of a helicopter landing pad. The area consists of the major sector AOB of a circle centre O joined to a triangle AOC. Given that • AO = OB = 15 m • BC = 2 m • CBO is a straight line • angle ACO = 0.6 radians (a) show that angle COA is 1.847 radians to 3 decimal places. (3) (b) Find the total area of the helicopter landing pad. Give your answer in m^2 to 3 significant figures. (3) (c) Find the perimeter of the helicopter landing pad. Give your answer in metres to 3 significant figures. (3)

中文：图 2 中阴影区域给出直升机停机坪的俯视图。该区域由一个以 O 为圆心的圆的优扇形 AOB 与一个三角形 AOC 拼成而成。已知：• AO = OB = 15 m；• BC = 2 m；• CBO 是一条直线；• 角 ACO = 0.6 弧度。(a) 证明角 COA 为 1.847 弧度（精确到 3 位小数）（3 分）。(b) 求直升机停机坪的总面积，答案以 m^2 为单位，精确到 3 位有效数字（3 分）。(c) 求直升机停机坪的周长，答案以米为单位，精确到 3 位有效数字（3 分）。

答 Answer： _____

12 例题 [讲义例题 7.3.4]

Figure 3 shows a circle with centre O and radius 12 cm. The chord AB subtends an angle of 0.8 radians at the centre O. (a) Find the area of the minor segment cut off by the chord AB, giving your answer in cm^2 to 3 significant figures. (b) Hence find the area of the major segment cut off by the chord AB, giving your answer in cm^2 to 3 significant figures. (c) Find the perimeter of the minor segment, giving your answer in cm to 3 significant figures.

中文：图 3 给出一个圆，其圆心为 O，半径为 12 cm。弦 AB 在圆心 O 处所对的圆心角为 0.8 弧度。(a) 求弦 AB 所截得的劣弓形的面积，答案以 cm^2 为单位，精确到 3 位有效数字。(b) 据此求弦 AB 所截得的优弓形的面积，答案以 cm^2 为单位，精确到 3 位有效数字。(c) 求劣弓形的周长，答案以 cm 为单位，精确到 3 位有效数字。

答 Answer： _____

7.4 满分必备：弧度制下的公式体系与精确答案书写

满分必备 满分必备：弧度制下的公式体系与精确答案书写

一、弧度的定义与「为什么必须是弧度」 弧度是一种「以圆本身为尺子」的角度单位。在半径为 r 的圆上，截取长度为 r 的弧所对的圆心角就是 1 弧度。于是：

事实	为什么	用在哪
弧长 $= r\times$ 弧度	弧长与半径之比就是圆心角的弧度数（定义直接给出）	弧长公式 $s = r\theta$
面积 $= \frac{1}{2}r\times$ 弧长	把扇形剪开展平成一个三角形：底是弧、高是 $\frac{1}{2}r$	扇形面积 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$
整圈 $= 2\pi$ 弧度	周长 $= 2\pi r$，除以半径 r	优扇形、优弓形

「角度制下这两条式子不成立」的严格解释： 设圆心角为 α 度，则对应的弧度数为 $\frac{\alpha\pi}{180}$，所以

$$s = r \times \frac{\alpha\pi}{180} = \frac{\alpha}{360} \times 2\pi r,$$

正是角度制写法。**两条公式其实永远成立，只是「$r\theta$ 中的 θ 必须是弧度」。【易错】**反过来的错误更常见：把弧度角 θ 直接塞进 $\dfrac{\theta}{360}\times 2\pi r$，结果**小了 57 倍——这条错法在近五年真题里出现过多次。**

二、公式体系：一张表背下来，四道题都能用把本章的公式按「先求什么、再求什么」排成一条链，**复合题就变成了填空题：**

层级	公式	备注
第 1 层	$s=r\theta$，　$r=\dfrac{s}{\theta}$	弧长与半径互换；θ 必须是弧度
第 2 层	$A_{\text{扇形}}=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rs$	优扇形写成 $2\pi-\theta$
第 2 层	$A_{\triangle}=\dfrac{1}{2}r^2\sin\theta$	两条边是半径、夹角是 θ
第 3 层	$A_{\text{劣弓形}}=\dfrac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$	扇形 − 三角形
第 3 层	$AB=2r\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$	弦长；弓形周长 = 弧 + 弦
第 4 层	$A_{\text{优弓形}}=\pi r^2-A_{\text{劣弓形}}$	整圆减劣弓形
第 4 层	$P_{\text{扇形}}=2r+r\theta$，　$P_{\text{弓形}}=r\theta+2r\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$	周长只算外边界

使用顺序的固定套路：先用第 1 层确定一个半径或一条弧，再用第 2 层求面积，用第 3、4 层做加减与拼装。【易错】只有第 1 层是「反求」的入口：$r=\dfrac{s}{\theta}$ 在真题中出现频率极高（2023 年 10 月 Q9、2024 年 1 月 Q8 的 (a) 都是它）。

三、精确答案的书写规范：五条规定 P1 越来越强调精确值，本章的「精确」有两种形态，**必须分开处理：**

形态	官方措辞	写法要求
含 π 的精确值	**in terms of π、exact value**	答案里必须留着 π，如 5π cm、$\frac{13\sqrt{6}}{2}$ cm
$a+b\sqrt{c}$ 形式	**Write each answer in the form $a+b\sqrt{c}$**	必须化到最简：$\frac{13\sqrt{6}}{2}$ 不能写成 $\frac{26\sqrt{6}}{4}$

五条硬规定：

1. **要精确值就不能写小数。**题目说 exact value 时，4.899 一分不给，$2\sqrt{6}$ 才给。**要小数就不能留 π。**题目说 to 3 significant figures 时，5π 不给分，15.7 才给。
2. **根式必须化到最简。**$\sqrt{24}$ 要写成 $2\sqrt{6}$；$\dfrac{\sqrt{12}}{2}$ 要写成 $\sqrt{3}$；**分母里不能有根式。**
3. **负号要交代。**半径、长度、面积**不能为负；解出两个根时要写明舍去哪一个以及理由**（2026 年 6 月 Q7 就靠 $r>2$ 选根）。
4. **单位与位数一起写。**$\dfrac{13\sqrt{6}}{2}$ cm、3.4 m^2、19.6 cm——**缺单位在 P1 是很常见的丢分点。**

【易错】一个反直觉的事实：**当题目给的角度是弧度时，精确答案里通常没有 π；当题目给的角度是度时，精确答案里一定有 π。**2019 年 10 月 Q1 给的是 1.25 弧度，答案是 $\frac{13\sqrt{6}}{2}$（无 π）；2024 年 6 月 Q10 给的是 π 弧度与 1.3 弧度，答案是 23.4 与 60.9（有 π 参与运算但被算掉了）。**判断方法只有一个：看题目要什么形式，不要自己决定答案长什么样。**

四、官方给分点怎么拆：M 分与 A 分的落点近五年本章的给分结构高度一致，把「写什么」与「值几分」对应起来，左边一列全部写上就能拿满：

答题纸上必须出现的句子	分值	为什么是独立给分点
$\frac{1}{2}r^2\theta = 6$ 或 $2r + r\theta = 10$（其一）	B1	**第一式**，写对即给分
两式都写出	B1	**第二式，与第一式各占一个分**
消去 r 得到只含 θ 的方程	M1	**方法分**：官方看的是「有没有消元」这一步
$3\theta^2 - 13\theta + 12 = 0$	A1	**只与消元过程有关，中间出错则该 A1 不给**
$(3\theta - 4)(\theta - 3) = 0$，即 $\theta = \frac{4}{3}$ 或 3	B1	**两个候选值合起来只占一个分**
代入求 r	M1	**方法分**：官方看的是「有没有代入」
$\theta = \frac{4}{3},\ r = 3$ 与 $\theta = 3,\ r = 2$（配对正确）	A1	**配错对就丢掉这一分**（官方明写）

【易错】两个最容易被忽略的给分规则：**(1)「±」与负根要处理**。官方原文写着 **"Withhold the final mark if they do not rule out $r = -3$ / $r = -2$"**——解出负根却不说明为什么舍去，A1 就没有。**(2) 配对错误比算错更惨**。θ 与 r 是**成对出现**的，官方明写 **"withhold the final mark if the corresponding values of r are incorrectly paired"**。写答案时务必把 θ 与 r 写在一起，例如「$\theta = \frac{4}{3},\ r = 3$」，不要分开列在两个地方。

1 满分示范 [2026 年 6 月 Q7（7 分）]

Figure 3 shows a sector AOB of a circle, centre O. The radius OA of the sector is r cm and angle AOB is θ radians. Given that • the area of sector AOB is 1 cm^2 • the perimeter of sector AOB is 8 cm (a) write down two different equations involving r and θ. (2) Given that $r > 2$ (b) solve the two simultaneous equations in part (a) to find the exact value of r and the exact value of θ. Write each answer in the form $a + b\sqrt{c}$ where a, b and c are integers. (Solutions relying on calculator technology are not acceptable.) (5)

中文：图 3 给出一个以 O 为圆心的扇形 AOB。扇形的半径 OA 为 r cm，角 AOB 为 θ 弧度。已知：• 扇形 AOB 的面积为 1 cm^2；• 扇形 AOB 的周长为 8 cm。(a) 写出两个关于 r 与 θ 的不同方程（2 分）。已知 $r > 2$，(b) 解 (a) 中的联立方程，求 r 与 θ 的精确值。每个答案都写成 $a + b\sqrt{c}$ 的形式，其中 a、b、c 为整数。（不接受仅依赖计算器的解法）（5 分）

答 Answer： _____

2 改错练习 [常见错答诊断]

A student is asked to find the exact length of an arc subtended by an angle of 1.5 radians in a circle of radius 6 cm. The student writes: "The angle in degrees is $1.5\times180/\pi=85.9437°$, so the arc length is $s=\dfrac{85.9437}{360}\times2\pi\times6=9.0078$ cm." Identify and correct the error in the student's working, and hence find the exact length of the arc.

中文：一道题要求求半径为 6 cm 的圆中，1.5 弧度所对的弧长。某学生写道：「对应的角度是 $1.5\times180/\pi=85.9437°$，所以弧长为 $s=\dfrac{85.9437}{360}\times2\pi\times6=9.0078$ cm。」请指出并改正该学生解答中的错误，并据此求弧长的精确值。

答 Answer： _____

7.5 满分必备：角度单位陷阱与弓形、优扇形的正确表达

满分必备 满分必备：角度单位陷阱与弓形、优扇形的正确表达

一、六个角度单位陷阱与逐条对策近五年本章的失分，**绝大多数不是算错，而是「单位与方向」判错。**

#	错误写法	后果	对策
1	把弧度角 θ 代入 $\frac{\theta}{360}\times 2\pi r$	弧长小 **57** 倍	全程用 $s=r\theta$
2	把角度 α 直接代入 $s=r\theta$	弧长大 **57** 倍	先乘 $\frac{\pi}{180}$
3	把 π 弧度当 3.14 弧度算	答案末尾不再是精确形式	全程保留 π，最后一步再求小数
4	优扇形用 θ 而不是 $2\pi-\theta$	面积明显偏小，周长明显偏小	圈出 **major**
5	弓形面积用 $\frac{1}{2}r^2\theta$	算出的是扇形而不是弓形	扇形 − 三角形
6	优弓形用 $\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$	结果接近但不精确，最危险	整圆 − 劣弓形

【易错】第 6 条必须重点强调：把 $\theta=0.8$ 换成 $2\pi-0.8$ 代入 $\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$，因为 $\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$，结果会接近正确值却不精确。这种错法不会明显报错，只会悄悄丢掉一两分，是本章最隐蔽的失分方式。正确做法永远是「整圆减劣弓形」。

二、弓形面积：公式、适用条件与一次完整推导弓形（segment）是弦与弧之间的部分。设圆心角为 θ（弧度），半径 r：

$$A_{弓}=A_{扇形}-A_{\triangle}=\frac{1}{2}r^2\theta-\frac{1}{2}r^2\sin\theta=\boxed{\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)}.$$

适用条件：$\theta\leqslant\pi$（劣弓形）。优弓形（$\theta>\pi$）必须写成

$$A_{优弓形}=\pi r^2-\frac{1}{2}r^2\left(\theta_{劣}-\sin\theta_{劣}\right).$$

图形	判定方法	正确表达
劣弓形	圆心角 $\leqslant 180°$	$\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$
优弓形	圆心角 $>180°$	$\pi r^2-\frac{1}{2}r^2(\theta_{劣}-\sin\theta_{劣})$
半圆	圆心角 $=180°$	$\frac{1}{2}\pi r^2$（特例，别套公式）

判定方法的三个动作：(1) 找出弦对应的圆心角 θ；**(2)** 判断它是劣弧还是优弧（看角是否超过 π）；**(3)** 选公式。**【易错】**「弦」这个字是信号：题目里一旦出现 chord 或「由弦围成的区域」，就该往「扇形 − 三角形」上想。

三、多于半圆时的三种正确处理方式「多于半圆」的图形有三种完全不同的处理方式，选错就全错：

图形	圆心角怎么写	面积怎么写
优扇形（major sector）	$2\pi-\theta$	$\frac{1}{2}r^2(2\pi-\theta)$
优弓形（major segment）	用劣角 $\theta_{劣}$ 计算	$\pi r^2-\frac{1}{2}r^2(\theta_{劣}-\sin\theta_{劣})$
优扇形 + 三角形	扇形用 $2\pi-\theta$，三角形用 θ	相加（凸出来的部分）

「凸出来」还是「凹进去」：拼接图形里，扇形通常凹进三角形，优扇形则凸出三角形。**2025 年 6 月 Q6（停机坪）与 2020 年 10 月 Q3（徽章）是本章的两道「镜像题」：徽章是「凹扇形 + 凸**

三角形」，停机坪是「凸优扇形 + 凸三角形」，两题的扇形部分一个用 α、一个用 $2\pi-\alpha$。【易错】只记公式不画图是本章最大的风险：在草稿纸上花 10 秒画个圆，比在答案纸上猜 10 分钟管用。

四、复合图形的加减判读与最终书写 复合图形的面积公式长这样：

$$A_{\text{总}}=\underbrace{\sum A_{\text{扇形}}}_{\text{用}\frac{1}{2}r^2\theta}+\underbrace{\sum A_{\text{三角形}}}_{\text{用}\frac{1}{2}r^2\sin\theta}\pm\underbrace{\sum A_{\text{弓形}}}_{\text{扇形}-\text{三角形}}.$$

「−」只出现在两种场合：圆内被切掉的部分（如弓形里的三角形）、重复计算的部分（如两圆重叠区）。「+」是默认：凸出来的部分都相加。

真题	面积表达式	关键点
2020 年 10 月 Q3（徽章）	$7.2+2\times\frac{1}{2}\times5\times3\sin\left(\frac{2\pi-1.6}{2}\right)$	三角形用 $2\pi-\alpha$
2025 年 6 月 Q6（停机坪）	$\frac{1}{2}\times15^2(2\pi-1.847)+\frac{1}{2}\times15\times17\sin1.847$	优扇形用 $2\pi-\theta$
2020 年 1 月 Q4（草坪）	$\frac{1}{2}\times12^2(\pi+1.231)-\frac{1}{2}\times4\times8\sqrt{2}$	大扇形减三角形
2022 年 1 月 Q5（花坛）	$\frac{1}{2}\times3^2\times1.742-\frac{1}{2}\times3^2\sin1.742$	标准劣弓形

「+」与「−」的最终判据只有一条：回到图上，把每一块圈的边界写出来，凡是被两块同时覆盖的区域就是负号。本题四个例子里，只有第三个是减法，而且它的减号来源是「草地挖去了一个三角形」——光看公式永远看不出来。

五、答案中 π 的保留与精确形式 本章所有「精确」相关的失分，都可以归到这一条。

题目要求	必须写成	典型错答
exact value（无单位形式说明）	$2\sqrt{6}$、$\frac{13\sqrt{6}}{2}$、$14-8\sqrt{3}$	4.899、16.192、0.1436
in terms of π	5π、$\frac{1}{2}\pi$、452.4… 中的 π 不许丢	15.7（把 π 换成了数）
$a+b\sqrt{c}$	$2+\sqrt{3}$、$14-8\sqrt{3}$	$\frac{2}{1+\sqrt{3}}$、$2+1.732$

三条操作规则：

1. 中间过程保留 π 与根式。把 π 换成 3.14159 的那一刻，精确答案就永远得不到了。
2. 根式化到最简再停手。$\sqrt{24}\to2\sqrt{6}$；$\frac{13\sqrt{6}}{2}$ 保持分母有理；$\frac{1}{1+\sqrt{3}}\to\frac{\sqrt{3}-1}{2}$。
3. 「指定的单位形式」要照抄题目的措辞。题目说 form $a+b\sqrt{c}$，就把 a、b、c 都写成整数；$14-8\sqrt{3}$ 中 $b=-8$ 是允许的（b 是整数即可）。

【易错】一个高频小陷阱：「in simplest form」与「in the form $a+b\sqrt{c}$」是两个要求。前者只要求最简，后者还要求把根号里的数提出来写成 $\sqrt{c}$ 的形式：$2\sqrt{6}$ 合格，而 $2\sqrt{24}$ 不合格。

1 满分示范 [2021 年 10 月 Q7（10 分）]

Figure 3 shows the design for a sign at a bird sanctuary. The design consists of a kite OABC joined to a sector OCXA of a circle centre O. In the design • OA = OC = 0.6 m • AB = CB = 1.4 m • angle OAB = angle OCB = 2 radians • angle AOC = θ radians, as shown in Figure 3. Making your method clear, (a) show that $\theta = 1.64$ radians to 3 significant figures, (4) (b) find the perimeter of the sign, in metres to 2 significant figures, (2) (c) find the area of the sign, in m^2 to 2 significant figures. (4)

中文：图 3 给出某鸟类保护区标牌的设计图。该设计由一个筝形 OABC 与一个以 O 为圆心、圆心为 OCXA 的扇形拼成。设计中：• OA = OC = 0.6 m；• AB = CB = 1.4 m；• 角 OAB = 角 OCB = 2 弧度；• 角 AOC = θ 弧度，如图 3 所示。要求清楚写出方法。(a) 证明 $\theta = 1.64$ 弧度（精确到 3 位有效数字）（4 分）。(b) 求标牌的周长，答案以米为单位，精确到 2 位有效数字（2 分）。(c) 求标牌的面积，答案以 m^2 为单位，精确到 2 位有效数字（4 分）。

答 Answer： _____

2 改错练习 [常见错答诊断]

A student is asked to find the area of the minor segment cut off by a chord in a circle of radius 10 cm, where the chord subtends an angle of 2 radians at the centre. The student writes: "Area of segment $= \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 100 \times 2 = 100$ cm^2. Since the segment is more than half of the circle, I should use $2\pi - 2 = 4.283$ radians, so the area $= \frac{1}{2} \times 100 \times 4.283 = 214.2$ cm^2." Identify and correct the errors in the student's working, and hence find the correct area of the minor segment.

中文：一道题要求求半径为 10 cm 的圆中，由一条弦截得的劣弓形的面积，其中该弦在圆心处所对的圆心角为 2 弧度。某学生写道：「弓形面积 $= \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 100 \times 2 = 100$ cm^2。由于弓形大于半个圆，所以应当用 $2\pi - 2 = 4.283$ 弧度，于是面积 $= \frac{1}{2} \times 100 \times 4.283 = 214.2$ cm^2。」请指出并改正该学生解答中的错误，并据此求出劣弓形的正确面积。

答 Answer： _____

7.6 普高衔接：弧度制与圆面积，国内学过什么、P1 额外要什么

普高衔接　普高衔接：弧度制与圆面积，国内学过什么、P1 额外要什么

(1) 人教 A 版的对应位置：弧度制与圆面积就在必修第二册国内高中把这块内容放在**人教 A 版必修第二册**（**第六章平面向量的坐标表示**之前的**三角函数**部分）与**选择性必修第一册**，主要有三块：

国内教材的知识点	常见公式写法	一句话说清它是什么
弧度制的定义	1 弧度对应弧长等于半径的圆心角	用「弧长：半径 $=1$」定义角度
弧度与角度的互化	$\frac{180^\circ}{\pi}$ rad 与 $\frac{\pi}{180^\circ}$ 两个常数	纯机械换算，与 P1 完全一致
弧长公式	$l=\frac{n\pi r}{180}$，或 $l=\lvert\alpha\rvert r$（α 以弧度计）	圆心角乘半径
扇形面积公式	$S=\frac{n\pi r^2}{360}$，或 $S=\frac{1}{2}\lvert\alpha\rvert r^2$（$\alpha$ 以弧度计）	弧长乘半径再除以 2

【易错】注意国内公式里那个 n：国内习惯把圆心角写成 n°（$0<n<360$），于是弧长公式前面挂着一个 $\frac{\pi}{180}$。**这个 $\frac{\pi}{180}$ 在 P1 里是不存在的**——P1 的公式最简形式里根本没有它，因为 θ 从一开始就是弧度。【踩分】对照要点：国内 $l=\frac{n\pi r}{180}\iff$ P1 $s=r\theta$，其中 $\theta=\frac{n\pi}{180}$。

(2) 国内讲法与 P1 讲法的六个真实差异

	国内（中式课堂）	P1（Edexcel）	差异的后果
(1)	弧长 $l=\dfrac{n\pi r}{180}$，n 是角度数	弧长 $s=r\theta$，θ 是弧度	**国内公式不能直接套**；漏掉 $\dfrac{\pi}{180}$ 结果差 57.3 倍
(2)	扇形面积 $S=\dfrac{n\pi r^2}{360}$	$A=\dfrac{1}{2}r^2\theta$	同上；国内公式在 P1 里属「换算未完成」
(3)	反求角度：$\theta=\dfrac{l}{r}$ **默认是弧度**，但学生常代度数	反求角度后**必须声明单位**	P1 的答案里 θ 是**裸数**，全靠题目上下文判断
(4)	一般不考弓形面积	**弓形面积必考**（本章 18 道真题里多题涉及）	国内略过的求法是本章最大失分点
(5)	$\sin 30^\circ=0.5$，三角函数默认角度制	**三角函数默认弧度制**，$\sin x$ 中的 x 是弧度	**把 $\sin 30$ 写出来就丢分**
(6)	答案常写成小数，如 3.14	**exact value 必须保留 π**，或写成 $a+b\sqrt{c}$	**写成小数是 A 分杀手**

【踩分】最需要盯住的是第 (5) 与第 (6) 条：国内教「$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$」，而 P1 里 $\sin x$ 的 x 是弧度，所以 30 不是 $\dfrac{\pi}{6}$ 时，$\sin 30$ 就是 0.988 这种**无意义的数**。

(3) P1 额外要求、但国内教材基本略过的四个点

	P1 额外考点	国内为什么容易漏
(1)	**弓形面积** $A=\dfrac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$	国内必修课只要求扇形面积，弓形靠竞赛题或教辅补充
(2)	**劣 / 优的判断与表达**：$\theta>\pi$ 时用 $2\pi-\theta$	国内题目几乎不涉及「优扇形」，学生没有「换角」的概念
(3)	**精确值书写规范**：$\dfrac{13\sqrt{6}}{2}$ cm、$2+\sqrt{3}$ cm	国内答案栏只判对错，判不出「精确形式」的规范
(4)	**弧度与角度在三角函数中的严格区分**	国内三角函数默认角度制，弧度制只出现在弧长与扇形面积两处

【踩分】第 (4) 条是本章最隐蔽的坑：国内同学做完弧长题就以为「弧度制学完了」，但 P1 会在**反求角度、判断优劣、求弦长**时反复要求你**全程以弧度思考**。

(4) 三个月备考的衔接动作清单

	动作	验收标准
(1)	把国内公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$ **默写成 P1 的** $s=r\theta$	看到「弧长 × 半径」立刻反应，**中间不出现** $\frac{\pi}{180}$
(2)	把 $s=r\theta$、$A=\frac{1}{2}r^2\theta$、$A_{\triangle}=\frac{1}{2}r^2\sin\theta$ **写在一张纸条上**	三行，**每行都能说出** θ **是弧度**
(3)	补上**弓形**与**优扇形**两行	纸条变成五行，含 $\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$
(4)	见到 π 就想「能不能留 π」	**凡是题目说 exact / simplest form，一律不写小数**

1 衔接练习 [人教 A 版必修第二册典型题（弧度制改写）]

A circle has centre O and radius 6 cm. The angle $\angle AOB=120°$. (a) Find, in terms of π, the length of the arc AB. (b) Find, in terms of π, the area of the sector AOB. (c) Find, in terms of π, the area of the minor segment cut off by the chord AB.

中文：圆 O 的半径为 6 cm，$\angle AOB=120°$。(a) 求弧 AB 的长，结果用 π 表示。(b) 求扇形 AOB 的面积，结果用 π 表示。(c) 求弦 AB 所截劣弓形的面积，结果用 π 表示。

答 Answer： _____

2 衔接练习 [P1 风格综合（弧长反求 + 优扇形）]

Figure 3 shows a design made from two sectors of circles, both with centre O. The sector OPQ has radius 5 cm and the sector OQR has radius 11 cm. Given that $\angle POQ=\frac{2\pi}{3}$ radians and that the area of sector OPQ is 25 cm^2, find the perimeter, in cm, of the shape $OPQR$.

中文：图 3 所示的图形由两个同心扇形拼成，圆心均为 O。扇形 OPQ 的半径为 5 cm，扇形 OQR 的半径为 11 cm。已知 $\angle POQ=\frac{2\pi}{3}$ 弧度，且扇形 OPQ 的面积为 25 cm^2，求图形 $OPQR$ 的周长（单位 cm）。

答 Answer： _____

7.7 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘

本章近五年共 **18 道**真题，考点分布如下：**C7c（扇形与弓形面积）14 道、C7b（弧长）4 道，没有一道单独考弧度换算**。这传达了一个非常明确的信息：

弧度制在 P1 里不是「知识点」，而是「工具」。

换句话说，**出题人不会问你「把 150° 化成弧度」**，但他会把一个以弧度给出的角度塞进面积题里，**你必须全程用它算出弧长、面积、周长，并给出符合精度要求的答案**。所以本章的复习优先级是：**公式 $>$ 精度 $>$ π 的处理 $>$ 弧度换算本身**。

本章真题的四类考法（做题前先对号入座）：

	考法	典型问法	本章代表真题
(1)	**反求型**	给面积与周长（或弧长），反求 r 与 θ	2019 年 1 月 Q10、2026 年 6 月 Q7
(2)	**复合拼装型**	一个扇形拼若干三角形，求总面积与总周长	2020 年 10 月 Q3、2023 年 1 月 Q6、2024 年 6 月 Q10
(3)	**优弧优扇形型**	优扇形面积、优弓形、超过半圆的角	2021 年 10 月 Q7、2022 年 6 月 Q8、2025 年 6 月 Q6
(4)	**同心双圆型**	同一圆心两个半径，先反求再拼装	2024 年 1 月 Q8、2025 年 10 月 Q7

【踩分】四类考法对应的动作：(1) **先写两个方程再消元**；(2) **把每一块的面积与周长分开列，最后相加**；(3) **先把 θ 与 π 比较，判断优劣**；(4) **同圆心 $\Rightarrow$ 找比例**。

下面四道题覆盖上述四类考法，**sol 中的【踩分】与官方 Mark Scheme 的给分点一一对应**。建议限时 **45 分钟**闭卷完成，再对照错题复盘表。

考点	近五年真题定位（年份 · 场次 · 题号 · 分值）
弧长	19 年 10 月 Q1（5 分）
	21 年 6 月 Q7（一）
	22 年 6 月 Q8（10 分）
	24 年 1 月 Q8（9 分）
扇形与弓形面积	19 年 1 月 Q10（7 分）
	20 年 1 月 Q4（9 分）
	20 年 10 月 Q3（10 分）
	21 年 10 月 Q7（10 分）
	22 年 1 月 Q5（7 分）
	23 年 1 月 Q6（10 分）
	23 年 6 月 Q5（10 分）
	23 年 10 月 Q9（7 分）
	24 年 6 月 Q5（7 分）
	24 年 6 月 Q10（10 分）
	24 年 10 月 Q5（9 分）
	25 年 6 月 Q6（9 分）
	25 年 10 月 Q7（9 分）
	26 年 6 月 Q7（7 分）

1 真题演练 [2019 年 1 月 Q10（7 分）]

A sector AOB, of a circle centre O, has radius r cm and angle θ radians. Given that the area of the sector is 6 cm^2 and that the perimeter of the sector is 10 cm, (a) show that $3\theta^2 - 13\theta + 12 = 0$ (4) (b) Hence find possible values of r and θ. (3)

中文：圆 O 的一个扇形 AOB 半径为 r cm，圆心角为 θ 弧度。已知该扇形的面积为 6 cm^2，扇形的周长为 10 cm。(a) 证明 $3\theta^2 - 13\theta + 12 = 0$ (4) (b) 据此求出 r 与 θ 的所有可能值。(3)

答 Answer： _____

2 真题演练 [2020 年 1 月 Q4（9 分）]

Figure 2 shows the plan view of a house ABCD and a lawn APCDA. ABCD is a rectangle with $AB = 16$ m. APCOA is a sector of a circle centre O with radius 12 m. The point O lies on the line DC, as shown in Figure 2. (a) Show that the size of angle AOD is 1.231 radians to 3 decimal places. (2) (b) Find the area of the lawn APCDA, in m^2, to one decimal place. (4) (c) Find the perimeter of the lawn, in metres, to one decimal place. (3)

中文：图 2 为房屋 $ABCD$ 与草坪 $APCDA$ 的俯视图。$ABCD$ 是矩形，$AB = 16$ m。$APCOA$ 是圆心为 O、半径为 12 m 的扇形。点 O 位于直线 DC 上，如图 2 所示。(a) 证明 $\angle AOD$ 的大小为 1.231 弧度（精确到 3 位小数）。(2) (b) 求草坪 $APCDA$ 的面积，单位 m^2，精确到 1 位小数。(4) (c) 求草坪的周长，单位 m，精确到 1 位小数。(3)

答 Answer： _____

3 真题演练 [2025 年 10 月 Q7（9 分）]

Figure 2 shows the plan view of a design for a swimming pool. The design consists of a sector POS of a circle centre O joined to a major sector QORTQ of a different circle, also with centre O. Given that angle POS is 1.65 radians, the area of sector POS is 30 m^2 and $PQ = 2.8$ m. (a) Show that, to 3 significant figures, $OQ = 8.83$ m. (3) (b) Find the total surface area of the swimming pool in m^2 to the nearest integer. (3) (c) Find the total perimeter of the swimming pool in metres to 2 significant figures. (3)

中文：图 2 为游泳池设计的俯视图。该设计由圆心为 O 的扇形 POS 与另一个圆（圆心同为 O）的大扇形 $QORTQ$ 拼成。已知 $\angle POS = 1.65$ 弧度，扇形 POS 的面积为 30 m^2，$PQ = 2.8$ m。(a) 证明 $OQ = 8.83$ m（精确到 3 位有效数字）。(3) (b) 求游泳池的总表面积，单位 m^2，精确到最接近的整数。(3) (c) 求游泳池的总周长，单位 m，精确到 2 位有效数字。(3)

答 Answer： _____

4 真题演练 [2022 年 6 月 Q8（10 分）]

Figure 3 shows a sketch of the outline of the face of a ceiling fan viewed from below. The fan consists of three identical sections congruent to OABCDO, shown in Figure 3, where OABO is a sector of a circle with centre O and radius 9 cm, the arc CD lies on a circle with centre O and radius 84 cm, and angle AOD is $\frac{2\pi}{3}$ radians. Given that the length of the arc AB is 15 cm, (a) show that the length of the arc CD is 35.9 cm to one decimal place. (3) The face of the fan is modelled to be a flat surface. Find, according to the model, (b) the perimeter of the face of the fan, giving your answer to the nearest cm. (2) (c) the surface area of the face of the fan. Give your answer to 3 significant figures and make your units clear. (5)

中文：图 3 为从下方仰视吊扇表面的轮廓示意图。吊扇由三个全等的、与 $OABCDO$ 全等的部分组成，如图 3 所示。其中 $OABO$ 是圆心为 O、半径为 9 cm 的扇形，弧 CD 位于圆心为 O、半径为 84 cm 的圆上，且 $\angle AOD = \frac{2\pi}{3}$ 弧度。已知弧 AB 的长为 15 cm，(a) 证明弧 CD 的长为 35.9 cm（精确到 1 位小数）。(3) 吊扇表面按平面模型处理。据此模型求 (b) 吊扇表面的周长，答案精确到最接近的 cm。(2) (c) 吊扇表面的面积。答案精确到 3 位有效数字，并写明单位。(5)

答 Answer： _____

微分　Differentiation

本章导读

本章是 P1 中「**代数**」与「**几何**」**唯一真正交汇的地方**，也是全卷**计算量最大、链条最长**的考点群。2019–2026 年共 **28 道**真题落在本章，分布如下：**C8d（两项及以上求导）9 道，C8b（幂函数求导）6 道，C8e（切线与法线）6 道，C8g（由导数反求参数）5 道，C8a（曲线梯度与导数概念）2 道**。分值方面，最轻的是 2019 年 10 月 Q7、2020 年 1 月 Q3（各 6 分），最重的是 2020 年 10 月 Q8、2022 年 1 月 Q7、2022 年 6 月 Q10、2025 年 10 月 Q10（均为 10–12 分）。

本章有**四条不能违反的铁律**，请先记住再往下读：

铁律一：导数是「割线斜率的极限」，不是「割线斜率」本身。近五年有**两道题专门考这件事**（2019 年 10 月 Q7、2020 年 1 月 Q3），两题结构完全一样：先求某点切线斜率，再求「横坐标相差 h 的两点」所连割线的斜率，最后说明两者的关系。官方给分点里那个 **B1 只认 $h \to 0$ 的极限表述**，写「两者相同」通常不给分。**8.1 与 8.8 两节把这件事讲透。**

铁律二：题目写「Write your answer in the form ...」时，形式本身就是给分点。P1 出现过的形式有三种：$y = mx + c$（2019 年 6 月 Q1、2025 年 10 月 Q1、2020 年 10 月 Q8）、$ax + by + c = 0$ 且 a, b, c 为整数（2019 年 10 月 Q5、2021 年 1 月 Q1、2021 年 6 月 Q1、2024 年 1 月 Q3）、以及指定「simplest form / simplest factorised form」。**算对了但形式不对，照样丢分——8.9 节专讲这件事。**

铁律三：法线斜率是 $-\dfrac{1}{f'(a)}$，前提是 $f'(a) \neq 0$。当 $f'(a) = 0$ 时切线水平、**法线竖直**，方程应写成 $x = a$，写成 $y = -\dfrac{1}{0}x + \cdots$ 是**最常见的低级失分**。另外 $ax + by + c = 0$ 里 a, b, c 必须是**整数**，需要通分去分母。**8.5 与 8.9 节处理这两个坑。**

铁律四：由导数条件反求参数，答案的「完整性」和「唯一性」一样值钱。2020 年 10 月 Q8(c) 解出 $\alpha = \dfrac{2}{3}$ 与 $\alpha = 6$ 两个根，但题目说 l_1 与 l_2 **parallel and distinct**，所以 $\alpha = 6$ 必须舍去并写明理由；2022 年 6 月 Q10(c) 官方明确写 `From graph we can see the x coordinate is positive`，说明**取舍理由要写在答卷上。8.7 与 8.10 节把分类讨论讲成可执行的流程。**

读完本章，你应当能做到：**看到 $f(x)$ 立刻写出 $f'(x)$、看到「在某点的导数」立刻知道要代入、看到「切线」立刻知道要写点斜式并化成题目要求的形式、看到「参数」立刻开始分类讨论。**

本单元新词 Key Vocabulary

English 英文	中文	在 P1 中的用法
derivative	导数	记作 $f'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx}$；**几何意义是切线斜率**
differentiation	微分（求导）	由 $f(x)$ 求 $f'(x)$ 的过程；P1 只考**多项式与分式的逐项求导**
gradient	梯度（斜率）	直线的斜率；**曲线的 gradient at a point 就是该点切线的斜率**
gradient at a point	某点处的斜率	官方固定写法 `the gradient of the curve at` P；先求 $f'(x)$ 再代入横坐标
tangent	切线	与曲线**只有一个公共点**的直线；方程写成 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$
normal	法线	与切线**垂直**的直线，斜率为 $-\frac{1}{f'(a)}$（要求 $f'(a)\neq 0$）
power rule	幂函数法则	$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$；**常数倍只乘系数，指数只减一**
stationary point	驻点	$f'(x)=0$ 的点；P1 常问 `find the range of values of` x 使 $f'(x)<0$
rate of change	变化率	导数的原始含义；**题目若问 gradient，先想「单位 x 变化引起多少 y 变化」**
second derivative	二阶导数	记作 $f''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$；对 $f'(x)$ 再求一次导
curve	曲线	图像；**导数在 P1 里永远是「曲线上一点处」的性质，不是整条曲线的性质**
in simplest form	最简形式	官方高频措辞；**分数要化为最简、系数与 x 的幂要分开**
perpendicular to	垂直于	法线与切线、两条法线之间都用它；**斜率乘积为 -1**
parallel to	平行于	两切线平行 $\Rightarrow$ 导数相等，**这是 8.7 反求参数的核心等式**
straight line	直线	写成 $y=mx+c$ 或 $ax+by+c=0$；**题目指定哪种就写哪种**
constant	常数	未知量通常记作 k、a、c 或 p、q；**求导时它必须被求导，不能漏掉**
expression	表达式	未代入数值的式子；由 $f'(x)$ 反求 $f(x)$ 时那个**积分常数必须用某点定出来**
deduce	推断	官方动词 `Deduce` 表示「用前面已得的结论直接写出」；**此时不再重复方法分**

8.1 Gradients of curves 曲线梯度与导数的概念

这一节回答一个根本问题：**「曲线上某一点的斜率」到底是什么意思**。直线的斜率人人都会（两点连线比上横坐标之差），但曲线在一点处**没有「两点」**，所以必须用极限把它造出来。P1 近五年有**两道真题（C8a）原原本本考这个定义**：2019 年 10 月 Q7 与 2020 年 1 月 Q3，**两题的问法与给分点几乎完全相同**，是本章最值得逐字精读的两道题。

- **割线斜率**：曲线上两点 $P(x,f(x))$ 与 $Q(x+h,f(x+h))$ 所连直线的斜率 $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=$

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$。这是**任何一个学生都会算的东西**

- **问题在于**：当 $h\to 0$ 时，Q 滑向 P，割线绕着 P 转动，**它的斜率趋向一个确定的极限**。这个极限就是**导数**
- **导数的定义**：$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$。**几何意义：曲线在 x 处切线的斜率**
- **记号**：$f'(x)$、$\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d}{dx}f(x)$ 三者完全等价；**P1 里 f 与 y 混用，但同一题内不要换符号**
- **某点的斜率**：题目说 `the gradient of the curve at` P（P 的横坐标为 a）时，**先求 $f'(x)$，再令 $x=a$**。这一步是 8.1 两道真题 (a) 的全部内容
- **$h\neq 0$ 是前提**：$h=0$ 时分母为零，割线退化成一个点，**所以极限过程只能写 $h\to 0$ 而不能写 $h=0$**
- **左右极限必须一致**：$h\to 0^+$ 与 $h\to 0^-$ 给出同一个极限值才存在导数；P1 里的多项式与分式总是满足这一点
- **导函数的完整含义**：$f'(x)$ 本身**是一个新的函数**，它的值是曲线上**每一个点**处切线的斜率（见 8.2、8.3）

方法卡　从割线斜率到导数：标准四步流程

步骤	做什么	为什么这一步不能省
(1)	**写出 Q 的坐标**：横坐标 $x+h$，纵坐标把 $x+h$ **整体代入** f 得 $f(x+h)$	官方在这行给 **B1**（见 19 年 10 月 Q7(b)）。漏掉它，**即使后面全对也丢 1 分**
(2)	**写出割线斜率表达式** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$	分母必须是**两点横坐标之差** h。写成 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{x}$ 是符号错误
(3)	**把分子展开化简，约掉公因子 h**	这一步是全题的计算核心；**不约 h 就无法取极限**
(4)	**取极限 $h\to 0$**，写出结果与 (a) 的关系	**官方 B1 只认极限表述**，写「相同」「相等」通常不给分

错误写法	错在哪	正确改法
$m_{PQ}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 就当成答案	**这是割线斜率，不是导数**	后面必须补 $h\to 0$，写出极限值
$m_{PQ}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{x}$	分母用错	分母是**横坐标之差** h，不是 x
Q 的纵坐标写成 $f(x)+h$	**根本没做代入**	$y_Q=f(x+h)$ 是整体代入，展开后是 $f(x)$ 加上含 h 的一次项
(c) 写「(b) 的答案当 $h=0$ 时就等于 (a)」	$h=0$ 时分母为零，割线不存在	写 `as` $h\to 0$, `gradient of` $PQ\to$ (a) 的值

1 例题　[2019 年 10 月 Q7（6 分）]

Figure 4 shows part of the curve with equation $y=2x^2+5$. The point $P(2,13)$ lies on the curve. (a) Find the gradient of the tangent to the curve at P. (b) The point Q with x coordinate $2+h$ also lies on the curve. Find, in terms of h, the gradient of the line PQ. Give your answer in simplest form. (c) Explain briefly the relationship between the answer to part (a) and the answer

to part (b).

中文：图 4 给出方程 $y = 2x^2 + 5$ 的曲线的图像的一部分。点 $P(2, 13)$ 在曲线上。(a) 求曲线在 P 点处切线的斜率。(b) 横坐标为 $2 + h$ 的点 Q 也在曲线上。用含 h 的式子表示直线 PQ 的斜率，并化为最简形式。(c) 简要说明 (a) 的答案与 (b) 的答案之间的关系。

答 Answer： _____

2 例题 [2020 年 1 月 Q3（6 分）]

Figure 1 shows part of the curve with equation $y = x^2 + 3x - 2$. The point $P(3, 16)$ lies on the curve. (a) Find the gradient of the tangent to the curve at P. (b) The point Q with x coordinate $3 + h$ also lies on the curve. Find, in terms of h, the gradient of the line PQ. Write your answer in simplest form. (c) Explain briefly the relationship between the answer to part (a) and the answer to part (b).

中文：图 1 给出方程 $y = x^2 + 3x - 2$ 的曲线的图像的一部分。点 $P(3, 16)$ 在曲线上。(a) 求曲线在 P 点处切线的斜率。(b) 横坐标为 $3 + h$ 的点 Q 也在曲线上。用含 h 的式子表示直线 PQ 的斜率，并写成最简形式。(c) 简要说明 (a) 的答案与 (b) 的答案之间的关系。

答 Answer： _____

3 例题 [讲义例题（C8a 与 C8b 的过渡训练）]

The curve C has equation $y = x^3$. (a) Find, in terms of h, the gradient of the line joining the point $P(1, 1)$ on C to the point Q on C with x coordinate $1 + h$. (b) Show that as h approaches 0, this gradient approaches 4. Hence state, with a reason, the gradient of the tangent to C at P. (c) Find the equation of the tangent to C at the point where $x = 2$. Give your answer in the form $y = mx + c$.

中文：曲线 C 的方程为 $y = x^3$。(a) 用含 h 的式子表示直线 PQ 的斜率，其中 $P(1, 1)$ 是 C 上的点，Q 是 C 上横坐标为 $1 + h$ 的点。(b) 证明当 h 趋近于 0 时，该斜率趋近于 4。据此写出并说明理由：C 在 P 点处切线的斜率。(c) 求 C 在横坐标为 2 的点处的切线方程，写成 $y = mx + c$ 的形式。

答 Answer： _____

4 例题 [讲义例题（把 8.1 的定义写成通式）]

The curve C has equation $y = x^2 + 3x - 2$, $x \geq 0$. (a) Show that the gradient of the line joining the point with x coordinate a to the point with x coordinate $a + h$ is $2a + h + 3$, where $a \geq 0$. (b) By taking a suitable value of h, show that the gradient of the tangent to C at the point with x coordinate a is $2a + 3$. (c) Find the gradient of the tangent to C at the point where $x = 5$. Hence find the equation of this tangent in the form $y = mx + c$.

中文：曲线 C 的方程为 $y = x^2 + 3x - 2$，其中 $x \geq 0$。(a) 证明：横坐标为 a 的点与横坐标为 $a + h$ 的点所连直线的斜率为 $2a + h + 3$，其中 $a \geq 0$。(b) 取一个合适的 h 的值，证明曲线 C 在横坐标为 a 的点处的切线斜率为 $2a + 3$。(c) 求 C 在 $x = 5$ 处的切线斜率，并据此把该切线方程写成 $y = mx + c$ 的形式。

答 Answer： _____

8.2 Finding the derivative 求导（幂函数法则）

8.1 告诉我们导数「是什么」，这一节告诉你**怎么算**。P1 只考一条法则——**幂函数法则（power rule）**：

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}.$$

它可以处理 P1 题目中出现的全部函数：多项式、分式（先化成多项式）、以及由它们组合成的表达式。看似只有一行，实际上它的书写规范（**系数乘不乘、指数减不减、要不要带分母**）是全章最高频的失分点。

- **法则本身**：若 $f(x) = x^n$（n 为非负整数），则 $f'(x) = nx^{n-1}$。**「系数乘上去、指数减一」**——八个字记住一切
- **常数倍法则**：$\frac{d}{dx}\left(kx^n\right) = knx^{n-1}$。**$k$ 原样乘在前面，指数只减一，k 不参与指数运算**
- **和的法则**：$\frac{d}{dx}(a+b) = \frac{d}{dx}a + \frac{d}{dx}b$。**多项式必须逐项求导，不能整体套一次**
- **常数项的导数是 0**：$\frac{d}{dx}(7) = 0$，$\frac{d}{dx}\left(x^0\right) = \frac{d}{dx}(1) = 0$。**「常数 $+c$」不是求导结果的一部分**——它消失
- **负指数要用分数指数**：$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$。**分母上的导数要带负号，这是最高频的符号错误**
- **分式必须先化简**：$\frac{3x^2+6x}{x} = 3x+6$（$x \neq 0$），**先约分再求导**，比硬套商法则快十倍。P1 **不考商法则与链式法则**
- **负号必须提出来**：$-\frac{5}{x^2}$ 就是 $-\frac{5x^{-1}}{2}$ 这类写法的最终形态，**但绝不能把系数与负号弄丢**。官方 Notes 明确 *Condone* $-\frac{5}{2x}$ *for* $-\frac{5x^{-1}}{2}$
- **写出 $\frac{dy}{dx} =$ 之后不能停**：官方对 *simplest form* 的 A1 经常要求「导数表达式已经化简」，把 $\frac{3-6x}{x^3}$ **留着不给分**
- **$f'(x)$ 与 $f'(a)$ 是两件事**：前者是导函数（一个式子），后者是把 $x = a$ 代进去得到的**数值**。**题目问「某点的斜率」就必须给数值**
- **暂不要求掌握**：商法则、链式法则、复合函数求导在 P1 不出。遇到分式一律先约分，遇到括号一律先展开

方法卡　幂函数法则速查表与官方 Notes 逐条翻译

原式 $f(x)$	导数 $f'(x)$	要点
x	1	指数 $1\to0$；**不要写成** $1x^0$，也不要写成 x
x^2	$2x$	
x^3	$3x^2$	
x^4	$4x^3$	
x^5	$5x^4$	2019–2026 年 **5 次**出现在题目中
$3x^4$	$12x^3$	**系数** $3\times4=12$，不是 $3x^3$
$-4x^3$	$-12x^2$	**负号必须跟到底**
$\frac{1}{2}x^3$	$\frac{3}{2}x^2$	**分数系数照乘**（25 年 1 月 Q5 的 $\frac{5}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 即此类）
12	0	**常数项直接消失**，不是 $12x^{-1}$
$x^{-1}=\frac{1}{x}$	$-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$	**系数** -1，负号来自「$n=1$」乘以「指数减一后为 -1」
$x^{-2}=\frac{1}{x^2}$	$-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$	官方明令：**指数必须算完，不能写** $-\frac{2}{x^2}$
$x^{-3}=\frac{1}{x^3}$	$-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$	

官方 Notes 原文（近年反复出现）	所属年份	它到底在说什么
Attempt to write y as a sum of two terms	24 年 1 月 Q3(a)	**分式先拆成多项式再求导**，这一步本身给 M1
Decreases the power by 1 on one of the terms	23 年 10 月 Q1(a)	**只要有一项指数减一就给 M1**；指数不必算完（$x^3\to x^{3-1}$ 也行）
Two correct unsimplified terms (indices must be processed)	23 年 10 月 Q1(a)	**A1 允许未合并同类项，但指数必须算成具体数字**；常数 $+c$ 出现不扣分
Do not allow x^1 for x	24 年 6 月 Q7(a)	**指数为 1 时必须写** x，写 x^1 丢 A1
withhold this mark if there is a constant of integration	23 年 10 月 Q1(a)	**求导时绝不能出现** $+c$——那是积分才有的东西
Condone $-\frac{5}{2x}$ for $-\frac{5x^{-1}}{2}$	25 年 10 月 Q1(a)	**负指数与分式指数等价，官方两种都收**

5 例题　[讲义例题（幂函数法则基础 + 因式分解求驻点）]

A curve has equation $y=\dfrac{3x^4}{8}-\dfrac{5x^3}{3}$, $x\geq0$. (a) Find, giving your answer in simplest form, $\dfrac{dy}{dx}$. (b) Hence find the exact values of x at which the gradient of the curve is 0. (c) State, with a reason, the x coordinate of the stationary point and whether the curve has a maximum or a minimum value.

中文：一条曲线的方程为 $y=\dfrac{3x^4}{8}-\dfrac{5x^3}{3}$，其中 $x\geq0$。(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$，答案写成最简形式。(b) 据此求曲线梯度为 0 时 x 的精确值。(c) 写出并说明理由：驻点的横坐标是多少，曲线在此处取最大值还是最小值。

答 Answer： _____

6 例题 [讲义例题（分式必须先化简——本节最重要的技术动作）]

The curve C has equation $y = \dfrac{4x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x}$, $x > 0$. (a) Show that $y = 4x^2 + 2x - 3 + \dfrac{1}{x}$. (b) Hence find, in simplest form, $\dfrac{dy}{dx}$. (c) Hence find the exact value of x at which the gradient of C is 15.

中文：曲线 C 的方程为 $y = \dfrac{4x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x}$，其中 $x > 0$。(a) 证明 $y = 4x^2 + 2x - 3 + \dfrac{1}{x}$。(b) 据此求 $\dfrac{dy}{dx}$ 的最简形式。(c) 据此求 C 的梯度为 15 时 x 的精确值。

答 Answer： _____

7 例题 [讲义例题（幂函数法则分项训练 + 驻点判定）]

(a) Find, in simplest form, $\dfrac{dy}{dx}$ for each of the following. (i) $y = 7x^3$ (ii) $y = x^5 + x$ (iii) $y = 6 - 2x^4$ (iv) $y = x^{-2}$. (b) The curve C has equation $y = 5x^3 - 15x$, $x \geq 0$. Find the values of x at which C has a stationary point. (c) Find the coordinates of that stationary point.

中文：(a) 对下列各式分别求 $\dfrac{dy}{dx}$，答案写成最简形式：(i) $y = 7x^3$；(ii) $y = x^5 + x$；(iii) $y = 6 - 2x^4$；(iv) $y = x^{-2}$。(b) 曲线 C 的方程为 $y = 5x^3 - 15x$，其中 $x \geq 0$。求 C 有驻点时 x 的值。(c) 求该驻点的坐标。

答 Answer：_____

8.3 Differentiating quadratics 二次函数求导

二次函数的求导是本章的**第一块试验田**：它的结构最简单（只有三项），结果最干净（导数是一次函数），而且**几乎所有后续知识点都能在它身上先练一遍**。2019 年 10 月 Q7 与 2020 年 1 月 Q3 两道 C8a 真题的曲线都是二次函数，2023 年 1 月 Q1、2025 年 10 月 Q1 也都以二次函数为主干。**把二次函数求导练到条件反射，后面的多项式就是水到渠成。**

- **标准形式**：$f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），则 $f'(x)=2ax+b$。**导数是一次函数，图像是一条直线**
- **常数项消失**：c 的导数是 0。**这是二次函数求导最该先确认的一件事**
- **一次项的导数就是它自己的系数**：bx 的导数是 b，**不是** b^2、**不是** bx
- **某点斜率**：在横坐标 a 处，斜率 $=2a\cdot a+b$。**注意 a 出现两次：一次作系数、一次作代入值**
- **驻点**：$2ax+b=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{2a}$，**恰好是配方** $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\cdots$ **中的对称轴。导数为零的点就是对称轴**，这是理解二次函数图像的关键
- **单调性**：$2ax+b>0$ 时曲线递增，<0 时递减。**这使「解不等式」成为常考题型**
- **通式**：x^2+px+q 的导数是 $2x+p$；$(x+h)^2$ 的导数是 $2(x+h)=2x+2h$。**P1 里没有链式法则，因此一律先展开再求导**
- **与 8.1 的关系**：若已求出 $f'(x)$，则**切线斜率直接代入即可**，不必回到割线极限。**两条路通向同一个答案**，可以用来自检

方法卡　二次函数求导与后续问题的对应表

题目问什么	第一步写什么	后续动作
求 $\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx}=2ax+b$	直接给答案，**指数必须算完、x^1 要写成 x**
求某点的斜率	$\frac{dy}{dx}=2ax+b$	**把该点横坐标代入**，给数值
求驻点	$2ax+b=0$	$x=-\frac{b}{2a}$，**再用定义域筛一遍**
求递增区间	$2ax+b>0$	**按 a 的符号分类讨论**（见下表）
求递减区间	$2ax+b<0$	同上
求切线方程	点斜式 $y-f(p)=f'(p)(x-p)$	化成题目指定的形式
求切线与坐标轴的交点	先求切线方程	令 $y=0$ 或 $x=0$

二次项系数	$2ax+b>0$ 的解	图像直觉
$a>0$	$x>-\frac{b}{2a}$	开口向上，**顶点右侧递增**
$a<0$	$x<-\frac{b}{2a}$	开口向下，**顶点左侧递增**

高频陷阱	后果与对策
把 c 也「求导」了	**错得离谱。对策：动笔前先问一句「常数项导数是多少」，答案是 0**
写成 $2ax^1+b$	形式不 simplest，**24 年 6 月 Q7 Notes 明确 *Do not allow* x^1 *for* x *for this mark***
在 $x=a$ 处的斜率答成 $2ax+b$	**没代入，不给 A 分。题目出现具体坐标就一定要算出数值**
驻点答成一对坐标而题目只要 *values of* x	多写不扣分，但**漏写就扣分。读题时把 x 还是 *coordinates* 圈出来**
求区间时忘记题目给的定义域（如 $x>0$）	**引入非法解。把定义域限制写在答案旁边**
认为「导数为零就是极值」	**重根处导数不变号，不是极值**（见 8.2 第一节的讲解）

8 例题　[讲义例题（二次函数求导的标准三问）]

A curve has equation $y=x^2-5x$, $x\geq 0$. (a) Find, giving your answer in simplest form, $\frac{dy}{dx}$. (b) Find the exact coordinates of the minimum point of the curve. (c) Find the equation of the tangent to the curve at the point where $x=2$. Write your answer in the form $y=mx+c$.

中文：一条曲线的方程为 $y=x^2-5x$，其中 $x\geq 0$。(a) 求 $\frac{dy}{dx}$，答案写成最简形式。(b) 求该曲线最小点的精确坐标。(c) 求曲线在横坐标为 2 的点处的切线方程，写成 $y=mx+c$ 的形式。

答 Answer： _____

9 例题 [讲义例题（由导数解不等式与方程——22 年 1 月 Q7(d) 同型）]

The curve C has equation $y = x^2 + 3x - 2$, $x \geq 0$. (a) Find the range of values of x for which the gradient of C is greater than 8. (b) Find the coordinates of the point at which the gradient of C is 8. (c) The point at which the gradient of C is -8 is R. Show that the line joining the two points in parts (b) and (c) is parallel to the x-axis. (d) Find the gradient of the tangent to C at the point where $x = -2$, and hence state a relationship between this gradient and the gradient in part (b).

中文：曲线 C 的方程为 $y = x^2 + 3x - 2$，其中 $x \geq 0$。(a) 求 C 的梯度大于 8 时 x 的取值范围。(b) 求 C 的梯度为 8 时该点的坐标。(c) C 的梯度为 -8 时该点为 R。证明 (b) 中的点与 R 所连的直线平行于 x 轴。(d) 求 C 在 $x = -2$ 处的切线斜率，并据此说明该斜率与 (b) 中梯度之间的关系。

答 Answer： _____

10 例题 [讲义例题（二次函数的切线与坐标轴）]

The curve C has equation $y = -x^2 + x + 3$, $x \geq 0$. (a) Find $\dfrac{dy}{dx}$. (b) The point P, with x coordinate 2, lies on C. Find the equation of the tangent to C at P, giving your answer in the form $y = mx + c$. (c) The tangent in part (b) meets the y-axis at the point Q. Find the coordinates of Q. (d) Hence show that the gradient of the line PQ is -3.

中文：曲线 C 的方程为 $y=-x^2+x+3$，其中 $x\geq 0$。(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$。(b) 横坐标为 2 的点 P 在 C 上。求 C 在 P 处的切线方程，答案写成 $y=mx+c$ 的形式。(c) (b) 中的切线与 y 轴交于点 Q。求 Q 的坐标。(d) 据此证明直线 PQ 的斜率为 -3。

答 Answer： _____

8.4 Two or more terms 多项式（两项及以上）求导

这一节是 P1 中**题量最大、分值最重的考点（C8d 共 9 道真题，占本章 28 道的三分之一）**。与二次函数相比，真正的难点只有一个：**逐项求导时不能漏项、不能串项**。2019–2026 年间的真题——$y=(2x+5)(x-3)^2$（19 年 10 月 Q10）、$y=\dfrac{(x-2)(x-4)^2}{2}$（20 年 10 月 Q8）、$y=3x^5+4x^3-x+5$（21 年 10 月 Q2）、$y=(x+4)(x-2)(2x-9)$（22 年 1 月 Q7）、$y=(x+5)(3x^2-4x+20)$（24 年 10 月 Q9）、$y=2x^3-kx^2+14x+24$（24 年 6 月 Q7）——全部属于这一类。**务必把「先整理成多项式，再逐项求导」练成条件反射。**

- **逐项法则：** $\dfrac{d}{dx}\left(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\right)=na_nx^{n-1}+\cdots+a_1$。**每一项独立处理，项与项之间没有任何关系**
- **常数项一定消失：** a_0 的导数是 0。**这一条能帮你在考场上自查项数**
- **先展开再求导：** $(x-2)(x-4)^2$ 必须先展开成 $x^3-10x^2+32x-32$。**P1 不考乘积法则，所以「先展开」是唯一正确做法**
- **分式先约分：** $\dfrac{5x^3-8}{2x^2}=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{4}{x^2}$。**先化成多项式与幂的和，再求导**
- **五项以上也不怕：** $2x^3-kx^2+14x+24$ 有四项，**逐项处理只要十秒。不要被项数吓到**
- **求导后常需解方程：** C8d 题目的后半段几乎总是「令 $f'(x)=$ 某值，解出 x」或「令 $f'(x)=$ 某值，解不等式」。**这一步要能因式分解**
- **f' 与 f'' 常一起问：** 24 年 6 月 Q7(a) 就是 (i) 求 f' (ii) 求 f''。**二阶导数见 8.6**
- **导数的次数比原式低一：** n 次多项式的导数是 $(n-1)$ 次。**题目说 *cubic*（$y=x^3$）指的是原函数，导数是 quadratic**

方法卡　多项式求导的四步流程与项数自查法

步	动作	对应给分点
1	**整理：**展开括号、约掉分母，**写成若干个 x 的幂之和**	官方有时给 M1（20 年 10 月 Q8(a) 的 *Attempts to multiply out*；22 年 1 月 Q7(c) 的 $f(x)=(x^2+2x-8)(2x-9)=\ldots$）
2	**数项：**先数一遍原式有几项，**记住这个数字**	防漏项的自查习惯
3	**逐项求导：**每项「系数乘上、指数减一」	每项一个 A1（23 年 10 月 Q1(a) 官方原文 *Two correct unsimplified terms*）
4	**对照项数：**导数的项数应等于原式项数减一（常数项消失）	**若对不上，回头查漏项**

原式	导数	项数核对
$(x+4)(x-2)(2x-9)$（三次）	$6x^2-10x-34$	三项 → 两项（含常数）3
$(2x+5)(x-3)^2$（三次）	$6x^2-14x-12$	三项 → 两项 3
$3x^5+4x^3-x+5$（四次）	$15x^4+12x^2-1$	四项 → 三项 3
$2x^3-kx^2+14x+24$（三次）	$6x^2-2kx+14$	四项 → 三项 3
$(x+5)(3x^2-4x+20)$（三次）	$9x^2+22x$	四项 → 两项 3
$\dfrac{5x^3-8}{2x^2}$（商式）	$\dfrac{5}{2}+\dfrac{8}{x^3}$	两项 → 两项 3
$x^{-1}=\dfrac{1}{x}$	$-x^{-2}$	一项 → 一项 3

高频陷阱	后果与对策
展开 $(x-2)(x-4)^2$ 时漏交叉项	直接影响 (b)(c) 的解。**对策：分两步乘，每步都完整写出：**先 $(x-2)(x-4)=x^2-6x+8$，再乘 $(x-4)$
展开 $(x+4)(x-2)(2x-9)$ 时漏 x 项	官方原文明确要求先乘前两个括号得 x^2+2x-8，**再乘第三个。照做就有 M1**
忘记常数项也会「贡献 0」而把它写成 $0x$	**写成 $0x$ 一般不扣分但很丑；更严重的是漏写整项**
分式没约分就求导	得到 $\dfrac{6x^2-6}{x}$ 之类，**不满足 *simplest form*，丢 A1**；对策：先除后导（见 8.2 第二节）
求导时写出 $+c$	官方 *withhold this mark*；对策：**求导绝不出现积分常数**

11 例题　[2022 年 1 月 Q7（11 分）]

Figure 3 shows a sketch of part of the curve C with equation $y=f(x)$, where $f(x)=(x+4)(x-2)(2x-9)$, $x\geq 0$. (a) The curve with equation $y=f(x)-p$, where p is a constant, passes through the point with coordinates $(0,50)$. Find the value of p. (b) The curve with equation $y=f(x+q)$, where q is a constant, passes through the origin. Write down the possible values of q. (c) Find $f'(x)$. (d) Hence find the range of values of x for which the gradient of C is less than -18.

中文：图 3 给出曲线 C（方程为 $y=f(x)$，其中 $f(x)=(x+4)(x-2)(2x-9)$，$x\geq 0$）图像的一部分。(a) 方程为 $y=f(x)-p$（p 为常数）的曲线经过点 $(0,50)$。求 p 的值。(b) 方程为 $y=f(x+q)$（q 为常数）的曲线经过原点。写出 q 的所有可能值。(c) 求 $f'(x)$。(d) 据此求 C 的梯度小于 -18 时 x 的取值范围。

答 Answer： _____

12 例题 [2021 年 10 月 Q2（5 分）]

In this question you must show all stages of your working. A curve has equation $y=3x^5+4x^3-x+5$, $x\geq 0$. The points P and Q lie on the curve. The gradient of the curve at both P and Q is 2. Find the x coordinates of P and Q. Give your answers in simplest form.

中文：本题必须写出全部解题步骤。一条曲线的方程为 $y=3x^5+4x^3-x+5$，其中 $x\geq 0$。点 P 与 Q 在曲线上，且曲线在 P 与 Q 两点处的梯度都是 2。求 P 与 Q 的横坐标，答案写成最简形式。

答 Answer： _____

13 例题 [2024 年 6 月 Q7（8 分）]

A curve C has equation $y = f(x)$ where $f(x) = 2x^3 - kx^2 + 14x + 24$ and k is a constant. (a) Find, in simplest form, (i) $f'(x)$ (ii) $f''(x)$. (b) The curve with equation $y = f'(x)$ intersects the curve with equation $y = f''(x)$ at the points A and B. Given that the x coordinate of A is 5, find the value of k. (c) Hence find the coordinates of B.

中文：曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，其中 $f(x) = 2x^3 - kx^2 + 14x + 24$，$k$ 是常数。(a) 求 (i) $f'(x)$；(ii) $f''(x)$ 的最简形式。(b) 方程为 $y = f'(x)$ 的曲线与方程为 $y = f''(x)$ 的曲线交于 A 与 B 两点。已知 A 的横坐标为 5，求 k 的值。(c) 据此求 B 的坐标。

答 Answer： _____

14 例题 [2019 年 10 月 Q10（10 分）]

Figure 6 shows a sketch of part of the curve with equation $y = f(x)$, where $f(x) = (2x+5)(x-3)^2$, $x > 0$. (a) Expand $f(x)$ to the form $ax^3 + bx^2 + cx + d$, where a, b, c and d are integers to be found. (b) Hence find (i) the coordinates of P, where the curve crosses the y-axis (ii) the gradient of the curve at P. (c) The curve with equation $y = f(x)$ is translated two units in the positive x direction to a curve with equation $y = g(x)$. (i) Find $g(x)$, giving your answer in a simplified factorised form (ii) Hence state the y intercept of the curve with equation $y = g(x)$.

中文：图 6 给出方程为 $y = f(x)$ 的曲线的图像草图，其中 $f(x) = (2x+5)(x-3)^2$，$x > 0$。(a) 把 $f(x)$ 展开成 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的形式，其中 a、b、c、d 是待求的整数。(b) 据此求 (i) 点 P 的坐标，其中 P 是曲线与 y 轴的交点；(ii) 曲线在 P 点处的梯度。(c) 方程为 $y = f(x)$ 的曲线沿 x 轴正方向平移两个单位得到方程为 $y = g(x)$ 的曲线。(i) 求 $g(x)$，答案写成化简后的因式分解形式；(ii) 据此写出方程为 $y = g(x)$ 的曲线在 y 轴上的截距。

答 Answer： _____

8.5 Tangents and normals 切线与法线

切线与法线是 P1 里「微分」这个概念唯一的几何出口，也是 C8e 考点（**6 道真题：19 年 10 月 Q5、21 年 1 月 Q1、21 年 6 月 Q1、20 年 10 月 Q8、22 年 6 月 Q10、24 年 10 月 Q9、25 年 10 月 Q10**）的核心内容。这一节的难点不在求导（8.2–8.4 已经解决），而在**三件事：斜率取负倒数、方程化成题目指定的形式、以及处理 $f'(a)=0$ 这种退化情形。**

- **切线方程的点斜式：**$y-f(a)=f'(a)(x-a)$。**这是唯一需要记住的公式，其余都是它的变形**
- **法线斜率：**$m_{\text{法线}}=-\dfrac{1}{f'(a)}$，**前提是** $f'(a)\neq 0$。**「负倒数」= 变号 + 取倒数**
- **水平切线的法线：**若 $f'(a)=0$，**切线水平、法线竖直，**法线方程是 $x=a$。**绝不能写** $-\dfrac{1}{0}$
- **题目指定的形式必须照写：**$y=mx+c$（19 年 6 月 Q1、20 年 10 月 Q8、25 年 10 月 Q1）、$ax+by+c=0$ 且 a,b,c 为整数（19 年 10 月 Q5、21 年 1 月 Q1、24 年 1 月 Q3）
- **整数化的流程：**先写 $x+my+(p-mq)=0$，**再把所有系数同时乘以最小公分母，最后约到互素**
- **切线与坐标轴的交点：与** y **轴交令** $x=0$；**与** x **轴交令** $y=0$。**这两个词不能混**
- **先切线后法线：**若同时要求切线与法线，**必须先算切线斜率，再取负倒数。直接对切线斜率取倒数是最常见的符号错误**
- **平行关系：**同曲线上**切线平行** $\Longleftrightarrow$ **导数相等；法线平行** $\Longleftrightarrow$ **导数相等；切线与法线平行** $\Longleftrightarrow$ **切线斜率 = 法线斜率的相反数**

方法卡　切线与法线：形式选择决策表与踩分点

题目要求的写法	怎么写	必须自查
不指定形式	$y-f(a)=f'(a)(x-a)$	点斜式本身通常够用，但阅卷时最好再化简一步
$y=mx+c$	$y=m'x+\left(p-m'a\right)$	常数项必须算出来；官方写 *ISW after sight of a correct answer*，但中间过程必须对
$ax+by+c=0$（整数）	两边乘最小公分母，然后把系数约到互素	三个条件：整数、互素、$a\neq 0$
只问斜率	$m=f'(a)$	不要多写方程（不扣分，但不加分）
只问「x 坐标」	给横坐标，不要写成一对坐标	多写不扣分，漏写要扣分

$f'(a)$	切线	法线
$f'(a)>0$	斜率为正，向右上倾斜	斜率为负，向右下倾斜
$f'(a)<0$	斜率为负，向右下倾斜	斜率为正，向右上倾斜
$f'(a)=0$	水平（$y=f(a)$）	竖直（$x=a$）
$f'(a)$ 不存在	竖直（$x=a$）	水平（$y=f(a)$）

四个高频错答	逐条改法
法线斜率写成 $\dfrac{1}{f'(a)}$	漏了负号。负倒数 = 变号 + 取倒数，两个动作都要做。官方给 *dM1 Uses the perpendicular gradient rule*
法线写成 $y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$ 后不去分母	题目要求整数形式就必须去分母。19 年 10 月 Q5 的 $x+9y-37=0$ 就是去分母的结果
切点纵坐标算错	最常见的错法是代入导数算成 $\frac{1}{6}\times 4^3$。纵坐标用原函数，纵坐标永远是 $f(a)$，不是 $f'(a)$
在 $x=0$ 处求法线	若 $f'(0)\neq 0$，法线是过原点的直线 $y=-\dfrac{1}{f'(0)}x$；若 $f'(0)=0$，答案直接是 $x=0$

15 例题　[2021 年 1 月 Q1（8 分）]

A curve C has equation $y=2x^3-5x^2+3-\dfrac{3}{2x}$, $x>0$. (a) Find, in simplest form, $\dfrac{dy}{dx}$. (b) The point P lies on C and has x coordinate $\dfrac{1}{2}$. Find an equation of the normal to C at P, writing your answer in the form $ax+by+c=0$, where a, b and c are integers to be found.

中文：曲线 C 的方程为 $y=2x^3-5x^2+3-\dfrac{3}{2x}$，其中 $x>0$。(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 的最简形式。(b) 点 P 在 C 上且横坐标为 $\dfrac{1}{2}$。求 C 在 P 处的法线方程，写成 $ax+by+c=0$ 的形式，其中 a、b、c 是待求的整数。

答 Answer： _____

16 例题 [2024 年 1 月 Q3（7 分）]

The curve C has equation $y = \dfrac{5x^3 - 8}{2x^2}$, $x > 0$. (a) Find, in simplest form, $\dfrac{dy}{dx}$. (b) The point $P(2, 4)$ lies on C. Find an equation for the tangent to C at P, writing your answer in the form $ax + by + c = 0$, where a, b and c are integers.

中文：曲线 C 的方程为 $y = \dfrac{5x^3 - 8}{2x^2}$，其中 $x > 0$。(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 的最简形式。(b) 点 $P(2, 4)$ 在 C 上。求 C 在 P 处的切线方程，写成 $ax + by + c = 0$ 的形式，其中 a、b、c 是整数。

答 Answer： _____

17 例题 [2025 年 10 月 Q10（10 分）]

In this question you must show all stages of your working. Figure 4 shows a sketch of the curve C with equation $y = 2x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 5$, $x > 0$. The line l is the normal to C at the point P where $x = 0$. The line l also intersects C at points Q and R, as shown in Figure 4. (a) Find, using algebra, the x coordinates of points Q and R. (b) The point T lies on C. Given that (i) the tangent to C at T is parallel to l (ii) the x coordinate of T is positive, find, using algebra, the exact x coordinate of T.

中文：本题必须写出全部解题步骤。图 4 给出曲线 C（方程为 $y = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$，其中 $x > 0$）的图像草图。直线 l 是 C 在 $x = 0$ 处的点 P 的法线。如图 4 所示，直线 l 还与 C 交于点 Q 与 R。(a) 用代数方法求点 Q 与 R 的横坐标。(b) 点 T 在 C 上，且 (i) C 在 T 处的切线与 l 平行；(ii) T 的横坐标为正。用代数方法求 T 的横坐标的精确值。

答 Answer： _____

8.6 Second order derivatives 二阶导数

二阶导数在 P1 里**出现频率不高，但一旦出现就是必得分**：近五年 28 道真题中，明确要求二阶导数的有 **2023 年 10 月 Q1(b)**（$\frac{d^2y}{dx^2}$，2 分）与 **2024 年 6 月 Q7(a)(ii)**，另外 **2021 年 10 月 Q10** 与 **2024 年 10 月 Q8(b)** 也要用到它。**这一节同时要讲两件事：怎么求**（对 $f'(x)$ 再求一次）**与怎么反求**（由 f' 恢复 f）——后者是 21 年 10 月 Q10(b)、24 年 10 月 Q8(b) 的核心。

- **定义：** $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$。**「对导函数再求一次」**
- **符号的三种写法：** $f''(x)$、$\frac{d^2y}{dx^2}$、$f''(x)$。**三个都正确，不要混用**
- **只对含 x 的项求导：** 若 $f'(x) = ax^2 + bx + c$，则 $f''(x) = 2ax$，c **的导数是 0。常数项在第二层求导时会彻底消失**
- **次数再降一：** n 次多项式的二阶导数是 $(n-2)$ 次。**三次函数的二阶导数是一次函数**
- **几何意义：** $f''(x) > 0$ 时曲线「凹向上」（**像碗**），$f''(x) < 0$ 时「凹向下」（**像盖**）。**P1 不考凹凸性，只考 f'' 的零点**
- **反幂函数法则：** 若 $f'(x) = ax^n$，则 $f(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$。**关键：除以「指数加一」**——这是 21 年 10 月 Q10(b) 的全部
- **必须定积分常数：** 反求出的 $f(x)$ 里一定有**一个未知常数 c，必须用题目给的「曲线过某点」定出来。不定 c 则 A1 全丢**
- **最常见的错误：** 把 $\frac{ax^3}{3}$ 的原函数写成 $\frac{ax^4}{4}$（**漏除以 3**），或者忘记分母里的 x 也要被除
- **验证习惯：** 求出 $f(x)$ 后**立刻求导一遍看是否回到 $f'(x)$。这一招能当场抓出所有系数错误**

方法卡　求二阶导数与由 f' 反求 f 的对照表

原式	一阶导数	二阶导数
x^3	$3x^2$	$6x$
x^4	$4x^3$	$12x^2$
ax^5	$5ax^4$	$20ax^3$
$x^{-1}=\dfrac{1}{x}$	$-x^{-2}$	$2x^{-3}=\dfrac{2}{x^3}$
$x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$	$-2x^{-3}$	$6x^{-4}=\dfrac{6}{x^4}$
ax^3+bx^2+cx+d	$3ax^2+2bx+c$	$6ax+2b$
$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$	$4ax^3+3bx^2+2cx+d$	$12ax^2+6bx+2c$
$\dfrac{ax^3}{3}+bx^2$	ax^2+2bx	$2ax+2b$
$15x^4+12x^2-1$	$60x^3+24x$	$180x^2+24$

已知 $f'(x)$	反求 $f(x)$	关键动作
x	$\dfrac{1}{2}x^2+c$	除以 2
$5x^2$	$\dfrac{5}{3}x^3+c$	除以 3（不是乘 3）
$-12x^2$	$-4x^3+c$	除以 3，负号保留
$\dfrac{ax^3}{3}$	$\dfrac{a}{12}x^4+c$	指数加一（$3\to4$）再除以 4
kx	$\dfrac{k}{2}x^2+c$	
$-3x$	$-\dfrac{3}{2}x^2+c$	
4	$4x+c$	常数 4 的原函数是 $4x$，不是 4
$-\dfrac{3}{x^2}$	$\dfrac{3}{x}+c$	指数加一：$-2\to-1$
$6x^2-2kx+14$	$2x^3-kx^2+14x+c$	三项逐项反求，常数 14 变 $14x$

四个高频错答	逐条改法
反求时系数乘指数	$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{a}{n+1}x^{n+1}\right)=ax^n$，所以反过来是除以。把「幂函数法则」倒着念一遍即可
反求时分母写成原指数	$\dfrac{ax^3}{3}$ 的原函数是 $\dfrac{a}{3\times4}x^4=\dfrac{a}{12}x^4$，分母是「原分母 × 新指数」
忘了加 c	求导答案里绝不能有 c，反求答案里绝不能没有 c。这两条是官方反复检查的
没定出 c 就交卷	**A1 全丢。必须代入题目给的点**

18 例题　[讲义例题（二阶导数基础 + 驻点 + 切线三合一）]

(a) Find, in simplest form, (i) $\dfrac{dy}{dx}$ (ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, where $y=\dfrac{5x^3}{x}+x^2-1$, $x>0$. (b) Hence find the exact values of x at which $\dfrac{dy}{dx}=0$. (c) The point P has x coordinate 2. Find the equation of the tangent to the curve at P, giving your answer in the form $y=mx+c$.

中文：(a) 求 $y=\dfrac{5x^3}{x}+x^2-1$（$x>0$）的 (i) $\dfrac{dy}{dx}$；(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 的最简形式。(b) 据此求 $\dfrac{dy}{dx}=0$ 时 x 的精确值。(c) 点 P 的横坐标为 2。求曲线在 P 处的切线方程，答案写成 $y=mx+c$ 的形式。

答 Answer： _____

19 例题

[讲义例题（二阶导数 + 驻点个数与类型的完整判定）]

A curve C has equation $y=f(x)$ where $f(x)=5x^3+4x^3-x+5$... In fact, C has equation $y=3x^5+4x^3-x+5$, $x\geq 0$. (a) Find, in simplest form, $\dfrac{dy}{dx}$ and $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. (b) The curve C has a stationary point. (i) Show that the x coordinate of this point satisfies $x^2-4=0$. (ii) Hence find the x coordinates of all stationary points of C and state, with a reason, whether each is a maximum point or a minimum point.

中文：曲线 C 的方程为 $y=3x^5+4x^3-x+5$，其中 $x\geq 0$。(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 的最简形式。(b) 曲线 C 有驻点。(i) 证明该点的横坐标满足 $x^2-4=0$。(ii) 据此求 C 所有驻点的横坐标，并说明理由，指出每个驻点是极大值点还是极小值点。

答 Answer： _____

20 例题 [讲义例题（由 f′ 的极值反推曲线的极值点——本章最难的题型）]

A curve C has equation $y = f(x)$ where $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$, $x \geq 0$. (a) Find, in simplest form, $\frac{dy}{dx}$. (b) Hence find the range of values of x for which the gradient of C is less than 0. (c) Find the exact coordinates of the point at which the gradient of C is 0 and the gradient is a minimum.

中文：曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，其中 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$，$x \geq 0$。(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 的最简形式。(b) 据此求 C 的梯度小于 0 时 x 的取值范围。(c) 求 C 的梯度为 0 且梯度取最小值时该点的精确坐标。

答 Answer： _____

8.7 Parameters from derivatives 由导数反求参数

这是 P1 中**难度最高、也最能区分 A 星与 A* 的考点（C8g 共 5 道真题**：2021 年 10 月 Q10、2024 年 1 月 Q10、2024 年 10 月 Q8、2025 年 1 月 Q5、2025 年 6 月 Q2）。它的核心动作只有一个：**把题干的「几何条件」翻译成一个关于参数的方程，然后解它**。但真正丢分的地方往往不在求解，而在**分类讨论的完整性**——2020 年 10 月 Q8(c) 的 $\alpha = \frac{2}{3}$ 与 $\alpha = 6$，**为什么只能取前者**？8.10 节会专门讲清这件事。

- **唯一的方法：把几何条件写成方程。P1 没有任何「参数分类讨论」的定理，全靠翻译**
- **条件类型一：某点导数值已知。**the gradient at P is $2 \Rightarrow f'(a) = 2$
- **条件类型二：某点二阶导数为零。**$f''(x) = 0$ when $x = 27 \Rightarrow f''(27) = 0$
- **条件类型三：法线/切线方程已知。**法线方程给出斜率 $\Rightarrow$ **先取负倒数得切线斜率** $\Rightarrow$ **令** $f'(a)$ **等于它**
- **条件类型四：两条切线平行。**$f'(p) = f'(q)$。**24 年 10 月 Q9(c) 是这一类的范本**
- **条件类型五：平移后过某点。**$y = f(x+q)$ passes through the origin $\Rightarrow f(q) = 0$（见 22 年 1 月 Q7(b)）
- **反求 $f(x)$ 时必须定积分常数：这是 24 年 10 月 Q8(b) 的 4 分里最关键的一分**

- **解出的参数可能有多个。必须逐个检验是否满足题目的全部条件**（见 8.10）
- **条件里带 $2k$ 时要整体代入。**the x coordinate of P is $2k$ ⇒ 直接代 $x = 2k$

方法卡　反求参数：六种题干条件的翻译表与五步流程

题干条件（英文原文）	翻译成的方程	真题出处
the gradient of C at P is 2	$f'(x_P) = 2$	21 年 10 月 Q2、25 年 6 月 Q2
the x coordinate of P is $2k$ …and gradient is 16	$f'(2k) = 16$	25 年 6 月 Q2
$f''(x) = 0$ when $x = 27$	$f''(27) = 0$	21 年 10 月 Q10(a)
the normal to C at P has equation $y = -\frac{x}{24} + 5$	$f'(3) = 24$	24 年 10 月 Q8(a)
the curve with equation $y = f(x + q)$ passes through the origin	$f(q) = 0$	22 年 1 月 Q7(b)
l_1 and l_2 are parallel and distinct	$f'(\alpha) = f'(6) = 20$，**排除** $\alpha = 6$	20 年 10 月 Q8(c)
the tangent at P is parallel to the tangent at R	$f'(x_P) = f'(x_R)$	24 年 10 月 Q9(c)

反求参数的标准五步流程	每一步的失分风险
(1) 读懂条件，**判断它给的是「导数值」还是「法线斜率」还是「切线斜率」**	**把法线斜率当成切线斜率**（24 年 10 月 Q8 的头号陷阱）
(2) 求出 $f'(x)$（必要时先展开、约分）	**没展开就求导**，系数错且后面全错
(3) 把条件代入，写出关于参数的方程	**代入的数写错**（如 27^2 写成 27）
(4) 解方程	**漏解**（尤其是除以含参数的式子时）
(5) **逐个检验**：是否满足题目的**全部**条件	**只检验部分条件**，这是 8.10 的核心

最高频的两个坑	逐条改法
法线方程 $y = mx + c$ 的 m 直接当成切线斜率	**切线斜率** $= -\frac{1}{m}$。**在草稿纸上画一画两条线的陡缓**
除以 $f'(a)$ 时把 $f'(a)$ 看作常数	**若除以的式子里含参数，除之前先讨论它是否为零。P1 里较少见，但必须知道**

21 例题 [2025 年 6 月 Q2（5 分）]

A curve C has equation $y = \frac{5}{3}x^{\frac{3}{2}} - 4x$, $x > 0$. (a) Find, in simplest form, $\frac{dy}{dx}$. (b) The point P lies on C. Given that (i) the x coordinate of P is $2k$, where k is a constant (ii) the gradient of C at the point P is 16, find the value of k.

中文：曲线 C 的方程为 $y = \frac{5}{3}x^{\frac{3}{2}} - 4x$，其中 $x > 0$。(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 的最简形式。(b) 点 P 在 C 上，且 (i) P 的横坐标为 $2k$，k 是常数；(ii) 曲线 C 在 P 点处的梯度为 16。求 k 的值。

答 Answer： _____

22 例题 [2025 年 1 月 Q5（8 分）]

In this question you must show all stages of your working. Solutions relying entirely on calculator technology are not acceptable. The curve C has equation $y = \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{x} + 9$, $x > 0$. The line l, with equation $y = k - 5x$, where k is a constant, is the tangent to C at the point P. (a) Find, in simplest form, $\frac{dy}{dx}$. (b) Show that the x coordinate of P satisfies the equation $12x^4 + 5x^2 - 2 = 0$. (c) Hence find the value of k.

中文：本题必须写出全部解题步骤，不接受完全依赖计算器的解法。曲线 C 的方程为 $y = 4x^3 + \frac{2}{x} + 9$，其中 $x > 0$。直线 l 的方程为 $y = k - 5x$，其中 k 是常数，且 l 是 C 在点 P 处的切线。(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 的最简形式。(b) 证明 P 的横坐标满足方程 $12x^4 + 5x^2 - 2 = 0$。(c) 据此求 k 的值。

答 Answer： _____

23 例题 [2024 年 10 月 Q9（10 分）]

Figure 4 shows a sketch of part of the curve C with equation $y = f(x)$, where $f(x) = (x+5)(3x^2 - 4x + 20)$. (a) Deduce the range of values of x for which $f(x) \leq 0$. (b) Find $f'(x)$ giving your answer in simplest form. (c) The point R, with coordinates $(-4, 84)$, lies on C. Given that the tangent to C at the point P is parallel to the tangent to C at the point R, find the x coordinate of P. (d) The point R is transformed to the point with coordinates $(-1, 84)$ when the curve with equation $y = f(x)$ is transformed to the curve with equation (i) $y = f(x-3)$ (ii) $y = 4f(x)$.

中文：图 4 给出方程为 $y = f(x)$ 的曲线 C 的图像的一部分，其中 $f(x) = (x+5)(3x^2 - 4x + 20)$。(a) 推断 $f(x) \leq 0$ 时 x 的取值范围。(b) 求 $f'(x)$，答案写成最简形式。(c) 点 R 的坐标为 $(-4, 84)$，它在 C 上。已知 C 在点 P 处的切线与 C 在点 R 处的切线平行，求 P 的横坐标。(d) 当方程为 $y = f(x)$ 的曲线被变换为 (i) $y = f(x-3)$；(ii) $y = 4f(x)$ 的曲线时，点 R 被变换为坐标为 $(-1, 84)$ 的点。

答 Answer： _____

8.8 满分必备：导数定义的极限本质与幂函数法则的推导

满分必备 满分必备：导数定义的极限本质与幂函数法则的推导

一、割线变切线：为什么导数必须是一个「极限」而不是一个「减法」曲线 C 上固定一点 A，再取另一点 P，直线 AP 的斜率是

$$m_{AP} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}.$$

这个数只描述**这一条弦**，P 一动它就变，因此它**不是曲线本身的性质**。让 P 沿曲线滑向 A，弦 AP 的斜率趋于一个确定的极限，这个极限才刻画曲线在 A 处的「陡峭程度」——它就是**切线斜率**，也就是**导数** $f'(a)$。

对象	对应的数学表达
割线（弦）AP 的斜率	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$，随 h 变，是**函数值**
切线在 A 的斜率	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$，与 h 无关，是**常数**

P1 从不要求你完整书写极限论证，但**思想必须清楚**：2019 年 10 月 Q7 与 2020 年 1 月 Q3 都是同一个套路——(a) 求某点的切线斜率，(b) 用 h 表示割线 PQ 的斜率，(c) 说明 (b) 与 (a) 的关系。(b) 里**故意不给导数公式**，逼你用割线；(c) 的标准答案就是一句「$h\to 0$ 时，割线 PQ 的斜率趋于切线的斜率」。

二、导数定义的标准形式与两种等价写法导数的定义是

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

把 x 固定为切点 a、h 写成自变量增量，得到完全等价的第二式

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

符号	含义
x	**切点**（求导后是一个关于 x 的表达式，不是常数）
a	**给定的切点横坐标**（求导后是一个具体数值）
h	**增量**，$h\to 0$ 表示 P 趋近 A；h 可以取负值
$f(x+h)$	曲线上**另一点** P 的纵坐标

【易错】h 绝不能漏写。写成 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{}$ 或者干脆把极限号丢掉写成 $f'(x)=f(x+h)-f(x)$，是本讲义开篇提醒过的最高频错误之一。

三、由定义推出 $y=x^2$ 的导数：逐行对照设 $f(x)=x^2$。用定义求 $f'(x)$，标准书写如下：

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}(2x+h)\\
&=2x
\end{aligned}$$

关键的两步是第四行与第五行：先把分子凑成 h 的公因式，然后**在极限号之外**约掉 h。只要分母里还留着 h，极限就发散；约掉 h 之后剩下的是关于 x 的多项式，极限就是它的代入值。

四、由定义推出 $y=x^n$ 的一般结论把上面的 x^2 换成一般的正整数 n，用二项式定理展开：

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n \ .$$

代入定义式：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

括号内除第一项外**每一项都含因子** h，$h\to 0$ 时全部消失，只剩常数项 nx^{n-1}。

步骤	动作
第 1 步	写出定义式 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
第 2 步	代入 f，把分子写成 $(x+h)^n - x^n$
第 3 步	二项式展开，**只写前两项也可以**（其余项都含 h，必消失）
第 4 步	分子分母同除以 h
第 5 步	取极限 $h\to 0$，得 $\boxed{\dfrac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}}$

【易错】系数 n 不能丢。$\dfrac{d}{dx}(x^5)$ 写成 x^4 而不是 $5x^4$，是最容易被扣掉最后 A 分的地方。

五、n 可以不是正整数：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的推导上面的二项式展开只对正整数 n 方便，但对 $n=-1$ 依然能直接算，而且这一步**极其重要**——它解释了为什么 P1 反复强调「指数加一、系数减一」在**负指数**时依然成立。设 $f(x)=x^{-1}$：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-h}{x(x+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} \\ &= -\frac{1}{x^2} = x^{-1}\cdot x^{-1} = (-1)x^{-2} \end{aligned}$$

可见**对任何实数 n，都有** $\dfrac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$；当 $n<0$ 时系数 n 为负，当 n 为分数时先约分再乘系数（见 8.2）。P1 **只考这一个结论**，不要求证明，但看懂上面这两段推导，就再也不会把「指数加一」记反。

六、定义求导的书写规范与踩分点真卷上极少出现「用定义求导」的完整证明题，但 (a)(b)(c) 三问式里，**(b) 的 M 分就来自你写出割线斜率**。下表把该写的行与对应的给分标记列清楚：

必须写出的	给分标记	说明
$f(x+h)$ 的具体式	M1	例如 $y=2x^2+5$ 时写 $f(x+h)=2(x+h)^2+5$
$f(x+h)-f(x)$ 的化简	A1	化成 $4xh+2h^2$ 或 $4x+2h$ 一类
除以 h 后的结果	A1	**必须是最简式**，如 $4x+2h$
$h\to 0$ 与最终数值	B1	**这一行单独给分**，写「as $h\to 0$，PQ 的梯度 $\to 8$」

【易错】三个高频丢分点：**(1)** 忘记除以 h 直接写出 $4x+2h$——丢 A 分；**(2)** 化简不彻底，例如写成 $2(2x+h)$——不算最简，A 分可能被扣；**(3)** (c) 问「说明关系」时只写「相同」——必须写出**极限过程**，否则 B 分拿不到。

七、为什么 P1 反复考这三种问法把近五年的考法归纳一下，definition 型题目只有三个固定问法，全部围绕同一个极限：

真题	问法	拿分关键
2019 年 10 月 Q7	(a) 切线梯度　(b) 用 h 表示 PQ 梯度　(c) 说明关系	(b) 的 M 分在 $f(x+h)=2(x+h)^2+5$
2020 年 1 月 Q3	同上，曲线换成 $y=x^2+3x-4$	(c) 必须出现「$h\to 0$」
2019 年 6 月 Q1	先求 $\dfrac{dy}{dx}$，再求切线	求导部分的 M1 + A1

一句话总结：导数是割线斜率的极限，幂函数法则是这个极限的闭式结果。**会算**是 P1 的要求，**懂极限**是你理解为什么可以不回代定义的原因。

1 满分示范

[讲义例题（定义求导的标准流程）]

Using the definition of the derivative, find $f'(x)$ for the function $f(x)=x^2$. Show every stage of your working, and state clearly at the end what value the limit takes.

中文：求函数 $f(x)=x^2$ 的导数 $f'(x)$，**必须用导数的定义**。请完整写出每一步计算过程，并在最后明确写出该极限最终取什么值。

答 Answer： _____

2 满分示范 [讲义例题（负指数的定义推导）]

Using the definition of the derivative, find $f'(x)$ for the function $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$. Hence verify that the rule $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$ holds for $n=-1$.

中文：用导数的定义求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$（$x\neq 0$）的导数 $f'(x)$，并由此验证幂函数法则 $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$ 在 $n=-1$ 时依然成立。

答 Answer： _____

3 满分示范 [2019 年 10 月 Q7（6 分，定义思想的原汁原味考法）]

Figure 4 shows part of the curve with equation $y=2x^2+5$. The point $P(2,13)$ lies on the curve.

(a) Find the gradient of the tangent to the curve at P.

The point Q with x coordinate $2+h$ also lies on the curve.

(b) Find, in terms of h, the gradient of the line PQ. Give your answer in simplest form.

(c) Explain briefly the relationship between the answer to (b) and the answer to (a).

中文：图 4 给出曲线 $y=2x^2+5$ 的一部分，点 $P(2,13)$ 在曲线上。

(a) 求曲线在 P 点处切线的斜率。

横坐标为 $2+h$ 的点 Q 也在曲线上。

(b) 用 h 表示直线 PQ 的斜率，并把答案化为最简式。

(c) 简要说明 (b) 的答案与 (a) 的答案之间的关系。

答 Answer： _____

8.9 满分必备：切线方程与法线方程的规范书写与踩分点

满分必备　满分必备：切线方程与法线方程的规范书写与踩分点

一、题目问什么形式，你就必须给什么形式 P1 极少在切线题上写「任意形式」，而是明确指定形式。**形式不对，分数会被整体扣掉，即使斜率算对。**

题目指定形式	标准写法	典型分值
未指定	$y-f(a)=f'(a)(x-a)$	安全形式，但若题目要 $y=mx+c$ 仍需转换
$y=mx+c$	$y=mx+c$，写出 m 与 c 的具体值	常见 3 分（M1 + M1 + A1）
$ax+by+c=0$，a,b,c 为整数	化为整数且**互素**，并写 $=0$	常见 4–5 分，形式分占 1–2 分
坐标形式	$(x_0,\ y_0)$	**顺序不可颠倒**

【易错】2021 年 1 月 Q1(b) 明确要求 $ax+by+c=0$，官方给分点里写着「Accept with terms in a different order, but must include "$=0$"」——**漏掉 $=0$ 会丢 A 分**。

二、点斜式：唯一「怎么算都不会错」的形式切线的标准形式是

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

它**只用到两个已知量**：切点纵坐标 $f(a)$ 与切点处导数值 $f'(a)$，**不需要任何中间步骤**。

要素	来源	易错点
左侧的 $y-f(a)$	$f(a)$：把 $x=a$ 代回**原方程**（不是导方程）算得	误把 $f'(a)$ 当成 $f(a)$
右侧的 $f'(a)$	导数值，$\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=a}$	**忘记代入** $x=a$，把 $f'(x)$ 当 $f'(a)$
$(x-a)$	切点横坐标	把 a 写成 $-a$

强烈建议：只要题目没有指定形式，就先写出点斜式，再按需要转换。2024 年 1 月 Q3(b) 的官方链条正是如此：M1「Substitutes $x=2$」→ M1「$y-4=\frac{7}{2}(x-2)$」→ A1「$7x-2y-6=0$」。

三、$y=mx+c$ 形式：c 的正确求法把点斜式展开：

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)\ \Longrightarrow\ y=f'(a)x+\big(f(a)-a\,f'(a)\big)\ .$$

所以

$$m=f'(a),\qquad c=f(a)-a\,f'(a)\ .$$

常见错误	为什么错
$c = f(a)$	只有 $a = 0$ 时才成立；这正是 2025 年 1 月 Q5 的陷阱位置
$c = f(a) - a\,m$ 中漏掉 a	与上一条同源
m 与 c 写反	m 是斜率（导数值），c 是截距（纵坐标截距）
把 $f'(x)$ 当成 m	m 必须是代入 $x = a$ 后的**数值**

【易错】题目若写「m and c are integers」（如 2025 年 10 月 Q1），就必须一路保持整数运算，出现分母就立刻通分，否则形式分会被扣。

四、$ax+by+c=0$ 形式：三步整数化题目要整数系数时，**通分是最短路径**。设点斜式为 $y-f(a)=m(x-a)$，其中 $m=\dfrac{p}{q}$（p,q 互素）：

步骤	操作	示例（$m=\frac{7}{2}$）
第 1 步	清分母：两边同乘 q	$8(y-f(a))=14(x-a)$
第 2 步	移项成一般式	$14x-8y+(8f(a)-14a)=0$
第 3 步	**整体约分到互素**，并补上 $=0$	$7x-4y+(4f(a)-7a)=0$

更快的万能公式：由 $y-f(a)=m(x-a)$ 立刻得到

$$\boxed{x+\frac{1}{m}y+\left(a-\frac{f(a)}{m}\right)=0} \qquad (m\neq 0)$$

再整体乘以 m 的分子分母的最小公倍数即可。**若 $f(a)=m\,a$（切线过原点），常数项自动为 0**，别自己再补一个常数。

五、水平切线与竖直切线：$f'(a)=0$ 与导数不存在这是本章**最容易被忽略的分类讨论**。

情形	切线方程	不能写成
$f'(a)=0$（水平切线）	$y-f(a)=0$，即 $y=f(a)$	不能用 $-\dfrac{1}{f'(a)}$ 求法线
切线竖直（$f'(a)$ 不存在）	$x=a$	不能写成 $y=mx+c$

【易错】在 P1 里，$y=f(x)$ **的导数总是有限的**，所以「竖直切线」通常不会以 $f'(a)$ 不存在的形式出现；真正的考点是 $f'(a)=0$ 这一刻画切线：斜率为 0，方程退化成 $y=f(a)$。若此时还硬套 $-\dfrac{1}{f'(a)}$，就会写出 $\dfrac{1}{0}$。

六、法线方程：负倒数的适用条件法线与切线垂直，故

$$\boxed{m_{\text{normal}}=-\frac{1}{m_{\text{tangent}}}=-\frac{1}{f'(a)}} \qquad \left(f'(a)\neq 0\right)$$

条件	法线方程	给分说明
$f'(a)=m\neq 0$	$y-f(a)=-\dfrac{1}{m}(x-a)$	M1 代斜率、dM1 取负倒数、M1 建方程、A1 整理
$f'(a)=0$	$x=a$（竖直）	必须写「$x=a$」，写 $y=\pm\infty$ 一律不得分
切线水平（$m=0$）	$x=a$	同上

【易错】负倒数不是「相反数」。$m=24$ 时法线斜率是 $-\dfrac{1}{24}$，**不是** -24。2024 年 10 月 Q8 的官方链条就是 B1「gradient of tangent is 24」→ 解 $f'(3)=24$ 得 $k=-5$，其中明确写着「e.g. $f'(3)\times\left(-\frac{1}{24}\right)=-1$ implies B1」。

七、$ax+by+c=0$ 的整数化：法线版本的完整流程法线斜率是分式时，整数化更容易出错。以 2019 年 10 月 Q5 为标准范本：曲线 $y=\dfrac{x^3+4x^2-15}{6}$ 在 $P\left(4,\dfrac{11}{3}\right)$ 处，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{2}+2x$，$f'(4)=9$，法线斜率 $-\dfrac{1}{9}$。

步骤	书写	给分标记
求 $f'(x)$	$\dfrac{x^2}{2}+2x$	M1 幂降一，A1 两项，A1 化简
代入 $x=4$	$f'(4)=9$	M1 代入并求值
取负倒数	$m_n=-\dfrac{1}{9}$	**dM1**（依赖上面的 M 分）
建方程并通分	$y-\dfrac{11}{3}=-\dfrac{1}{9}(x-4)\Rightarrow x+9y-37=0$	M1 建方程，A1 结果

【易错】$ax+by+c=0$ 的系数不必最简，但必须含 $=0$。官方原文：「$x+9y-37=0$ *or any (positive or negative) integer multiple thereof*」——整数倍都接受，但绝不能漏写等号。

1 满分示范　[2019 年 6 月 Q1（6 分，$y=mx+c$ 形式）]

The curve C has equation $y=\dfrac{x^3+1}{8}$. **(a)** Find $\dfrac{dy}{dx}$, giving the answer in its simplest form. The point $P\left(2,\dfrac{9}{8}\right)$ lies on the curve. **(b)** Find the equation of the tangent to C at the point P. Write your answer in the form $y=mx+c$, where m and c are constants to be found.

中文：曲线 C 的方程为 $y=\dfrac{x^3+1}{8}$。

(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$，并把答案化为最简形式。

点 $P\left(2,\dfrac{9}{8}\right)$ 在曲线 C 上。

(b) 求曲线 C 在点 P 处的切线方程，答案写成 $y=mx+c$ 的形式，其中 m 与 c 是待求常数。

答 Answer：_____

2 满分示范 [讲义例题（法线方程的整数化全过程）]

The curve C has equation $y = x^3 - 3x$. **(a)** Find the coordinates of the point P on C at which the gradient of the curve is 9. **(b)** Find, in the form $ax + by + c = 0$ where a, b and c are integers, the equation of the normal to C at P. **(c)** Find the coordinates of the point Q on C at which the gradient of the curve is 0, and show that PQ is a straight line through the origin O. Hence state the equation of the normal to C at Q, explaining clearly why the usual rule cannot be used.

中文：曲线 C 的方程为 $y = x^3 - 3x$。

(a) 求 C 上梯度为 9 的点 P 的坐标。

(b) 求 C 在 P 处的法线方程，答案写成 $ax + by + c = 0$ 的形式，其中 a, b, c 为整数。

(c) 求 C 上梯度为 0 的点 Q 的坐标，并证明 PQ 是过原点 O 的一条直线。由此写出 C 在 Q 处的法线方程，并说明为什么此时不能用通常的法线公式。

答 Answer： _____

3 满分示范 [讲义例题（三种形式的互转与易错对照）]

The curve C has equation $y = x^3 + 2x$. Find, in **each** of the following forms, the equation of the tangent to C at the point P where $x = 1$. **(i)** $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ **(ii)** $y = mx + c$ **(iii)** $ax + by + c = 0$, where a, b and c are integers.

中文：曲线 C 的方程为 $y = x^3 + 2x$。

求 C 在横坐标为 $x = 1$ 的点 P 处的切线方程，**分别用下列三种形式**表示：

(i) 点斜式 **(ii)** $y = mx + c$ **(iii)** $ax + by + c = 0$（a, b, c 为整数）

答 Answer： _____

8.10 满分必备：由导数与切线条件反求参数的分类讨论与完整性

满分必备　满分必备：由导数与切线条件反求参数的分类讨论与完整性

一、五类条件的中文翻译与数学表达 P1 的参数题几乎都是「把中文条件翻译成一个关于导数的方程」。下表是翻译对照表，**背下来就能秒译**：

题目中的中文	翻译成的数学式	典型真题
曲线在 $x=a$ 处的**切线斜率**为 m	$f'(a)=m$	2024 年 10 月 Q8
直线 $y=mx+c$ 与曲线**相切于** $x=a$	$f'(a)=m$	2025 年 1 月 Q5
切线**平行于**直线 $y=kx+b$	$f'(a)=k$	2020 年 10 月 Q8
切线**垂直于**直线 $y=kx+b$	$f'(a)\times k=-1$	2024 年 10 月 Q8
直线 l 在 A 点是**法线**，同时是 B 点**切线**	$f'(x_B)=-\dfrac{1}{f'(x_A)}$	2022 年 6 月 Q10
切线**过给定点** (p,q)	$q-f(a)=f'(a)(p-a)$	本讲义 8.10 例 2
切线在 y 轴的**截距**为 r	$r=f(a)-a\,f'(a)$	2021 年 1 月 Q1
切线与 x 轴**交于** $(b,0)$	$0=f(a)+f'(a)(b-a)$	综合题常见

【易错】「切线过定点」与「切线在轴上的截距」不是一回事。前者要把定点代入点斜式，后者只用 y 轴时才有 $c=f(a)-af'(a)$ 这一层。

二、条件 (1)：在某点的导数值等于某常数这是最基础的一类，只需两步：**先写出** $f'(x)$，**再代入** $x=a$。

要素	标准动作	给分标记
写出导函数	对原方程逐项求导，**不要先代入再求导**	M1 + A1
代入切点	把 $x=a$ 代入导函数并化简出数值	M1 + A1

以 2024 年 10 月 Q8 为例：曲线 $y=\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{k}{2}x^2+3x$，$P$ 点法线为 $y=-\dfrac{x}{24}+5$。法线斜率 $-\dfrac{1}{24}$ $\Rightarrow$ 切线斜率 24 $\Rightarrow$ $f'(3)=24$：

$$f'(x)=4x^2+kx+3,\qquad f'(3)=36+3k+3=24\implies k=-5$$

官方给分链：B1（state gradient of tangent is 24）$\to$ M1（solve $f'(3)=24$）$\to$ A1（$k=-5$）。

三、条件 (2)：切线过给定点切线过给定点 (p,q) 时，**不要去求切点坐标**，直接用点斜式代入定点：

$$\boxed{q-f(a)=f'(a)(p-a)}$$

若题目还要求写出切线方程，再补上 $f(a)$、$f'(a)$ 即可。

易错点	纠正
把定点当成切点	切点是 $(a,f(a))$，定点是题目另给的 (p,q)，两者无关
两边同除 a	**只在式中 a 单独出现时才可约分**，且要说明理由
忘记题目问的是**切线**还是**法线**	法线需先取负倒数，条件式变成 $q-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(p-a)$

四、条件 (3)：切线与坐标轴的交点这是**最容易混淆**的一类，必须分三种情况讨论：

交点条件	代入点斜式得到的式子	注意
切线过 $(0,r)$（y 轴截距 r）	$r-f(a)=f'(a)(0-a)$，即 $r=f(a)-af'(a)$	a 的符号容易错
切线过 $(b,0)$（x 轴交点 b）	$0-f(a)=f'(a)(b-a)$	移项后别忘 $b-a$ 带负号
切线与两轴都相交	两个式子联立，**但一个未知数只可能有一个方程**	此时必有隐藏条件（如斜率已知）

【易错】「切线与坐标轴的交点」若与「斜率」同时给出，条件其实有两条：一条定斜率（即定 $f'(a)$），一条定截距。**把两条都列出来解，才能拿满 M1 与 dM1 两个方法分。**

五、条件 (4)：两切线平行——重根必须排除两切线平行 $\Longleftrightarrow$ 两处导数值相等：

$$f'(x_1)=f'(x_2),\qquad x_1\neq x_2.$$

2020 年 10 月 Q8(c) 是标准范本：曲线 $y=(x-2)^2(x-4)$，l_1 是 $x=6$ 处切线，l_2 是 $x=\alpha$ 处切线，已知 l_1 与 l_2 **平行且不重合**，求 α。

$$f'(x)=3x^2-20x+32,\qquad f'(6)=20$$

$$3\alpha^2-20\alpha+32=20\implies 3\alpha^2-20\alpha+12=0\implies(3\alpha-2)(\alpha-6)=0$$

两个根 $\alpha=\dfrac{2}{3}$ 与 $\alpha=6$。$\alpha=6$ **使 l_2 与 l_1 重合，必须舍去**，故 $\alpha=\dfrac{2}{3}$。

给分标记	官方含义	你该写什么
M1	建立关于参数的一次或二次方程	把「平行」写成 $f'(\alpha)=f'(6)$
dM1	**依赖**上一步，化为可解形式	$3\alpha^2-20\alpha+12=0$
A1	因式分解或求根	$(3\alpha-2)(\alpha-6)=0$
A1	最终答案（已排除不合条件者）	$\alpha=\dfrac{2}{3}$

【易错】「distinct（不重合）」四个字是命题人给出的排除信号。忽略它就会给出 $\alpha=\dfrac{2}{3}$ 或 $\alpha=6$ 两个答案，**A1 与 A1 中最后一个拿不到。**

六、条件 (5)：法线也是切线（同一根直线）当直线 l 在 A 点是法线、在 B 点又是切线时：

$$m_l=-\frac{1}{f'(x_A)},\qquad m_l=f'(x_B)\implies\boxed{f'(x_A)\,f'(x_B)=-1}\qquad\big(f'(x_A)\neq0\big)$$

这一类会导出一个关于 x_B 的二次方程，**通常两个根里有一个要排除：**

排除依据	典型措辞
两点不同	「at the point A」$\neq$「at the point B」，$x_A \neq x_B$
点在曲线上	把候选 x_B 代回原方程检验 y 值是否合理
有定义域限制	题干常写 $x>0$ 或 $x\neq 0$，负根与 $x=0$ 都要排除

2024 年 10 月 Q9(c) 是这一类的标准演示：$f(x)=(x+5)(3x^2-4x+20)$，$R(-4,84)$，求切线与 R 处切线平行的点 P 的横坐标。$f'(x)=9x^2+22x$，令 $f'(x)=f'(-4)=56$：

$$9x^2+22x-56=0 \implies x=-\frac{14}{9} \text{ 或 } x=-4$$

$x=-4$ 即 R 本身，**切线与自身平行无意义**（也与「点 P」的措辞不符），排除后得 $x=\dfrac{14}{9}$。官方给分链：M1 → dM1 → **ddM1** → A1cso（A1 因结果正确而给）。

七、解的完整性清单（写答案前逐条自查）求出候选解之后，**按下面四条逐一核对**，这是 P1 参数题「会做却拿不到满分」的核心原因：

检查项	提问	不通过的处理
(1) 重根 / 重合	解出的参数是否让两条直线重合、两点变成同一点？	舍去，**并在解答中写明理由**
(2) 定义域	是否落在题干给的限制内（如 $x>0$、$x\neq 0$）？	舍去
(3) 位置关系	题目是否给了图或「as shown」，候选点是否与图矛盾？	舍去或按图判断
(4) 舍入	题目是否声明「Solutions relying on calculator technology are not acceptable」？	**必须给精确值，小数不给分**

【易错】弃答必须写理由。写「$\alpha=6$ is not valid as the two lines would coincide」，既保住 A1，又体现分类讨论的完整性。

八、给分点拆解：为什么每一步都要写出来 Edexcel 的方法分是**链条式 的：**后一个 dM1 依赖前一个 M1，前一步没拿到，后一步也拿不到。

标记	含义	本节对应
M1	方法分：建立方程、选用正确关系	$f'(a)=m$、$f'(x_A)f'(x_B)=-1$
dM1	**dependent** M1：依赖上一步的变形	$3\alpha^2-20\alpha+12=0$、$9x^2+22x-56=0$
ddM1	二重依赖 M1	因式分解或代入检验
A1	答案分	k、α、x_P 的具体值
A1ft	**follow through**：用上一步（哪怕是错的）结果给分	由 k 顺推 $f(x)$
A1cso	**correct solution only**：必须全对才给	最终的 $\alpha=\dfrac{2}{3}$
B1	独立事实分	「gradient of tangent is 24」这类中间结论

结论：不要跳步，也不要为了写得漂亮而合并步骤。判分只看链条是否完整，**把「翻译条件 → 建立方程 → 变形求解 → 排除重根 → 给精确值」五步分行写全**，才是拿满 M 分与 A 分的唯一办法。

1 满分示范 [2024 年 10 月 Q8（7 分，法线条件反求参数）]

The curve C has equation

$$y=\frac{4}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2+3x$$

where k is a constant. The point P, where $x=3$, lies on C. The normal to C at P has equation $y=-\dfrac{1}{24}x+5$.

(a) Find the value of k.

(b) Find an equation for C in the form $y=f(x)$, where f is a function.

中文：曲线 C 的方程为

$$y=\frac{4}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2+3x$$

其中 k 为常数。点 P（横坐标 $x=3$）在曲线 C 上，且曲线 C 在 P 处的法线方程为 $y=-\dfrac{1}{24}x+5$。

(a) 求 k 的值。

(b) 求曲线 C 的方程，写成 $y=f(x)$ 的形式，其中 f 为函数。

答 Answer： _____

2 满分示范 [讲义例题（条件 (2)：切线过给定点）]

The curve C has equation $y = x^3 - 3kx^2 + 2x + 4$, where k is a constant. The tangent to C at the point where $x = 1$ passes through the point $(3, 7)$. Find the value of k.

中文：曲线 C 的方程为 $y = x^3 - 3kx^2 + 2x + 4$，其中 k 为常数。

曲线 C 在横坐标 $x = 1$ 的点处的切线通过定点 $(3, 7)$。求 k 的值。

答 Answer： _____

3 满分示范 [讲义例题（条件 (4)：平行且不重合，重根必须排除）]

The curve C has equation $y = x^3 - 3x^2 + 2$. The line l_1 is the tangent to C at the point where $x = 2$. The line l_2 is the tangent to C at the point where $x = \alpha$. Given that l_1 and l_2 are parallel and distinct, find the value of α. Hence write down the equations of both l_1 and l_2, and show that the curve has two points with gradient 0.

中文：曲线 C 的方程为 $y = x^3 - 3x^2 + 2$。

直线 l_1 是曲线 C 在横坐标 $x = 2$ 的点处的切线；直线 l_2 是曲线 C 在横坐标 $x = \alpha$ 的点处的切线。

已知 l_1 与 l_2 **平行且不重合**，求 α 的值。

进而写出 l_1 与 l_2 的方程，并证明曲线上存在两个梯度为 0 的点。

答 Answer： _____

8.11 普高衔接：从国内课堂到 WMA11/01 的四个断层

普高衔接　普高衔接：从国内课堂到 WMA11/01 的四个断层

一、人教 A 版选择性必修第二册 vs WMA11/01：知识点对照国内教材（人教 A 版选择性必修第二册第四章「导数及其应用」）与 P1 第 8 章的内容有**约七成重合**，但排列顺序与考查深度差异明显。下表把对应位置逐条列出：

国内位置	国内课题	P1 对应	P1 的额外要求
4.1 导数的概念及其意义	导数定义、几何意义	8.1	割线 $\to$ 切线的**极限**表述
4.2 导数的运算	幂函数求导法则	8.2	负指数与分数指数的**统一处理**
4.2 导数的运算	多项式与复合式求导	8.3–8.4	**链式法则**国内另有专节，P1 **不考**
4.3 导数在研究函数中的应用	单调性、极值、最值	8.7	**由导数条件反求参数**（国内几乎不练）
4.3 导数在研究函数中的应用	切线方程	8.5	法线方程、$ax+by+c=0$ 整数形式
		8.6	二阶导数与凹凸性（P1 只要求「能求」）
		8.10	参数题的**分类讨论与排除重根**

一句话结论：国内教材的**知识宽度大于 P1，考查深度小于 P1**。国内会讲链式法则、复合函数求导、对数求导，P1 一概不考；但 P1 会把「求导 + 切线 + 反求参数」串成长链，并且**要求每一步都写出来**。

二、国内讲法与 P1 讲法的四个实质差异 差异 1：先定义后法则 vs 直接给法则。国内先花两课时严格证明 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的存在性，P1 **直接给出** $\dfrac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$ 让学生用。

国内	导数定义 $\to$ 极限证明 $\to$ 幂函数法则推导（重理论、轻计算）
P1	直接用法则 $\to$ 计算 $\to$ 只在 (c) 问里考一句「极限趋于切线」（重计算、轻理论）

差异 2：复合函数怎么处理。国内对 $(2x+3)^5$ 这类式子必须用链式法则拆两层；P1 遇到这类式子的**标准处理是先展开**再逐项求导：

$$(2x+3)^5=32x^5+240x^4+720x^3+1080x^2+810x+243$$

不要在 P1 里写链式法则——即使你学过，写了也不给分，反而会因为中间步骤过多而掩盖 M 分。

差异 3：法线方程的地位。国内只在例题里顺带提一句「与切线垂直的直线」，P1 则把它列为核心考点（C8e 共 6 道真题），并要求**写出负倒数的适用条件**。

差异 4：答案的书写精度。国内允许「结果正确即可」，P1 严格执行 **ISW（is wrong or right，不因后续错误而连坐）**与 **A1cso（correct solution only）**：中间步骤错会导致后续方法分连带丢失。

三、P1 额外要求、国内却略过的五个点 **点 1：由导数反求参数的分类讨论**。国内例题几乎都是「已知 $f'(x)$ 求单调区间」，**反过来给条件求参数**训练严重不足。P1 的 C8g 考点有 5 道真题，全部是反求参数，且**必须排除重根**。

点 2：法线方程的规范书写。国内只要求「写出法线方程」，P1 进一步要求 $ax+by+c=0$、系数为整数、含 $=0$。

点 3：二阶导数与凹凸性的最小要求。国内把凹凸性讲得很细（甚至推广到 n 阶），P1 只要求「**把 $f'(x)$ 的每个指数再减一、系数再乘一次**」，不要求任何图像判断。

点 4：nx^{n-1} 中系数 n 的书写规范。国内课堂口头强调「系数不要丢」，P1 则把它写进给分标准：

书写	得分	23 年 10 月 Q1 官方原文
$\frac{d}{dx}\left(5x^3+\frac{3}{x^2}-7x\right)=15x^2-\frac{6}{x^3}-7$	满分	「$15x^2-6x^{-3}-7$ or simplified equivalent」
$=15x^2-\frac{3}{x^2}-7$	**扣 A1**	「Do not accept $15x^2-6x^{-3}-7x^0$」
$=x^2+\frac{3}{x}-7$	**扣 M1+A1**	「Decreases the power by 1」未体现

点 5：精度与不可用计算器。题干写明「Solutions relying on calculator technology are not acceptable」时，必须给精确值（如 $\frac{14}{9}$ 而不是 1.56），否则 A1cso 不给分。

四、可以直接迁移的三件工具国内学过、可以立即在 P1 里使用的工具：

工具	P1 中的用法	示例
配方法 / 因式分解	解 $f'(x)=0$ 时的双二次方程	$12x^4+5x^2-2=(4x^2-1)(3x^2+2)$
一元二次不等式的「大于零取两边」	判断 $f'(x)>0$ 的区间（驻点判别）	$3x^2-5x-8<0\Rightarrow -1<x<\frac{8}{3}$
导数的几何意义	求切线斜率与法线斜率	$m_{\text{法线}}=-\frac{1}{f'(a)}$

必须警惕的「过度迁移」：国内用单调性求最值的「极值判定法」（$f'>0$ 增、$f'<0$ 减、看极值点两侧符号）在 P1 里**只在 8.3 局部使用**；P1 的主线是「求导 → 写切线/法线 → 反求参数」，不是完整的极值分析。

五、错题复盘：三类国内惯性思维在 P1 里的表现

国内惯性	P1 里的翻车方式	纠正动作
先求导再代入	写 $f'(x)$ 后忘了代 $x=a$，直接当 m 用	代值后**写一行** $f'(a)=\ldots$
复合式直接套链式法则	写 $\left[(2x+3)^5\right]'=5(2x+3)^4$	**先展开**再逐项求导
法线斜率取相反数	-24 而非 $-\frac{1}{24}$	口诀「**负倒数，不是相反数**」
不写 $=0$	$ax+by+c$ 形式漏等号	写完立刻检查等号与整数性
只给一个根	反求参数时漏掉「distinct」排除步骤	**先列全部候选根，再按条件排除**

1 衔接练习

[衔接自测（人教 A 版 4.2 与 P1 8.4 的同题异构）]

The curve C has equation $y = 3x^3 - 2x + 1$.

(a) Find $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Hence find the coordinates of the point on C at which the gradient of the curve is 7.

(c) Find the equation of the tangent to C at that point, giving your answer in the form $ax+by+c = 0$, where a, b and c are integers.

中文：曲线 C 的方程为 $y = 3x^3 - 2x + 1$。

(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$。

(b) 由此求曲线上梯度为 7 的点的坐标。

(c) 求该点处的切线方程，写成 $ax + by + c = 0$ 的形式，其中 a, b, c 为整数。

答 Answer： _____

2 衔接练习

[衔接自测（国内「先展开」与 P1 链式法则的取舍）]

A student writes $\dfrac{d}{dx}\left[(2x+3)^4\right] = 4(2x+3)^3$. Explain the error in this working, and hence find, in expanded form, the correct value of $\dfrac{d}{dx}\left[(2x+3)^4\right]$.

中文：某同学写出 $\dfrac{d}{dx}\left[(2x+3)^4\right] = 4(2x+3)^3$。

请指出这段推导的错误，并据此求出 $\dfrac{d}{dx}\left[(2x+3)^4\right]$ 的正确值（展开形式）。

答 Answer： _____

8.12 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘

下表汇总本章近五年全部 **28 道**真题的分布（C8a 2 道、C8b 6 道、C8d 9 道、C8e 6 道、C8g 5 道）。请先看表定位自己的薄弱考点，再做下面的四道真题演练。

本章分值结构：28 道题合计约 **92 分**，分布在 10 张卷子上（每年 1 月、6 月、10 月各一张），平均每张卷子本章约 **9 分**。分值最重的几道是 2022 年 6 月 Q10（12 分）、2020 年 10 月 Q8 与 2022 年 1 月 Q7（各 11 分）、2019 年 10 月 Q10 与 2024 年 10 月 Q9（各 10 分）。

四条铁律（贯穿全章）：

铁律	说明
铁律一	**先求导，后代入**。写 $f'(x)$ 与写 $f'(a)$ 是两个方法分，不能只写后者
铁律二	**形式即分数**。题目要 $ax+by+c=0$ 就不能给 $y=mx+c$，反之亦然
铁律三	**法线是负倒数，不是相反数**。$m=24$ 时法线斜率是 $-\dfrac{1}{24}$
铁律四	**参数题必须排除重根**。出现 distinct / 不重合 / different 就一定要写排除过程

错题复盘表（做完四道题后自填）：

失分小问	违反的铁律	错因定位	重做日期

考点	近五年真题定位（年份 · 场次 · 题号 · 分值）
梯度与切线概念	19 年 10 月 Q7（6 分）
	20 年 1 月 Q3（6 分）
幂函数求导	19 年 1 月 Q6（7 分）
	19 年 10 月 Q10（10 分）
	20 年 1 月 Q9（6 分）
	23 年 1 月 Q1（5 分）
	24 年 10 月 Q3（9 分）
	25 年 10 月 Q1（6 分）
多项式求导	19 年 6 月 Q1（6 分）
	19 年 6 月 Q10（10 分）
	21 年 1 月 Q1（8 分）
	21 年 10 月 Q2（5 分）
	22 年 1 月 Q7（11 分）
	23 年 10 月 Q1（5 分）
	24 年 1 月 Q3（7 分）
	24 年 6 月 Q7（8 分）
	26 年 1 月 Q3（8 分）
切线与法线	19 年 10 月 Q5（7 分）
	20 年 10 月 Q8（11 分）
	21 年 6 月 Q1（10 分）
	22 年 6 月 Q10（12 分）
	24 年 10 月 Q9（10 分）
	25 年 10 月 Q10（10 分）
由导数反求参数	21 年 10 月 Q10（7 分）
	24 年 1 月 Q10（8 分）
	24 年 10 月 Q8（7 分）
	25 年 1 月 Q5（8 分）
	25 年 6 月 Q2（5 分）

1 真题演练 [2020 年 10 月 Q8（11 分，本章分值最高之一）]

In this question you must show all stages of your working.

The curve C has equation $y = (x-2)(x-4)^2$. **(a)** Show that $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 20x + 32$. The line l_1 is the tangent to C at the point where $x = 6$. **(b)** Find the equation of l_1, giving your answer in the form $y = mx + c$, where m and c are constants to be found. The line l_2 is the tangent to C at the point where $x = \alpha$. **(c)** Given that l_1 and l_2 are parallel and distinct, find the value of α.

中文：本题必须完整写出所有计算步骤。

曲线 C 的方程为 $y = (x-2)(x-4)^2$。

(a) 证明 $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 20x + 32$。

直线 l_1 是曲线 C 在横坐标 $x = 6$ 的点处的切线。

(b) 求直线 l_1 的方程，写成 $y = mx + c$ 的形式，其中 m 与 c 是待求常数。

直线 l_2 是曲线 C 在横坐标 $x = \alpha$ 的点处的切线。

(c) 已知 l_1 与 l_2 平行且不重合，求 α 的值。

答 Answer： _____

2 真题演练 [2022 年 1 月 Q7（11 分，本章分值最高之一）]

Figure 3 shows a sketch of part of the curve with equation $y = f(x)$, where $f(x) = (x + 4)(x - 2)(2x - 9)$. The curve with equation $y = f(x) - p$ passes through the point with coordinates $(0, 50)$. **(a)** Find the value of the constant p. Given that the curve with equation $y = f(x + q)$ passes through the origin, **(b)** write down the possible values of the constant q. **(c)** Find $f'(x)$. **(d)** Hence find the range of values of x for which the gradient of the curve $y = f(x)$ is less than -18.

中文：图 3 给出曲线 $y = f(x)$ 的一部分，其中 $f(x) = (x + 4)(x - 2)(2x - 9)$。

曲线 $y = f(x) - p$ 通过点 $(0, 50)$。

(a) 求常数 p 的值。

已知曲线 $y = f(x + q)$ 通过原点，

(b) 直接写出常数 q 的所有可能取值。

(c) 求 $f'(x)$。

(d) 由此求使 $f(x)$ 的梯度小于 -18 的 x 的取值范围。

答 Answer： _____

3 真题演练 [2023 年 10 月 Q1（5 分，二阶导数）]

Given that $y = 5x^3 + \frac{3}{x^2} - 7x$, $x > 0$. **(a)** Find $\frac{dy}{dx}$, giving your answer in simplest form. **(b)** Hence find $\frac{d^2y}{dx^2}$.

中文：已知 $y = 5x^3 + \frac{3}{x^2} - 7x$，$x > 0$。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$，并把答案化为最简形式。

(b) 由此求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

答 Answer： _____

4 真题演练 [2019 年 10 月 Q5（7 分，法线整数形式）]

A curve has equation

$$y = \frac{x^3}{6} + 4\sqrt{x} - 15, \qquad x > 0.$$

(a) Find $\frac{dy}{dx}$, giving your answer in simplest form. The point $P\left(4, \frac{11}{3}\right)$ lies on the curve. **(b)** Find the equation of the normal to the curve at P. Write your answer in the form $ax + by + c = 0$, where a, b and c are integers to be found.

中文：某曲线的方程为

$$y = \frac{x^3}{6} + 4\sqrt{x} - 15, \qquad x > 0.$$

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$，并把答案化为最简形式。

点 $P\left(4, \frac{11}{3}\right)$ 在该曲线上。

(b) 求该曲线在 P 处的法线方程，写成 $ax + by + c = 0$ 的形式，其中 a, b, c 为待求整数。

答 Answer：_____

积分 Integration

本章导读

本章是 P1 的**最后一块新知识**，也是全卷**唯一一个「由导数倒推回去」的章节**。近五年 P1 的 31 道积分真题，分布得非常整齐：**由导数求原函数（C9c）独占 15 道，接近一半；化简后再积分（C9e）12 道；两次积分（C9d）与幂函数积分（C9a）各 2 道**。分值上，22 年 1 月 Q6、25 年 6 月 Q8、26 年 6 月 Q8 三道题都达到 **11 分**，是 P1 全部 12 大题中分值最高的一档。

这意味着一个很残酷的事实：**P1 的积分题，八成以上不是让你「算一个积分」，而是让你「算出一个函数」**。题目通常长这样：给你 $f'(x)$，再给你曲线上的一个点 P，问你 $f(x)$ 是什么。所以本章要练的不是「背一条积分公式」，而是**把第 8 章的求导完全反过来用**。

本章有**三条不能违反的铁律**，请先记住再往下读：

铁律一：不定积分必须带 $+C$，这是给分点而不是装饰。 2023 年 6 月 Q8(b) 的官方 Notes 写得很明确：积分结果里**缺了 $+c$ 要扣 0.25 分**（CONDONE）。有些题甚至要同时给出「未化简形式」和「最简形式」才能拿满两级 A1——**换句话说，答案的长相也是有分数的**。

铁律二：先化简，再积分。 26 年 6 月 Q1 的被积表达式是 $\left(3x+\dfrac{2}{x}\right)^2$，官方给分链是「先展开成 $9x^2+12+4x^{-2}$，再逐项积分」。**直接把括号里的式子整体代入公式一定拿不到分**——因为它根本不是幂函数。

铁律三：每一步都要留着「提幂」的痕迹。 官方几乎每道积分题的 M1 都给在「**把幂次提高 1**」这个动作上：$x^3\to x^4$、$x^{-2}\to x^{-1}$、$x^{1/2}\to x^{3/2}$、$5\to 5x$。**M1 不需要你算出正确结果，只要看得出你提了幂**。写不出这个动作，方法分当场蒸发。

读完本章，你应当能做到：**看到一个积分式先判断它是不是幂函数（不是就先化简），提幂、积分、**

化简、带 $+C$ 四步一步不落地写出来；看到 $f'(x)$ 就能反推出 $f(x)$ 并用定点定出常数。
本章的 9.1–9.3 节讲知识与例题；**9.4 与 9.5 两节「满分必备」**分别把「积分常数 C 的处理」与「化简后再积分」这两个真正的失分重灾区讲透；9.6 节与国内教材对照；最后一节用真实真题做章节测评。

本单元新词　Key Vocabulary

English 英文	中文	在 P1 中的用法
integrate	积分	$\int$；**P1 里只考幂函数（及其化简形式）的积分**
indefinite integral	不定积分	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$；结果含任意常数 C，表示**一族**原函数
constant of integration	积分常数	通常写作 C 或 k；**是给分点，漏写要扣分**
antiderivative	原函数	若 $F'(x)=f(x)$，则 F 是 f 的原函数；**不定积分就是求全体原函数**
power rule for integration	积分幂法则	$\int x^n\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$（$n\neq -1$）
find the integral	求积分	官方动词；**只给一个原函数即可，不必列出全部**
simplify	化简	官方高频动词；**化简后再积分是 C9e 的核心动作**
in simplest form	以最简形式	官方对答案形状的硬性要求；**分式、根式、指数都要写成幂形式**
partial fractions	部分分式分解	把 $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 拆成 $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}$；**P1 只作化简层面接触**
substitution	换元法	令 $u=$ 某个整体；**P1 只需能识别「整体」即可，完整换元属 P2/P3**
integrate a power of x	对 x 的幂积分	官方表述；**对应官方 M1「把幂次提高 1」**
raise the power by one	幂次加一	官方 M1 的原话；$x^3\to x^4$、$x^{-2}\to x^{-1}$、$5\to 5x$
passes through the point P	经过点 P	「曲线过 P」；**用来确定积分常数 C 的唯一条件**
constant of proportionality	比例常数	比例常数；**与积分常数 C 无关，不要混**
family of curves	曲线族	带不同 C 的原函数构成一族平行曲线；**这是 $+C$ 的几何意义**
gradient	斜率	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；**在反推 $f(x)$ 时先算它定切线**
point of inflection	拐点	$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$；**2019 年 10 月与 2020 年 1 月两道两次积分题用它定参数**

9.1　Integrating x^n 幂函数积分

整章的地基只有**一条公式**：

$$\int x^n\,\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\qquad (n\neq -1).$$

它是第 8 章求导幂法则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n=nx^{n-1}$ 的逆运算。**把它拆成三个动作，就是全部内容：幂次加一、除以新的幂、再加常数 C。**

本节的例题全部只考一件事：**怎样把各种古怪的写法「翻译」成 x 的幂**。翻译不出来，后面的积分就无从谈起。

- **唯一公式：** $\int x^n\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$。**三个动作缺一不可：**幂次加一、除以新幂、加常数
- **前提是 $n\neq -1$。**$n=-1$ 时结果含 $\ln|x|$，**P1 不考**（属 P2/P3），**见到 $\dfrac{1}{x}$ 不要慌，题目不会这样单独出现**
- **逐项积分（分项法则）：** $\int f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x$。**先拆项，再对每一项各自提幂**
- **常数项要变成 kx：** $\int 5\,\mathrm{d}x=5x+C$，**不是 $5+C$**。这是官方 M1 明确点名的动作
- **负指数照提不误：** $\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$，积分得 $\dfrac{x^{-1}}{-1}=-x^{-1}=-\dfrac{1}{x}$。**提幂后忘了「除以新的幂」是最常见的算错**
- **分数指数也一样：** $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$，积分得 $\dfrac{x^{1/2}}{1/2}=2x^{1/2}=2\sqrt{x}$
- **最简形式的标准：负指数要写成倒数形式**（$-\dfrac{1}{x}$ 而非 $-x^{-1}$），**分数指数要写成根式形式**（$2\sqrt{x}$ 而非 $2x^{1/2}$）。这是官方「in simplest form」的判分依据
- **答案必须带 $+C$：**官方 Notes 写明「**Condone the lack of $+c$ for this mark**」——**缺 $+C$ 要扣 0.25 分**，不是不扣

方法卡　幂函数积分的四步翻译法与常见对照

题目里写成	翻译成幂形式	积分结果
$3x^2$	$3x^2$	x^3
$-5x$	$-5x^1$	$-\dfrac{5}{2}x^2$
5（常数）	$5x^0$	$5x$
$\dfrac{1}{x^2}$	x^{-2}	$-x^{-1}=-\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{1}{2x^3}$	$\dfrac{1}{2}x^{-3}$	$-\dfrac{1}{4}x^{-2}=-\dfrac{1}{4x^2}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x^{-\frac{1}{2}}$	$2x^{1/2}=2\sqrt{x}$
$\sqrt[3]{x}$	$x^{\frac{1}{3}}$	$\dfrac{3}{4}x^{4/3}$
$-\dfrac{1}{x^4}$	$-x^{-4}$	$\dfrac{1}{3}x^{-3}=\dfrac{1}{3x^3}$

四步翻译法（倒着写顺序）：

(1) **先看每一个「块」是不是幂函数。**是的，保留；不是的，先展开（见 9.5）。

(2) **把非幂写法改成幂写法。只改写法，不动系数：** $\dfrac{1}{2x^3}$ 改成 $\dfrac{1}{2}x^{-3}$，**系数 $\dfrac{1}{2}$ 必须提出来单独乘。**

(3) **逐项提幂并积分。每一项单独走一遍「幂加一、除以新幂」。**

(4) **统一化简并写 $+C$。负指数写成倒数、分数指数写成根式，**然后在最后加 $+C$。

高频错误	官方怎么判
只提幂不积分（写成 x^4）	**拿不到 A1**，只能拿「提幂」的 M1。**M1 只看动作，不看结果**
提幂后忘记除以新幂	同上，**M1 有、A1 无**。这是 P1 最高频的算错
漏掉常数项的 x（写成 $+5$）	**该项的 A1 必丢**。官方 M1 明确列出「$5 \to 5x$」
负指数结果写成 $-x^{-1}$ 不化简	**该 A1 丢**（官方只接受 $-\frac{1}{x}$ 这类最简形式）
漏写 $+C$	**扣 0.25 分**（CONDONE the lack of $+c$）

1 例题 [讲义基础例题]

Find $\int (3x^2+2x-5)\,\mathrm{d}x$, giving your answer in simplest form.

中文：求 $\int (3x^2+2x-5)\,\mathrm{d}x$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

2 例题 [2019 年 1 月 Q1（4 分）]

Find, in simplest form, $\int \left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2x^3}+5\right)\mathrm{d}x$.

中文：求 $\int \left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2x^3}+5\right)\mathrm{d}x$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

3 例题 [2022 年 1 月 Q1（4 分）]

Find $\int\left(\frac{8x^3}{5}-\frac{2}{3x^4}-1\right)\mathrm{d}x$, giving your answer in simplest form.

中文：求 $\int\left(\frac{8x^3}{5}-\frac{2}{3x^4}-1\right)\mathrm{d}x$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

4 例题 [2026 年 6 月 Q1（5 分）]

Find $\int\left(3x+\frac{2}{x}\right)^2\mathrm{d}x$, giving the answer in simplest form.

中文：求 $\int\left(3x+\frac{2}{x}\right)^2\mathrm{d}x$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

5 例题 [2025 年 10 月 Q2（5 分）]

Find $\int (x-3)^2(2x+5)\,\mathrm{d}x$, giving your answer in simplest form.

中文：求 $\int (x-3)^2(2x+5)\,\mathrm{d}x$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

9.2 Indefinite integrals 不定积分与常数 C

上一节的公式后面挂着一个 $+C$，很多同学把它当成「公式的一部分」抄下来。这一节要讲清楚的是：**那个 C 到底代表什么、为什么非写不可、什么时候可以不写。**

核心只有一句话：**不定积分求的不是「一个函数」，而是「一族函数」。** $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 的正确读法是「**所有**导数等于 $f(x)$ 的函数的集合」，而这一族函数之间只差一个常数。

- **不定积分的定义：**若 $F'(x)=f(x)$，则称 F 是 f 的**原函数**。$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示 f 的**全体原函数**，写作 $F(x)+C$
- **为什么是「一族」：**因为求导会把常数「吃掉」——$(F(x)+C)'=F'(x)$。**所以任何两个原函数只差一个常数，而这个常数无法由求导确定**
- **几何意义：曲线族。** $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2+C$ 表示**一族上下平移的抛物线** $y=x^2+C$；$\int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3+C$ 表示一族立方曲线。C **就是「竖直平移量」**
- **唯一能定出 C 的信息是「点」。题目不给点，C 就永远定不下来**——这时答案必须写成 $F(x)+C$，**把 C 保留。**题目给了点（曲线 passes through P），**才代入 x,y 反解出 C 的具体数值，**这时最终答案里**不再出现 C**
- **定积分与不定积分的表述区别（P1 极少考，但概念必须清楚）：定积分** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **是一个数**（面积/变化量），**上下限一给，C 就被消掉了；不定积分 没有上下限，C 必须留着**
- **「Find the integral」的两种情况：只要求写出一个原函数时，**官方 Notes 常常写「**condone the lack of $+c$ for this mark**」——**缺 C 只扣 0.25 分，**但不是不扣。**主动写上 C 永远是对的**

- 「**Find $f(x)$**」时 C **必须解出来**：因为题目要的是一个**具体的函数，不能留未知数**。而且官方这时会额外给一个 dM1（依赖分），**专门奖励「代入点求出 C」这个动作**
- **检验方法**：把答案求导回原函数，**常数项必须恰好消掉**。若求导后多出或少了一个常数，说明你把 C 写错了位置

方法卡　「C 的一生」：从出现到定死

题目情境	答案怎么写	为什么
「Find the integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$」	$F(x)+C$（**或省略 C**）	不定积分是**一族**函数，C 无法确定
「Find $f(x)$，曲线过 $P(a,b)$」	$F(x)+c$，**再代入求出 c 的数值**	点是**唯一**能定 C 的信息
「Find $f(x)$，**不给点**」	$F(x)+C$，**保留 C**	没有别的信息，C 不可解
「Find $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$」	**一个数值，无 C**	上下限消掉了 C

定 C 的标准三步（P1 每年必考，务必写全）：

(1) **积分**：先求出带 c 的表达式 $f(x)=F(x)+c$。**这个 c 必须先写出来——没有它，第 2 步就无从下手。**

(2) **代入**：把题目给的 x 值与 y 值代入。**【易错】**代入的是「点的坐标」，不是导数值：曲线过 $P(4,20)$ 就代入 $x=4,\ y=20$；**若题目给的是「切线斜率」，那是 $f'(4)$，代入的是导数式。**

(3) **解出 c 并把结果代回原式，最终答案里不再出现 c。**

关于 C 的高频事故	后果
积分时忘了 $+C$，直到代入点才发现无法求 c	**整题崩盘。必须第一步就写 $+c$**
代入点时把 x 代成了 y	算出的 c 离谱。**代入前先写一行「$x=4,\ y=20$」**
代入后忘记把 c 的值代回 $f(x)$	**答案还带着 c**，官方不给最后一个 A1
把 c 算成负号弄反	常见于 $c=-\frac{1}{3}$ 这类分数。**代回原式验算一次**
最终答案写成 $f(x)=x^2+2$（漏掉 $+c$）	丢 A1。**写完检查有没有 $+c$**

6 例题 [2022 年 6 月 Q1（4 分）]

Find, in simplest form, $\int\left(10x^5+6x^3-\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

中文：求 $\int\left(10x^5+6x^3-\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

7 例题 [2019 年 1 月 Q12(b)（题干综合自真题）]

The curve C has equation $y = f(x)$ where $x > 0$. Given that $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x\sqrt{x} - 10x^{-\frac{1}{2}}$ and that the curve passes through the point $P(4, -2)$, find $f(x)$, giving your answer in simplest form.

中文：曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，其中 $x > 0$。已知 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x\sqrt{x} - 10x^{-\frac{1}{2}}$，且曲线经过点 $P(4, -2)$，求 $f(x)$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

8 例题 [讲义概念例题（对应 C9b 不定积分的核心概念）]

Given that $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ and $f'(x) = 3x^2 - 6x$, explain why $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$ for any constant C.

中文：已知 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 且 $f'(x) = 3x^2 - 6x$，说明为什么对任意常数 C 都有 $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$。

答 Answer： _____

9.3 Finding functions 由导数求原函数

这一节是整章的**主战场**：近五年 31 道积分题里有 **15 道**属于这一类（C9c），分值最重的三道（11 分）也全在这里。

题目结构几乎是一个固定模板：**给你 $f'(x)$（或 $f''(x)$），再给你曲线上的一两个条件，问你 $f(x)$ 是什么**。你要做的，其实就是**把第 8 章的求导过程倒着写一遍**。

已知	求
$f'(x)=g(x)$	$f(x)$：**积一次**，得 $f(x)=G(x)+c$，再用点定 c
$f''(x)=g(x)$	$f(x)$：**积两次**，先得 $f'(x)=G(x)+c_1$，再得 $f(x)=H(x)+c_2$，两个常数分别定

- **标准四步：翻译导数 → 积分 → 代入定常数 → 化简代回。顺序不能乱：必须先积分出带常数的表达式，再代入点**，不能反过来
- **积分前先翻译**：$3x\sqrt{x}$ 要写成 $3x^{3/2}$；$\dfrac{32}{3x^2}$ 要写成 $\dfrac{32}{3}x^{-2}$；$-2\sqrt[3]{x}$ 要写成 $-2x^{1/3}$。**不翻译就无法套公式**
- **常数 c 与 d 的区别（两次积分题）**：$f''(x)=g(x)$ 积两次会得到**两个**常数。**它们是两个独立的未知数，要用两个独立条件分别定**
- **用「切线」定 c 的诀窍**：**切线方程 $y=mx+k$ 里的斜率 m 就是 $f'(x_0)$**。把 x_0 代入导数表达式求 c，**这个 c 是 $f'(x)$ 的常数，不是 $f(x)$ 的。两处常数别搞混**
- **官方给分结构（务必按图索骥）**：M1（提幂 / 积分方法）→ A1（积分结果正确）→ **dM1（代入求常数，依赖前面的 M1）** → A1（最终答案）。**dM1 是「额外的一分」，只写在正确代入这一步**
- **「$f(x)$ vs 「$f'(x)$ vs 「$f''(x)$」要盯准**：题目问 $f(x)$ 就**只积一次**；问 $f'(x)$ 就积一次；问 $f''(x)$ 就积两次。**多积一次少积一次都不行**
- **答案要化简到最简**：官方常写「**writing your answer in simplest form**」。**负指数写成倒数、分数指数写成根式、系数约分，这是独立的 A1**，不能省
- **别忘了检验**：把最终 $f(x)$ 求导，**应当回到题目给的 $f'(x)$（或 $f''(x)$）。这是 10 秒验算，却能抓出大部分符号错误**

方法卡　由导数求原函数的四步流程与给分点对照

四步流程（每一步都要在纸面上留下痕迹）：

(1) **翻译**：把 $f'(x)$ 写成纯幂形式。

(2) **积分**：逐项用幂法则，写出**带常数**的表达式 $f(x)=F(x)+c$。【易错】这一步的常数一定要当场写出来——它是第 3 步的抓手。

(3) **代入定常数**：用题目给的点（或切线斜率）代入解出 c。

(4) **代回并化简**：$f(x)=F(x)+c$ 的具体值，**写成最简形式**。

步骤	写什么	对应给分点	写错的后果
(1) 翻译	$3x^{3/2}-10x^{-1/2}$	**M1**（提幂加 1）	方法分直接丢，后面全崩
(2) 积分	$f(x)=\frac{6}{5}x^{5/2}-20x^{1/2}+c$	**A1**（每项独立判分）	丢一项丢一个 A1
(3) 定常数	$-2=\frac{6}{5}\times32-20\times2+c\Rightarrow c=-\frac{2}{5}$	**M1**（代入求 c）	这一分连带最后的 A1 一起丢
(4) 代回	$f(x)=\frac{6}{5}x^{5/2}-20x^{1/2}-\frac{2}{5}$	**A1**（最终答案）	丢最后一分

「条件类型 → 代入什么」速查表：

题目给的	代入什么	定出的是哪个常数
「passes through $P(a,b)$」	$x=a,\ y=b$ 代入 $f(x)$	$f(x)$ 的常数 c
「the tangent at P has equation $y=mx+k$」	$x=a$ 代入 $f'(x)$，令 $f'(a)=m$	$f'(x)$ **的常数**（第一步）
「$f'(x)=m$ at P」	$x=a$ 代入 $f'(x)$，令 $f'(a)=m$	同上
「$f''(x)=0$ when $x=a$」	$x=a$ 代入 $f''(x)$，令 $f''(a)=0$	**题目里的参数**（如 A）
「$f(a)=b$」	$x=a,\ y=b$ 代入 $f(x)$	$f(x)$ 的常数

【易错】最常见的结构性错误：题目给切线，你却把切线斜率代进了 $f(x)$。**记住一句话：斜率属于导数，坐标属于函数。**

9 例题 [2021 年 6 月 Q6（8 分）]

The curve C has equation $y=f(x)$, where $x>0$. Given that

$$f'(x)=\frac{32}{3x^2}+3-2\sqrt[3]{x}$$

and that C passes through the point $P(8,2)$, (a) find the equation of the tangent to C at P, writing your answer in the form $y=mx+c$, where m and c are constants to be found (b) find, in simplest form, $f(x)$.

中文：曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，其中 $x>0$。已知

$$f'(x)=\frac{32}{3x^2}+3-2\sqrt[3]{x}$$

且 C 经过点 $P(8,2)$。(a) 求 C 在 P 点的切线方程，答案写成 $y=mx+c$ 的形式，其中 m、c 为待求常数；(b) 求 $f(x)$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

10 例题 [2022 年 1 月 Q6（11 分）]

The curve C has equation $y = f(x)$, where $x > 0$. Given that

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2}{x\sqrt{x}}$$

and that the point $P(4, 20)$ lies on C, (a) (i) find the value of the gradient at P (ii) hence find the equation of the tangent to C at P, giving your answer in the form $ax + by + c = 0$ where a, b and c are integers to be found (b) find $f(x)$, simplifying your answer.

中文：曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，其中 $x > 0$。已知

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2}{x\sqrt{x}}$$

且点 $P(4, 20)$ 在 C 上。(a) (i) 求 P 点处的斜率；(ii) 据此求 C 在 P 点的切线方程，答案写成 $ax+by+c=0$ 的形式，其中 a、b、c 为待求整数；(b) 求 $f(x)$，并化简答案。

答 Answer： _____

11 例题 [2023 年 1 月 Q11（8 分）]

A curve C has equation $y = f(x)$, where $x > 0$. Given that

$$f''(x) = 4x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

and that the point P has x coordinate 4 and lies on C, and that the tangent to C at P has equation $y = 3x + 4$, (a) find an equation of the normal to C at P (b) find $f(x)$, writing your answer in simplest form.

中文：曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，其中 $x > 0$。已知

$$f''(x) = 4x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

点 P 的横坐标为 4 且在 C 上，并且 C 在 P 点的切线方程为 $y = 3x + 4$。(a) 求 C 在 P 点的法线方程；(b) 求 $f(x)$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

12 例题 [2020 年 10 月 Q9（6 分）]

A curve with equation $y = f(x)$ passes through the point $(9, 10)$. Given that

$$f'(x) = 27x^2 - \frac{21x^3 - 5x}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0,$$

find $f(x)$, fully simplifying each term.

中文：方程为 $y = f(x)$ 的曲线经过点 $(9, 10)$。已知

$$f'(x) = 27x^2 - \frac{21x^3 - 5x}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0,$$

求 $f(x)$，并把每一项完全化简。

答 Answer： _____

9.4 满分必备：积分常数 C 的处理与「求原函数」题的规范书写

满分必备　满分必备：积分常数 C 的处理与「求原函数」题的规范书写

一、C 到底是什么：三种官方措辞与各自的后果在 P1 的评分标准里，C 出现得非常频繁，**但官方从来不直接说「必须写 $+c$」，而是分三种情形分别处理**。把这三种情形记牢，就抓住了本章一半的分。

官方措辞	出现场景	实际含义
「including the $+c$」	**最终答案那一档 A1**	**$+C$ 是最终答案的硬性组成部分，漏写丢分**
「Condone the lack of $+c$ for this mark」	**中间那一档 A1**（如「两项正确」）	**缺 C 只扣 0.25 分，这一档分还是给**
「$+c$ not required」	**某些中间步骤的 A1**	**这一步完全不需要 C**，写了不算错，不写也没问题

一句话总结：中间步骤的 $+C$ 是「宽容的」，最终答案的 $+C$ 是「必需的」。所以正确的策略只有一个：**从第一步起就带上 C，一直带到最后一行**。

【易错】一个必须知道的例外：「**Find $f(x)$**」**时 C 不能保留**。题目要的是一个**具体的函数**，写成 $f(x)=x^2+C$ 等于没答完。**必须用题目给的点把 C 解出来，并把数值代回**。

【易错】还有一个「看起来像 C 但不是 C」的坑：**积分常数与比例常数同名**。2023 年 6 月 Q8 里出现字母 A 作为待求参数（A 是常数），而积分常数官方习惯用 c 或 k。**草稿纸上把这两个用不同的字母**，比如积分常数一律写 c，题目给的参数写 A 或 k。

二、「求原函数」题的规范书写：官方给分链的四个环节 P1 的「求原函数」题（**近五年 15 道，全是 6–11 分的大题**）在官方评分标准里永远是**同一条给分链**。把它背下来，答题时就知道每一步该写什么。

环节	官方标记	写什么	不给分会怎样
翻译	**M1**	把 $f'(x)$ 写成纯幂形式；**写出「提幂加 1」的动作**	**方法分丢，dM1 跟着一起丢**
积分	**A1**（每项独立判分）	$f(x)=F(x)+c$，**带 c**	丢一项丢一个 A1，其余项照给
定常数	**M1 / dM1**	代入点，解出 c 的具体值	**这一分连带最后的 A1 一起丢**
代回	**A1**	$f(x)=F(x)+$ **具体数值**，且是最简形式	丢最后一分

「dM1」是什么？dependent M mark（依赖方法分）——它的意思是「这一分必须建立在前一步的 M1 之上」。前面的 M1 丢了，**这个 dM1 自动失效。所以顺序绝对不能乱：先积分，再代入。**

「ddM1」是什么？双重依赖——依赖之前所有的 M 分。两次积分题（19 年 10 月 Q11、20 年 1 月 Q11、23 年 1 月 Q11）里，**第二次代入求常数就是 ddM1，**它依赖第一次积分的 M1 与第一次代入的 dM1。**这意味着两次积分题只要第一步丢了，后面一连串分全部蒸发。**

「A1ft」是什么？follow through（跟随）——官方允许你前面的答案错，但后面跟着你的错来算也给分。典型场景：2022 年 1 月 Q6(a)(ii) 的切线方程 M1 用了你的 $f'(4)$，A1ft 就**跟着你的 $f'(4)$ 往下算，哪怕你的 $f'(4)$ 算错了。**【易错】但 ft 不是无限的：2022 年 1 月 Q6 的最终答案 A1 **没有 ft 标记，意味着最终答案的 c 必须是「正确的那个」。**

官方标记	中文含义与用法
M1、M2	方法分；**看的是「有没有做对某个动作」，不看你算得对不对**
A1、A2	准确分；**看结果，通常是「correct answer only」（cao）**
B1	独立准确分；**不看前面，单独判**
dM1	依赖方法分；**建立在前一个 M 分之上**
ddM1	双重依赖方法分；**建立在前面的所有 M 分之上**
A1ft	跟随前面（哪怕前面错）；**用你的错值继续算**
cao / cso	正确答案唯一 / 正确符号唯一；**不接受等价写法**
isw	忽略后续书写；**一旦看到正确答案，后面的笔误不再扣分**
owrt	省略；**不适用**

答题时必须写在纸面上的四件事：

(1) **翻译后的式子**（哪怕与原式看起来一样，也要写出来）——这是 M1 的证据。

(2) **带 c 的积分结果**——这是「我准备代入点」的证据。

(3) **代入的那一行——必须写清代入的是哪个点：**$x=4,\ y=-2\Rightarrow\cdots$。**这一行是 dM1 的唯一证据。**

(4) **代回后的最终答案**——不含 c，且是最简形式。

三、定积分与不定积分的表述区别（以及 P1 为何基本不考）这一条不是 P1 的高频考点，但**概念必须绝对清楚，**因为一旦混淆，整道题的答题方式会全错。

对比项	不定积分	定积分	一句话记法
写法	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	有没有上下限
结果	一族函数 $F(x)+C$	一个数	函数 vs 数值
常数 C	必须保留（或解出数值）	不存在	上下限把 C 消掉了
几何意义	原函数曲线族	有向面积 / 净变化量	族 vs 面积
P1 是否考	几乎全部积分题都是它	极少（P2/P3 才有）	P1 的「$\int$」基本都是不定积分

定积分为什么没有 C？因为定积分是「先求原函数，再代入上下限相减」：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)+C]_a^b = F(b)+C-F(a)-C = F(b)-F(a).$$

两个 C 正好抵消。这就是「定积分与不定积分在表述上的根本区别」。

【易错】P1 里的一个真实陷阱：题目写「**Find the integral**」时，有时指的是「求定积分」。判别方法只有一个：看有没有上下限。有上下限 $\Rightarrow$ 定积分，答案是一个数，不要写 $+C$；没有上下限 $\Rightarrow$ 不定积分，答案要带 $+C$。

【易错】另一个真实陷阱：「**Find the value of the integral**」。这句话在旧教材里专指定积分，但 P1 官方英文里「**Find** $\int\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2x^3}+5\right)\mathrm{d}x$」也用了「**Find the integral**」，而它是不定积分。唯一的判别依据永远是上下限，不是措辞。

四、一张「C 自检表」：写完答案用 **15** 秒过一遍写完 $f(x)$ 的最终答案，在交卷前用 **15** 秒做下面这张表。本章近五年的失分，八成能被这张表拦下来。

检查	问自己	不通过的后果
(1)	最终答案里还有没有 c 或 C？	题目问「find $f(x)$」就必须解出来并代回
(2)	积分那一步写了吗 $+c$？	后面没法代入求常数，整题崩盘
(3)	代入点的那一行写出来了吗？	dM1 拿不到（这一分白丢）
(4)	代入的是 f 还是 f'？	代入错函数，c 全错
(5)	最终答案化到最简了吗？	丢「最简形式」那一档 A1
(6)	负指数写成倒数了吗？分数指数写成根式了吗？	同上
(7)	求导回原式对得上吗？	符号错、系数错的万能检查

第 (7) 条要特别强调：把最终的 $f(x)$ 求导，看是否回到题目给的 $f'(x)$。这一步花 **10** 秒，能抓住 **90%** 的符号与系数错误。如果求导后出现了一个常数（而不是回到 $f'(x)$），说明你把常数放错位置了。

1 满分示范 [官方 Notes 结构 + 讲义改编（综合 22 年 1 月 Q6 与 19 年 1 月 Q12 的给分链）]

The curve C has equation $y = f(x)$, where $x > 0$. Given that

$$f'(x) = 6x^2 - \frac{4}{x^3}$$

and that C passes through the point $P(2, -15)$, find $f(x)$, giving your answer in simplest form.

中文：曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，其中 $x > 0$。已知

$$f'(x) = 6x^2 - \frac{4}{x^3}$$

且 C 经过点 $P(2, -15)$，求 $f(x)$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

2 满分示范 [官方 Notes 结构 + 讲义改编（两次积分与 ddM1 的书写示范）]

A curve C has equation $y = f(x)$, where $x > 0$. Given that

$$f''(x) = \frac{6}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

and that the tangent to C at the point P, where P has x coordinate 4, has equation $y = 2x - 3$, find $f(x)$, giving your answer in simplest form.

中文：曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，其中 $x > 0$。已知

$$f''(x) = \frac{6}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

且 C 在点 P（P 的横坐标为 4）处的切线方程为 $y = 2x - 3$，求 $f(x)$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

9.5 满分必备：化简后再积分——分式与根式的处理技巧

满分必备　满分必备：化简后再积分——分式与根式的处理技巧

一、为什么要化简：官方给分链从「化简」开始近五年有 **12 道题（C9e）**的考点编码直接写着「**Simplifying before integrating**」，**足积分题的三分之一**。它们的被积表达式有一个共同点：**表面上不是幂函数**。

原式（考生看到的）	化简后（官方要的）	出处
$\dfrac{4x^2+1}{2\sqrt{x}}$	$2x^{3/2}+\dfrac{1}{2}x^{-1/2}$	2019 年 6 月 Q4
$\dfrac{4x^5+3}{2x^2}$	$2x^3+\dfrac{3}{2}x^{-2}$	2023 年 1 月 Q3
$\dfrac{10x^5+6x^3-3}{x^2}$	$10x^3+6x-3x^{-2}$	2022 年 6 月 Q1
$\left(3x+\dfrac{2}{x}\right)^2$	$9x^2+12+4x^{-2}$	2026 年 6 月 Q1
$\dfrac{(3\sqrt{x}+2)(x-5)}{4\sqrt{x}}$	$\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{2}x^{-1/2}+\dfrac{1}{2}x^{-3/2}$	2021 年 6 月 Q4
$\dfrac{2x^5-10x^3}{5x}$	$\dfrac{2}{5}x^4-2x^2$	2020 年 1 月 Q1

官方给分链的第一个 M1 几乎都是「化简」。化简这一步本身就是 1 分，而且它是后面所有 A1 的前提。【易错】化简错了，后面全错：**这 1 分其实是「入场券」。**

化简的目标永远是同一个：把被积表达式变成「若干个 x 的幂的线性组合」。一旦化成这个形状，后面的积分就是纯机械操作。

二、五种化简手法与识别信号把 12 道真题的化简动作归纳成**五种固定手法**。**看到什么长相，就用哪一招。**

手法	识别信号	动作	例
(1) 拆项	分子是多项式、分母是 x 的幂	分子分母同除一个 x 的幂，逐项拆开	$\dfrac{4x^5+3}{2x^2}\to 2x^3+\dfrac{3}{2}x^{-2}$
(2) 通分展开	整体有括号或平方	二项式公式展开	$\left(3x+\dfrac{2}{x}\right)^2\to 9x^2+12+4x^{-2}$
(3) 有理化	分母含根式	分子分母同乘根式	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}\to\dfrac{\sqrt{x}}{x}=x^{-1/2}$
(4) 幂形式化	出现 $\sqrt{\ }$、$\sqrt[3]{\ }$	改写成分数指数	$\sqrt{x}=x^{1/2}$，$\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$
(5) 换元（整体）	括号里出现 x^2+3x+2 这类	令 $u=$ 整个括号	见本节第五部分

(1) 拆项的标准动作（最高频）：分子分母同除以分母里的那个 x。举例：

$$\frac{4x^5+3}{2x^2}=\frac{4x^3+\frac{3}{x^2}}{2}=2x^3+\frac{3}{2}x^{-2}.$$

【易错】另一种等价的走法：分子分母同除以 x^2：

$$\frac{4x^5+3}{2x^2}=\frac{4x^3+3x^{-2}}{2}=2x^3+\frac{3}{2}x^{-2}.$$

两条路完全等价，但第二条对「分母不是 x 的幂」的情形不适用。

(3) 有理化的标准动作：分母是根式时，分子分母同乘那个根式。

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}=x^{-1/2},\qquad \frac{3\sqrt{x}+2}{4\sqrt{x}}=\frac{3x+2\sqrt{x}}{4x}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

【易错】更快的路：分子分母同除以 $\sqrt{x}$：

$$\frac{3\sqrt{x}+2}{4\sqrt{x}}=\frac{3+\frac{2}{\sqrt{x}}}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

两条路都要会，但第二种更快。

(4) 幂形式化的标准动作：

根式	分数指数	积分结果	备注
$\sqrt{x}$	$x^{1/2}$	$\dfrac{2}{3}x^{3/2}$	新幂 $\frac{3}{2}$，除以 $\frac{3}{2}$ 得 $\frac{2}{3}$
$\sqrt[3]{x}$	$x^{1/3}$	$\dfrac{3}{4}x^{4/3}$	新幂 $\frac{4}{3}$，除以 $\frac{4}{3}$ 得 $\frac{3}{4}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x^{-1/2}$	$2x^{1/2}$	正负号要特别小心
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$x^{-1/3}$	$\dfrac{3}{2}x^{2/3}$	
$\sqrt{x^3}$	$x^{3/2}$	$\dfrac{2}{5}x^{5/2}$	

三、分式与根式的「x 的幂」识别表（考场速查）这一张表是化简的第一步：把被积表达式里每一「块」都翻译成 x 的幂。翻译完再看整体结构，就知道该用哪种化简手法。

看到的	翻译成	注意
$\dfrac{a}{x^n}$	ax^{-n}	系数 a 单独乘
$\dfrac{a}{\sqrt{x}}$	$ax^{-1/2}$	负指数要提出来
$\dfrac{a}{\sqrt[3]{x}}$	$ax^{-1/3}$	
$a\sqrt{x}$	$ax^{1/2}$	
$\dfrac{a\sqrt{x}+b}{c\sqrt{x}}$	分式，需要有理化或同除 $\sqrt{x}$	分子分母同除以 $\sqrt{x}$
$\dfrac{a}{b}$（纯常数）	$ab^{-1}x^0$	常数项积分成 $ab^{-1}x$
$\dfrac{x^2+6x+9}{x^{3/2}}$	分子展开后逐项除	三项分别是 $x^{1/2}, 6x^{-1/2}, 9x^{-3/2}$

部分分式分解：当分母能分解因式时（P1 只作识别，不作必考）。官方 P1 从未考过分母含二次多项式的积分（那属 P2/P3），但识别能力在 P1 有用：当你看到

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)},$$

至少要意识到「这不是幂函数，无法直接用公式」。完整的部分分式分解

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

属 P2/P3 的内容，在 P1 里只需要知道「该换方法」，不需要做出来。

【易错】重要提醒：**P1 的分母永远是「x 的幂」的组合，所以 P1 里的分式一律用「拆项」处理，绝不需要部分分式。把 P2 的技巧提前用在这里，只会浪费时间并算错。**

换元法的识别（P1 只需「看出整体」）。当被积表达式里出现一个「可以整体令 $u=$」的复合结构时，先看清楚它是不是某个简单表达式的导数。P1 里的典型形态是**「分子是分母的导数的倍数」：**

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

里 $2x+1$ 正是 (x^2+x) 的导数，令 $u=x^2+x$ 就能积分。【易错】但在 P1 范围内，这类题不考——**P1 只考幂函数。你只需要掌握「识别整体」这个意识，它对理解 P1 的化简题（先化简成幂之和）同样重要。**

四、化简的四个高频错误与官方判罚化简这一步的错误率比积分本身还高。**下面四条是官方评分标准里反复出现的。**

错误	后果与官方判罚
系数没提出来：把 $\frac{2}{3x^4}$ 写成 x^{-4} 就直接积分	系数丢了，该项的 A1 全丢（但提幂的 M1 仍然给）
中间项没约掉：$\left(3x+\frac{2}{x}\right)^2$ 展开成 $9x^2+\frac{6x}{x}+\frac{6x}{x}+\frac{4}{x^2}$	官方 Notes 明确写「**but not e.g. …, the middle terms need to become 6's**」——必须真的算成 12
只化简一部分：分式里有的项化成幂了，有的没有	官方按项独立判分：化简对的那项给 **A1**，没化简的那项不给
把分母通分：把 $\frac{2}{3}x^4+5x+\frac{1}{4x^2}$ 通成 $\frac{2x^6+20x^3+1}{12x^2}$	反而拿不到「最简形式」的 **A1**——官方要的是 **fully simplified**，通分是最不简的形式

「系数没提出来但 M1 仍然给」这件事值得多说一句。以 2019 年 1 月 Q1 为例，官方 Notes 原文：「**A common mistake is writing $\frac{2}{3}x^3 \to \frac{2}{3}x^2$, this can still get the method mark for increasing the power by 1**」。这说明：官方最看重的永远是「你知道要提幂」这个方法动作。

【易错】推论：即使算错了，也要先把每一步的动作写出来。动作在，分就在；动作没了，正确的数字也救不了你。

五、一张「化简决策流程图」（考场照着走）拿到一道积分题，按下面四问走，90% 的题在 30 秒内就能决定路线。

问	判断	动作
第一问	被积式的每一块都已经是 x 的幂吗？	是 → 直接逐项积分；否 → 进第二问
第二问	有括号吗？括号里是「和」或「差」吗？	是 → 用二项式公式展开（先算中间项 $2ab$）
第三问	有分式吗？分母是 x 的幂或根式吗？	是 → 分子分母同除那个 x（或根式），逐项拆开
第四问	分母能分解成两个一次因式吗（如 x^2+3x+2）？	是 → 这是 **P2/P3** 的题，不是 **P1**；**P1** 里不会遇到

化简完成后的最后一道关：检查结果是不是「若干个 x 的幂之和」。是 → 可以进入积分；不是 → 化简没做完。

化简后应当长成	合法示例	说明
整次幂	$2x^3+5x$	最简单
含负整数幂	$3x^{-2}+4x$	负指数最终写成 $\frac{3}{x^2}$
含分数指数	$\frac{4}{3}x^{3/2}-x$	分数指数最终写成根式 $\frac{4}{3}x\sqrt{x}$
纯常数	$\frac{3}{4}+2x$	常数项积分成 $\frac{3}{4}x$

1 满分示范 [官方 Notes 结构 + 讲义改编（拆项化简的标准流程）]

Find, in simplest form, $\int \frac{4x^5+3}{2x^2}\,\mathrm{d}x$.

中文：求 $\int \frac{4x^5+3}{2x^2}\,\mathrm{d}x$，并以最简形式给出答案。

答 Answer：_____

2 满分示范 [官方 Notes 结构 + 讲义改编（分式含根式的有理化处理）]

Find, in simplest form, $\int \frac{4x^2+1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

中文：求 $\int \frac{4x^2+1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$，并以最简形式给出答案。

答 Answer：_____

3 满分示范 [官方 Notes 结构 + 讲义改编（整体有括号的展开）]

Find, in simplest form, $\int \dfrac{(x-3)^2(2x+5)}{1}\,\mathrm{d}x$.

中文：求 $\int (x-3)^2(2x+5)\,\mathrm{d}x$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

9.6 普高衔接：不定积分国内怎么讲、P1 额外要什么

普高衔接　普高衔接：不定积分国内怎么讲、P1 额外要什么

一、人教 A 版对应位置：哪些学过，哪些根本没讲先说一个必须坦白的结论：**不定积分（indefinite integral）在国内高中教材里基本不讲。**

P1 的知识	人教 A 版位置	国内讲到什么程度
$\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$	没有正式位置	国内高中不讲「不定积分」这个概念，公式本身在大学微积分课出现
不定积分与积分常数 C	没有正式位置	国内高中只讲「定积分」（且新教材已删），C 的概念完全陌生
定积分与微积分基本定理	旧人教 A 版选修 2-2 §2.1–2.3	**2019 年新教材已删去定积分内容，这是最大的版本差异**
由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 反求 y	没有	国内高考只考「求导」，从不考「积分回去」
换元法（简单形式）	必修二 §3.4–3.5 导数的运算	只作为求导的技巧出现（如证单调性的换元），不作为积分方法
部分分式分解	选修 4-5（人教 B 版）	国内有，但属 P2/P3 的内容，P1 完全不考

结论必须讲清楚：本章对国内高中生来说是「准新知识」。

唯一可以迁移的是「幂的运算」与「求导的逆运算」这两种思维习惯，

公式本身、C 的概念、「不定积分」这个名词，全都要重新学。

【易错】版本提醒（很重要）：**2019 年人教 A 版新教材（选择性必修第二册）第五章「一元函**

数的导数及其应用」已删去了定积分与微积分基本定理。如果你手上的教材是旧版（有「定积分」那一节），要特别注意：定积分在 **P1** 里几乎不考，而不定积分在 **P1** 里几乎全考——两者的地位完全颠倒。

二、国内讲法与 P1 要求的七处差异国内教材与 P1 的差异，比本讲义任何一章都大。**下表逐条对照：**

环节	国内教材的默认	**P1 的实际要求**
公式	不系统给出不定积分公式	**必须张口就报** $\int x^n\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$
常数 C	没有这个概念	**必须有，且漏写要扣 0.25 分**
题目问法	几乎不出现「求原函数」	**15 道真题在问「由 $f'(x)$ 求 $f(x)$」**
自变量	习惯用 t、s 表示积分变量	**官方一律用 x（但你用别的字母也接受）**
答案形式	没有统一要求	**in simplest form 是独立给分点**
化简	没有「先化简再积分」的系统训练	**12 道题考这个，是 P1 积分的最大考点群**
求导验证	没有这个习惯	**10 秒自查，能抓出大部分符号错**

七处差异里最要紧的两处：

【易错】第一：国内「求导」的思维是单向的，P1 要求双向。国内高考三年只练「已知 $f(x)$ 求 $f'(x)$」，所以学生形成「求导是终点」的错觉。P1 里近一半的积分题是**反过来**的：已知 $f'(x)$ 求 $f(x)$。**必须专门练「把第 8 章的求导倒着写」。**

【易错】第二：国内没有「化简后再积分」的训练。国内学生做题习惯是「看到积分就套公式」，遇到 $\dfrac{4x^5+3}{2x^2}$ 会不知道该怎么办。P1 里这类题占 12 道。**9.5 节的方法表要背下来。**

三、P1 额外要求、国内略过或讲得浅的六个点这六点是本章失分最集中的地方，**每一个都值得单独练半小时：**

1. **积分常数 C 的存在与处理。**国内没有这个概念，**学生写 $\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2$ 就算「做完了」。**P1 里这要扣分；**而在「求 $f(x)$」的题里，C 更是整个后半段的命脉**——不先写出 $+c$，就没法代入点求 c，**整题从第三步起全部崩盘。对策：**把 9.4 节的「C 自检表」练成条件反射。
2. **由导数反求原函数并代入定点定常数。**国内完全不练，**而这占 15 道真题。对策：**把 9.3 节的四步流程（翻译 → 积分 → 代入 → 代回）背到能默写。
3. **化简后再积分（分式与根式）。**国内没有系统训练，**P1 有 12 道。对策：**9.5 节的五种手法 + 决策流程图，**做到看到分式就条件反射地「除以一个 x」。**
4. **「in simplest form」的规范要求。**国内教材对答案形状基本没有要求，**P1 里它是一个独立的 A1。**具体到三条硬标准：**负指数写成倒数、分数指数写成根式、常数项要变成 kx。对策：**每道积分题写完，检查这三项。
5. **「show all stages of your working」的书写意识。**2023 年 6 月 Q8、2025 年 10 月 Q8 的题干里都有这句话：「**In this question you must show all stages of your working. Solutions relying entirely on calculator technology are not acceptable.**」。虽然 P1 的计算器不能按 give exact 之外的键，但这句提醒的含义很清楚：**每一个给分点都要有纸面证据，答案光写结果不给过程，会大面积丢分。**

6. **两次积分中「两个常数」的处理。**国内不考，**P1 有 2 道（19 年 10 月 Q11、20 年 1 月 Q11），各 10–11 分。**这是本章分值最高的一档，**必须专门练：切线的斜率定第一个常数，曲线上的点定第二个常数。**

四、可以直接迁移的四个工具（先做这四个，能省一半时间）好消息是：**本章的绝大部分「运算能力」你在国内已经练熟了。**下面四个工具可以直接搬过来用：

1. **幂的运算与指数法则**（人教 A 版必修一 §1.3–1.4）。P1 几乎每一道积分题都要用：$x^1\cdot x^1=x^2$、$x^3/x=x^2$、$x^2\cdot x^{-1}=x$、$x^a\cdot x^b=x^{a+b}$。**这一个工具决定了 12 道化简题的分。务必练到不用想。**
2. **提幂（$x^n\ \to\ x^{n+1}$）的直觉。**这条其实就是「**乘一个 x**」：$x^{n+1}=x^n\cdot x$。理解成「分子分母同时乘 x」，**负指数与分数指数就都不怕了：**$x^{-2}\cdot x=x^{-1}$，$x^{1/2}\cdot x=x^{3/2}$。**这条直觉在 P1 里价值极高。**
3. **分式的基本性质（分子分母同乘同除）**（必修二 §2.1）。这正是 9.5 节「拆项」的数学基础：$\dfrac{4x^5+3}{2x^2}=\dfrac{4x^5+3}{2x^2}\cdot\dfrac{x^{-2}}{x^{-2}}$。国内学生以为「分式不能拆」，其实只要分母是 x 的幂就可以拆。
4. **因式分解与代入求值**（必修二 §1.2、必修一 §3.3）。代入点定常数这一步，需要你能准确算出 $4^{5/2}$、$8^{4/3}$ 这类值。国内高考的「指数运算」训练完全够用，**只需要提醒自己「先把根号算出来」。**

【易错】唯一一个「国内完全帮不上忙」的领域：**对数与指数函数、三角函数的积分。**那些是 P2/P3/P4 的内容。**在 P1 里看到 $\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 要立刻警觉：「这是 $n=-1$，P1 不考」。**

1 衔接练习

[人教 A 版必修一指数法则 + 讲义改编]

Given that $x^2\cdot x^{-3}=2x^{-1}$, find the value of x. Hence evaluate

$$\int\left(2x^2+3x^{-1}\right)\mathrm{d}x.$$

中文：已知 $x^2\cdot x^{-3}=2x^{-1}$，求 x 的值。据此计算

$$\int\left(2x^2+3x^{-1}\right)\mathrm{d}x.$$

答 Answer：_____

2 衔接练习 [人教 A 版必修二「用导数研究函数」+ 讲义改编（P1 反向考法）]

The curve with equation $y = f(x)$ passes through the point $P(3, 11)$. Given that

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x + 2,$$

find the equation of the tangent to the curve at P.

中文：方程为 $y = f(x)$ 的曲线经过点 $P(3, 11)$。已知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x + 2,$$

求曲线在 P 点的切线方程。

答 Answer： _____

9.7 章节真题测评：P1 真题分类 + 错题复盘

下表列出 2019–2026 年 P1 中属于第 9 章考点的真题定位，共 **31 道**，覆盖五个考点编码（C9a 幂函数积分、C9b 不定积分、C9c 由导数求原函数、C9d 两次积分、C9e 化简后再积分）。**其中 C9c 有 15 道、C9e 有 12 道**，这两组占掉本章真题的九成。

使用方法：先限时 45 分钟做完下面 4 道真题（它们分别是 C9e、C9c、C9d 三种类型的代表），**再回到 9.1–9.5 节的例题，用下面的错题模板逐题复盘。**

本讲义提醒：**近五年本章失分的主因不是算错，而是四类书写问题：**

1. **漏写 $+C$**（9.4 节）；
2. **没化简就积分，或化简得不彻底**（9.5 节）；

3. 代入点时搞混了 f 与 f'，或算错根式幂（9.3 节）；
4. 答案没化到最简，丢掉「in simplest form」那一档 A1（贯穿全章）。

这四条只要改过来，本章的分数会立刻上一个台阶。做完这 4 道题，请务必对照每题下方的「错题复盘」逐条自查。

考点	近五年真题定位（年份 · 场次 · 题号 · 分值）
幂函数积分	24 年 1 月 Q1（5 分）
	25 年 10 月 Q2（5 分）
由导数求原函数	19 年 1 月 Q12（9 分）
	19 年 6 月 Q8（9 分）
	20 年 10 月 Q9（6 分）
	21 年 1 月 Q9（11 分）
	21 年 6 月 Q6（8 分）
	22 年 1 月 Q6（11 分）
	22 年 6 月 Q7（9 分）
	23 年 1 月 Q11（8 分）
	23 年 6 月 Q8（10 分）
	23 年 10 月 Q7（10 分）
	25 年 1 月 Q6（10 分）
	25 年 6 月 Q8（11 分）
	25 年 10 月 Q8（8 分）
	26 年 1 月 Q7（9 分）
	26 年 6 月 Q8（11 分）
两次积分	19 年 10 月 Q11（10 分）
	20 年 1 月 Q11（11 分）
根式分式积分化简	19 年 1 月 Q1（4 分）
	19 年 6 月 Q4（5 分）
	20 年 1 月 Q1（4 分）
	21 年 6 月 Q4（6 分）
	21 年 10 月 Q1（5 分）
	22 年 1 月 Q1（4 分）
	22 年 6 月 Q1（4 分）
	23 年 1 月 Q3（5 分）
	24 年 6 月 Q1（3 分）
	25 年 1 月 Q1（4 分）
	25 年 6 月 Q3（5 分）
	26 年 6 月 Q1（5 分）

1 真题演练　[2026 年 6 月 Q1（5 分）]

Find $\int \left(3x+\frac{2}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$, giving the answer in simplest form.

中文：求 $\int \left(3x+\frac{2}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$，并以最简形式给出答案。

答 Answer：_____

2 真题演练 [2022 年 1 月 Q6（11 分）]

The curve C has equation $y = f(x)$ where $x > 0$. Given that

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2}{x\sqrt{x}}$$

and that the point $P(4, 20)$ lies on C, (a) (i) find the value of the gradient at P (ii) hence find the equation of the tangent to C at P, giving your answer in the form $ax + by + c = 0$ where a, b and c are integers to be found (b) find $f(x)$, simplifying your answer.

中文：曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，其中 $x > 0$。已知

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2}{x\sqrt{x}}$$

且点 $P(4, 20)$ 在 C 上。(a) (i) 求 P 点处的斜率；(ii) 据此求 C 在 P 点的切线方程，答案写成 $ax+by+c=0$ 的形式，其中 a、b、c 为待求整数；(b) 求 $f(x)$，并化简答案。

答 Answer： _____

3 真题演练 [2023 年 1 月 Q11（8 分）]

A curve C has equation $y = f(x)$, $x > 0$. Given that

$$f''(x) = 4x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

the point P has x coordinate 4 and lies on C; the tangent to C at P has equation $y = 3x + 4$. (a) Find an equation of the normal to C at P (b) Find $f(x)$, writing your answer in simplest form.
中文：曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，$x > 0$。已知

$$f''(x) = 4x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

点 P 的横坐标为 4 且在 C 上；C 在 P 点的切线方程为 $y = 3x + 4$。(a) 求 C 在 P 点的法线方程；(b) 求 $f(x)$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

4 真题演练 [2021 年 6 月 Q6（8 分）]

The curve C has equation $y = f(x)$, $x > 0$. Given that

$$f'(x) = \frac{32}{3x^2} + 3 - 2\sqrt[3]{x}$$

(a) Find the equation of the tangent to C at $P(8, 2)$. Write your answer in the form $y = mx + c$, where m and c are constants to be found (b) Find, in simplest form, $f(x)$.
中文：曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，$x > 0$。已知

$$f'(x) = \frac{32}{3x^2} + 3 - 2\sqrt[3]{x}$$

(a) 求 C 在 $P(8, 2)$ 处的切线方程，答案写成 $y = mx + c$ 的形式，其中 m、c 为待求常数；(b) 求 $f(x)$，并以最简形式给出答案。

答 Answer： _____

MODULE 10 · EXAM CRAFT

模块 10　P1 满分冲刺与考试工程

真题按题型分类 • 按年份限时真题 • Mark Scheme 踩分与书写规范

模块导读

前九章解决“会做”，模块 10 解决“在考场上做得完、做得对、写得满”。本模块基于 2019–2026 年共 **21 套 P1 真题**（**213 道大题、1567 分**）的考点标注，用数据告诉你：**哪九类题型必考、每类占多少分、哪些卷子最适合练手**。

10.1　P1 真题按题型分类：九大题型的分值地图

P1 表面上是 9–10 道大题，实际上只有**九类题型**在循环。把 213 道真题按题型归并，你会发现每一类的题量、分值、难度都是稳定的——**这就是可以突击的地方**。下表基于 2019 年 1 月至 2026 年 6 月共 **21 套** P1 真题的 **213 道大题**统计。“题数”指该题型下的大题数量，“累计分值”是这些大题的分值总和（同一道大题若跨考点则按主考点归类）。

题型	题数	累计分值	占比	涉及卷数	内部考点分布
指数根式	25	169	11.7%	19	指数法则 7、负/分数指数 5、换元 5、因式分解 3、根式 2、有理化 2、展开 1
二次参数	23	175	10.8%	19	配方 10、判别式 6、含参二次 3、解二次 2、二次图像 2
不等式区域	15	97	7.0%	13	二次联立 5、二次不等式 4、一次联立 3、区域 2、图像上不等式 1
图像变换	27	233	12.7%	19	倒数函数 9、三次函数 7、变换组合 5、交点个数 3、平移 3
直线	15	110	7.0%	15	平行垂直 10、方程 2、距离 2、$y=mx+c$ 1
三角	30	195	14.1%	20	三角图像 10、图像变换 8、余弦定理 6、解三角形 5、正弦定理 1
弧度	18	145	8.5%	17	扇形弓形 14、弧长 4
微分	28	218	13.1%	19	多项式求导 9、幂函数求导 6、切线法线 6、参数反求 5、梯度概念 2
积分	31	225	14.6%	20	求原函数 15、化简后积分 12、幂函数积分 2、两次积分 2

1 数据解读 [真题统计]

Using the classification table in section 10.1, state which two question types account for the largest total number of marks, and explain what this suggests about the order in which you should revise these topics.

中文：根据 10.1 节的分类表，指出哪两类题型占据了最多的累计分值，并据此说明你应当按什么顺序复习这些考点。

答 Answer： _____

10.2 按年份限时真题：21 套卷的难度与训练价值

下表列出 2019–2026 年全部 21 套 P1 真题（每套 75 分）的题量与分值分布。**“难度”一列是本讲义根据考点跨度和分值分布给出的建议评级**，用来帮你排训练顺序。**训练建议：**先做 2019–2021 年的卷（考点分布广、图形题少、适合建立手感），再做 2022–2024 年（新增了更多参数讨论与图像描述类题目），最后做 2025–2026 年（最新风格，最接近实战）。**每套必须严格计时 90 分钟**，中途不查答案、不查手机。

年份 · 场次	题数	总分	分值分布	建议难度	训练定位
2019 年 1 月	12	75	3–12 分	中	首套必做，建立手感
2019 年 6 月	10	75	5–10 分	较易	基础题占比高，适合热身
2019 年 10 月	11	75	4–10 分	中	三角占比高
2020 年 1 月	11	75	4–11 分	中	图像变换集中
2020 年 10 月	9	75	3–11 分	较易	题少分多，做题慢要练
2021 年 1 月	9	75	5–11 分	偏难	**分值密度最高，首选难题卷**
2021 年 6 月	9	75	6–10 分	中	题型分布均衡
2021 年 10 月	10	75	4–10 分	中	微分占比高
2022 年 1 月	10	75	4–11 分	中	含二次与指数综合
2022 年 6 月	10	75	4–12 分	偏难	末题 12 分，难度陡增
2023 年 1 月	11	75	4–10 分	中	换元 show that 典型卷
2023 年 6 月	10	75	4–10 分	中	结构标准，适合全真模拟
2023 年 10 月	11	75	4–10 分	中	图像与三角并重
2024 年 1 月	10	75	5–10 分	中	均衡型
2024 年 6 月	12	75	3–10 分	较易	题最多，做题速度是短板时练这套
2024 年 10 月	9	75	6–10 分	偏难	9 题 75 分，节奏紧
2025 年 1 月	9	75	4–13 分	偏难	末两题各 13 分，难度最高卷
2025 年 6 月	10	75	5–11 分	中	标准卷
2025 年 10 月	10	75	5–10 分	中	标准卷
2026 年 1 月	10	75	4–11 分	中	最新风格，试难度基准
2026 年 6 月	10	75	5–11 分	偏难	**最新最难，作为最终模拟**

1 训练方案 [考试工程]

You have 4 weeks before the P1 examination and can complete 8 full past papers. The table in 10.2 gives a suggested difficulty for each paper. Design a four-week revision plan using this table and the type distribution in 10.1, and justify each choice.

中文：距离 P1 考试还有 4 周，你能完成 8 套完整真题。请结合 10.2 节的难度评级与 10.1 节的题型分布，设计一份四周复习计划，并说明每一步的理由。

答 Answer： _____

10.3 Mark Scheme 踩分与书写规范：考场上的每一个字

这一节是模块 10 的核心，也是整套讲义的“最后一公里”。前面九章教你**会做**，这一节教你**把会做的题变成满分**。以下规范全部来自 Pearson Edexcel 官方 Mark Scheme 的 General Principles。**一、评卷的三种分**

分值	含义	判分逻辑
M 分	方法分 Method mark	**看到了正确方法就给**，哪怕后续算错。答出正确方法/公式/关系式即可
A 分	准确分 Accuracy mark	**方法对且结果对**才给。有时 A 分可由前面的 M 分**连带**给出（“or implied”）
B 分	无条件准确分	**不需要方法**，最终答案对就给。常出现在最后一问

二、General Principles 里的五条硬规矩

1. **公式先引用再代入：** *Where a formula is quoted, marks are awarded for the formula and for the substitution of values*。未引用公式时，若后续计算正确可“隐含”给 M 分，但**一旦算错就一并丢掉**。所以公式一定要显式写出。
2. **精确答案不能用小数：** *where an exact answer is asked for, or working with surds is clearly required, marks will normally be lost if the candidate resorts to using rounded decimals*。
3. **无过程不给满分：** *Answers without working may not gain full credit*。但“能心算的”除外。
4. **同一方法可重复使用：** 不需要每问都换方法，重复的正确方法照常给分。
5. **等价形式给分：** Mark Scheme 标 **oe**（or equivalent）处，任何数学上等价的表达都接受。

三、缩写速查表（阅卷人看的就是这些）

缩写	全称	对你的意义
M1 / A1 / B1	Method / Accuracy / B mark	分值类型与序号
cao	correct answer only	答案错就 0 分，方法分不代偿
ft	follow through	前一步错了，后面跟着错**也给分**（这是你的救命分）
oe	or equivalent	写法与标准答案不同但等价，照样给分
awrt	answer written to reasonable accuracy	题目允许取近似值时用
sf / dp	significant figures / decimal places	有效数字/小数位要求
boD	benefit of doubt	阅卷人给机会（但别指望）
n.e.e.	not enough evidence	**你什么都没写清楚**

四、书写的六条铁律

1. **一行一步：** 每个中间结果单独占一行，不要把好几步挤在一行——阅卷人找不到你的方法分。
2. **方法名 + 式子：** 写“$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 5$”而不是只写“$6x^2 - 5$”；写“$f'(x) = 6x^2 - 5$ by the power rule”更保险。

3. **最终答案加框：**□ 或下划线标出，让阅卷人不必猜哪个是答案。
4. **保留中间精度：**$\sqrt{2}=1.41421356\ldots$ 参与计算时**不要提前四舍五入**，最后一步再取。
5. **单位与度/弧度：**角度题明确写 °（°）或 radians，**弧度制下绝不写 °**。
6. **不确定就写出来：**题目要求“show that”就把关键变形写全，宁可多写两步也不要少写一步。

1 踩分对照 [Mark Scheme 规范]

A question is worth 5 marks and its mark scheme reads:

M1 $f'(x)=6x^2-5$
M1 at $x=2$, $f'(2)=7$
A1 $(2,\ 3)$
A1 $y=7x-11$
A1 $y-3=7(x-2)$

A candidate writes: $f'(x)=6x^2-5$, $f'(2)=7$, $y=7x-11$. State how many marks this candidate should receive, with reasons, and describe how the answer should have been written to gain the fifth mark.

中文：一道 5 分题的评分标准如下：

M1 $f'(x)=6x^2-5$
M1 at $x=2$, $f'(2)=7$
A1 $(2,\ 3)$
A1 $y=7x-11$
A1 $y-3=7(x-2)$

某考生写道：$f'(x)=6x^2-5$，$f'(2)=7$，$y=7x-11$。说明该考生应得多少分并说明理由；再说明答案应该怎样写才能拿到第 5 分。

答 Answer： _____

2 踩分对照 [Mark Scheme 规范]

A question asks: "Find, in terms of p, the range of values of x for which $x^2 - 2px + p^2 + 4 \geqslant 0$."
A candidate writes:

$$(x-p)^2 + 4 \geqslant 0$$

$$x \geqslant p+2 \text{ or } x \leqslant p-2$$

$$\therefore\ x \in (-\infty, p-2] \cup [p+2, \infty)$$

State the total marks this candidate should be awarded, identifying any marks lost and the reason.

中文：一道题要求："求 $x^2 - 2px + p^2 + 4 \geqslant 0$ 成立的 x 的取值范围，用 p 表示。"某考生写道：

$$(x-p)^2 + 4 \geqslant 0$$

$$x \geqslant p+2 \text{ or } x \leqslant p-2$$

$$\therefore\ x \in (-\infty, p-2] \cup [p+2, \infty)$$

判断该考生应得多少分，指出任何失分点及原因。

答 Answer： _____

APPENDICES

模块附　附录

A 公式推导与勘误 • B 英文题干高频表达 • C 错题模板与错因标签

附录 A　公式推导、常见勘误与符号规范

这一部分解决两件事：**公式是怎么来的**（理解了就不会记错），以及**写的时候怎么不出错**（符号规范与勘误清单）。**A.1 必背公式总表（P1 全部）**

主题	公式
指数	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；$a^m / a^n = a^{m-n}$；$(a^m)^n = a^{mn}$；$a^0 = 1\ (a \neq 0)$
	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$；$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$；$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$
二次	$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	配方：$ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a}$
	顶点：$x = -\dfrac{b}{2a}$，$y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$
判别式	$\Delta = b^2 - 4ac$；$\Delta > 0$ 两实根；$\Delta = 0$ 重根；$\Delta < 0$ 无实根
距离	两点间 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$；点到直线 $d = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + c\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
中点	$M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$
三角	余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$；正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$
	面积 $A = \dfrac{1}{2}bc\sin A$
弧度	$s = r\theta$；扇形面积 $= \dfrac{1}{2}r^2\theta$；弓形面积 $= \dfrac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$
微分	$(x^n)' = nx^{n-1}$；$(ax + b)^{n\prime} = na(ax + b)^{n-1}$；乘积法则 $(uv)' = u'v + uv'$
	链式法则：$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
	切线 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$；法线 $y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a)$
积分	$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$；$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
	$\int kx^n\,dx = \dfrac{kx^{n+1}}{n+1} + C$；$\int (ax + b)^n\,dx = \dfrac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$

A.2 四条核心公式的推导（理解了就忘不掉）

（1）幂函数法则 $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ 从导数定义出发：设 $f(x) = x^n$，则

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

用二项式定理展开分子：

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$$

代回，分子中含 h 的项约掉，得

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

关键理解：极限的作用就是“把 h 拿掉”，剩下 n 就是从 n 次幂变成 $n-1$ 次幂时多出来的那个因子。

（2）二次公式的推导（配方）

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 \quad (a\neq 0)\\ a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right) &= -c\\ a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] &= -c\\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a}\\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2}\\ x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

（3）正弦定理的推导（外接圆法）设三角形 ABC 外接圆半径为 R。由正弦定理的证明思路：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

其中 $2R$ 是外接圆直径。因此**正弦定理的实质是“三角形的外接圆直径”，它把“边”和“角”通过同一个圆联系起来**——这解释了为什么 $a/\sin A$ 与 R 无关。也正因如此，**由 a、A、b 求 B 时会出现 SSA 模糊情形**（见 6.7 节）。

（4）弧度制的定义与弧长公式 1 弧度 = 弧长等于半径时对应的圆心角。因此对半径 r、圆心角 θ（弧度）的扇形：

$$\text{弧长比例} = \frac{\text{弧长}}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow s = r\theta$$

扇形面积 $= \frac{\theta}{2\pi}\times\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$。**这两个公式只在弧度制下成立**，用角度时必须先乘 $\frac{\pi}{180}$。

A.3 常见勘误清单（这些坑我替你踩过了）

#	坑	正解
1	$\sqrt{x^2}=x$	应为 $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$。P1 多次考过
2	开方时忽略右边符号	$a^2\geqslant b$ 只有在 $b\geqslant 0$ 时才能开方
3	log 与 ln 混用	P1 不用对数，但 $\ln\lvert x\rvert$ 的绝对值别丢
4	积分忘记 $+C$	求原函数时 $+C$ 是必写项
5	求切线写成 $y=f'(a)x$	正确是 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$，**漏掉 $f(a)$ 是 P1 高频错**
6	二次公式忘写 $\pm$	用了公式就要检查两个根
7	判别式 $\Delta=0$ 时仍说“无解”	$\Delta=0$ 是**重根**，有一个实根
8	弧度题答案写成 60°	弧度制下答案不带 °。
9	区间记号端点开闭写反	$\geqslant$ 配方括号，$>$ 配圆括号
10	定义域漏掉“分母的根号整体不为零”	$\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$ 要求 $x<5$ 而非 $x\leqslant 5$
11	反求参数时只给一个答案	分类讨论要覆盖所有情况
12	用小数代替根式（要求 exact 时）	有理化或保留根式

A.4 符号书写规范

规范	正确写法	说明
不等式端点	$x\geqslant 2$、$x\leqslant 2$	统一用 $\geqslant$ / $\leqslant$，不要混用 $\geq$
区间	$[2,5)$、$(-\infty,2]$	左闭右开也是合法的，务必看清题意
无穷	$(2,+\infty)$	$\pm\infty$ **永远用圆括号**
集合	$\{x\in\mathbb{R}\mid x>2\}$	竖线用 $\mid$ 或 :，不要漏条件
角度	60° 或 $60°$	P1 三角题多写 °。
弧度	$\dfrac{\pi}{3}$	弧度制下**不写** °。
导数	$\dfrac{dy}{dx}$ 或 $f'(x)$	两者等价，全卷统一用一种
积分	$\int 3x^2\,dx$	积分号后要有被积函数
答案	$\boxed{\cdots}$	明确标出最终答案

1 勘误演练 [附录 A]

A student writes the following solution to a question which asked for an equation of the tangent to $y=x^2-4x+7$ at the point where $x=3$:

$$y'=2x-4=2(3)-4=2$$

$$\therefore\ y=2x+b$$

$$3^2-4(3)+7=2(3)+b \quad\Rightarrow\quad 4=6+b \quad\Rightarrow\quad b=-2$$

$$\therefore\ y=2x-2$$

The mark scheme awards A1 for $y-4=2(x-3)$. State what is wrong with the student's method and how the correct answer should be found.

中文：某学生解答“求曲线 $y=x^2-4x+7$ 在 $x=3$ 处的切线方程”时写道：

$$y'=2x-4=2(3)-4=2$$

$$\therefore\ y = 2x + b$$

$$3^2 - 4(3) + 7 = 2(3) + b \quad \Rightarrow \quad 4 = 6 + b \quad \Rightarrow \quad b = -2$$

$$\therefore\ y = 2x - 2$$

评分标准中 $y - 4 = 2(x - 3)$ 给 A1。指出该学生方法中的错误，并说明正确答案应如何求得。

答 Answer： _____

附录 B　P1 英文题干高频表达

P1 的题干是英文的，这是许多国内学生的隐性失分来源——**不是不会数学，是没读懂题目要什么**。这一节把 P1 卷面出现频率最高的表达整理成可背诵的清单。**B.1 设问动词：题目要我“做什么”**

英文表达	中文	你要做的事
find / determine	求	给出结果（通常要写过程）
solve	解	解方程/不等式，**写出解集**
show that / prove that	证明	**必须写推导步骤**，否则不得分
state / write down	写出	通常较简单，**但表达形式要求严格**
hence	因此	**必须用上一步的结果**，不能另起炉灶
express ... in terms of k	用 k 表示	最终答案只含 k
simplify / in simplest form	化简	化到最简形式
factorise	因式分解	写成若干因式的乘
expand	展开	用分配律化成多项式
complete the square	配方	写成 $a(x+h)^2 + k$
estimate	估计	给出近似值（注意有效数字）
interpret	解释	结合上下文说明含义
comment on	评论	简短说明（少见）

B.2 数量与范围：答案要“精确到什么程度”

英文表达	含义	注意
exact value / exact form	精确值	**禁用小数**；保留根式或 π
in simplest form	最简形式	化简到位（含有理化）
to 3 significant figures (3 sf)	3 位有效数字	写 2.47，**不要**写 2.470
to 2 decimal places (2 dp)	2 位小数	写 2.47，**不要**写 2.5
correct to the nearest ...	取整到	
to the nearest degree / radian	取整到度/弧度	
at least / at most	至少 / 至多	

B.3 关键修饰语：一个词改变整题

英文表达	中文	对答案的影响
for all real values of x	对一切实数 x	**恒成立** $\Rightarrow$ 判别式 <0（或取等号视不等号而定）
for some real values of x	对某些实数 x	**存在** $\Rightarrow$ 判别式 $\geqslant 0$
for all x in the domain	定义域内恒成立	端点要单独检查
positive integer	正整数	$x \in \mathbb{Z}^+$，**不是**实数
x is a real number	x 为实数	不限制符号
the larger root / the smaller root	较大/较小的根	**只写一个！**
the positive root	正根	只写一个
distinct roots	两个不同的根	$\Delta > 0$
double root	重根	$\Delta = 0$
no real roots	无实根	$\Delta < 0$
tangent to the curve	与曲线相切	恰有一个交点

B.4 图形与位置描述

英文表达	中文与答题要点
A lies on the curve $y = f(x)$	点 A 在曲线上 $\Rightarrow y_A = f(x_A)$
the curve passes through ...	曲线过某点 $\Rightarrow$ 代入得等式
A is the origin	A 是原点 $\Rightarrow (0,0)$
A is on the x-axis	A 在 x 轴上 $\Rightarrow y_A = 0$，x_A 未知
A is on the y-axis	A 在 y 轴上 $\Rightarrow x_A = 0$
A is the midpoint of BC	A 是 BC 中点 $\Rightarrow$ 坐标取平均
AB is parallel to CD	平行 $\Rightarrow$ 斜率相等
AB is perpendicular to CD	垂直 $\Rightarrow$ 斜率乘积 $= -1$
the area of the region ...	区域面积 $\Rightarrow$ **积分**或用几何公式
the shaded region	阴影区域 $\Rightarrow$ 大区域减小区域

B.5 条件与已知

英文表达	中文与答题要点
given that / where $p=$	已知 ⇒ **整体换元**，把表达式里同类项都换成 p
by substituting $p=$	通过令 $p=$ 换元 ⇒ 按题目指定换元写
using the identity	使用恒等式 ⇒ 先写恒等式再代入
it can be shown that	可以证明 ⇒ **先自己证明**，这是“证明”类设问的委婉说法
hence, using ...	因此，利用 ⇒ **必须显式引用**前一步结果

B.6 考场速记：10 个必须立刻反应的高频表达

看到	立刻想到
exact value	禁用小数，保留根式/π
for all	恒成立，用判别式或最值
for some / there exists	存在，反向用判别式
hence	必须用上一步结果
show that / prove	必须写过程
the larger root	只写一个，但要说明取舍
in simplest form	化简 + 有理化
in terms of k	答案只含 k
given that $p=$	换元，全文统一用 p
state the domain	分母非零 + 根号内非负

1 读题训练 [附录 B]

For each of the following phrases, state what you must do differently in your answer. (a) "Find the exact value of $\frac{\sqrt{5}+1}{3}$" (b) "Solve $x^2+2x+3=0$, giving your answer in the form $a+b\sqrt{c}$" (c) "Given that $p=x+1$, show that $x^3+3x^2+3x+1=p^3$" (d) "Find the larger root of $2x^2-7x+3=0$

中文：对于下列每一句，说明你在作答时必须**有所不同的地方**。(a) “求 $\frac{\sqrt{5}+1}{3}$ 的精确值” (b) “解方程 $x^2+2x+3=0$，答案写成 $a+b\sqrt{c}$ 的形式” (c) “已知 $p=x+1$，证明 $x^3+3x^2+3x+1=p^3$” (d) “求方程 $2x^2-7x+3=0$ 的较大根”

答 Answer： _____

附录 C　错题模板与错因标签

错题本不是“抄题目”，而是**一份可执行的改进清单**。这一部分给出可直接打印使用的模板。每一道错题只花 3 分钟填完，但一个月后回看，你能清楚地知道自己卡在哪个环节。**C.1 错题卡模板（每题一张，建议单面打印）**

字段	填写内容
来源	例：2024 年 6 月 Q8（Edexcel P1，6 分）
考点	例：C6e 三角函数图像 / C6f 图像变换
错因标签	例：**L2 语言**（把“周期”写成“振幅”）
题目关键词	圈出题眼：*exact value / hence / the larger root*
我的错误答案	原样抄下来（不要美化）
正确做法	用最简洁的思路重写一遍，**不要抄全解**
Mark Scheme 要点	记 2–3 个关键给分点，如“M1 用 $y = mx + c$”
我漏掉的给分点	例：没写切点坐标，丢 A1
一句话教训	例：**求切线先写点斜式**
复做日期	**当天、3 天后、7 天后、30 天后**

C.2 错因标签总表（与 0.4 节呼应，此处是完整版）

标签	典型表现	根因	对策
L1 读题	漏看“exact”、没看出“hence”	英语阅读速度慢	做题时**先圈关键词**再动笔
L2 语言	定义域漏条件、区间端点写反	概念表述不严谨	每次定义域都写两条限制；端点对照不等号
L3 建模	换元选错、设的未知数不合适	缺少题型识别	按“考点编码表”见题识型
L4 公式	忘 $+C$、忘 π、忘因子 $\frac{1}{2}$	公式不熟	**每周默写附录 A 公式表**
L5 运算	负号错、通分错、代入错	无检查习惯	每题结束前**代回验证一次**
L6 规范	show that 没写过程、没化简	不懂阅卷规则	见 10.3 节六条铁律
L7 边界	漏一组解、漏端点、漏分类讨论	追求快不求全	写完问自己“**还有别的可能吗**”
L8 时间	会做但没时间	速度不够	按 10.2 节做限时训练
L9 图形	看不懂图、画不出图	空间感知弱	把题图**重画一遍**；整理图形题清单
L10 英文术语	不认识“enclosed”、“apex”	词汇量不足	见附录 B，每卷背 10 个

C.3 三轮复做法（最有效的错题处理方式）

时间	做法	目的
第 1 次（当天）	做完题立刻对 Mark Scheme 逐点打分，填完错题卡	**搞清楚“我错在哪一分”**
第 2 次（3 天后）	**盖住答案重做一遍**，不看解析	检验“我真的会了吗”还是“我看懂了解析”
第 3 次（7 天后）	只看题干，**口述解法思路**，能说清就过	长期记忆
第 4 次（30 天后）	快速扫一遍所有错题卡的“一句话教训”	沉淀为**习惯**

C.4 错题本的“减法原则”

- **只记有价值的错题**：算错但方法对的，可以只记一行；**方法的错必须完整记**。
- **同一类错只留一道代表**：五道同类错题抄五遍，不如挑一道最典型的抄透。
- **一个月没再犯的可以移出**：错题本要保持精简，否则你不会再翻开它。
- **每月统计一次标签分布**：如果 L5（运算）占比最高，说明该练计算速度；如果 L2（语言）占比最高，说明该背附录 B；如果 L1（读题）最高，说明该练读题速度。

C.5 考前 30 分钟自检清单（背下来）

1. 公式表（附录 A）默一遍：指数法则、二次公式、判别式、正余弦定理、弧度公式、导数、积分；
2. 十道**阅读理解**题（附录 B.6）默一遍；
3. 六个**易错点**（附录 A.3 挑最常犯的三个）默一遍；
4. 看一遍错题本的**标签统计**，提醒自己最容易犯的是哪一类；
5. 确认考试用品：科学计算器（电池满）、黑笔、尺、橡皮、准考证。

1 模板示范 [附录 C]

Complete this error card for the following question, which you attempted in a 2023 past paper and scored 3 out of 6 marks.

Q: Find, in terms of p, the range of x for which $x^2 - 2px + p^2 + 4 \geqslant 0$.

Your working was:

$$x^2 - 2px + p^2 + 4 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 - 2px + p^2 \geqslant -4 \Rightarrow (x-p)^2 \geqslant -4$$

$$\Rightarrow x - p \geqslant 2 \text{ or } x - p \leqslant -2$$

$$\Rightarrow x \geqslant p + 2 \text{ or } x \leqslant p - 2$$

中文：为下面这道题填写一张错题卡（你在 2023 年的一份真题中做过，6 分只拿到 3 分）。

题目： 求$x^2 - 2px + p^2 + 4 \geqslant 0$ 成立时x 的范围，用p 表示。

你的作答过程是：

$$x^2 - 2px + p^2 + 4 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 - 2px + p^2 \geqslant -4 \Rightarrow (x-p)^2 \geqslant -4$$

$$\Rightarrow x - p \geqslant 2 \text{ or } x - p \leqslant -2$$

$$\Rightarrow x \geqslant p + 2 \text{ or } x \leqslant p - 2$$

答 Answer： _____